GUÍA DE CURSO

FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMAS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

SEÑALES Y SISTEMAS

Segunda Edición

EDUARDO GÓMEZ VÁSQUEZ
JULIO MARTÍN DUARTE CARVAJALINO

ISBN: 978-958-8862-24-8

Universidad Tecnológica de Bolívar
CARTAGENA DE INDIAS

Universidad Tecnológica de Bolívar
CARTAGENA DE INDIAS

FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMAS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

GUÍA DE CURSO SEÑALES Y SISTEMAS

Segunda Edición

PROFESORES:
EDUARDO GÓMEZ VÁSQUEZ
JULIO MARTÍN DUARTE CARVAJALINO

ISBN: 978-958-8862-24-8

Editorial Universidad Tecnológica de Bolívar

Diagramación
Dirección de Investigaciones, Emprendimiento e Innovación

Campus Casa Lemaitre: Calle del Bouquet
Cra 21 No 25-92 PBX (5) 6606041 -42- 43 Fax: (5) 6604317

Campus Tecnológico:
Parque Industrial y Tecnológico Carlos Vélez Pombo
PBX (5) 6535331 Fax: (5) 6619240

Cartagena de Indias, D. T. y C., - Colombia
www.unitecnologica.edu.co

Contenido

INTRODUCCION

Los alumnos a los cuales va dirigida esta guía de curso pertenecen al quinto nivel de los pregrados de Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electrónica e Ingeniería Mecatrónica, los cuales necesitan tener las bases sólidas de la teoría de señales y sistemas para poder asimilar el contenido de cursos avanzados tales como Control Automático, Automatización Industrial, Comunicaciones, Redes de Comunicaciones, Sistemas de Potencia Eléctrica, Procesamiento de Señales, Telemáticas y Redes de Alta Velocidad.

La guía presenta las herramientas más importantes para el estudio en el Dominio del Tiempo y en el Dominio de la Frecuencia de las señales y sistemas de variable continua y discreta en una dimensión. En esta nueva versión se corrigieron detalles de la primera edición y se agregaron dos capítulos.

Los tópicos estudiados se distribuyen en 8 capítulos, donde se presentan la conceptualización fundamental, se desarrollan ejercicios y se proponen problemas a resolver bajo un lenguaje comprensible y previendo previos conocimientos de los alumnos en asignaturas de matemáticas y física dadas en el ciclo de Ciencias Básicas bajo los dos primeros años de su vida universitaria en el campo de la Ingeniería.

Los temas a tratar son: Fundamentación de Señales y Sistemas, Sistemas LTI descritos por Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias, Convolución, Series y Transformada de Fourier, Teorema del Muestreo, Transformada de Laplace y Z.

Deseamos que este documento ayude académicamente a los alumnos que cursan esta materia y les permita aprender los enfoques físico y matemático que soportan el estudio de las señales y los sistemas.

Eduardo Gómez Vásquez - Julio Martín Duarte Carvajalino

1. FUNDAMENTOS

Para iniciar es importante definir los conceptos de Señal y Sistema:

Señal : Fluctuación de una variable física (en general), o virtual. Ejemplos : Temperatura, presión, voltaje, corriente, precio del Dólar, etc.

Sistema : Dispositivo o conjunto de dispositivos, físicos o virtuales, que procesan o transforman una(s) señal(es) en otra(s). Ejemplos : Transductores, Microprocesadores, Filtros, etc.

Delimitación del tema, correspondiente al curso Básico en Señales y Sistemas : Señales determinísticas (modelables matemáticamente, no estocásticas), que son función de una sola variable independiente : el tiempo ; el cual puede ser continuo (Señal analógica) o discreto (Señal digital). Los sistemas a estudiar (a partir del capítulo 2), serán de una sola entrada y una sola salida, y además Lineales e invariantes en el tiempo (LTI).

1.1 CLASES DE SISTEMAS

Como notación, se utilizará para un sistema de tiempo continuo: $x(t) \rightarrow y(t)$, y $x[n] \rightarrow y[n]$ para uno de tiempo discreto, donde $x(t)$ (ó $x[n]$) es la entrada e $y(t)$ (ó $y[n]$) es la salida correspondiente.

1.1.1 Lineal.

Un sistema es lineal, si cumple con el principio de superposición y además, no existe salida cuando no hay una señal de entrada. Expresado matemáticamente, un sistema es lineal sí:

i) *Homogéneo*. Sea c una constante; un sistema es homogéneo sí:

$$c(x(t)) \rightarrow c(y(t)) \quad \text{Tiempo continuo}$$
$$c(x[n]) \rightarrow c(y[n]) \quad \text{Tiempo discreto}$$

Expresado en palabras: un sistema es homogéneo, si al amplificar la señal de entrada por un factor constante c, la salida será amplificada por este mismo factor.

ii) *Aditivo*. Si a un mismo sistema se le aplican 2 señales distintas x1 y x2, cuyas correspondientes respuestas son y1 e y2 respectivamente; se dice que un sistema es aditivo si se cumple que:

Tiempo Continuo:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t), \quad \text{luego}$$
$$x_1(t)+x_2(t) \rightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

Tiempo Discreto:

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$
$$x_2[n] \rightarrow y_2[n], \quad \text{luego}$$
$$x_1[n]+x_2[n] \rightarrow y_1[n]+y_2[n]$$

Expresado en palabras: un sistema es aditivo, si al aplicarle la suma de dos señales de entrada diferentes, su respuesta es la suma de las respuestas individuales correspondientes a cada una de las señales aplicadas por aparte.

iii) *Entrada cero, salida cero*. Si la señal de entrada a un sistema Lineal, es en un instante dado cero, su correspondiente salida en ese mismo instante ha de ser cero.

Sí $x(t_o) = 0 \rightarrow y(t_o) = 0$ Tiempo continuo
Sí $x[n_o] = 0 \rightarrow y[n_o] = 0$ Tiempo discreto

Si un sistema cumple con las condiciones i) y ii) (Superposición) pero no con la iii), el sistema se denomina incremental - lineal.

Ejemplos:

1. Sea y(t) = t x(t), determinar si el sistema es lineal.

i) Homogeneidad : x(t) $\rightarrow$ t x(t)
cx(t) $\rightarrow$ t (c x(t)) = c (t x(t)) = c y(t), cumple
ii) Aditividad : x1(t) $\rightarrow$ t x1(t)
x2(t) $\rightarrow$ t x2(t)
(x1(t) + x2(t)) $\rightarrow$ t (x1(t) +x2(t)) = t x1(t) + t x2(t) = y1(t) + y2(t), cumple

iii) Entrada cero, salida cero :
x(to)=0 $\rightarrow$ t (x(to)) = t(0)= 0, cumple

Por tanto el sistema y(t) = t x(t) es lineal.

2. Determinar si el sistema $y[n] = \begin{cases} \dfrac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]} & si \quad x[n-1] \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x[n-1] = 0 \end{cases}$ es lineal

i) Homogeneidad :

a) Si $x[n-1] \neq 0$:

$x[n] \rightarrow x[n]\, x[n-2] / x[n-1] = y[n]$

Señal amplificada $ax[n] \rightarrow (ax[n])\,(ax[n-2]) / (ax[n-1]) = a\,(x[n]\, x[n-2] / x[n-1])$
$= ay[n]$, por lo tanto cumple

b) Si $x[n-1] = 0$:

$x[n] \rightarrow 0 = y[n]$

Señal amplificada $ax[n] \rightarrow 0 = ay[n]$, cumple

ii) Aditividad :

Sea $x1[n-1] \neq 0$ y $x2[n-1] = 0$, entonces:

$x1[n] \rightarrow x1[n]\, x1[n-2] / x1[n-1] = y1[n]$
$x2[n] \rightarrow 0 = y2[n]$

Como $x1[n-1]+x2[n-1] \neq 0$:

$$x1[n]+x2[n] \rightarrow \frac{(x1[n]+x2[n])(x1[n-2]+x2[n-2])}{x1[n-1]+x2[n-1]} \neq y1[n]+y2[n]$$

Por lo tanto no es aditivo, ni lineal.

Aunque no es necesario, verificar la tercera condición, pues ya se demostró que no es lineal, se hará como ejemplo.

iii) Entrada cero, salida cero : Sea $x[no] = 0$, sin embargo $x[no-1]$ no tiene que ser necesariamente cero (Ejemplo: $x[n]=\text{sen}(n)$, $x[n]=0$ para $n=0$, pero $x[n-1]=\text{sen}(-1) \neq 0$). Consideremos las 2 posibilidades:

a) $x[no-1] \neq 0$: $x[no] \rightarrow x[no]x[n-2]/x[no-1]=0$ cumple
b) $x[no-1] = 0$: $x[no] \rightarrow 0$ cumple.

Ejercicios. Determinar si los siguientes sistemas son lineales, incrementales lineales o no - lineales:

a) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$ (Lineal)
b) $y[n] = n^2 x[n]$ (Lineal)
c) $y(t) = |x(t)|$ (no Lineal)
d) $y[n] = \sum_{k\rightarrow-\infty}^{n} (\frac{1}{2})^{n-k} x[k]$ (Incremental Lineal)

1.1.2 Sistemas Invariantes en el tiempo.

Un sistema es invariante en el tiempo si se cumple que:

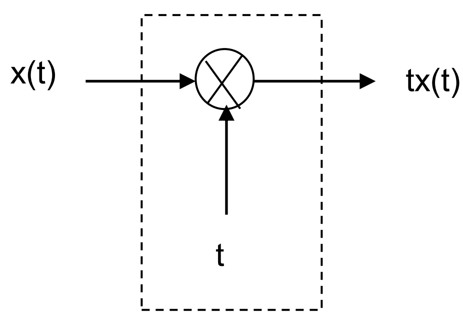
Tiempo continuo: $x(t) \rightarrow y(t)$
$x(t-to) \rightarrow y(t-to)$
Tiempo discreto $x[n] \rightarrow y[n]$
$x[n-no] \rightarrow y[n-no]$

Es decir, un desplazamiento en el tiempo de la señal de entrada, da como resultado un desplazamiento igual en el tiempo, de la señal de salida.

Ejemplo. Retomando el sistema del ejercicio anterior, y(t)=t x(t), analizaremos si es invariante en el tiempo:

$$x(t) \rightarrow y(t) = t\,x(t)$$
$$x(t-to) \rightarrow t\,x(t-to) \neq y(t-to) = (t-to)\,x(t-to)$$

Por lo tanto es un sistema variante en el tiempo. Hay que tener en cuenta que el parámetro t, ha sido introducido por el sistema, si la señal de entrada se desplaza en el tiempo, el parámetro t no se afecta, pues depende del sistema no de la señal de entrada. Esquemáticamente, podemos representar al sistema como:



Donde el sistema S está encerrado en líneas a trazos

Ejercicio. Determinar si los siguientes sistemas son invariantes en el tiempo :

a) $y[n] = x[-n]$ (Invariante)
b) $y(t) = t^2x(t-1)$ (Variante)
c) $y(t) = x(t)\cos(3t)$ (Variante)
d) $y[n] = x[n+1] - x[1-n]$ (Invariante)

1.1.3 Sistemas Invertibles

Un sistema es invertible si diferentes entradas, producen siempre diferentes salidas. Dicho de otra manera, a una salida específica solo le puede corresponder una y solo una entrada específica.

Un sistema invertible x(t)→y(t), tendrá siempre un sistema inverso tal que y(t)→x(t); es decir se puede recuperar la entrada x(t), partiendo únicamente de su salida y(t), ya que esta es única.

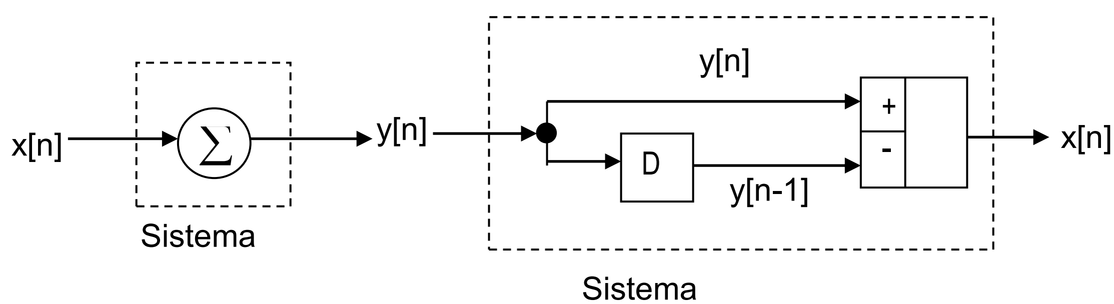
Ejemplo 1: Sea $y[n] = \sum_{k \to -\infty}^{n} x[k]$ (Un sistema sumador), determinaremos si el sistema es invertible.

Expandiendo la sumatoria en sus términos:

$$y[n] = \ldots + x[n-3] + x[n-2] + x[n-1] + x[n]$$

pero $$y[n-1] = \ldots + x[n-3] + x[n-2] + x[n-1]$$

Entonces : y[n] - y[n-1] = x[n] es decir la entrada x[n] se puede recuperar en todo momento restando 2 salidas consecutivas (y[n-1] y y[n]). Esquemáticamente:



Donde el retraso en el tiempo, lo realiza un subsistema D (Delay).

Ejemplo 2: Sea y[n]=x[2n], determinar si el sistema es invertible.

Aparentemente, el sistema inverso partiendo de y[n]=x[2n], sería x[n]=y[n/2]; sin embargo, esto no es cierto, ya que x[2n] ignora los términos de x[n] con n impar, luego partiendo de x[2n] es imposible recuperar a x[n]. Para demostrar esto, basta con encontrar un contra ejemplo, de 2 señales diferentes, que producen la misma salida del sistema:

Sea x1[n]=[-1 2 4 3 7 –5 0 0 ...] y x2[n]=[-1 4 4 –2 7 0 0 ...], para n=[0 1 2 3 4 5 6 ...]; es claro que son dos señales distintas. Sin embargo y1[n]= x1[2n] = [0 2 4 0 0 ...], ya que 2n=[0 2 4 6 ...], solo toma valores pares; e y2[2n] = [0 2 4 0 0 ...].

Por tanto y1[n]=y2[n], dos salidas iguales, para 2 entradas diferentes. Luego partiendo únicamente de la salida de este sistema es imposible obtener la entrada (hay infinitas posibilidades).

Ejercicios. Determinar si cada uno de los siguientes sistemas es invertible, en cuyo caso hallar el sistema inverso, de lo contrario, un contra-ejemplo.

a) $y[n] = \sum_{k \to -\infty}^{n} (\frac{1}{2})^{n-k} x[k]$

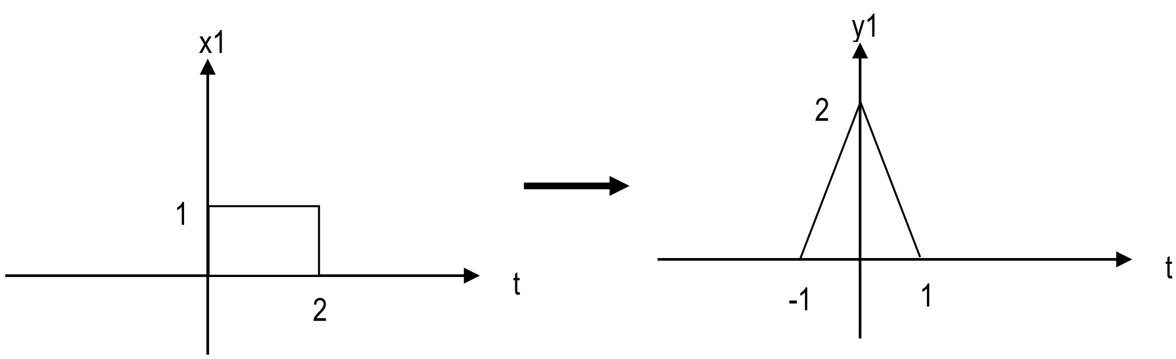
b) y(t) = | x(t) |

c) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$

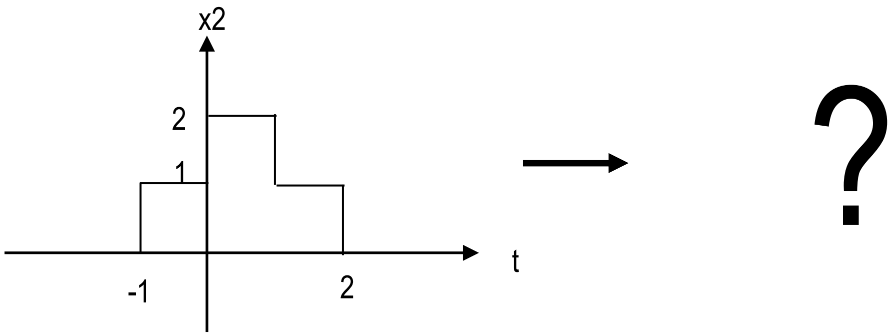
d) y[n] = x[n]x[n-1]3

Ejercicio de Repaso Sistemas LTI:

La respuesta de un sistema Lineal e Invariante en el tiempo a la entrada x1(t) es y1(t), tal como se indica en la siguiente figura:



Hallar la salida y2 a la entrada x2:



1.1.4 Sistemas Estables

Un sistema es estable, si su salida y(t) está acotada en el tiempo, para toda entrada x(t) acotada en el tiempo. En otras palabras si la señal de entrada es finita, su salida ha de ser finita también, a medida que $t \to \infty$ (ó $n \to \infty$).

Ejemplo : Sea $y[n] = \sum_{k=n}^{\infty} (\frac{1}{k^2})$ para determinar si el sistema es estable, debemos determinar si la sumatoria de $1/k^2$ converge, para ello se usa el criterio de la integral :

$$\sum_{k=n}^{\infty} (\frac{1}{k}) \quad converge \quad si \quad \int_{x}^{\infty} \frac{1}{x^2} dt \quad converge$$

$$\int_{x}^{\infty} \frac{1}{x^2} dt = -\left.\frac{1}{x}\right|_{x}^{\infty} = \frac{1}{x}$$

Se observa que la integral converge para todo $x \neq 0$, por tanto y[n] es estable para todo $n \neq 0$.

Ejercicio. Determin3ar si los siguientes sistemas son estables.

a) $y(t) = e^{x(t)}$
b) y[n] = cos(x[n])
c) $y[n] = \sum_{k=n}^{\infty} (\frac{1}{k})$

1.1.5 Sistemas con memoria

Un sistema con memoria, es aquel cuya salida depende de valores pasados de la señal de entrada. En un condensador, por ejemplo, el voltaje depende no solo de la tensión aplicada en un instante de tiempo determinado, sino también del voltaje aplicado anteriormente.

1.2 CLASES DE SEÑALES

1.2.1 Señales básicas.

Función Escalón Unitario: U(t) para tiempo continuo o U[n] para tiempo discreto. Se definen como:

$$U(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$U[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Se observa que U(t) tiene una discontinuidad en t=0, mientras que U[n] es continua para todo n entero.

Función Impulso Unitario o Delta - Dirac:

Tiempo continuo:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}(U(t)) \quad \text{o} \quad \delta(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & t \neq \mathbf{0} \\ \rightarrow \infty & t = \mathbf{0} \end{cases}$$

Tiempo discreto:

$$\delta[n] = \begin{cases} \mathbf{1} & n = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

Se observa que $\delta(t)$ es una señal indefinida y discontinua en t=0, mientras que $\delta[n]$ es una señal muy sencilla y no presenta discontinuidades.

Como definición de $\delta(t)$ se prefiere utilizar:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \int_{-\infty}^{t} \frac{dU(t)}{dt} dt = 1$$

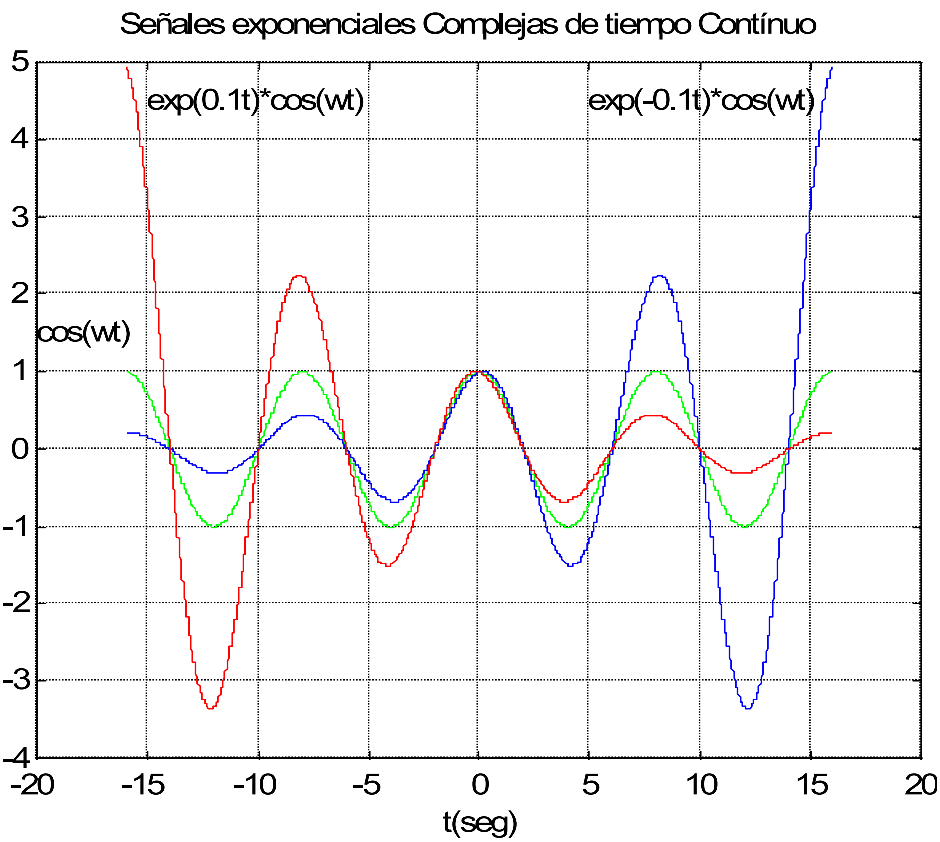
Señal exponencial Compleja:

a) Tiempo Continuo

La forma general de una señal exponencial compleja de tiempo continuo es:

$$x(t) = C\, e^{(\sigma + j\omega)t} = C\, e^{\sigma t}\ (\cos(wt) + j\,\mathrm{sen}(wt))$$

En la siguiente gráfica se muestra un ejemplo de señales exponenciales complejas con w = $\pi/4$ y 3 valores de σ = 0.1, -0.1 y 0.



Es claro que si σ=0, la señal se reduce a una senoidal pura, la cual siempre será periódica, con periodo T=2π/w.

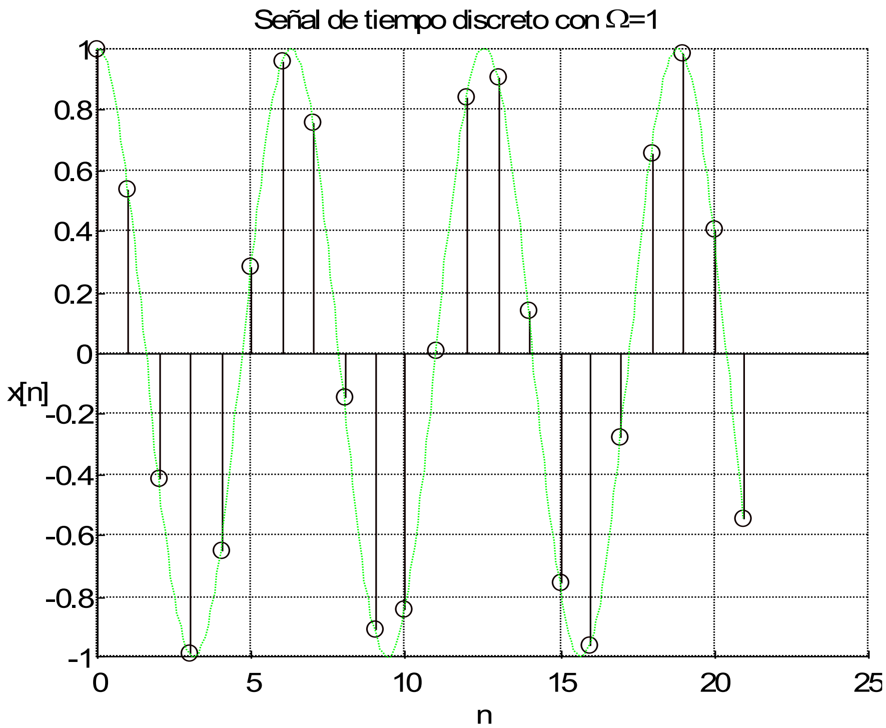
b) Tiempo Discreto

La forma general de una señal exponencial compleja de tiempo discreto es:

$$x[n] = C\, e^{(\sigma + j\Omega)n} = C\, e^{\sigma n}\ (\cos(\Omega n) + j\,\mathrm{sen}(\Omega n))$$

La cual es similar a la anterior. Sin embargo, cuando σ=0 la señal es senoidal de tiempo discreto, la cual no siempre es periódica (a diferencia de la senoidal de tiempo continuo).

Por ejemplo si Ω = 3, entonces su periodo sería N = $2\pi/3$ que no es un entero, por tanto no puede ser periódica:



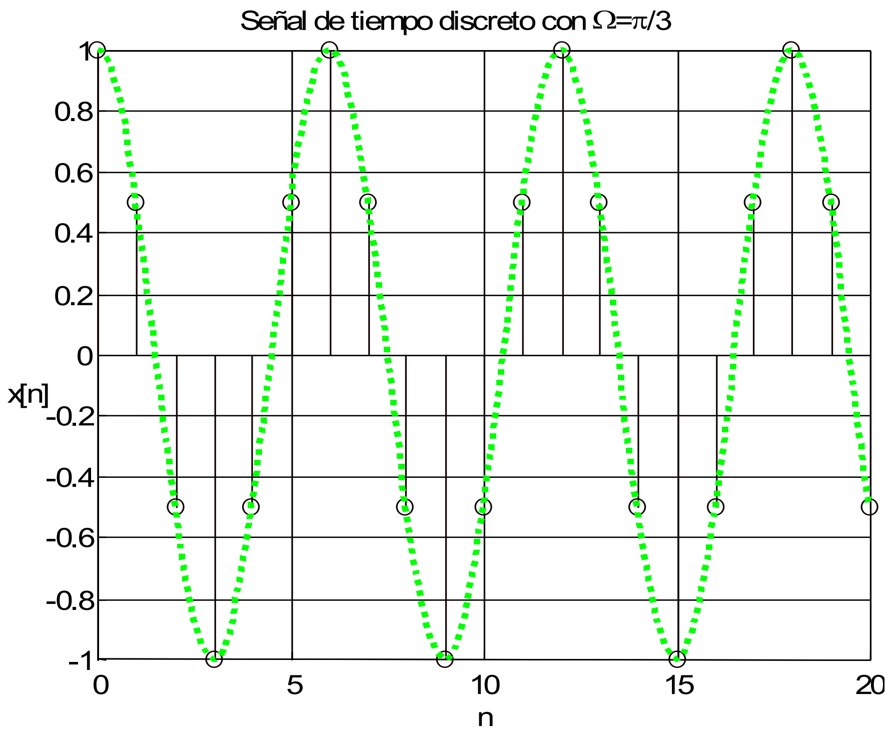
Se observa en la gráfica anterior, que x[n]=cos(n) es una señal aperiódica ya que si Ω=1 entonces N = 2π, el cual no es un número entero (La señal a trazos es la señal periódica de tiempo continuo cos(t), de la cual proviene cos(n)).

Para que la señal senoidal de tiempo discreto sea periódica, se debe cumplir que:

$$N = \frac{2\pi k}{\Omega} \quad \in Z$$

Donde N es el periodo de la señal discreta y k es un número natural. Al examinar la ecuación anterior, se deduce fácilmente que Ω ha de ser múltiplo racional de π, para que N pueda ser un número entero. Se concluye que Ω no puede tomar c3ualquier valor, para que una señal senoidal de tiempo discreto sea periódica.

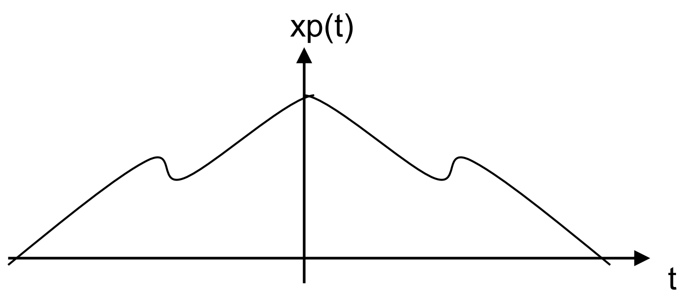
Por ejemplo si $\Omega=\pi/3$, la señal de tiempo discreto x[n]=cos(nπ/3) es periódica, con periodo N= 6.



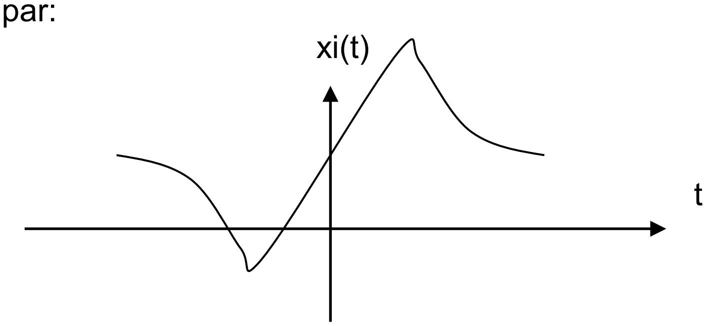
1.2.2 Señales Pares e impares

Una señal xp(t) es par cuando se cumple que xp(t)=xp(-t), es decir, que la señal se puede invertir en el tiempo y no cambia. Por otro lado una señal xi(t) es impar, cuando se cumple que xi(-t)=-xi(t), es decir, que la señal invertida en el tiempo es la imagen de espejo de la señal original, con respecto al eje del tiempo.

Ejemplo señal par:



Ejemplo señal impar:



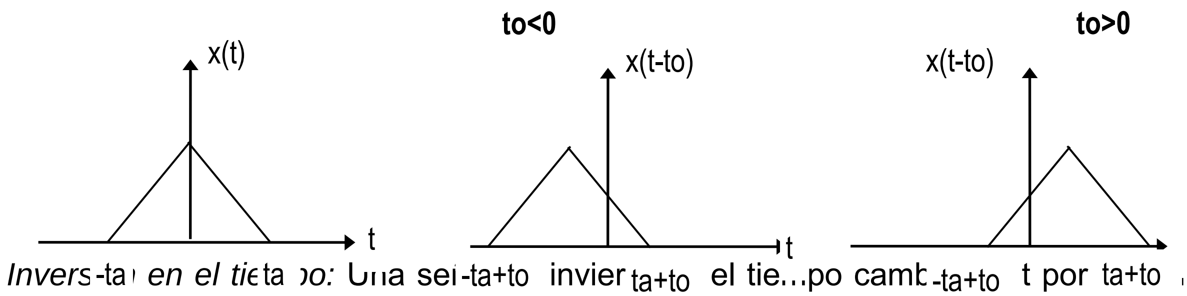
La mayoría de las señales no son pares ni impares, sin embargo, toda señal se puede descomponer en la suma de una señal par mas una señal impar :

$$x(t)=xp(t)+xi(t)$$

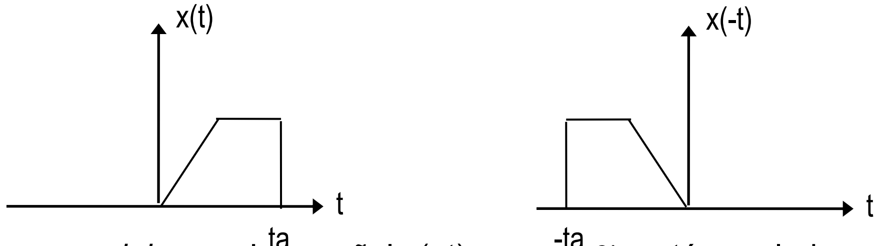
Donde $xp(t)=(x(t)+x(-t))/2$ y $xi(t)=(x(t)-x(-t))/2$.

1.2.3 Operaciones sobre la variable independiente (t ó n)

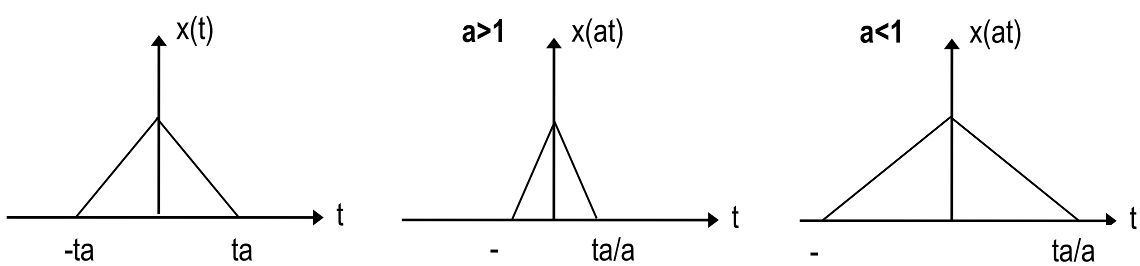
Desplazamiento en el tiempo: Una señal x(t), se desplaza en el tiempo a x(t-to), hacia la derecha si to>0 y hacia la izquierda si to<0:



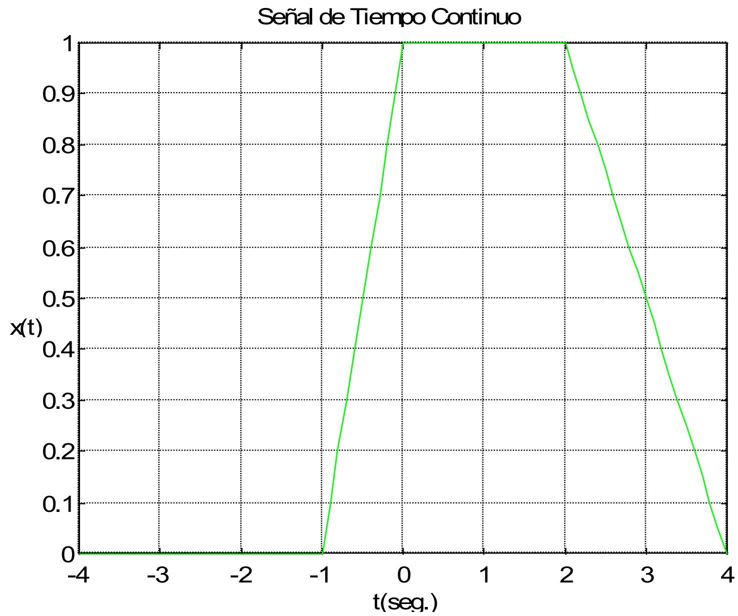
Inversión en el tiempo: Una señal invertida en el tiempo cambia t por -t (n por -n, para tiempo discreto)



Escalamiento en el tiempo: Una señal x(at) con $a \in \Re$, está escalada en el tiempo, y se contrae en t si a>1, o se dilata sí a<1.



Ejercicio. Para la siguiente señal (realizar a mano y luego, verificar con Matlab):



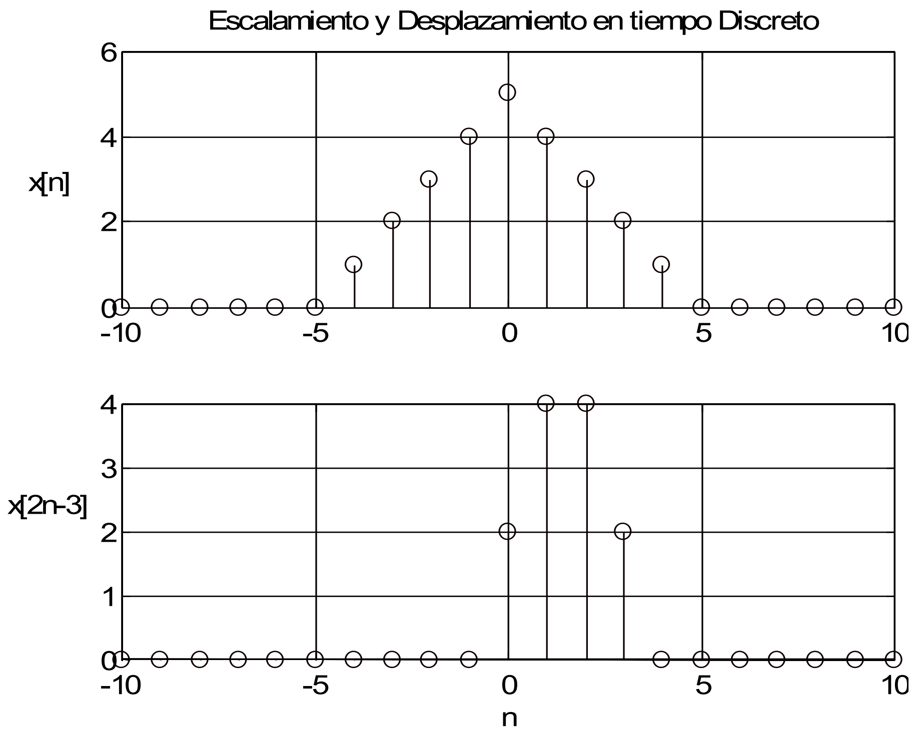
a) Hallar las componentes par e impar
b) Hallar x(3t-2)

Para tiempo discreto se cumplen las transformaciones de inversión y desplazamiento en el tiempo, en forma similar a las de tiempo continuo; sin embargo, el escalamiento no es similar al de tiempo continuo, ya que n solo puede tomar valores enteros. Por ejemplo sí:

$$x[n] = \begin{Bmatrix} 0 & n \le -6 \\ n+5 & -5 \le n \le 0 \\ -n+5 & 0 < n \le 5 \\ 0 & n \ge -6 \end{Bmatrix}$$

Hallaremos x[2n-3]:

n	**x[n]**	**2n-3**	**x[2n-3]**
-6	0	-15	0
-5	0	-13	0
-4	1	-11	0
-3	2	- 9	0
-2	3	- 7	0
-1	4	- 5	0
0	5	- 3	2
1	4	- 1	4
2	3	1	4
3	2	3	2
4	1	5	0
5	0	7	0
6	0	9	0



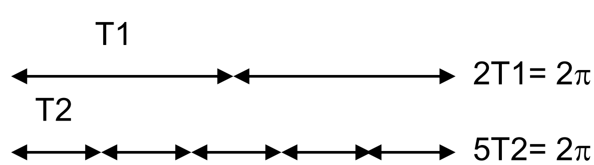
Ejercicio. Determinar x[1-2n] si x[n]=[. . . 0 0 -1 -0.5 0.5 1 1 1 1 0.5 0 0 . . .], para n=[. . . -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 . . .]

1.2.4 Señales Periódicas

Una señal es periódica, si se cumple que x(t)=x(t+kT), donde k es un entero y T es el periodo de la señal, para tiempo continuo ó x[n]=x[n+kN], con k y N enteros, siendo N el periodo, para tiempo discreto.

Ejemplo: Hallar el periodo de la señal x(t)= sen(2t+π/3) - cos(5t-π/4).

Una señal compuesta por 2 o más señales periódicas, es por supuesto, periódica. El periodo de sen(2t+π/3) es T1=2π/2=π, mientras que el periodo de cos(5t-π/4) es T2=2π/5. El periodo total será aquel mínimo valor de T tal que ambas señales coincidan o lleguen en fase, partiendo de un determinado valor:



Por lo tanto el periodo de la señal es T=2T1=5T2= 2π, que es el mínimo común múltiplo de T1 y T2.

Ejercicios. Determinar si las siguientes señales son periódicas y, si lo son, determinar su periodo:

a) $x(t)=e^{-t} * \cos t + \mathrm{sen}(3t)$ (Aperiódica)
b) $x[n]=\cos(3n)$ (Aperiódica)
c) $x(t)=\mathrm{sen}(2t+\pi/3)\cos(5t-\pi/4)$ (periódica con $T=2\pi$)
d) $x[n]=\cos(n\pi/6) + \mathrm{sen}(n\pi/8)$ (periódica con $N=48$)

2. SISTEMAS LTI DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES

2.1.1 Solución General

La forma general de una ecuación diferencial, lineal con coeficientes constantes es:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = f(t)$$

La forma general de solucionar esta ecuación consiste en hallar la solución homogénea y sumarle la solución particular:

Solución homogénea:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0$$

Donde la solución homogénea $y_h(t)$, tiene la forma $y_h(t)=Ce^{rt}$, reemplazando:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0$$

Obtenemos un polinomio en r, de grado n. Las n raíces del polinomio nos suministran la solución homogénea de la ecuación:

$$y_h(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{r_k t}$$

Solución particular:

La solución particular, se obtiene suponiendo una $y_p(t)$, según sea la forma del lado derecho de la ecuación diferencial f(t), así:

f(t)	$y_{p(t)}$
Cos(at) ó Sen(at)	$C_1\cos(at) + C_2\text{sen}(at)$
t^m	$\sum_{k=0}^{m} C_k t^k$
e^{at}	Ce^{at}

O una combinación de ellas. Por otro lado si la f(t) tiene un término g(t) igual a algún término de la solución homogénea $y_h(t)$, yp(t) = g(t)($\sum_{k=0}^{m} C_k t^k$), donde m es el número de veces que se repite el término g(t).

Una vez escogida la forma de la solución particular yp(t), se reemplaza en la ecuación diferencial y se determina el valor de los coeficientes C_k.

La solución total es la suma de la solución homogénea, más la solución particular: $y_g(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

Ejemplo :

Resolver : $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t + t^2$

Solución Homogénea:

$r^3+2r^2-r-2=0$; de donde se obtienen las raíces r = 1, -1 y -2, entonces :

$$y_h(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{-2t}$$

Solución particular:

$y_p(t) = A_1t^2 + A_2t + A_3 + e^t(A_4t + A_5)$ ya que el término e^t se encuentra repetido en la solución homogénea.

Reemplazando $y_p(t)$ en la ecuación diferencial y re - ordenando :

$$-2A_1t^2-2(A_2+A_1)t+(4A_1-A_2-2A_3) + 6A_4e^t = e^t + x^2$$

De donde se obtiene A_1=-1/2, A_2=1/2, A_3=-5/4, A_4=1/6 y A_5 es arbitraria. La solución general es:

$$y(t)= C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{-2t} - t^2/2 + t/2 -5/4 +1/6te^t$$

Conociendo las condiciones iniciales, se obtienen los coeficientes C_1, C_2 y C_3.

2.1.2 Representación en Diagramas de Bloques

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, representa un sistema lineal e invariante en el tiempo. Su representación se realiza mediante diagramas de bloques, que representan dispositivos físicos analógicos.

Como en general, los circuitos integradores son más sencillos de obtener y no presentan problemas de estabilidad (por discontinuidades), que los circuitos diferenciadores, se debe convertir primero la ecuación diferencial en una ecuación integral. A continuación se representará en diagrama de bloques una ecuación diferencial de grado 3, como ejemplo:

y'''(t)+2y''(t)+3y'(t)+5y(t)=x'''(t)+x''(t)+x'(t)

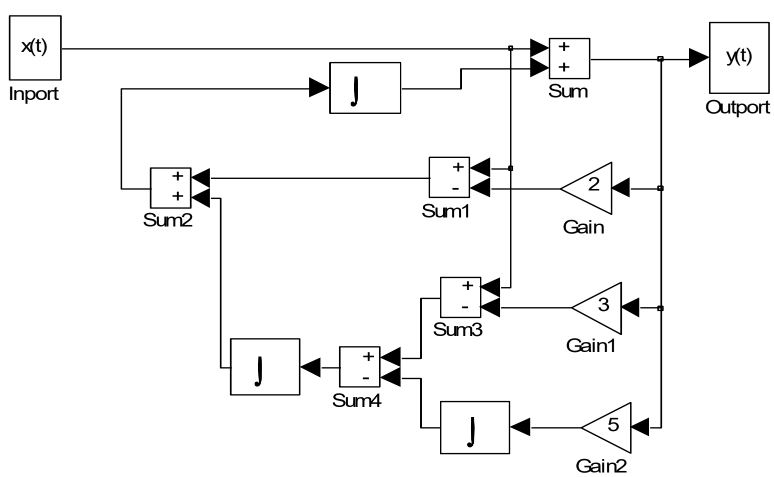
Para convertirla en ecuación integral, debemos integrar 3 veces:

$$y(t)+2\int ydt+3\iint ydt^2+5\iiint ydt^3=x(t)+\int xdt+\iint xdt^2$$

Despejando y(t) y reacomodando:

$$y(t)=x(t)+\int\left\{x-2y+\int\left[x-3y-5\int ydt\right]dt\right\}dt$$

Una posible representación en diagrama de bloques es:



2.2 ECUACIONES EN DIFERENCIAS

2.2.1 Solución general.

La forma general de una ecuación en diferencias es:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{m} b_k x[n-k]=f[n]$$

Se resuelve de manera idéntica a una ecuación diferencial, hallando primero la solución homogénea y luego una solución particular. Solo que ahora, la solución homogénea es de la forma $y_h[n]=Cr^n$, reemplazando:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^{n-k} = 0$$

Que corresponde a un polinomio de grado n, con n - raíces.

$$y_h[n] = \sum_{k=0}^{n} C_k (r_k)^n$$

Así mismo, la solución particular $y_p[n]$, se obtiene igual que para tiempo continuo, de la forma de f(n):

f[n]	$y_p[n]$
Cos(an) ó Sen(an)	$C_1\cos(an) + C_2\text{sen}(an)$
n^m	$\sum_{k=0}^{m} C_k n^k$
b^{an}	Cb^{an}

Ejemplo: Préstamo con interés. Sea una entidad bancaria que presta con una tasa de interés anual del 30%, si se desea pedir un préstamo de $5'000.000; cuál ha de ser el valor de las cuotas mensuales, si se desea pagar el préstamo en 3 años.

Sea y[0]=5'000.000 la deuda contraída, entonces y[n] será el saldo mensual del préstamo en el n-ésimo mes y C el valor de la cuota fija mensual :

y[n] = (1 + 0.3/12)y[n-1] - C ; es decir el saldo de la deuda al n-ésimo mes será el valor del saldo del mes anterior y[n-1] mas el interés mensual menos el abono a la deuda C.

Reordenando, obtenemos la ecuación en diferencias:

y[n] - 1.025y[n-1] = -C

Solución homogénea:

$1 - 1.025r^{-1} = 0$, entonces r = 1.025

$y_h[n] = C_1(1.025)^n$

Por la forma de f[n]= -C, la solución particular será $y_p[n] = C_2$; reemplazando en la ecuación en diferencias:

$C_2 - 1.025C_2 = -C$; de donde $C_2 = 40C$. Luego la solución general será:

$y[n] = C_1(1.025)^n + 40C$

Ya que la condición inicial es y[0] = 5'000.000, entonces:

5'000.000 = C_1 + 40C y C_1 = 5'000.000 - 40C

Y la condición final y[36] =0:

0 = (5'000.000 - 40C) $(1.025)^{36}$ + 40C

De donde despejamos el valor de la cuota fija mensual C = $247.539,81

2.2.2 Discretización de una ecuación diferencial.

Para discretizar una ecuación diferencial, solo hay que tener en cuenta que t = nTm, siendo Tm el periodo de muestreo y utilizar las siguientes aproximaciones numéricas de las derivadas:

$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow \frac{y[n]-y[n-1]}{Tm}$$
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{y[n]-2y[n-1]+y[n-2]}{Tm^2}$$
$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} \rightarrow \frac{y[n]-3y[n-1]+3y[n-2]-y[n-3]}{Tm^3} \ (\ldots)$$

Ejercicio : Sea y''(t)+y'(t)+y=0, con las condiciones iniciales y(0)=1 y y'(0)= -0.5.

$$y''(t)+y'(t)+y(t)=0 \rightarrow \frac{y[n]-2y[n-1]+y[n-2]}{Tm^2}+\frac{y[n]-y[n-1]}{Tm}+y[n]=0$$

Reorganizando : $y[n](1+Tm+Tm^2)-y[n-1](2+Tm)+y[n-2]=0$;

Aplicando las condiciones iniciales:

y'3(0)= -0.5 $\rightarrow$ (y[2]-y[1])/Tm=-0.5

y(0) =1 $\rightarrow$ y[1] = 1

De donde se deduce y[2]=1-0.5Tm.

Una vez Discretizada la ecuación, su solución corresponde a la solución de una ecuación en diferencias (Ver numeral 2.2.4).

2.2.3 Representación en Diagramas de Bloques

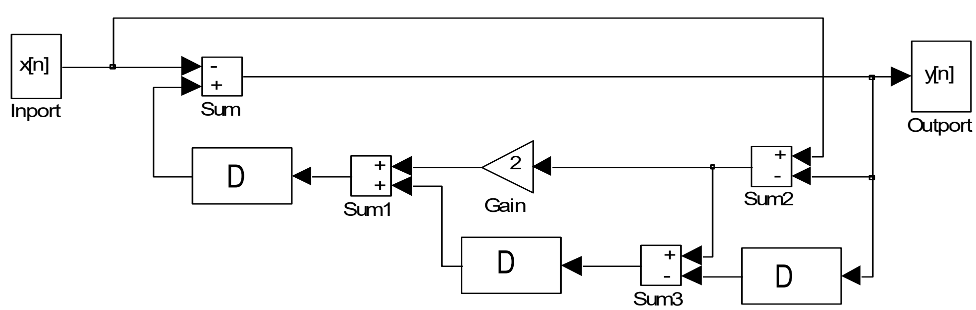
Una ecuación en diferencias, lineal y con coeficientes constantes, representa un sistema de tiempo discreto lineal e invariante en el tiempo. En este sistema no hay ningún problema en utilizar un Delay como elemento que retrasa la señal de tiempo discreto. A continuación se representará en diagrama de bloques una ecuación en diferencias de grado 3, como ejemplo :

$$y[n-3]-y[n-2]+2y[n-1]+3y[n]=x[n-2]+2x[n-1]-x[n]$$

Despejando, y[n]:

$$y[n]=(-x[n]+D(2x[n]-2y[n]+D(x[n]-y[n]-D(y[n]))))/3$$

Donde el operador D, representa un retraso en el tiempo (Delay). Su diagrama de bloques será:



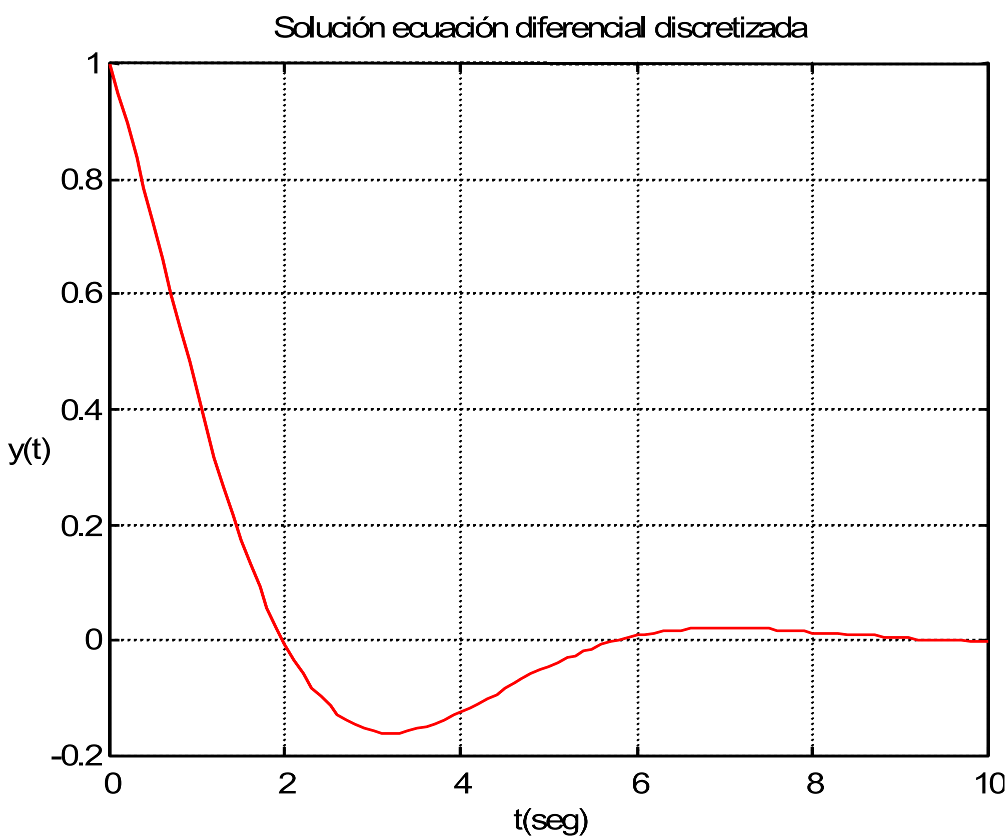
2.2.4 Solución por recursividad.

Las ecuaciones en diferencias, sean lineales o no, se pueden resolver por recursividad, constituyéndose así en un mecanismo sencillo y fácil de implementar, que permite resolver tanto ecuaciones en diferencias, como ecuaciones diferenciales discretizadas; en forma numérica.

Ejemplo : Como ejemplo se resolverá en diferencial discretizada en el numeral 2.2.2, utilizando Matlab. Para ello basta con despejar y[n]:

$$y[n] = ((2+Tm)y[n-1] - y[n-2]) / (1+Tm+Tm^2)$$

```
%       SOLUCIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL, DISCRETIZADA.
%       POR   RECURSIVIDAD
y=0;
Tm=0.1;                          %Periodo de muestreo
y(1)=1;y(2)=1-0.5*Tm;            %Condiciones iniciales
Tf=10;
t=[0:Tm:Tf];                     %Intervalo de tiempo a graficar
c1=1+Tm+Tm*Tm;c2=2+Tm;           %Constantes
for n=3:Tf/Tm+1
 y(n)=(y(n-1)*c2-y(n-2))/c1;
end
plot(t,y,'r');grid;
xlabel('t(seg)');ylabel('y(t)');
title('Solución ecuación diferencial discretizada');
```

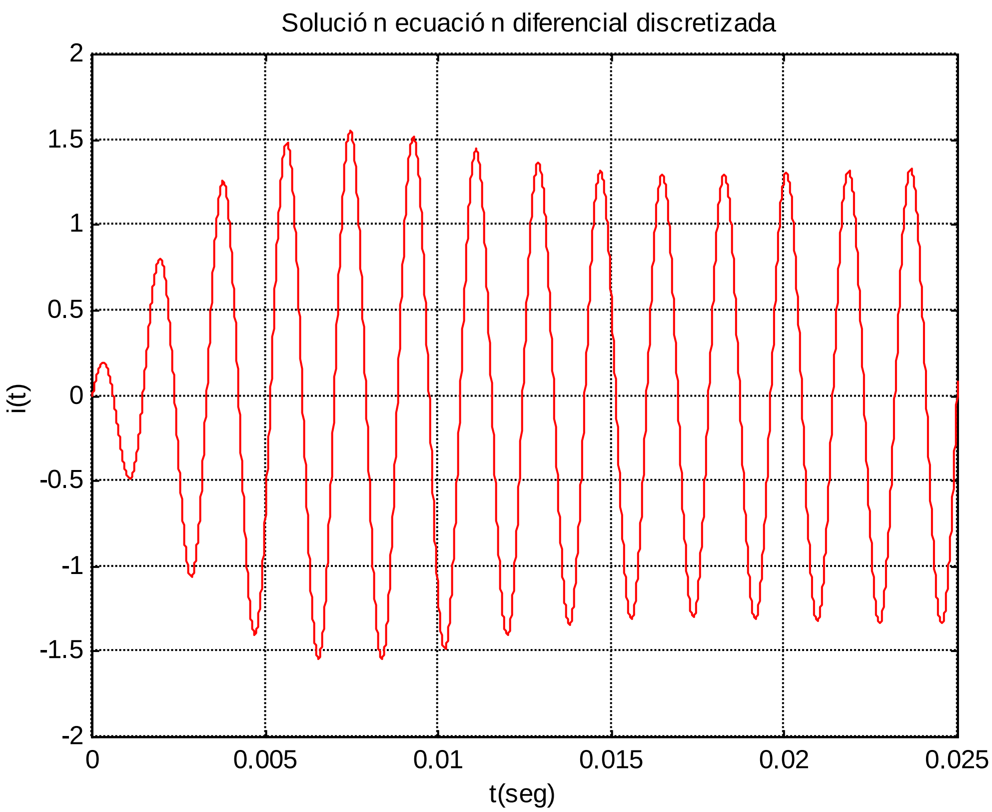


Ejercicio. Discretizar y representar en Matlab la solución de:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{dv(t)}{dt}$$

Con R=5, L=0.01 y C=10^{-6}, con las condiciones iniciales y(0)=0 y Ly'(0)=10; v(t)=10cos(3500t)

Solución:



3. CONVOLUCIÓN

3.1 TIEMPO DISCRETO

Toda señal de tiempo discreto, se puede considerar como la superposición de funciones Delta - Dirac, desplazadas en el tiempo y con amplitud igual al valor de la señal en ese instante de tiempo; es decir:

$$x[n] = \sum_{k \to -\infty}^{k \to \infty} x[k]\delta[n-k]$$

La ventaja de esta representación, para un sistema lineal e invariante en el tiempo, radica en que si se conoce la respuesta al impulso $\delta[n]$, denominada $h[n]$; por el principio de superposición e invariancia en el tiempo, la respuesta a $x[n]$, será:

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h[n]$$

Por la propiedad de invariancia en el tiempo:

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h[n-k]$$

Por el principio de Homogeneidad ($x[k]$, es un valor determinado):

$$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow x[k]h[n-k]$$

Por la propiedad de aditividad:

$$\Sigma x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow \Sigma x[k]h[n-k]$$

$$y[n]=\sum_{k\to-\infty}^{k\to\infty} x[k]h[n-k]$$

Sumatoria que se expresa en forma abreviada como y[n]=x[n]*h[n], donde el signo * se lee como *convolución*. En forma esquemática:

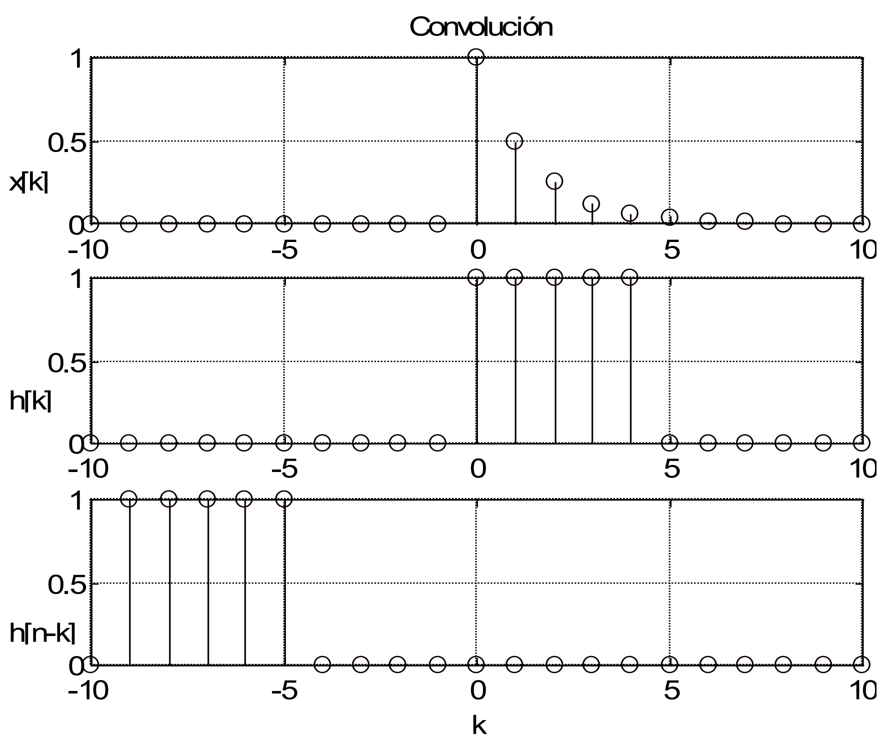
Ejemplo :

Si la respuesta al impulso de un sistema de tiempo discreto es:

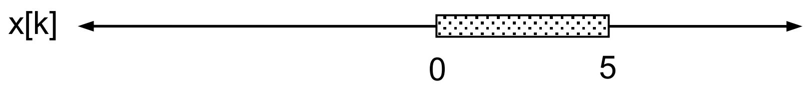
$$h[n]=(1/2)^n\,(U[n]-U[n-5])$$

Determinar la respuesta del sistema a la entrada x[n]=U[n]-U[n-5].

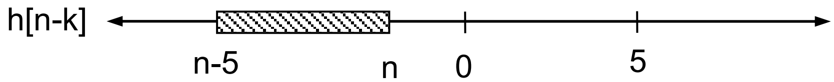
La siguiente gráfica muestra a x[k], h[k] y h[n-k] para un valor de n=5:



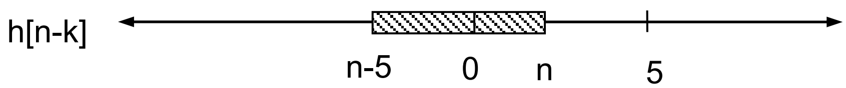
Para obtener una solución analítica, basta analizar, por intervalos:



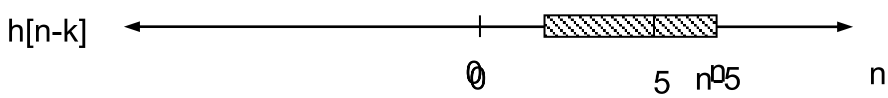
Para n<0:



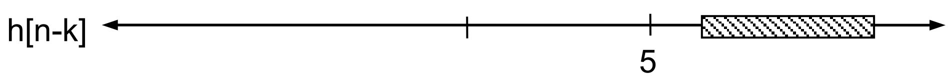
Para 0 $\leq$ n $\leq$ 5 :



Para 0 $\leq$ n-5 $\leq$ 5 ó 5 $\leq$ n $\leq$ 10:



Para n-5 > 5 ó n > 10:



Se observa que el producto de x[k] y h[n-k], cuando n<0 o n>10 es cero. De modo que :

$$y[n] = \begin{Bmatrix} 0 \quad n < 0 \\ \sum_{k=0}^{n} (0.5)^k \quad 0 \leq n \leq 5 \\ \sum_{k=n-5}^{5} (0.5)^k \quad 5 < n \leq 10 \\ 0 \quad n > 10 \end{Bmatrix}$$

Sabiendo que $\sum_{k=0}^{m} \alpha^k = \dfrac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha}$ y $\sum_{k=n-5}^{5} (0.5)^k = \sum_{k=0}^{5} (0.5)^k - \sum_{k=0}^{n-6} (0.5)^k$, entonces :

$$y[n] = \left\{ \begin{array}{c} 0 \quad n < 0 \\ 2(1-(0.5)^{n+1}) \quad 0 \le n \le 5 \\ 2((0.5)^{n-5} - (0.5)^{6}) \quad 5 < n \le 10 \\ 0 \quad n > 10 \end{array} \right\}$$

3.2 TIEMPO CONTINUO

Una Señal de tiempo continuo se puede aproximar por una señal de tiempo discreto así:

$$x(t) \to x(nTm) \to \sum_{-\infty}^{\infty} x(kTm)\delta[n-k]$$

Multiplicando y dividiendo por Tm:

$$\text{x(t)} \to \sum_{k\to-\infty}^{k\to\infty} x(kTm)\frac{\delta[n-k]}{Tm}Tm$$

Donde sí Tm $\to$ 0, entonces kTm $\to$ τ (continuo), nTm $\to$ t (continuo), Tm $\to$ dτ y

$$\frac{\delta[n-k]}{Tm} = \frac{U[n-k+1]-U[n-k]}{Tm} \to \frac{dU(t-\tau)}{dt} = \delta(t-\tau)$$

Reemplazando:

$$\text{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Como la integral no es más que el límite de una sumatoria infinita, por superposición y teniendo en cuenta que la respuesta al impulso δ(t) es h(t):

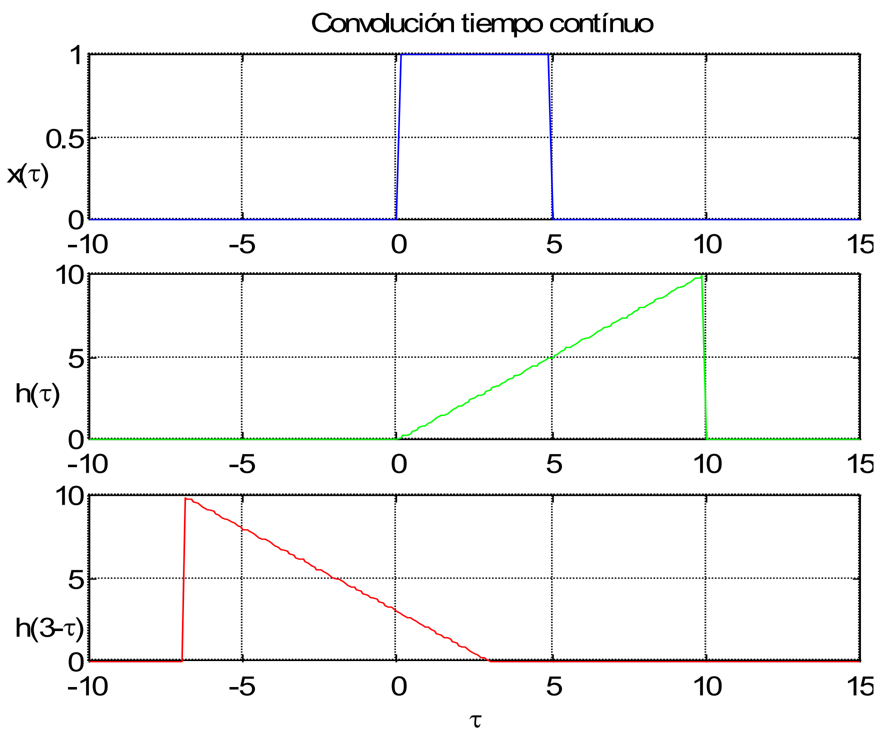
$$\text{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Esta última integral se llama la integral de convolución y se abrevia x(t)*h(t). La forma de trabajar analíticamente la convolución de tiempo continuo es similar a la de tiempo discreto, donde solo cambia la sumatoria de convolución, por la integral de convolución.

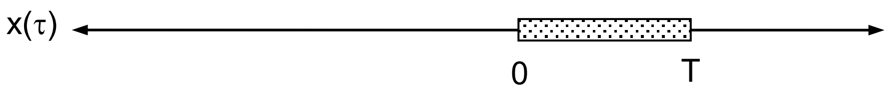
Ejemplo. Halle la salida y(t) de un sistema cuya respuesta al impulso h(t) y entrada x(t), son respectivamente:

$$h(t) = \begin{Bmatrix} 0 & t <= 0 \\ t & 0 < t < 2T \\ 0 & t >= 2T \end{Bmatrix}$$

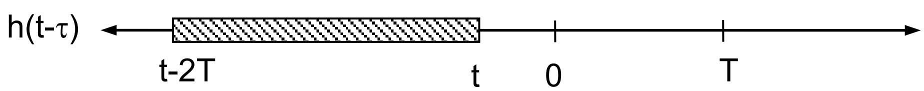
$$x(t) = \begin{Bmatrix} 0 & t <= 0 \\ 1 & 0 < t < T \\ 0 & t >= T \end{Bmatrix}$$



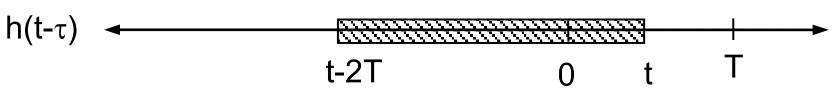
Analizando por intervalos:



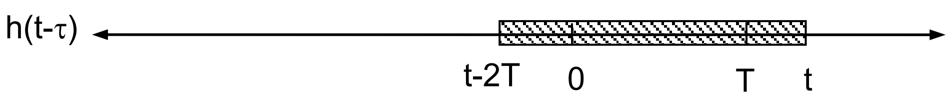
Para $t<0$:



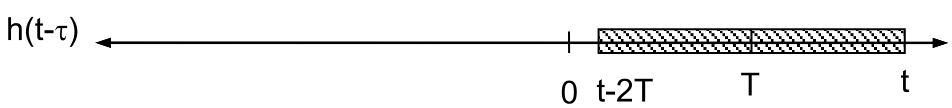
Para $0 \leq t \leq T$:



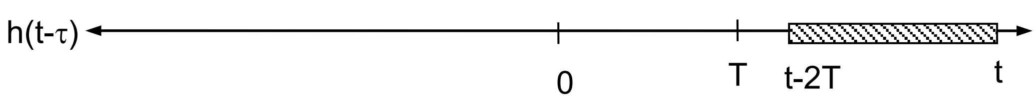
Para $t > T$ y $t-2T \leq 0$ ó $T< t \leq 2T$:



Para $0<t-2T\leq T$ ó $2T<t\leq 3T$:



Para $t-2T > T$ ó $t > 3T$:



Se observa que el producto de $x(t)$ y $h(t-\tau)$, cuando $t<0$ o $t>3T$ es cero. De modo que :

$$y(t)=\begin{Bmatrix} 0 \quad t<0 \\ \int_0^t (t-\tau)d\tau \quad 0\le t\le T \\ \int_0^T (t-\tau)d\tau \quad T<t\le 2T \\ \int_{t-2T}^T (t-\tau)d\tau \quad 2T<t\le 3T \\ 0 \quad t>3T \end{Bmatrix}$$

Integrando :

$$y(t)=\begin{Bmatrix} 0 \quad t<0 \\ \frac{1}{2}t^2 \quad 0\le t\le T \\ Tt-\frac{1}{2}t^2 \quad T<t\le 2T \\ -\frac{1}{2}t^2+Tt+\frac{3}{2}T^2 \quad 2T<t\le 3T \\ 0 \quad t>3T \end{Bmatrix}$$

3.3 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DELTA - DIRAC

La función Delta-Dirac, tiene las siguientes propiedades, con respecto a la convolución:

$$x[n]*\delta[n-no]=x[no]\delta[n-no]$$

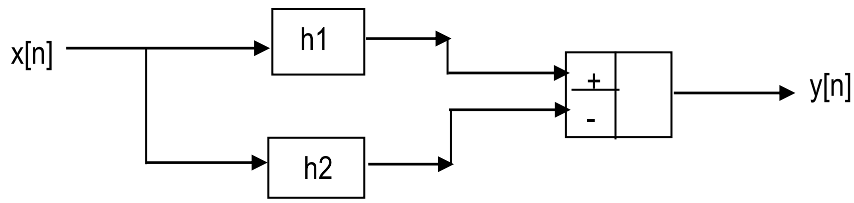
$$x(t)*\delta(t-to)=x(to)\,\delta(t-to)$$

Ejercicios de Repaso.

Hallar y(t) ó y[n] según el caso:

1. $x(t)=e^{-2t}U(t+2)+e^{3t}U(-t+2)$ y $h(t)=e^{t}U(t-1)$
2. $x[n]=(0.5)^{n}U[n-4]$ y $h[n]=4^{n}U[2-n]$

3. Para el siguiente sistema:



Encuentre la salida y[n] con x[n]=U[n]-U[n-5], h1[n]=U[n-2]-U[n-8] y h2[n]=U[n-17]-U[n-11].

4. SERIES DE FOURIER

4.1 TIEMPO CONTÍNUO

En 1807 Jean Baptiste Fourier propuso que una señal periódica cualquiera $x_p(t)$, con periodo To, se puede representar como una sumatoria de señales exponenciales complejas (o lo que es lo mismo, senos y cosenos), con Amplitudes y Frecuencias que varían armónicamente, en función de la frecuencia fundamental de la señal, wo=2π/To:

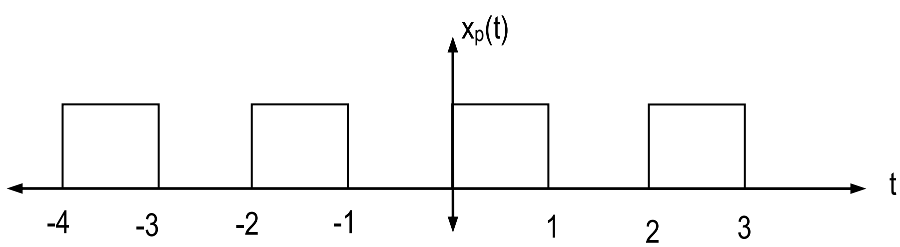
$$x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon^{jkwot} \quad con \quad a_k = \frac{1}{To} \int_{-To/2}^{To/2} x_p(t) \varepsilon^{-jkwot}$$

Posteriormente en 1829 P.L. Dirichlet suministra las bases matemáticas precisas, bajo las cuales una señal $x_p(t)$, puede representarse en una serie de Fourier (condiciones de Dirichlet), para un Periodo de la señal se debe cumplir que:

1. $x_p(t)$, ha de ser absolutamente integrable ($\int_0^T |\mathrm{xp(t)}| dt < \infty$)
2. Ha de existir un número finito de máximos y mínimos
3. Pueden existir discontinuidades, pero debe haber un número finito de ellas.

Se observa que prácticamente todas las señales de uso práctico, cumplen estas tres condiciones.

Consideremos, la siguiente onda cuadrada periódica:



Tiene un periodo To = 2 y por tanto su frecuencia fundamental es wo = 2π/To = π. Los coeficientes de la serie de Fourier (o lo que es lo mismo la amplitud de las exponenciales complejas) son:

$$a_k = \frac{1}{2} \int_0^1 (1) \varepsilon^{-jk\pi t} = \frac{-1}{j2k\pi} \varepsilon^{-jk\pi t} \Big|_0^1 = \frac{j}{2\pi k} (\varepsilon^{-jk\pi} - 1)$$

Se observa que si k = 0, sería necesario aplicar límites (mas exactamente, la regla de L'hôpital) para calcular el coeficiente a_o. Sin embargo esto no es necesario, si se tiene en cuenta que a_o es la magnitud de la señal exponencial compleja a frecuencia 0, ya que si k=0 entonces w=kwo=0. Por tanto a_o, es la *Componente Continua de la Señal Periódica*. Siendo así, podemos hallar a_o como el valor medio de la señal:

$$a_o = \frac{1}{To}\int_{-To/2}^{To/2} x_p(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1)dt = 0.5$$

Extrayendo el término a_o, la onda cuadrada anterior, se representa en series de Fourier como:

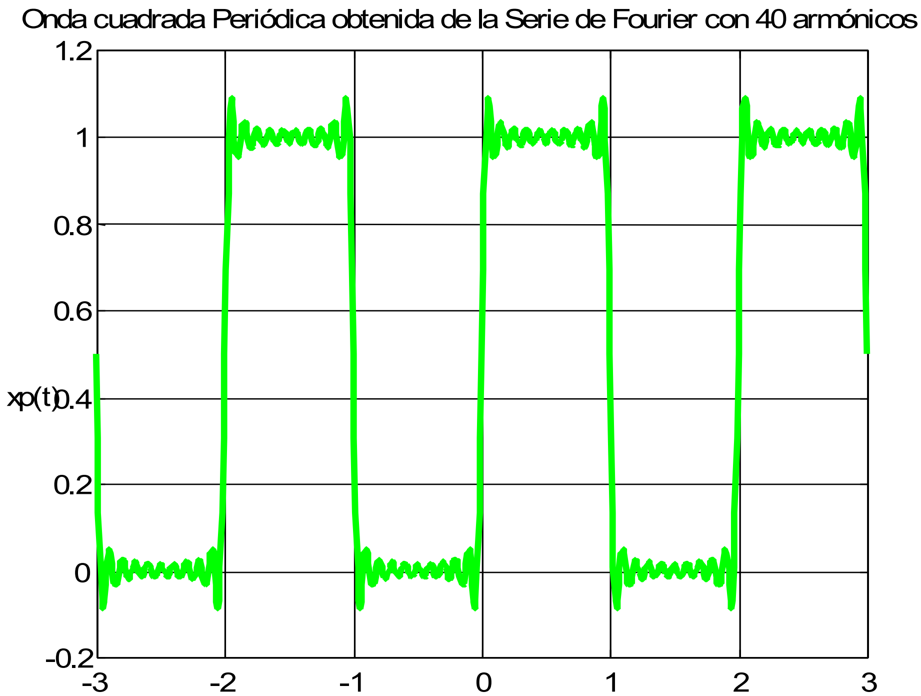
$$x_p(t) = 0.5 + \sum_{\substack{k \to -\infty \\ con\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{j}{2\pi k}(\varepsilon^{-jk\pi} - 1)\varepsilon^{jk\pi t}$$

Teniendo en cuenta que $e^{j\theta}=\cos\theta + j\mathrm{sen}\theta$ y que $\cos k\pi=(-1)^k$, $\mathrm{sen}k\pi=0$, la serie anterior se reduce a:

$$x_p(t) = 0.5 - \frac{2}{\pi}\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\mathrm{sen}(k\pi t) & k\ par \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos(k\pi t) & k\ impar \end{cases}$$

El resultado anterior se grafica en Matlab, para cuarenta armónicos ($-20 \leq k \leq 20$), utilizando la representación exponencial compleja (mas fácil en Matlab que la sinusoidal) y se puede apreciar en la siguiente página.

En la gráfica se observa una fuerte oscilación en la representación en series e Fourier, en las discontinuidades de la onda cuadrada. A este fenómeno se le conoce como fenómeno de Gibbs y no se puede eliminar aún cuando se incremente el número de armónicos. No obstante, cabe destacar que este fenómeno solo se presenta en el caso de señales periódicas, con discontinuidades.



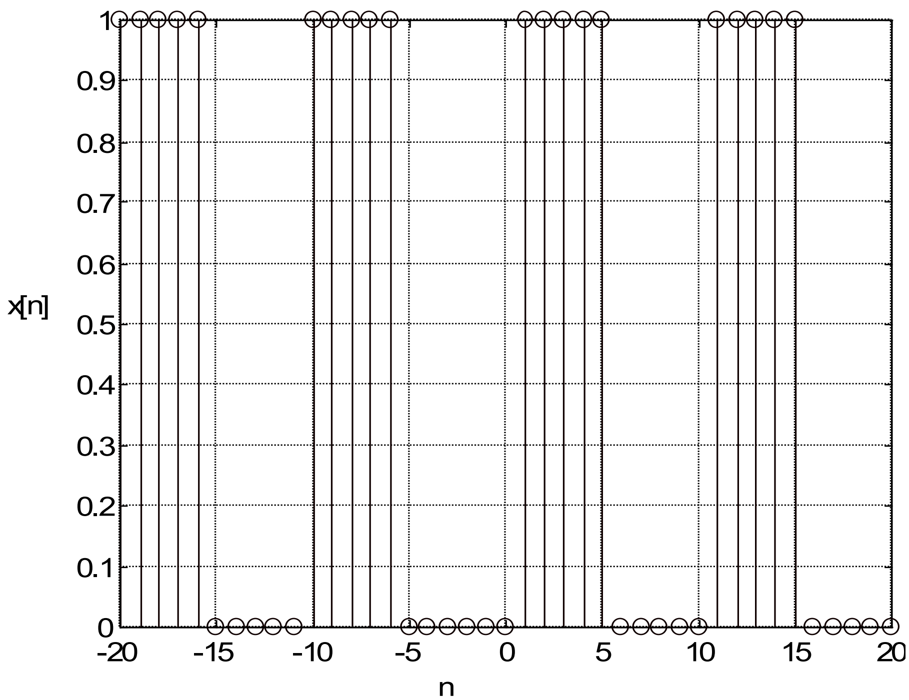
4.2 TIEMPO DISCRETO

Así como en tiempo continuo, toda señal de tiempo discreto periódica, puede representarse como una suma de señales exponenciales complejas de tiempo discreto, cuya amplitud y frecuencia varían en forma armónica:

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{No-1} a_k \varepsilon^{j\Omega_o kn} \qquad con\ a_k = \frac{1}{No} \sum_{n=0}^{No-1} x_p[n] \varepsilon^{-j\Omega_o kn}$$

Donde No es el periodo de la señal periódica $x_p[n]$ y Ωo su frecuencia. Se observa sin embargo, que la sumatoria no es infinita, por tanto su precisión es absoluta (no es aproximada).

Consideremos ahora una onda cuadrada de tiempo discreto:



De la gráfica anterior se deduce que No = 10 y $\Omega o = 2\pi/No = \pi/5$. Entonces :

$$a_k = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{5}(1)\varepsilon^{-jk\frac{\pi}{5}n} = \frac{1}{10}\left(\sum_{n=0}^{5}\varepsilon^{-jk\frac{\pi}{5}n} - 1\right)$$

$$a_k = \frac{1}{10}\left\{\frac{1-\varepsilon^{-j\frac{6\pi}{5}k}}{1-\varepsilon^{-j\frac{\pi}{5}k}} - 1\right\} = \frac{1}{10}\left\{\frac{\varepsilon^{-j\frac{\pi}{5}k} - \varepsilon^{-j\frac{6\pi}{5}k}}{1-\varepsilon^{-j\frac{\pi}{5}k}}\right\} \quad k \neq 0$$

De nuevo, hay una aparente discontinuidad en k=0, sin embargo a_o corresponde al valor promedio de la señal: $a_o = (5/10) = 0.5$. Entonces $x_p[n]$ es:

$$x_p[n] = 0.5 + \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\left\{\frac{\varepsilon^{-j\frac{\pi}{5}k} - \varepsilon^{-j\frac{6\pi}{5}k}}{1-\varepsilon^{-j\frac{\pi}{5}k}}\varepsilon^{j\frac{\pi}{5}nk}\right\}$$

Verificar este resultado, Graficando en Matlab.

Se observa que, en el caso de tiempo discreto, no existe fenómeno de Gibbs y el cálculo de $x_p[n]$ es exacto y más veloz.

4.3 ESPECTROS DE AMPLITUD Y DE FASE

Los coeficientes de Fourier a_k de una señal periódica son en general, números complejos. Como todo complejo, ak se puede representar, en forma polar, como $A_k e^{j\phi k}$; es decir con su magnitud A_k y su fase ϕ_k.

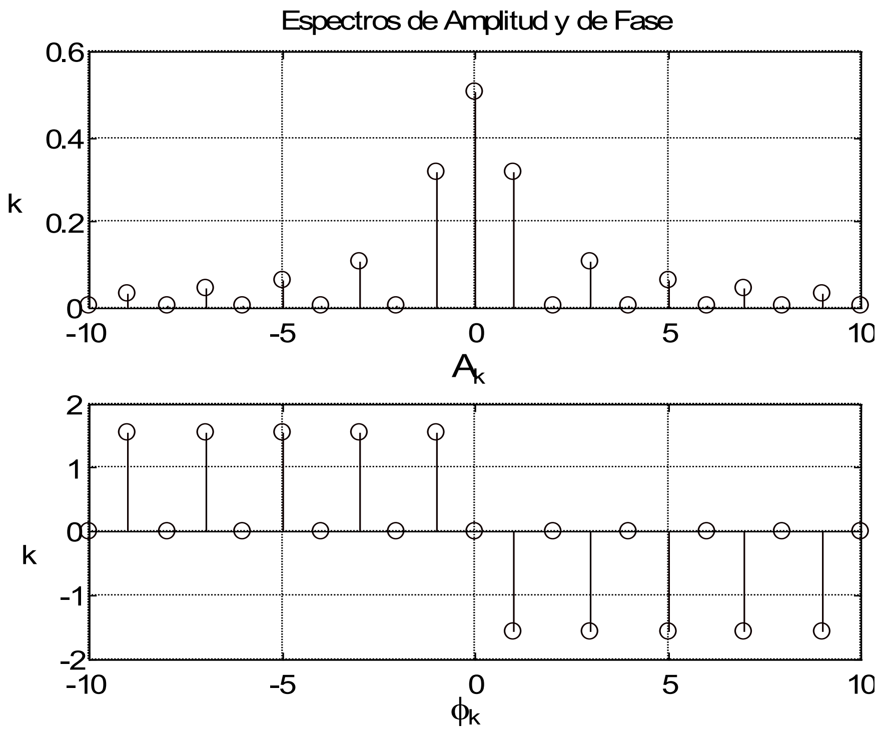
Luego $x_p(t)$ también se puede representar como :

$$x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon^{jkwot} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \varepsilon^{j(kwot+\phi_i)} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k (Cos(kwot + \phi_k) + j\,\mathrm{sen}(kwot + \phi_k))$$

La ecuación anterior nos revela que la magnitud de los coeficientes de Fourier A_k corresponde a la magnitud de las señales sinusoidales que al superponerse, forman la señal original; y ϕ_k el ángulo de desfase de cada una. Esta representación es muy útil en el análisis de Filtros, en la transmisión de señales y en el análisis de estado estable (Conociendo la respuesta de un sistema a una señal sinusoidal, se puede obtener la respuesta del sistema a cualquier entrada periódica, por el principio de superposición).

Es por ello que, en la práctica, se acostumbra obtener los denominados espectros de Amplitud y fase de una señal, en función de k.

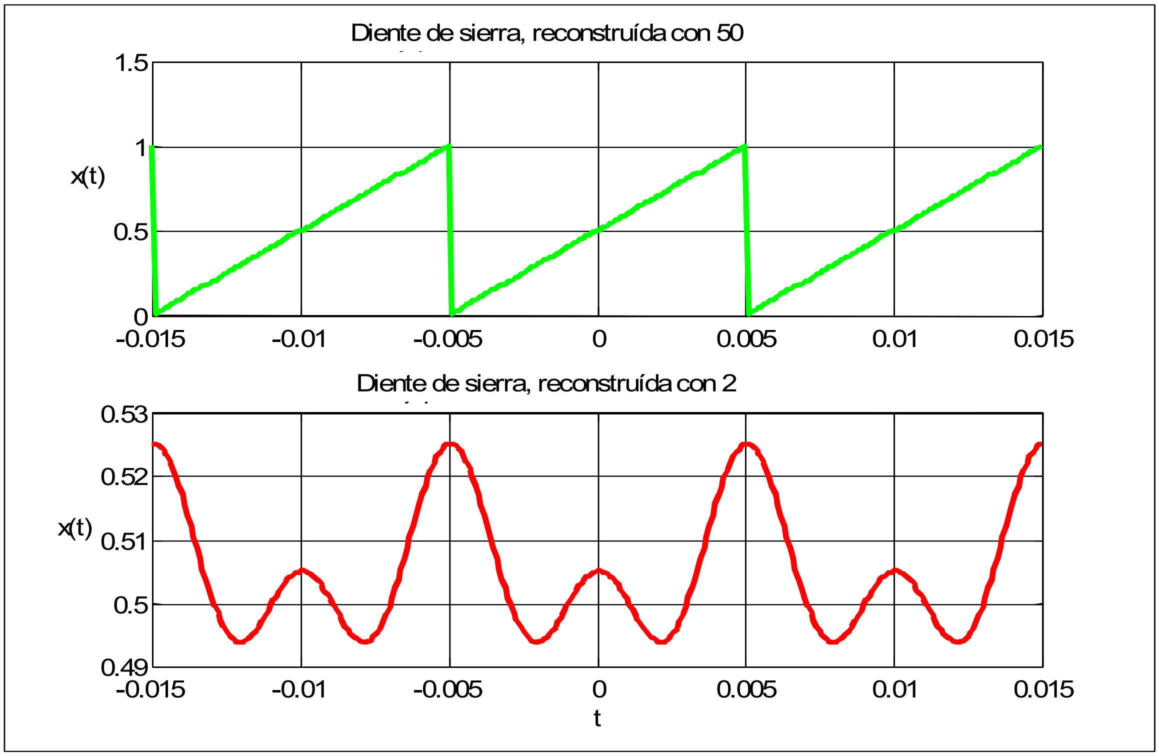
Ejemplo : Graficar en Matlab los espectros de amplitud y fase de la onda cuadrada periódica:



Ejercicio : Determinar, la salida de un filtro pasa - bajas ideal, con frecuencia de corte 1500 Hz, si la entrada es una señal Diente de Sierra con To=0.01 seg. y amplitud 1.

Primero que nada es necesario, Conocer la frecuencia fundamental de la señal, wo=2π/To = 628.32 Hz. Ya que el filtro pasabajas ideal solo deja pasar las frecuencias por debajo de los 1500 Hz, significa que solo pasarán las frecuencias –2wo, -wo, 0, wo y 2wo; es decir la componente de continua mas 2 armónicos, ya que los demás armónicos sobrepasan la frecuencia de corte del filtro (3wo=1885Hz).

Reconstruyendo, utilizando Matlab, la señal diente de sierra, utilizando solo 2 armónicos, obtenemos la señal de salida del filtro:



Se observa que para obtener una señal de la onda diente de sierra, aceptable, se requieren unos 50 armónicos. Todo medio físico de propagación o transmisión de una onda, tiene un ancho de banda específico; por lo que en general actúa como un filtro. Si el ancho de banda del medio, es inferior al de la señal, pueden presentarse serias distorsiones de la señal original.

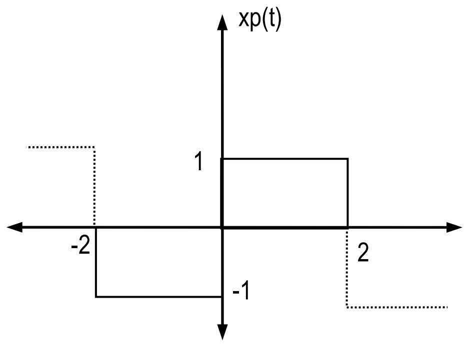
4.4 PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

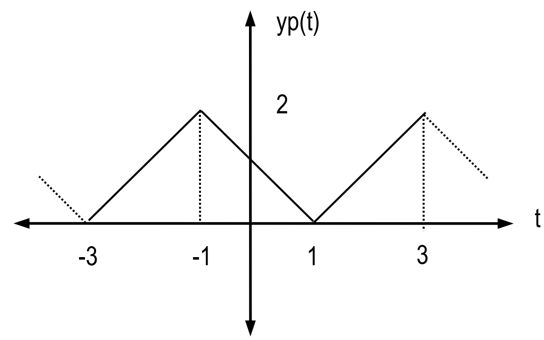
4.4.1 Tiempo Continuo

Sean x(t) e y(t) señales periódicas con el mismo periodo To, y con coeficientes de Fourier a_k y b_k respectivamente, las Series de Fourier cumplen las siguientes propiedades :

PROPIEDAD	SEÑAL	COEFICIENTES DE FOURIER
Linealidad	C1*x(t)+C2*y(t)	C1*a_k+C2*b_k
Desplazamiento de tiempo	$x(t-t_o)$	a_k*$e^{(-jkwoto)}$
Inversión en el tiempo	x(-t)	a_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t)$	a_k, pero $w_o' = \alpha * w_o$
Diferenciación	dx(t)/dt	$jkw_o a_k$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$a_k/(jkw_o)$ (Si el valor medio de x(t) es 0)

Por ejemplo, considérense las siguientes dos señales:



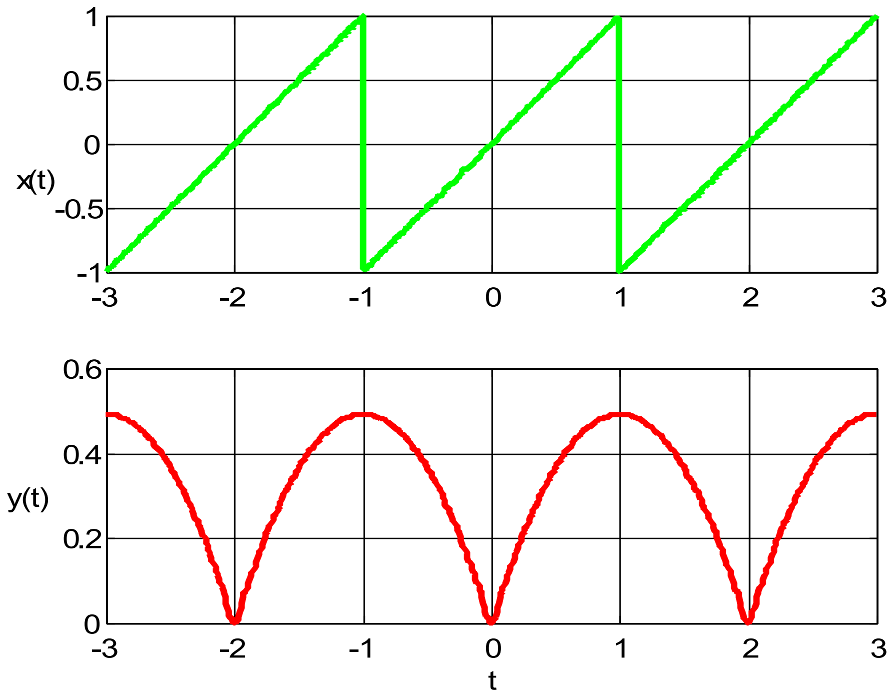


La señal $y_p(t)$, se puede obtener de $x_p(t)$ por integración y posterior desplazamiento de la señal: $y_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(t-1)dt$.

Por tanto, si se conocen los coeficientes de Fourier de $x_p(t)$: a_k, no es necesario calcular los correspondientes coeficientes de Fourier de $y_p(t)$: b_k, ya que :

$b_k = a_k\, e^{(-jkwo)} / (jkwo)$ (Integración y desplazamiento en en tiempo)

Ejercicio. Obtener la representación en series de Fourier de la siguiente señal $x_p(t)$ y obtener los coeficientes de Fourier de $y_p(t)$, partiendo de los coeficientes de Fourier de $x_p(t)$. Verificar utilizando Matlab.



4.4.2 Tiempo Discreto

Sean x[n] e y[n] señales periódicas, con igual periodo No y coeficientes de Fourier a_k y b_k respectivamente. Al igual que en tiempo continuo, se puede obtener b_k a partir de a_k, siempre que y[n] se pueda obtener a partir de x[n]:

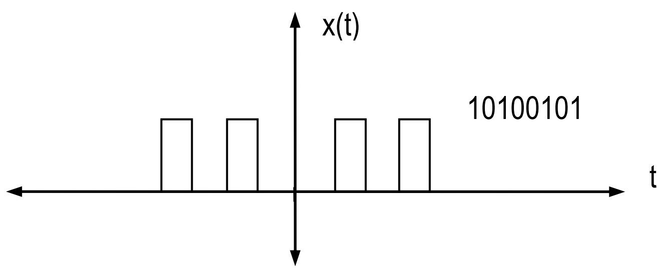
PROPIEDAD	SEÑAL	COEFICIENTES DE FOURIER
Linealidad	*C1*x[n]+C2*y[n]*	$C1*a_k+C2*b_k$
Desplazamiento de tiempo	$x(n-n_o)$	$a_k*e^{(-jk\Omega o n o)}$
Inversión en el tiempo	x[-n]	a_{-k}

5. TRANSFORMADA DE FOURIER

Las Series de Fourier nos permiten representar una señal periódica, tanto de tiempo continuo, como de tiempo discreto; en función de una suma o superposición de señales exponenciales complejas, con frecuencias, amplitudes y fases que varían en función de un parámetro k, entero, con la suficiente precisión (tiempo continuo).

Una vez representada una señal periódica, en términos de exponenciales complejas, se puede obtener un espectro de la señal en el dominio de la frecuencia (espectros de Amplitud y de fase) ; que nos representa el contenido de armónicos de la señal original. *Es importante resaltar, que aun cuando la señal periódica original sea de tiempo continuo, su espectro de frecuencias es discreto.*

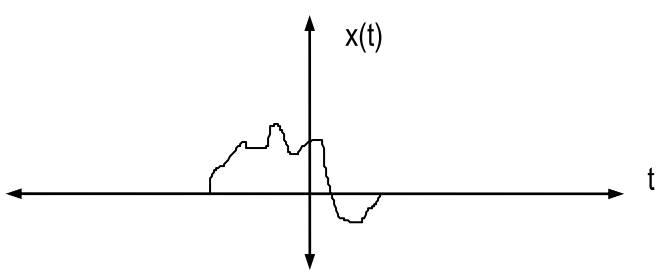
Una señal periódica, es por definición, infinita. Sin embargo, en la práctica las señales se encuentran delimitadas en el tiempo; es decir, tienen un comienzo y un fin determinado. Un ejemplo sencillo de este tipo de señales, la constituyen los pulsos digitales:



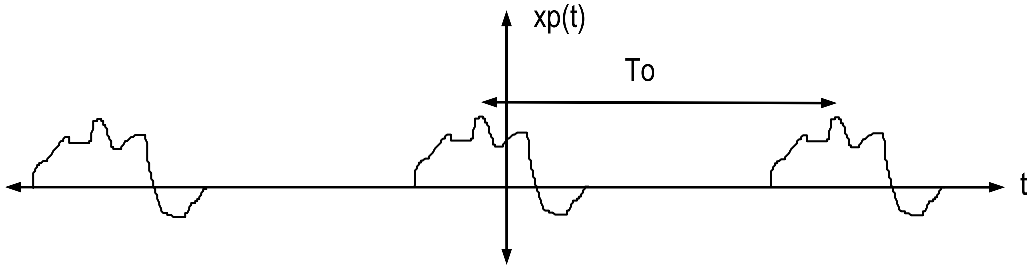
Que en general, son señales aperiódicas. Es deseable obtener una representación en el dominio de la frecuencia de estas señales (un espectro de frecuencias), para poder predecir el efecto que pueda tener el medio de transmisión (el cual puede introducir distorsión) sobre ellas.

5.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Sea una señal aperiódica x(t) cualquiera:



Se podría considerar otra señal $x_p(t)$, periódica, con la misma forma que x(t), pero que se repite indefinidamente, con periodo To :



Es claro que a medida que To $\rightarrow \infty$ entonces: $x_p(t) \rightarrow x(t)$. Como $x_p(t)$ es periódica, podemos representarla en series de Fourier:

$$x_p(t) = \sum_{k\to-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon^{jkw_o t} \quad con\ w_o = \frac{2\pi}{To}$$

Multiplicando y dividiendo por w_o :

$$x_p(t) = \sum_{k\to-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{w_o} \varepsilon^{jkw_o t} w_o$$

El término a_k/w_o será:

$$\frac{a_k}{w_o} = \frac{1}{w_o T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x_p(t)\varepsilon^{-jkw_o t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x_p(t)\varepsilon^{-jkw_o t} dt$$

Si hacemos que To $\rightarrow \infty$, entonces $x_p(t) \rightarrow x(t)$, $w_o \rightarrow dw$, $kw_o \rightarrow w$ y la $\Sigma \rightarrow \int$:

$$Lim_{T_o\to\infty}(\frac{a_k}{w_o}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\varepsilon^{-jwt} dt = \frac{1}{2\pi} TF(x(t))$$

Donde se le ha dado un nombre especial a la integral, y es el de Transformada de Fourier (es importante destacar que la transformada de Fourier, proviene de la forma general de los coeficientes a_k de la serie de Fourier; es decir es su equivalente para señales aperiódicas). Entonces x(t) se puede representar como :

$$x(t) = Lim_{To\to\infty}(x_p(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} TF(x(t))\varepsilon^{jwt} dw$$

Como TF(x(t)) es función únicamente de w, se suele representar por X(w); y ya que x(t) se obtiene a partir de X(w) tal como indica la ecuación anterior, se denomina Transformada inversa de Fourier a la operación TF^{-1}(X(w))=x(t).

5.1.1 Pares básicos de Transformadas de Fourier

Como ejemplo, se hallará la Transformada de Fourier de x(t) = e^{-at} U(t)

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-jwt} U(t)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+jw)t} dt = -\frac{1}{a+jw} e^{-(a+jw)t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+jw} \quad si \quad a \geq 0$$

En general, no es necesario aplicar la definición de la Transformada de Fourier, para hallar una Transformada de Fourier de una señal específica, basta con tener un conjunto básico de Transformadas de Fourier y unas cuantas propiedades básicas:

PARES BASICOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

x(t)	**X(w)**
$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{a+jw} \quad \text{Re}\{a\} > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} U(t)$	$\frac{1}{(a+jw)^n} \quad \text{Re}\{a\} > 0$
$\delta(t)$	1
U(t)	$\frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$
Sen(wot)	$\frac{\pi}{j}[\delta(w-wo) - \delta(w+wo)]$
Cos(wot)	$\frac{\pi}{j}[\delta(w-wo) + \delta(w+wo)]$
1	$2\pi\delta(w)$
e^{jwot}	$2\pi\delta(w-wo)$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \|t\| < Ts \\ 0 & \|t\| > Ts \end{cases}$	$\frac{2\,\text{sen}(wTs)}{w}$
$\frac{\text{sen}(wot)}{\pi t}$	$\begin{Bmatrix} 1 & \|w\| < wo \\ 0 & \|w\| > wo \end{Bmatrix}$

$ONDACUADRADAPERIODICA$ $x(t) = \begin{cases} 1 & \lvert t \rvert < t_1 \\ 0 & t_1 < \lvert t \rvert < T \end{cases}$ $x(t) = x(t+T)$	$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{sen}(kwot_1)}{k} \delta(w - kwo)$ $wo = \frac{2\pi}{T}$
$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(w - \frac{2\pi k}{T})$

5.1.2 Propiedades de las Transformadas de Fourier

Propiedad	Señal	**Transformada**
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(w) + bX_2(w)$
Desplazamiento en el tiempo	x(t-to)	$X(w)e^{-jwto}$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{-jwot}\,x(t)$	X(w+wo)
Escalamiento en el tiempo	x(at)	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X(\frac{w}{a})$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(w)\,X_2(w)$
Multiplicación	$x_1(t)\;\; x_2(t)$	$X_1(w) * X_2(w)/(2\pi)$
Derivación	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(jw)^n X(w)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{jw} X(w) + \pi X(0)\delta(w)$
Derivación en Frecuencia	$t^n x(t)$	$j^n \frac{d^n X(w)}{dw^n}$
Integración en Frecuencia	$\frac{x(t)}{t}$	$-j \int_{-\infty}^{w} X(w)dw$
Simetría	Sí TF(x(t)) = X(w), Entonces: TF(X(t))=2πx(-w)	
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t) \rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(w) \rvert^2 dw$	

Ejemplos:

a) Hallar la Transformada de Fourier de $e^{-|t|}$.

$e^{-|t|} = e^{-t}U(t) + e^{t}U(-t)$; entonces:

$TF\{e^{-|t|}\} = TF\{e^{-t}U(t)\} + TF\{e^{t}U(-t)\}$, por la propiedad de Linealidad.

De tablas: $TF\{e^{-t}U(t)\} = \dfrac{1}{1+jw}$

Por la propiedad de escalamiento en el tiempo (x(at)=x(-t) con a=-1)

$TF\{e^{t}U(-t)\} = \dfrac{1}{1-jw}$; entonces:

$$TF\{e^{-|t|}\} = \frac{1}{1+jw} + \frac{1}{1-jw} = \frac{2}{1+w^2}$$

b) Hallar la TF{ $e^{-3|t|}\operatorname{sen}(2t)$ }

Por la propiedad de escalamiento en el tiempo, y partiendo del resultado anterior:

$$TF\{e^{-3|t|}\} = \frac{\frac{2}{3}}{1+(\frac{w}{3})^2} = \frac{6}{9+w^2}$$

Por otro lado $e^{-3|t|}\operatorname{sen}(2t) = e^{-3|t|}\left[\dfrac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{j2}\right] = \dfrac{1}{j2}\left[e^{-3|t|}e^{j2t} - e^{-3|t|}e^{-j2t}\right]$

Por la propiedad de Linealidad:

$$TF\{e^{-3|t|}\operatorname{sen}(2t)\} = \frac{1}{j2}\left[TF\{e^{-3|t|}e^{j2t}\} - TF\{e^{-3|t|}e^{-j2t}\}\right]$$

Por la propiedad de desplazamiento en frecuencia:

$$TF\left\{e^{-3|t|}\,\mathrm{sen}(2t)\right\}=\frac{1}{j2}\left[\frac{6}{9+(w-2)^2}-\frac{6}{9+(w+2)^2}\right]=-\frac{j24w}{w^4+10w^2+32}$$

c) Hallar la Transformada de Fourier de $x(t)=\begin{cases} te^{-2t} & -1<t<1 \\ 0 & en\ otro\ valor \end{cases}$

x(t)=te^{-2t}[U(t+1)-U(t-1)]

Por Linealidad: TF{x(t)}=TF{te^{-2t}U(t+1)}-TF{te^{-2t}U(t-1)}

De tablas: $TF\left\{e^{-2t}U(t)\right\}=\frac{1}{2+jw}$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$TF\left\{e^{-2(t+1)}U(t+1)\right\}=e^{-2}TF\left\{e^{-2t}U(t+1)\right\}=\frac{e^{jw}}{2+jw}$; entonces:

$$TF\left\{e^{-2t}U(t+1)\right\}=\frac{e^{2+jw}}{2+jw}$$

Del mismo modo:

$TF\left\{e^{-2(t-1)}U(t-1)\right\}=e^{2}TF\left\{e^{-2t}U(t-1)\right\}=\frac{e^{-jw}}{2+jw}$; y:

$$TF\left\{e^{-2t}U(t-1)\right\}=\frac{e^{-(2+jw)}}{2+jw}$$

Por la propiedad de derivación en la frecuencia:

$$TF\left\{t\left[e^{-2t}U(t+1)\right]\right\}=j\,\frac{d}{dw}\left(\frac{e^{2+jw}}{2+jw}\right)=-\frac{e^{2+jw}}{(2+jw)^2}(1+jw)$$

$$TF\left\{t\left[e^{-2t}U(t-1)\right]\right\}=j\,\frac{d}{dw}\left(\frac{e^{-(2+jw)}}{2+jw}\right)=\frac{e^{-(2+jw)}}{(2+jw)^2}(3+jw)$$

Entonces, por Linealidad:

$$TF\left\{x(t)\right\}=\frac{-1}{(2+jw)^2}\left[(1+jw)e^{2+jw}+(3+jw)e^{-(2+jw)}\right]=\frac{-2}{(2+jw)^2}\left[e^{-(2+jw)}+(1+jw)\cos(2+jw)\right]$$

d) Obtener la Transformada Inversa de X(w)=cos^{2}w

$$X(w)=\left(\frac{e^{jw}+e^{-jw}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{j2w}+2+e^{-j2w}\right)$$

Por Linealidad:

$$TF^{-1}\{X(w)\}=\frac{1}{4}\left(TF^{-1}\{e^{j2w}\}+TF^{-1}\{2\}+TF^{-1}\{e^{-j2w}\}\right)$$

De tablas:

$$TF^{-1}\{e^{-2jw}\}=\delta(t-2)\quad ;\quad TF^{-1}\{e^{2jw}\}=\delta(t+2)\quad y\quad TF^{-1}\{2\}=2\delta(t)$$

Entonces TF^{-1}{X(w)}=(δ(t-2)+2δ(t)+δ(t+2))/4

Ejercicios. Hallar:

a) TF{te^{-2t}sen(4t)U(t)}

b) $TF\left\{\frac{d}{dt}\left(U(-2-t)+U(t-2)\right)\right\}$

c) $TF\{x(t)\}\quad con\quad x(t)=\begin{cases}0 & t<-\frac{1}{2}\\ t+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}\\ 1 & t>\frac{1}{2}\end{cases}$

d) $TF^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2(3w)\cos(w)}{w^2}\right\}$

e) $TF^{-1}\{x(w)\}\quad con\quad X(w)=\begin{cases}2 & 0\le w\le 2\\ 2 & -2\le w\le 0\\ 0 & |w|>2\end{cases}$

5.2. TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Para tiempo discreto, se puede realizar un análisis similar al de tiempo continuo, obteniéndose la siguiente definición de Transformada de Fourier :

$$X(\Omega) = \sum_{k \to -\infty}^{\infty} x[n]\varepsilon^{-j\Omega n}$$

Y la Transformada inversa de Fourier de Tiempo Continuo:

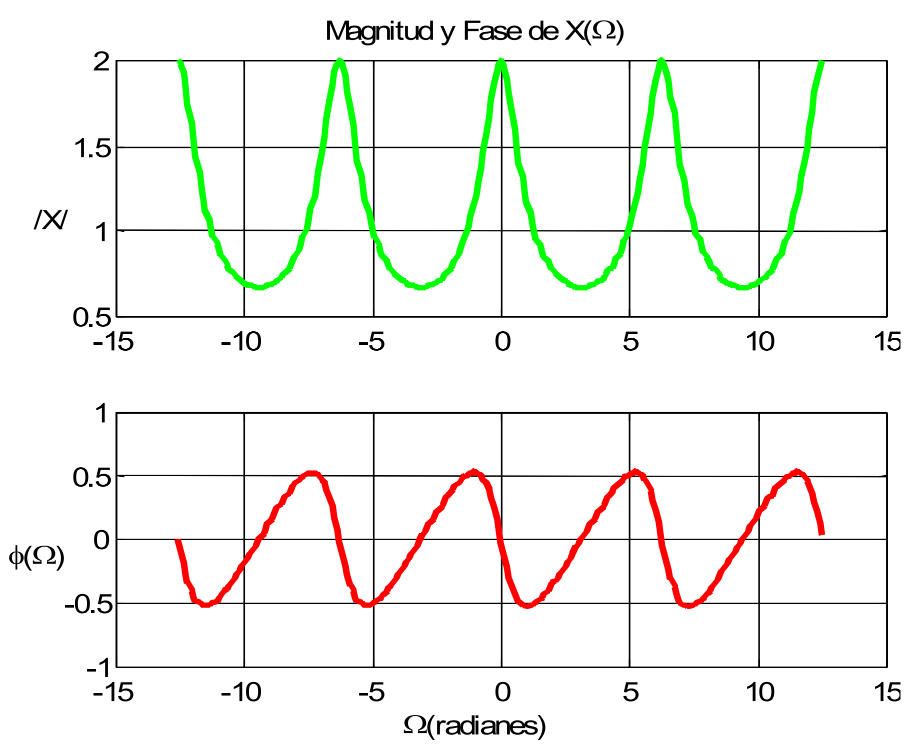
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Ya que $e^{-j\Omega n}$ siempre es periódica, con periodo 2π, $X(\Omega)$ también es una función periódica de Ω, con periodo 2π.

Como ejemplo se hallará la Transformada de Fourier de tiempo discreto de la señal $x[n]=(0.5)^n U[n]$.

$$TF\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n U[n]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon^{-j\Omega n} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\varepsilon^{-j\Omega}}$$

Al graficar, en Matlab, la magnitud y el ángulo de X(w), se obtiene:



Sin embargo, al igual que para tiempo continuo, no es necesario hallar la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto, aplicando su definición. Basta con utilizar una tabla de Transformadas básicas y las propiedades de las Transformadas de Fourier de Tiempo Discreto.

5.2.1 Pares básicos de Transformadas de Fourier

X[n]	**X(Ω)**
$a^n U[n]$ $(\lvert a\rvert <1)$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$\dfrac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}a^n U[n]$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^r}$
$\delta[n]$	1
$U[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\sum_{K=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\Omega-2\pi k)$
$\mathrm{Sen}(\Omega o n)$	$\dfrac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\delta(\Omega-\Omega o-2\pi k)-\delta(\Omega+\Omega o-2\pi k))$
$\mathrm{Cos}(\Omega o n)$	$\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\delta(\Omega-\Omega o-2\pi k)+\delta(\Omega+\Omega o-2\pi k))$
1	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$
$e^{j\Omega o n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega o-2\pi k)$
$\dfrac{\mathrm{sen}(\Omega o n)}{n\pi}$	$\begin{cases}1 & \lvert\Omega\rvert<\Omega o\\ 0 & \lvert\Omega\rvert>\Omega o\end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$	$\dfrac{2\pi}{N}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\dfrac{2\pi k}{N})$

5.2.2 Propiedades de las Transformadas de Fourier

Propiedad	**Señal**	**Transformada**
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
Desplazamiento en el Tiempo	x(n-no)	$X(\Omega)e^{-j\Omega no}$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{-j\Omega on}\, x[n]$	$X(\Omega+\Omega o)$
Inserción de Ceros	$\begin{cases} x[n/k], & si\ n\ es\ múltiplo\ de\ k \\ 0, & si\ n\ no\ es\ múltiplo\ de\ k \end{cases}$	$kX(k\Omega)$
Escalamiento en el Tiempo	X[kn]	$\frac{1}{k}X\left(\frac{\Omega}{k}\right)$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$X_1(w)*X_2(w)$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(\Omega)\, X_2(\Omega)$
Inversión en el Tiempo	x[-n]	$X(-\Omega)$
Diferenciación en Frecuencia	$n^m x[n]$	$j^m \frac{d^m X(\Omega)}{d\Omega^m}$
Simetría	Sí TF(x[n]) = $X(\Omega)$, Entonces: TF(X[n])=$2\pi x(-\Omega)$	
Relación de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lvert X(\Omega)\rvert^2\, d\Omega$	

Ejemplos:

a) Hallar la $TF\{a^{|n|}\} \quad a<1$

$$a^{|n|} = a^n U[n] + a^{-n} U[-(n+1)]$$

Es importante destacar, que en tiempo discreto, se debe utilizar U[-(n+1)] en lugar de U[-n], ya que U[n] y U[-n] coinciden en n=0 y por tanto no serían mutuamente excluyentes.

Por Linealidad:

$$TF\left\{a^{|n|}\right\} = TF\left\{a^{n}U[n]\right\} + TF\left\{a^{-n}U[-(n+1)]\right\}$$

De las tablas: $TF\left\{a^{n}U[n]\right\} = \dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$

Por la propiedad de inversión en el tiempo:

$$TF\left\{a^{-n}U[-n]\right\} = \frac{1}{1-ae^{j\Omega}}$$

Por la propiedad, de desplazamiento en el tiempo:

$TF\left\{a^{-(n+1)}U[-(n+1)]\right\} = a^{-1}TF\left\{a^{-n}U[-(n+1)]\right\} = \dfrac{e^{j\Omega}}{1-ae^{j\Omega}}$; entonces:

$TF\left\{a^{-n}U[-(n+1)]\right\} = \dfrac{ae^{j\Omega}}{1-ae^{j\Omega}}$; resumiendo:

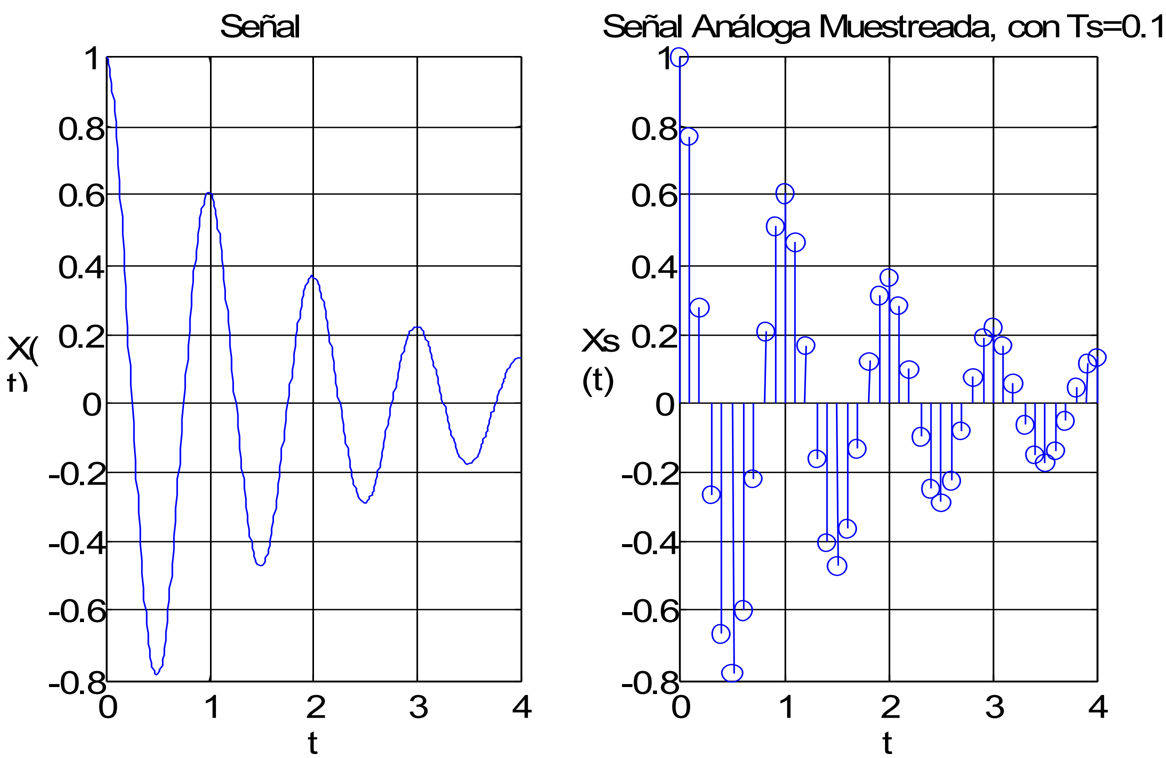
$$TF\left\{a^{|n|}\right\} = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{ae^{j\Omega}}{1-ae^{j\Omega}} = \frac{1-a^{2}}{1-2a\cos(\Omega)+a^{2}}$$

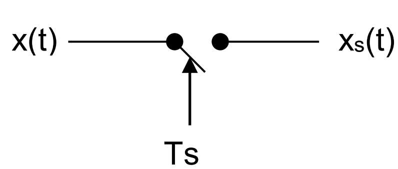
6.0 TEOREMA DEL MUESTREO

6.1 TIEMPO CONTINUO

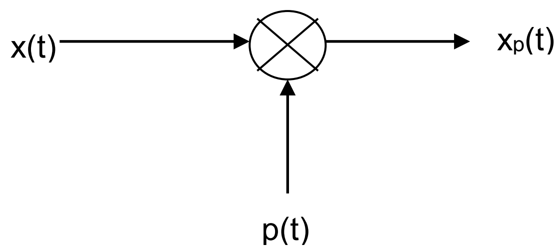
6.1.1 Definición.

El proceso de muestrear una señal de tiempo continuo se puede considerar, en forma simplificada, como la salida de un interruptor ideal normalmente abierto, el cual cierra periódicamente cada Ts (periodo de muestreo) segundos y solo dura cerrado un instante de tiempo infinitesimal; de modo que se toma solo una *muestra* de la señal de entrada cada Ts segundos:





Matemáticamente el interruptor ideal, se puede modelar, como el producto de la señal x(t) por un tren de impulsos, p(t):



Donde $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kTs)$, es un tren de impulsos periódico, con periodo Ts, y de duración infinitesimal.

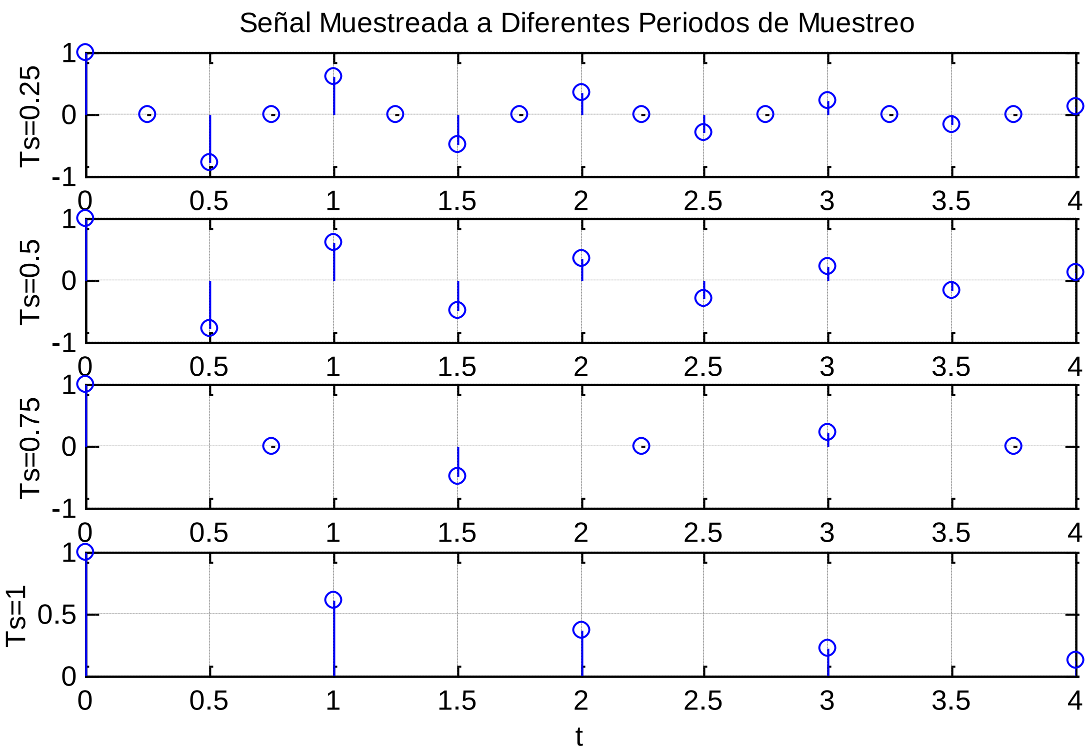
Teniendo en cuenta las propiedades de la función $\delta(t)$, la salida $x_p(t)$, será:

$$x_p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kTs) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kTs) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kTs)\delta(t - kTs)$$

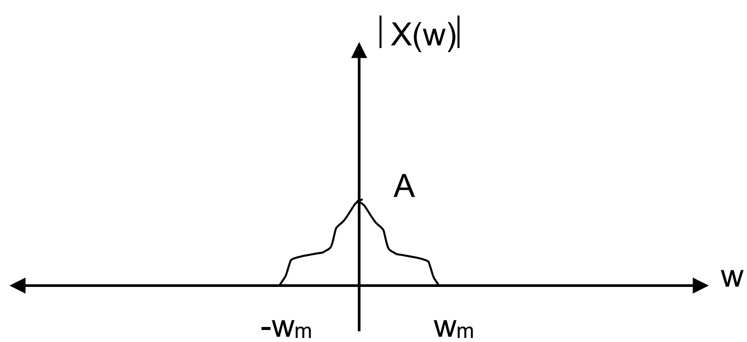
Es claro que $x_s(t) \neq x_p(t)$, ya que $x_p(t)$ está compuesta por funciones Delta de Dirac, sin embargo y como veremos a continuación, es ideal para predecir el comportamiento de la señal muestreada, en el dominio de la frecuencia.

El problema de muestrear una señal, consiste en saber si la muestra tomada contiene la suficiente información de modo que, se pueda recuperar la señal original en forma unívoca. Por ejemplo, si muestreamos la señal anterior con un periodo de muestreo cada vez mayor, tal como se muestra en la figura de la página siguiente, es claro que se va perdiendo la forma de la señal original y termina por confundirse como proveniente de otra señal distinta.

Para determinar si una señal muestreada, puede recuperarse unívocamente a partir de sus muestras, es necesario considerar el efecto del muestreo, en el dominio de la frecuencia.

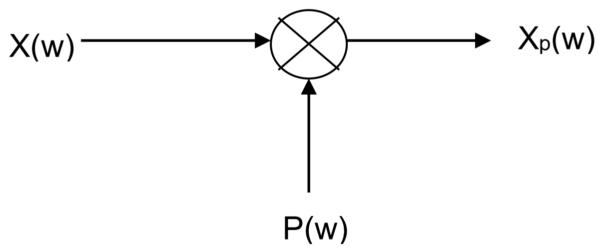


Consideremos el siguiente espectro en frecuencia, proveniente de una señal cualquiera, con un ancho de banda finito:



La forma exacta del espectro en frecuencias de la señal, no es importante, solo que la señal sea de banda limitada; es decir que su espectro en frecuencias ($|X(w)|$) existe solo hasta una frecuencia máxima w_m.

Ahora, consideremos el efecto que tiene el muestrear una señal, en el dominio de la frecuencia, aplicando la Transformada de Fourier al muestreo con un tren de impulsos:



Donde X(w) es la transformada de Fourier de la señal y P(w) es la Transformada de Fourier del tren de impulsos. De tablas:

$$P(w) = TF\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kTs)\right\} = \frac{2\pi}{Ts}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi k}{Ts})$$

La multiplicación en el dominio del tiempo, se convierte en convolución en el dominio de la frecuencia:

$$X_p(w) = TF\{x(t)\,p(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(w)*P(w) = \frac{1}{2\pi}X(w)*\left(\frac{2\pi}{Ts}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi k}{Ts})\right)$$

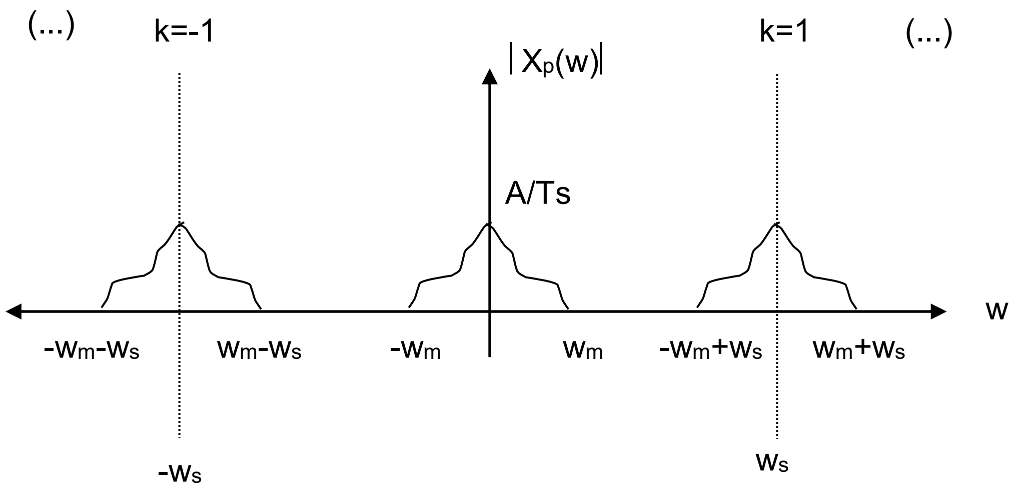
$$X_p(w) = \frac{1}{Ts}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(w)*\delta(w-\frac{2\pi k}{Ts})$$

Teniendo en cuenta que $w_s=2\pi/Ts$, la frecuencia de muestreo, y por la propiedad de la convolución con la función Delta-Dirac:

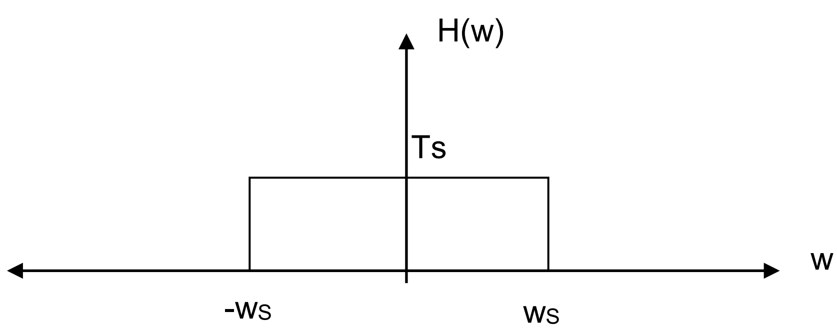
$$X_p(w) = \frac{1}{Ts}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(w-\frac{2\pi k}{Ts}) = \frac{1}{Ts}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(w-kw_S)$$

En palabras: Una señal muestreada con un tren de impulsos, a una frecuencia de muestreo w_S, se repite indefinidamente, desplazada k veces la frecuencia de muestreo y amplificada por un factor (1/Ts), en el dominio de la frecuencia.

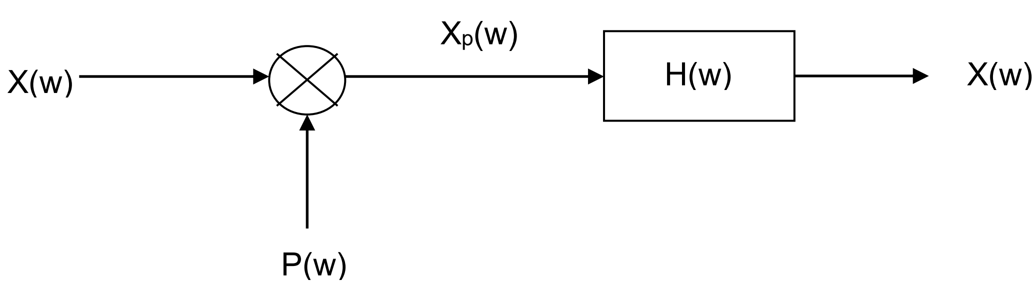
En forma gráfica:



Para recuperar la señal original, bastaría con aplicar un filtro pasabajas ideal, con frecuencia de corte $w_c = \frac{w_m + (-w_m + w_S)}{2} = \frac{w_S}{2}$; con ganancia Ts:

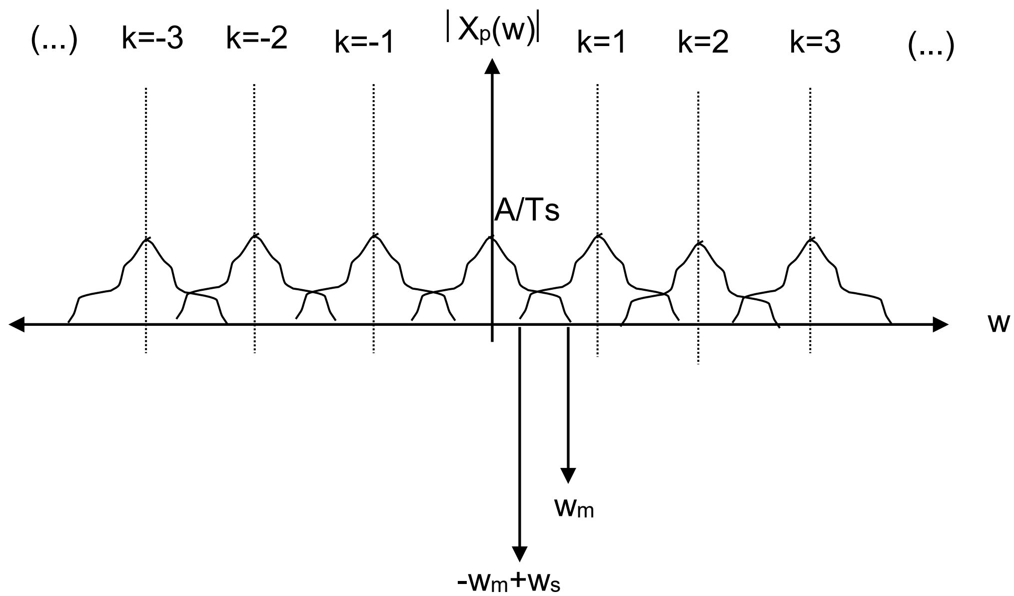


Esquemáticamente:



En resumen: Es posible recuperar la señal original, a partir de sus muestras ($x_p(t)$), mediante un filtrado adecuado. No obstante, el lector atento, notará que si sucediera que $-w_m+w_s < w_m$, entonces la señal muestreada presentaría traslape en el dominio de la frecuencia:

Señal Muestreada con $-w_m+w_s < w_m$



Una señal muestreada, que presenta traslape en el dominio de la frecuencia, no podría ser recuperada a través de un filtro. Luego la condición, para que una señal de banda limitada, pueda ser recuperada, sin distorsión, a partir de sus muestras es que:

$$-w_m + w_S > w_m \quad ó$$

$$\boxed{w_S > 2w_m}$$

Este último resultado, constituye el denominado Teorema del muestreo:

Para poder recuperar unívocamente una señal muestreada, a partir de sus muestras, es necesario que la frecuencia de muestreo sea superior al doble de la máxima frecuencia presente en la señal original (el doble del ancho de banda).

Usualmente al valor $2w_m$ se le denomina razón de Nyquist. En este momento, es evidente, que la señal a muestrear ha de tener un ancho de banda finito, es decir debe ser de banda limitada, de lo contrario sería imposible recuperarla, a partir de sus muestras. Esto implica, que antes de muestrear una señal, ha de pasar previamente por una etapa de filtrado.

Ejemplos:

a) Determinar la razón de Nyquist de la señal $x(t) = \left(\frac{\text{sen}(4000\pi t)}{\pi t} \right)^2$

Por trigonometría se sabe que $\text{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$, luego: $x(t) = \frac{1-\cos(8000\pi t)}{2\pi t^2}$

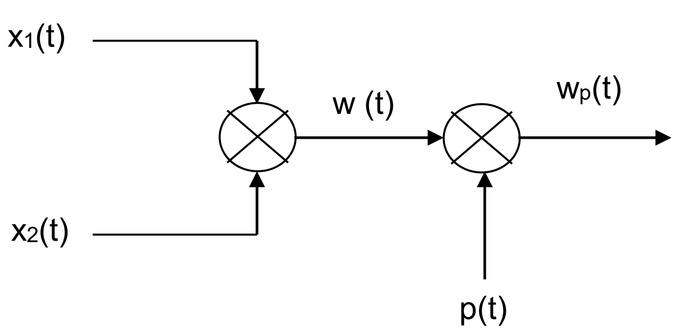
De las propiedades de la Transformada de Fourier, sabemos que al dividir una señal por t, estamos integrando en el dominio de la frecuencia. La integración de una señal en el dominio de la frecuencia, no cambia su ancho de banda. Por consiguiente la frecuencia de x(t) es la frecuencia de cos(8000πt), es decir: w_m=8000π y la razón de Nyquist:16000π.

b) Sea $x(t) = \sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2} \right)^k \text{sen}(k\pi t)$. ¿Cuál debe ser el periodo de muestreo de esta señal, para que no se presente traslape en el dominio de la frecuencia?.

Es claro, que la máxima frecuencia de x(t) es 5π, luego w_s > 10π y $Ts < \frac{2\pi}{w_s} < 0.2 \; segundos$

Ejercicios.

1. Si la señal del ejemplo b) se muestrea con un periodo de muestreo Ts=0.2 seg. Y se pasa por un filtro pasabajas ideal con frecuencia de corte w_c=5π . Determinar la señal de salida del filtro, en el dominio del tiempo.
2. Consideremos 2 señales de banda limitada $x_1(t)$ con w_{m1} y $x_2(t)$ con w_{m2}. Se dice que la señal análoga $x_2(t)$ modula a la señal análoga $x_1(t)$, cuando realizamos el producto entre ellas. Determinar el máximo valor del periodo de muestreo que se puede aplicar al producto de estas dos señales w (t) sin que ocurra traslape en el dominio de la frecuencia de la señal muestreada $w_p(t)$.



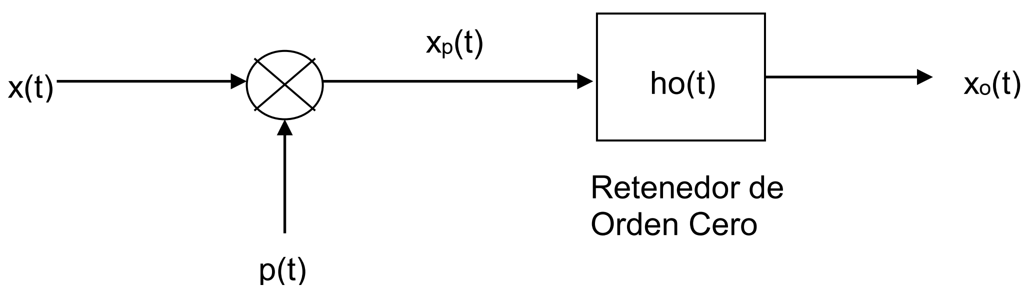
6.1.2 Filtros de Interpolación.

Es claro, que aunque matemáticamente es más sencillo entender el efecto que tiene el muestrear una señal, en el dominio de la frecuencia, utilizando un tren de impulsos. En la práctica, los impulsos son difíciles de generar y de transmitir; así como obtener un filtro con un comportamiento cercano al ideal.

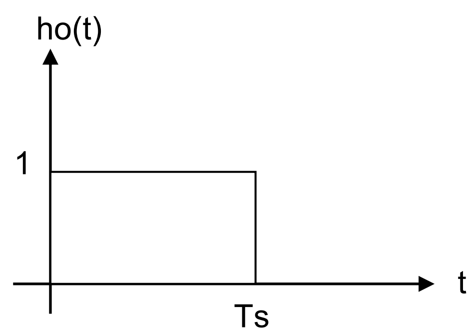
En la práctica, el dispositivo encargado de discretizar una señal análoga es el Conversor Análogo/Digital. Normalmente, cuando la señal varía más rápido que el tiempo de conversión del convertidor A/D; es necesario *retener* la señal el tiempo suficiente para que el conversor A/D pueda realizar la conversión. Este dispositivo que precede al A/D, se denomina de Muestreo y Retención (Sampling and Holding: S&H).

6.1.2.1 Filtro Retenedor de orden cero. Matemáticamente el dispositivo de Muestreo y Retención, S&H, se puede modelar así:

S&H



Donde la función de transferencia en el dominio del tiempo, ho(t), del Filtro Retenedor de Orden cero es:



La salida $x_o(t)$ se puede obtener analíticamente, recordando que:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kTs)\delta(t-kTs)$$

Luego la salida del filtro retenedor de orden cero será:

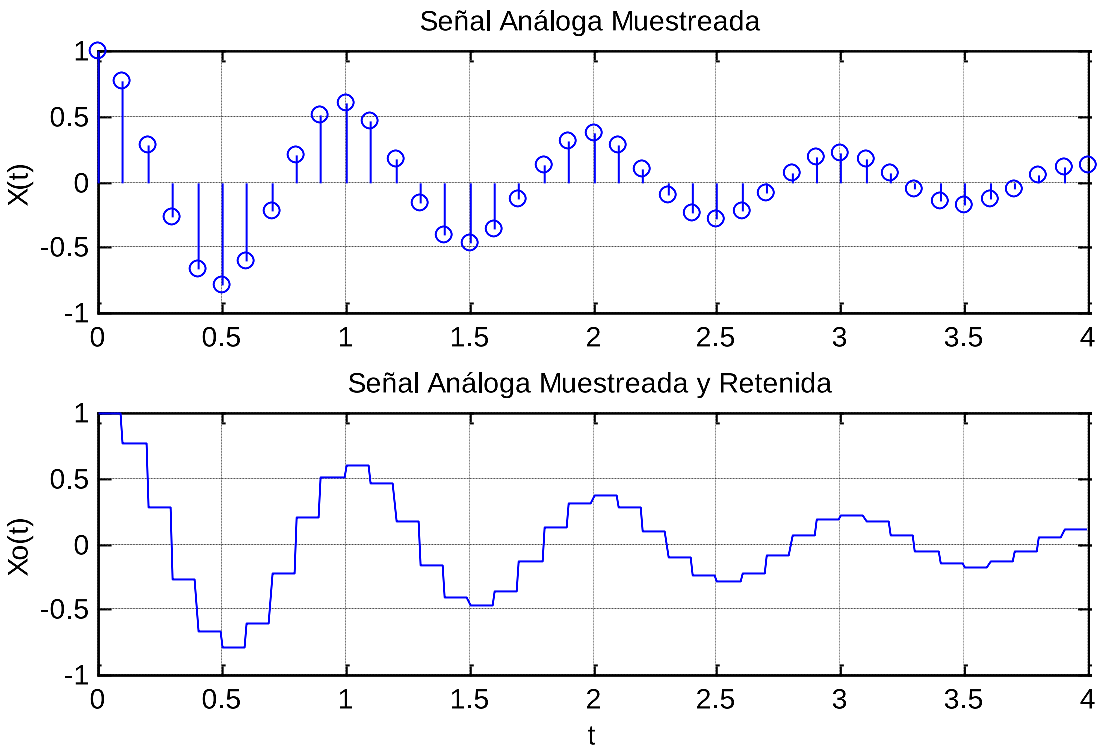
$$x_0(t) = x_p(t) * h_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kTs)\delta(t-kTs) * h_0(t)$$

Por la propiedad de la convolución con la función Delta-Dirac:

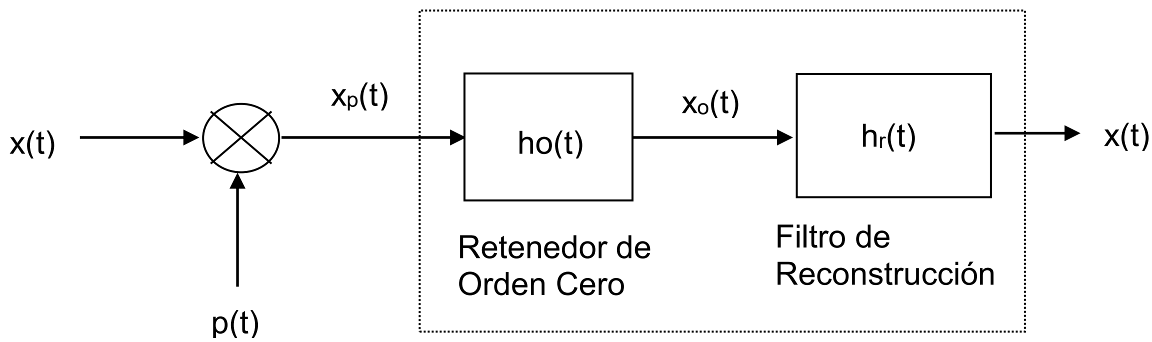
$$x_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kTs)h_0(t-kT_S)$$

Ya que ho(t) tiene una magnitud de “1”, x(kTs)ho(t-kTs) tendrá una magnitud de x(kTs), es decir el valor de la señal original en cada instante de muestreo y como la duración de ho(t) es Ts, concluimos que $x_o(t)$ no es mas que la retención de las muestras tomadas a la señal original durante un periodo de muestreo.

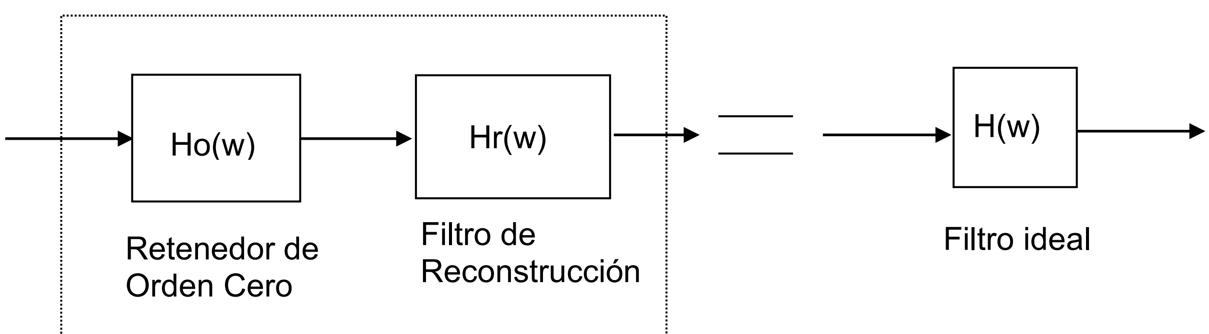
Gráficamente:



Claramente la salida del filtro retenedor de orden cero, es una aproximación de la señal análoga original. Si se desea recuperar la forma exacta de la señal, es necesario emplear un filtro de reconstrucción adecuado, posterior al retenedor de orden cero:



De acuerdo a lo visto anteriormente, para recuperar la señal original a partir de las muestras provenientes de un tren de pulsos $x_p(t)$, los 2 sistemas encerrados con líneas punteadas, deben ser equivalentes a un filtro pasabajas ideal, con frecuencia de corte w_s y ganancia Ts. Luego es sencillo deducir, cuál ha de ser la forma de la función de transferencia, en el dominio de la frecuencia, del filtro reconstructor:



Entonces:

$$H(w) = Ho(w)Hr(w) \quad \Rightarrow \quad Hr(w) = \frac{H(w)}{Ho(w)}$$

ho(t) se puede definir como $ho(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$, de tablas:

$$si \quad x(t) = \begin{cases} 1 & -T < t < T \\ 0 & otro\ valor \end{cases} \quad TF\{x(t)\} = \frac{2\,\mathrm{sen}(wT)}{w}$$

Haciendo T=Ts/2 y desplazando x(t) a la derecha: x(t-Ts/2)=ho(t). Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$Ho(w) = TF\left\{x\left(t - \frac{Ts}{2}\right)\right\} = e^{-jw\frac{Ts}{2}}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{wTs}{2})}{w}\right)$$

Por otro lado $H(w) = \begin{cases} Ts & -\frac{w_S}{2} < w < \frac{w_S}{2} \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$; Entonces:

$$Hr(w) = \frac{H(w)}{Ho(w)} = \begin{cases} \dfrac{e^{jw\frac{Ts}{2}}}{\left[\dfrac{\mathrm{sen}\left(\frac{wTs}{2}\right)}{\left(\frac{wTs}{s}\right)}\right]} & -\frac{w_S}{2} < w < \frac{w_S}{2} \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$$

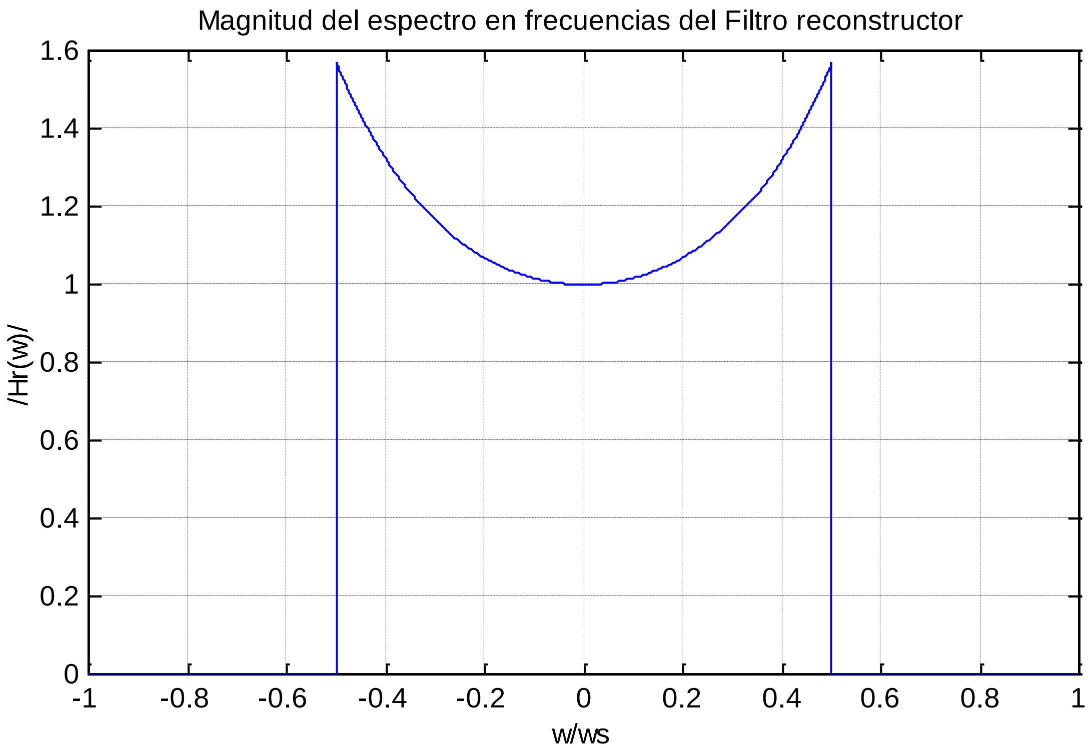
En este momento, es útil introducir la función sinc(θ), que se define como:

$$sinc(\theta) = \frac{\mathrm{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

Definiendo $\pi\theta = \frac{wTs}{2}$, entonces $\theta = \frac{wTs}{2\pi} = \frac{w}{w_S}$. Lo que permite simplificar la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor como:

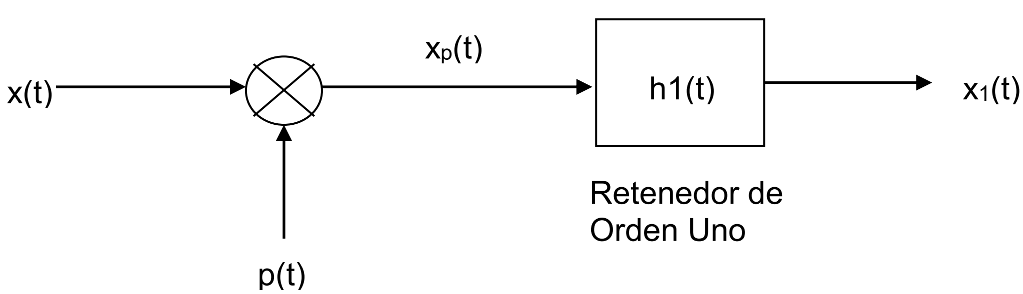
$$Hr(w) = \begin{cases} \dfrac{e^{j\pi\frac{w}{w_S}}}{sinc\left(\frac{w}{w_S}\right)} & -\frac{w_S}{2} < w < \frac{w_S}{2} \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$$

Gráficamente:

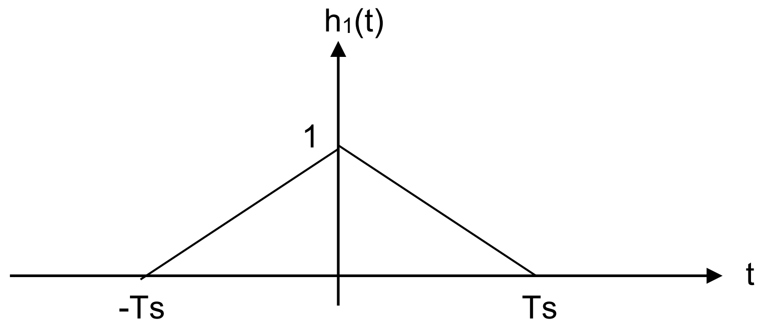


La respuesta en frecuencia del filtro reconstructor, para el retenedor de orden cero, es más parecida a la respuesta de los filtros reales; que la del filtro ideal. Sin embargo, en la práctica, la salida del filtro retenedor de orden cero, puede ser una buena aproximación de la señal original y no se requeriría filtro reconstructor.

6.1.2.1 Filtro Retenedor de orden uno. Otro tipo de retenedor, que realiza no una retención, sino una interpolación lineal entre las muestras, se denomina filtro retenedor de orden uno:



Donde la función de transferencia en el dominio del tiempo, $h_1(t)$, del Filtro Retenedor de Orden uno es:



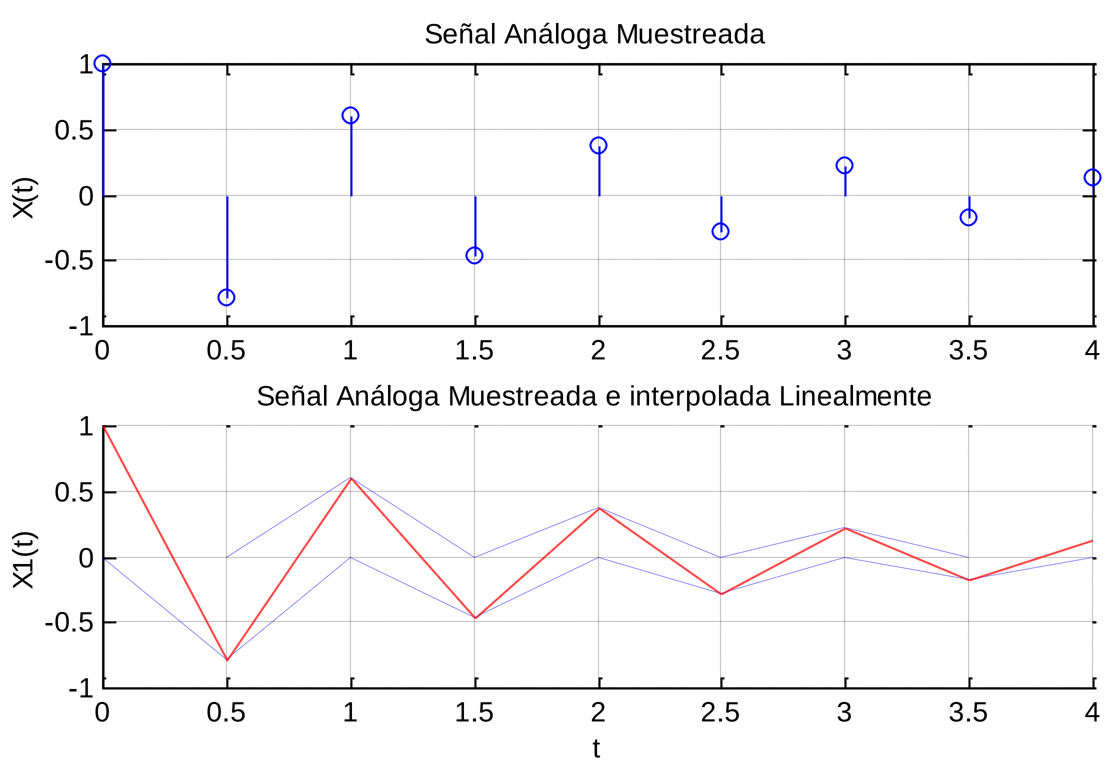
La salida del filtro retenedor de orden uno será:

$$x_1(t) = x_p(t) * h_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kTs)\delta(t - kTs) * h_1(t)$$

Por la propiedad de la convolución con la función Delta-Dirac:

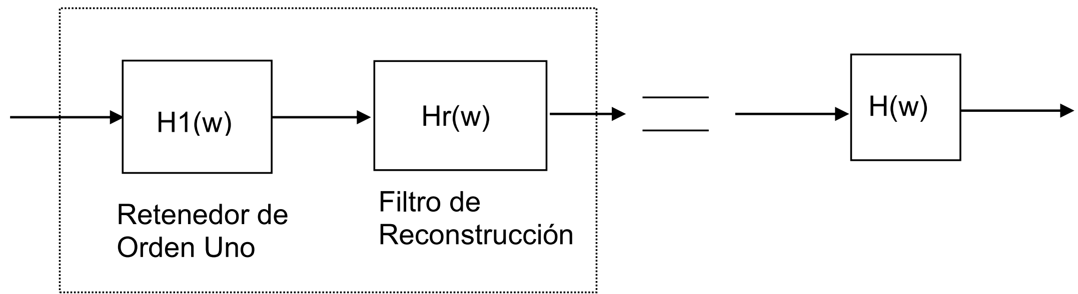
$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kTs) h_1(t - kT_S)$$

Es decir, $x_1(t)$ corresponde a la función h1(t), con un valor máximo igual al valor de la señal en cada muestra x(kTs) y desplazada en el tiempo. Un ejemplo, en forma gráfica:



Normalmente, la interpolación lineal, es una buena aproximación a la señal original; sin embargo si se desea recuperar la forma exacta de la señal original,

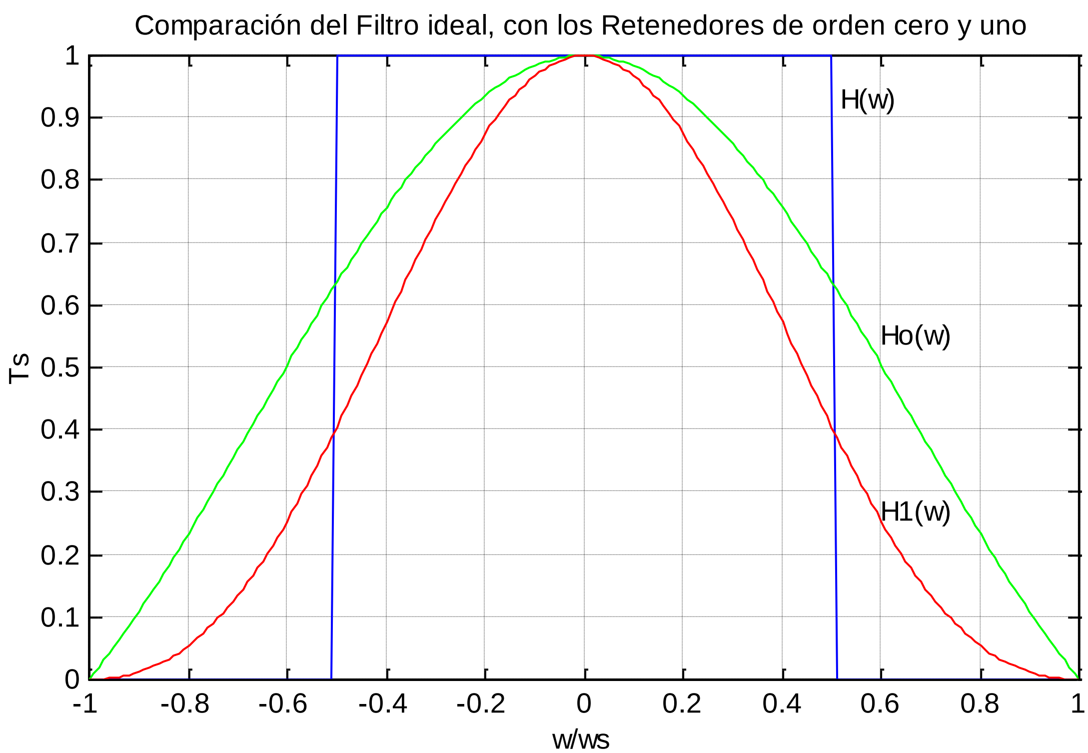
Si se deseara recuperar en forma exacta la señal original, habría que agregar un filtro reconstructor adecuado:



Se deja como ejercicio, demostrar que la respuesta en frecuencia del filtro reconstructor para el retenedor de orden uno es:

$$Hr(w) = \frac{1}{sinc^2\left(\frac{w}{w_S}\right)}$$

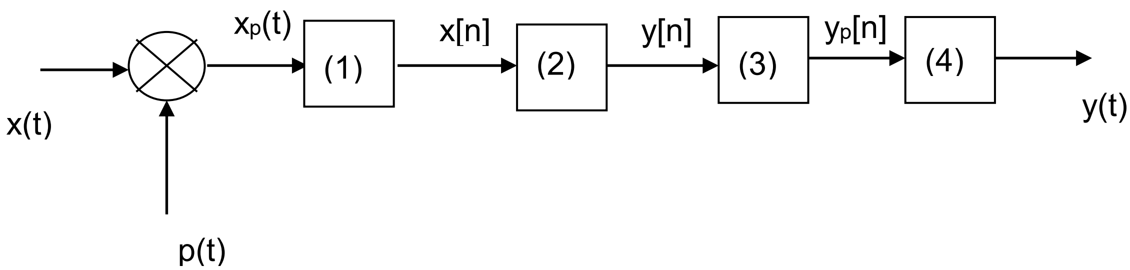
La siguiente gráfica permite comparar la respuesta en frecuencia del filtro ideal, con la de los filtros retenedores de orden cero y uno:



6.1.3 Procesamiento Discreto de Señales.

En muchos casos es más flexible realizar un procesamiento digital de una señal análoga, que en forma continua. Para ello es necesario, discretizar primero la señal análoga, procesarla en forma discreta y convertir la salida deseada, de nuevo al dominio del tiempo continuo. Ejemplos de este procesamiento son: el Control por computadora de cualquier proceso industrial, el filtrado y reconstrucción de sonido e imágenes, la imagenología en medicina, etc.

El diagrama de bloques para el procesamiento discreto de una señal, es:

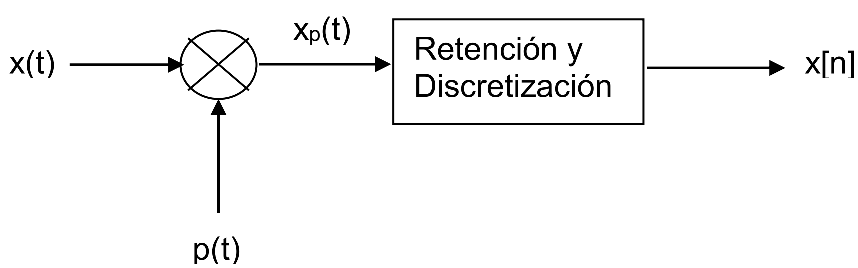


Donde :

(1): Retención y discretización
(2): Procesamiento Discreto
(3): Conversión de la salida discreta a un tren de impulsos
(4): Filtro Ideal

En la práctica el muestreo con el tren de impulsos y el bloque (1) corresponden a un conversor A/D, y los Bloques (3) y (4) a un conversor D/A.

Analicemos el proceso de conversión de una señal de tiempo continuo a discreto:



En realidad x[n] corresponde a x(nTs), es decir a las muestras de la señal de tiempo continuo en intervalos regulares de tiempo Ts. Como se vio al principio del capítulo: $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nTs)\delta(t - nTs)$.

Si aplicamos la Transformada de Fourier a $x_p(t)$:

$$X_p(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nTs)TF\{\delta(t-nTs)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nTs)e^{-jwnTs}$$

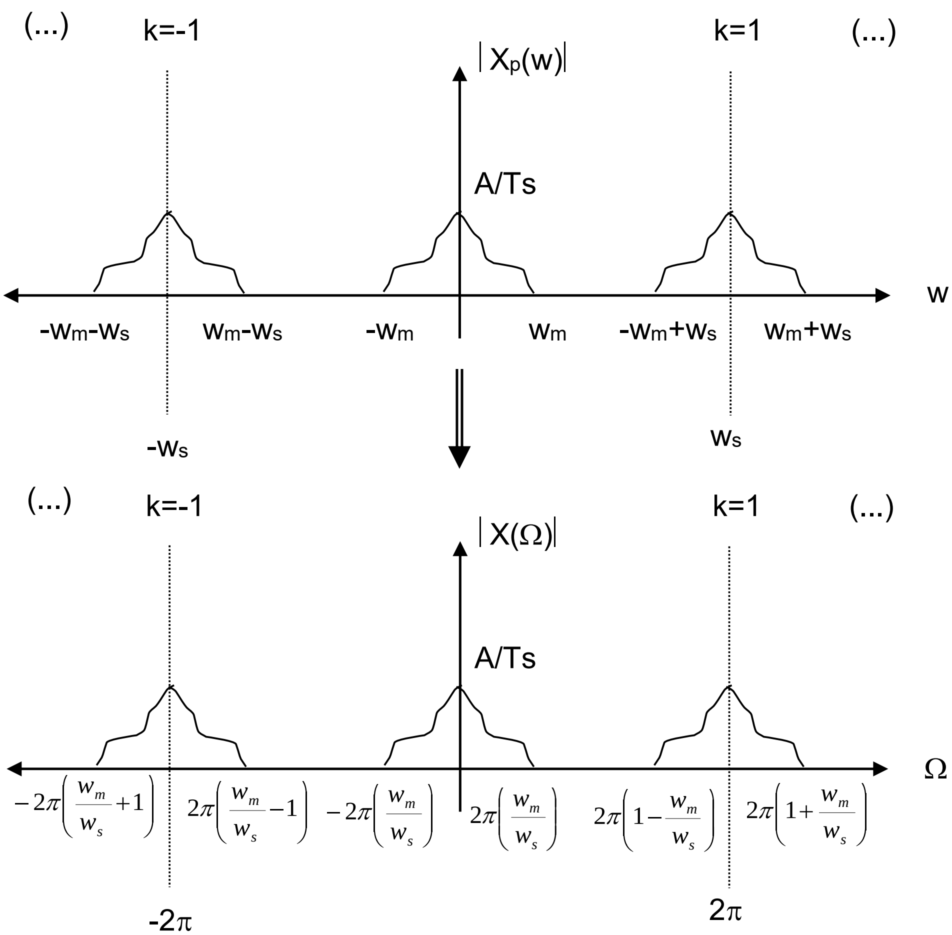
Por otro lado la Transformada de Fourier de tiempo discreto de x[n] es:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nTs)e^{-j\Omega n}$$

$X_p(w)$ es la entrada al sistema de retención y discretización, mientras que $X(\Omega)$ es su salida. Comparando ambas señales, es claro que lo que hace el sistema de discretización, matemáticamente, es realizar el cambio de variable $wTs \rightarrow \Omega$; es decir cambiar w por wTs. Esquemáticamente:

$X_p(w) \longrightarrow$ $\boxed{\text{Retención y Discretización}}$ $\longrightarrow Xp(wTs)=X(\Omega)$

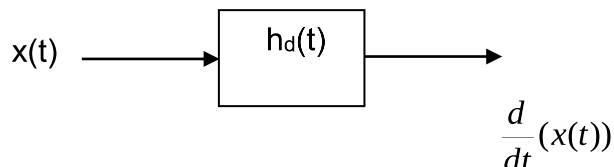
Otra diferencia fundamental, entre $X_p(w)$ y $X(\Omega)$, es que esta última es periódica, con periodo 2π. Al cambiar w por wTs se cambia $w_sT_s=2\pi$ y $w_mT_s=2\pi w_m/T_s$:



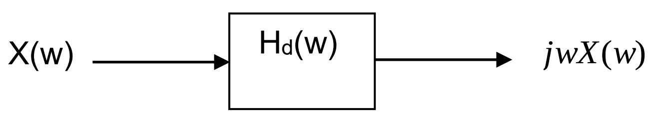
El sistema que convierte la salida discreta y[n], en un tren de impulsos $y_p(t)$, simplemente realiza el proceso inverso, al visto anteriormente; es decir cambiar Ω por Ω/Ts. A continuación veremos 2 ejemplos de procesamiento discreto de señales:

6.1.3.1 Diferenciador Discreto. Una forma común de realizar control, consiste en utilizar un PID (Control Proporcional Integral y Derivativo), en este caso consideraremos un sistema que realiza la parte de obtener la derivada de una señal analógica.

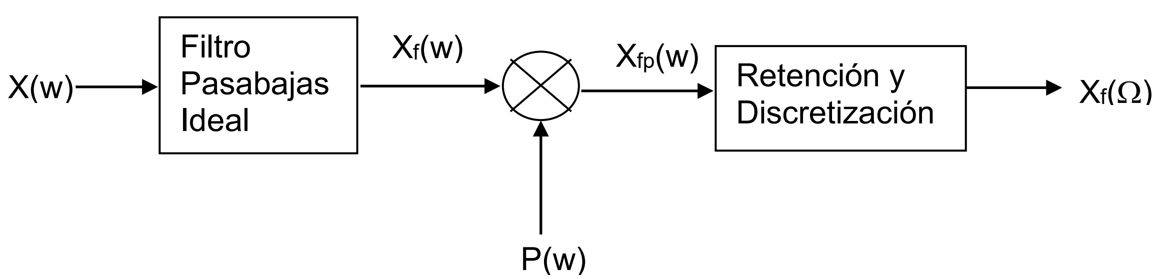
Un sistema diferenciador de tiempo continuo debe cumplir:



Aplicando la Transformada de Fourier al sistema anterior:



De donde se deduce que $H_d(w) = jw$. Para realizar un procesamiento discreto de la señal, hay que muestrear la señal análoga, pero por el teorema del muestreo sabemos que la señal análoga ha de ser de banda limitada y con un ancho de banda máximo de $w_s/2$. Por tanto la señal análoga ha de filtrarse primero, con un filtro ideal pasabajas de frecuencia de corte $w_c = w_s/2$

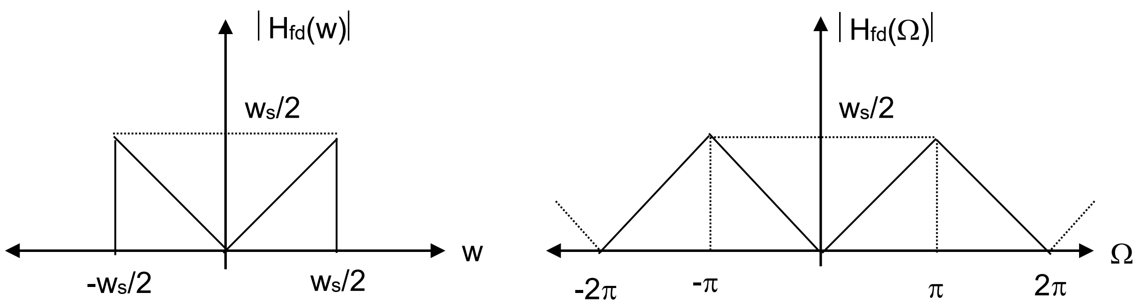


Donde $X_f(w)$, representa la señal filtrada:

$$X_f(w) = \begin{cases} X(w) & -\frac{w_s}{2} < w < \frac{w_s}{2} \\ 0 & otro\, valor \end{cases}$$

Una vez filtrada, muestreada y discretizada, la señal ha de pasar por un procesamiento discreto que sea equivalente a la difereciación de tiempo continuo.

Teniendo en cuenta que la respuesta en frecuencia de un sistema diferenciador de tiempo continuo es $H_d(w) = jw$, su sistema equivalente de tiempo discreto se hallará cambiando w por Ω/Ts, es decir: $H_d(\Omega) = j\Omega/Ts$. Como la señal $X_f(w)$ es de banda limitada, el sistema $H_d(\Omega)$ también será de banda limitada a $\Omega_c = w_sT_s/2 = \pi$ y periódica con periodo 2π, por ser Transformada de Tiempo Discreto:



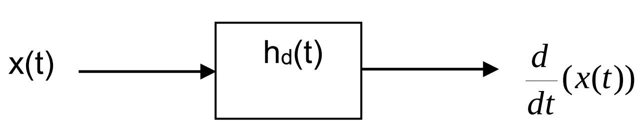
Teniendo la respuesta en frecuencia del sistema discreto, podemos obtener su respuesta en el dominio del tiempo, hallando la Transformada Inversa de Fourier: $h_d(t) = TF^{-1}\{H_{fd}(\Omega)\}$. Donde:

$$H_{fd}(\Omega) = \frac{j\Omega}{Ts}\left[U(\Omega+\pi) - U(\Omega-\pi)\right] \quad \textit{periódica} \quad \textit{con} \quad \textit{periodo} \quad 2\pi$$

Para hallar la transformada inversa de esta función, sería necesario utilizar simetría (no se encuentra una función similar en las tablas) y el método para hallar la Transformada inversa, variará dependiendo de la forma particular que tenga $H_{fd}(\Omega)$.

Un enfoque más práctico y general, consiste en suponer una señal de entrada al sistema de tiempo continuo que queremos discretizar x(t):

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{Ts}\right)}{\pi t}$$



Claramente su salida será:

$$y(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{Ts}\right)}{\pi t}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi t}{Ts}\right)}{tTs}-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{Ts}\right)}{\pi t^{2}}$$

Luego procedemos a discretizar la entrada y la salida del sistema, teniendo en cuenta que t=nTs:

$$x[n]=\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi Ts}=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ \frac{1}{Ts} & n=0\end{cases}$$

$$y[n]=\frac{\cos(n\pi)}{nTs^{2}}-\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{\pi n^{2}Ts^{2}}$$

La razón para seleccionar x(t) tal como fue definida, es que esta señal discretizada (x[n]) equivale a la función δ[n]/Ts, por tanto la respuesta del sistema a esta señal (y[n]) será h_d[n]/Ts. Es decir:

$$\frac{\delta[n]}{Ts}\longrightarrow\boxed{h_d[n]}\longrightarrow y[n]=\frac{h_d[n]}{Ts}$$

$$h_d[n]=y[n]Ts=\frac{\cos(n\pi)}{nTs}-\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{\pi n^{2}Ts}=\frac{n\pi\cos(n\pi)-\operatorname{sen}(n\pi)}{\pi n^{2}Ts}$$

Si n ≠ 0:

$$h_d[n]=\frac{n\pi(-1)^{n}-0}{\pi n^{2}Ts}=\frac{(-1)^{n}}{nTs}$$

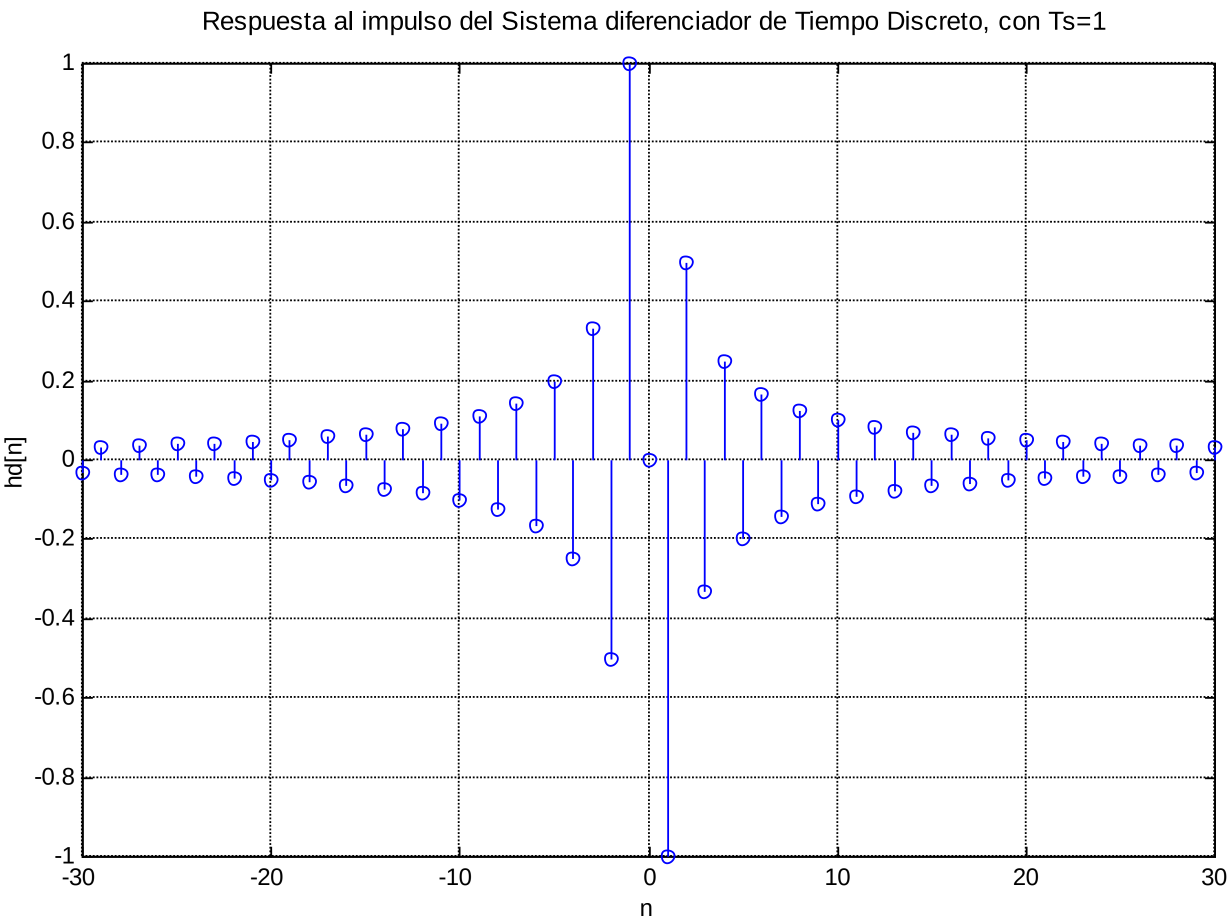
Para n=0, se aplica la regla de L'Hôpital:

$$h_d[n]=Lím_{n\to 0}\left[\frac{\frac{d}{dn}\left(n\pi\cos(n\pi)-\operatorname{sen}(n\pi)\right)}{\frac{d}{dn}\left(\pi n^{2}Ts\right)}\right]=Lím_{n\to 0}\left[\frac{-\operatorname{sen}(n\pi)}{2Ts}\right]=0$$

En resumen, la función de transferencia del sistema de tiempo discreto que permite realizar la derivación de una señal análoga es:

$$h_d[n] = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{nTs} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

Cuya gráfica es:



6.1.3.2 Retardador Discreto. Retrasar una señal de Tiempo continuo, con dispositivos análogos, es complicado; por el contrario en tiempo discreto es muy sencillo. El sistema de tiempo continuo, sería:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_r(t)} \longrightarrow x(t-to)$$

Procediendo, como en el caso anterior, suponemos una entrada x(t):

Cuya salida será:

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{Ts}\right)}{\pi t}$$

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi (t-to)}{Ts}\right)}{\pi (t-to)}$$

Discretizando:

$$x[n] = \frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{\pi n Ts}$$

$$y[n] = \frac{\operatorname{sen}((n-no)\pi)}{\pi (n-no) Ts}$$

Donde no=to/Ts. Luego h_r[n] será:

$$y[n] = \frac{\operatorname{sen}((n-no)\pi)}{(n-no)\pi} = \begin{cases} 1 & n = no \\ 0 & n \neq no \end{cases} = \delta[n-no]$$

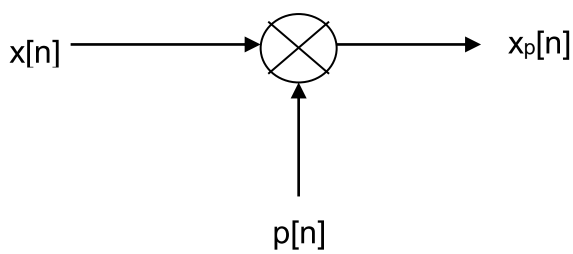
6.2 TIEMPO DISCRETO

Cuando muestreamos una señal de tiempo continuo, utilizando una frecuencia de muestreo adecuada (mas del doble del ancho de banda de la señal continua), resulta un número considerable de muestras. Por ejemplo una simple palabra en muestreada a 16 Khz (en formato mono) origina en promedio, unas 10000 muestras.

Utilizar 10000 muestras puede ocasionar tiempos extremadamente largos de procesamiento. La opción consiste en volver a muestrear la señal discretizada, sin perder información útil, reduciendo considerablemente los tiempos de procesamiento.

Al igual que en tiempo continuo, el muestreo de una señal de tiempo discreto se puede modelar

como la multiplicación de la señal con un tren de impulsos, esta vez de tiempo discreto:



Donde $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kNs)$, es un tren de impulsos periódico, con periodo de muestreo Ns.

Luego la salida $x_p[n]$, será:

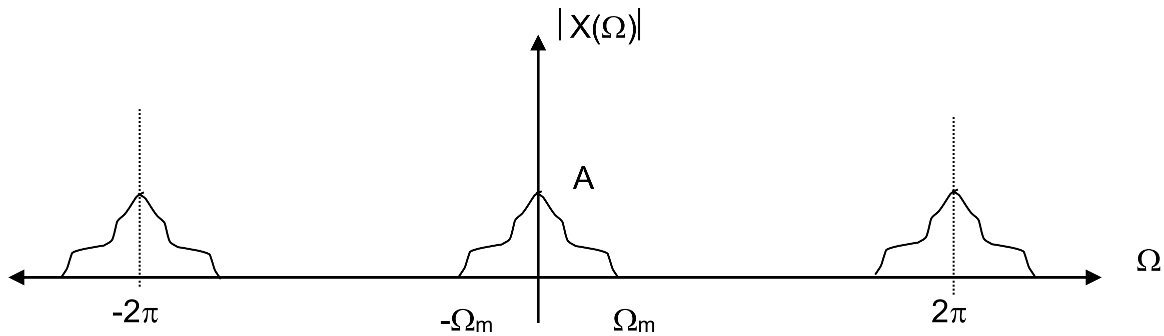
$$x_p[n] = \begin{cases} x[n] & n \quad \text{múltiplo de } Ns \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

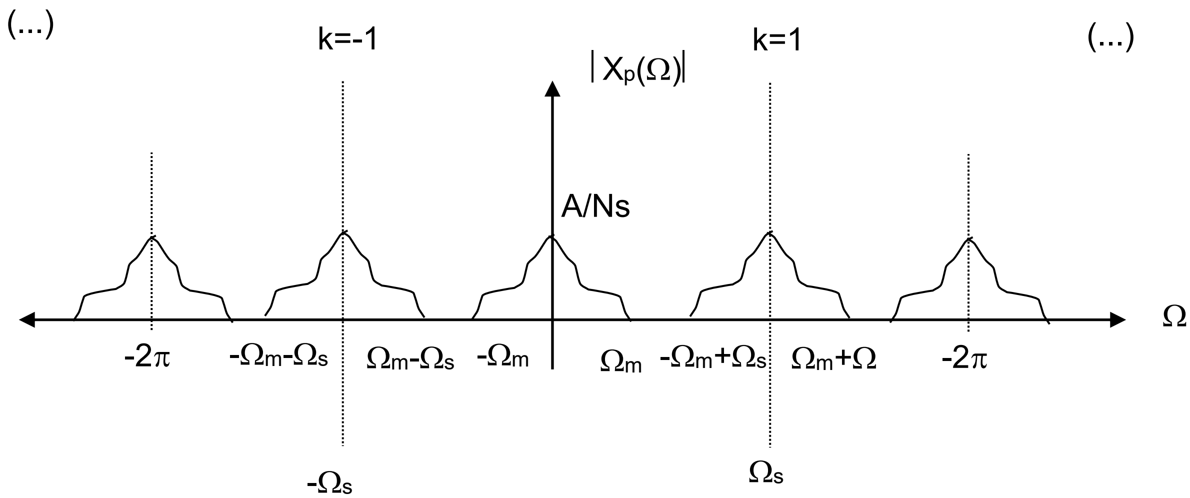
Para verificar que no exista traslape, es necesario aplicar la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto, de tablas:

$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{Ns} \sum_{k=0}^{Ns-1} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$X_p(\Omega) = TF\{x[n]p[n]\} = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{Ns}\sum_{K=0}^{Ns-1} X(\Omega - k\Omega_s)$$

Un resultado muy similar al de tiempo continuo, es decir, la respuesta en frecuencia de una señal de tiempo discreto muestreada, se repite, desplazada k veces Ω_s. Solo que en tiempo discreto, la Transformada de Fourier es periódica, con periodo 2π, por tanto las replicas de la señal ocurren en un ciclo y se repiten periódicamente. En forma gráfica:





De la gráfica es evidente, que para que no exista traslape se tiene que cumplir:

$$\Omega_m < -\Omega_m + \Omega_s \quad ó$$

$$\boxed{\Omega_s > 2\Omega_m}$$

Que es el teorema del muestreo para tiempo discreto.

Sin embargo, hasta ahora lo que se ha hecho con $x_p[n]$ es eliminar cierta información, introduciendo ceros en su lugar; pero el tamaño de $x_p[n]$ es igual al de $x[n]$, y nuestro objetivo era reducir su tamaño; por tanto la operación siguiente es eliminar los ceros.

6.2.1 Decimación.

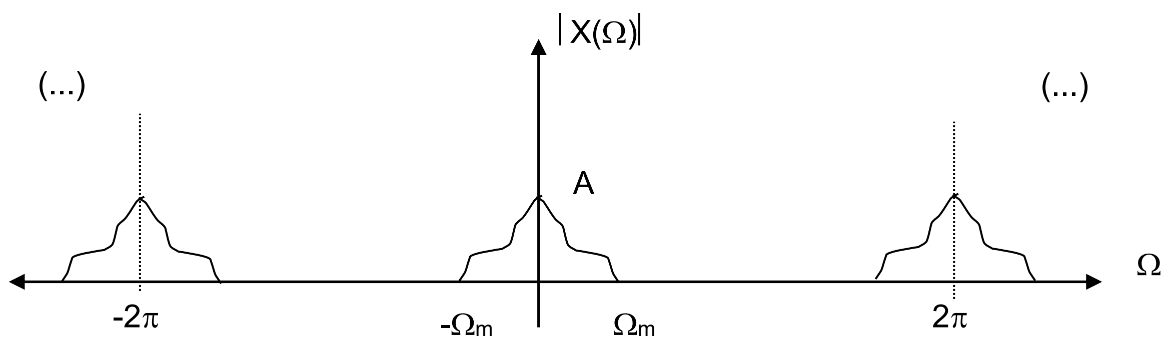
Una operación que realice muestreo y eliminación de ceros en tiempo discreto es simplemente (Recordar lo visto en el numeral 1.2.3):

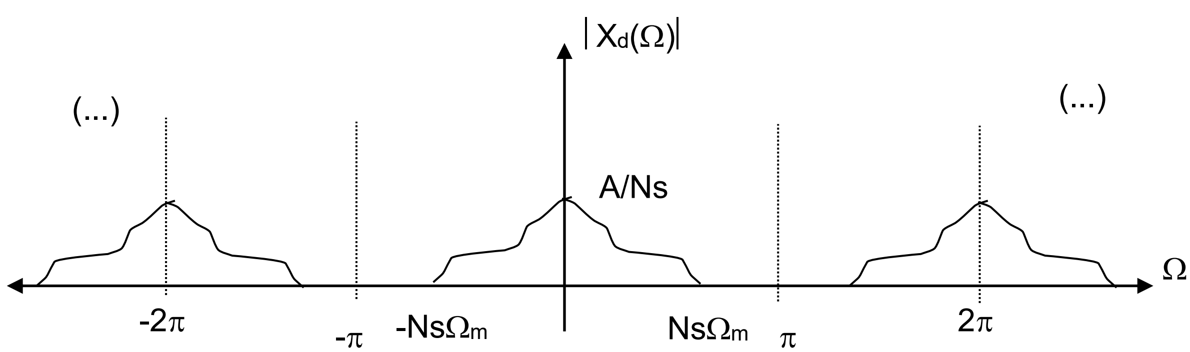
$$x_d[n] = x[nNs]$$

Para saber el cambio que introduce la decimación sobre una señal de tiempo discreto con un ancho de banda finito, aplicamos la propiedad de escalamiento en el tiempo de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto:

$$TF\{x_d[n]\} = TF\{x[nNs]\} = \frac{1}{Ns} X\left(\frac{\Omega}{Ns}\right)$$

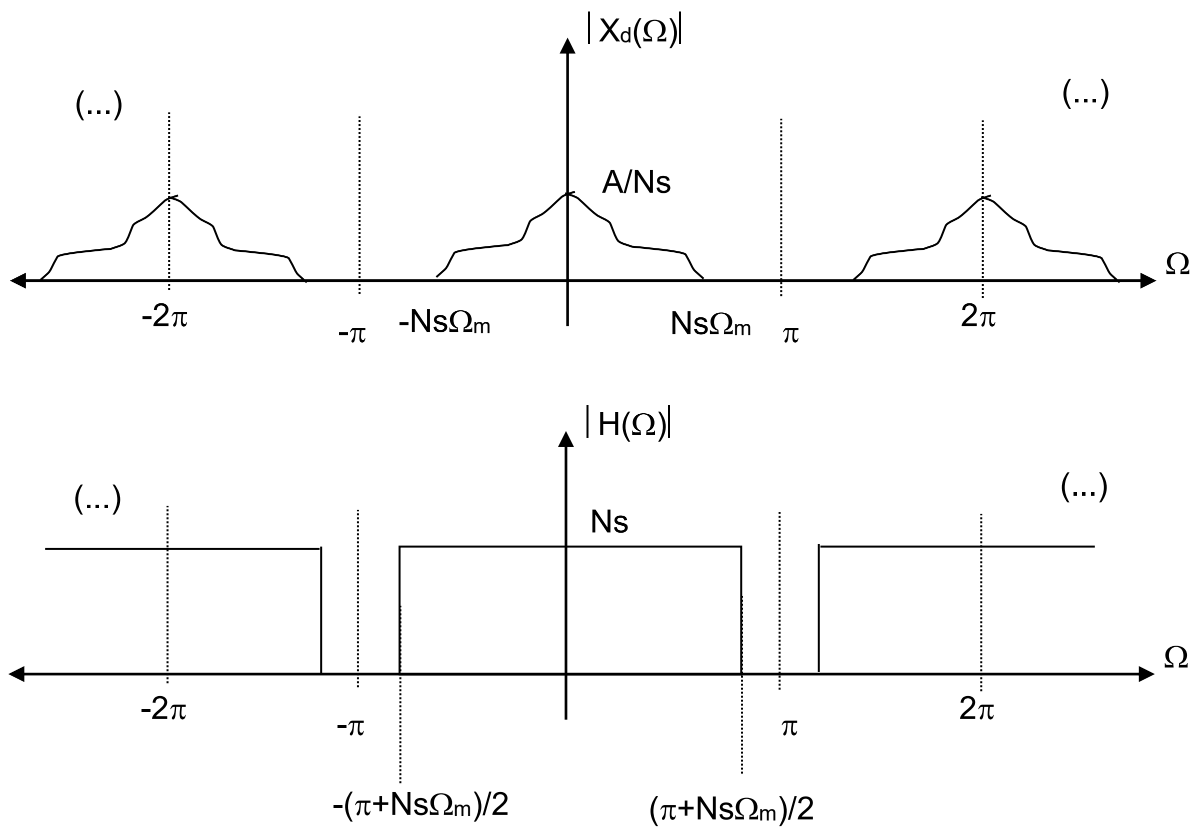
Recordando que una señal escalada por un factor menor que 1 conlleva a que la señal se expanda, en este caso en frecuencia:





De la figura anterior, es claro que, para que no haya traslape $Ns\Omega_m < \pi$; es decir el periodo de muestreo ha de ser $Ns < \dfrac{\pi}{\Omega_m}$. En conclusión si se cumple la anterior condición, una señal se puede decimar, sin perder información.

Para recuperar la señal original luego de una decimación, basta con aplicar un filtro pasa - bajas de tiempo discreto, adecuado:



Es claro, que para que una señal de tiempo discreto pueda ser decimada sin traslape, ha de ser de banda limitada o deberá someterse a un filtrado previo.

6.2.2 Interpolación.

En algunas ocasiones, es útil realizar la operación contraria a la decimación; es decir introducir información a una señal discreta. Un ejemplo de ello es la reconstrucción de imágenes deterioradas por el tiempo o el ruido (una fotografía por ejemplo, sonido fragmentado, etc.).

La interpolación, como su nombre lo indica, introduce información partiendo de la existente. Existen diversas formas de interpolación: Polinomial, mínimos cuadrados, entre las mas destacadas.

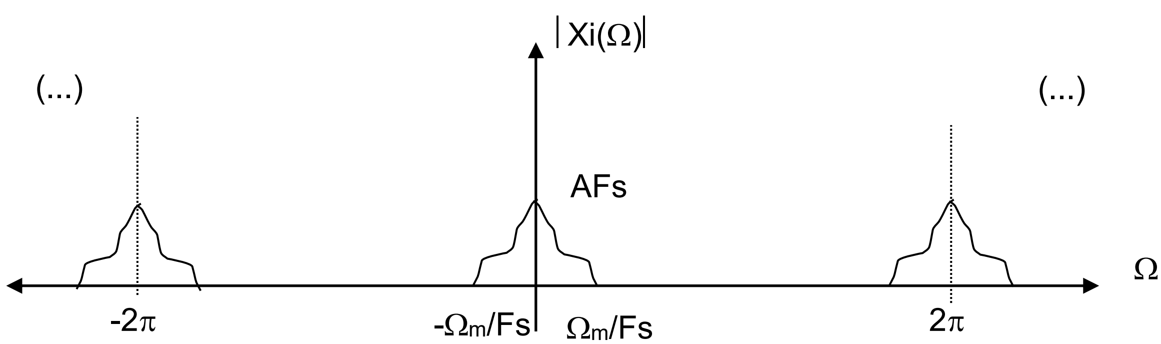
Independientemente del tipo de interpolación utilizada, el proceso consiste básicamente en una previa inserción de ceros entre las muestras y posteriormente una interpolación y reemplazo de los ceros. En este momento, solo nos interesa saber el efecto de aumentar el tamaño de una señal de tiempo discreto, en el dominio de la frecuencia, así que basta con definir la inserción de ceros, no la interpolación particular, empleada:

$$x_i[n] = \begin{cases} x\left[\dfrac{n}{Fs}\right] & n \text{ múltiplo de } Fs \\ 0 & n \neq \text{múltiplo de } Fs \end{cases}$$

Donde Fs es la frecuencia de inserción de ceros (número de ceros introducidos por cada elemento de x[n] más uno). Su Transformada de Fourier es, de tablas:

$$TF\{x_i[n]\} = FsX(Fs\Omega)$$

Es decir el efecto contrario de la decimación. En este caso, ya que Fs>1, la transformada de Fourier de la señal original, se contrae en el dominio de la frecuencia:

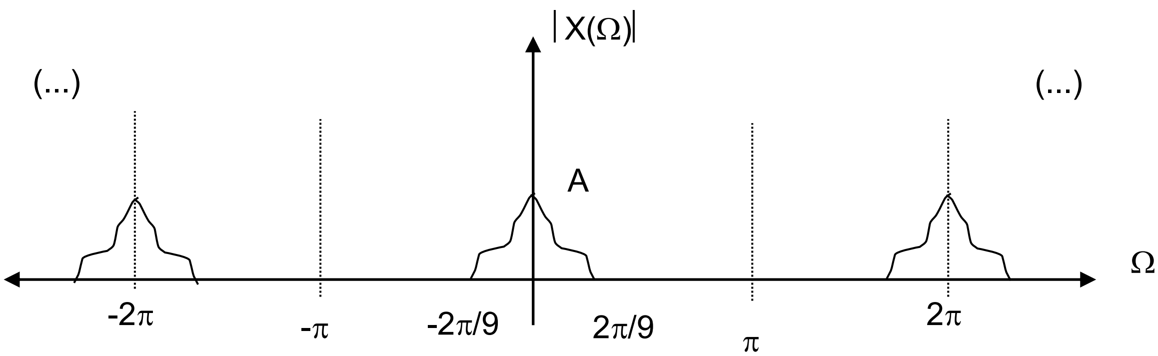


De la gráfica anterior, es evidente que al interpolar, se reduce la posibilidad de traslape.

Ejemplos:

a) Un ejemplo de aplicación sencillo de la interpolación y la decimación combinadas, es el siguiente: Una señal de tiempo discreto tiene 18000 muestras, dicha señal fue filtrada previamente con un filtro pasa bajas ideal de tiempo discreto, con frecuencia de corte $\Omega_c = \frac{2\pi}{9}$. Determinar cuál es el menor número de muestras posibles que se pueden tomar de la señal, sin perder información.

Representando gráficamente, la señal de tiempo discreto:

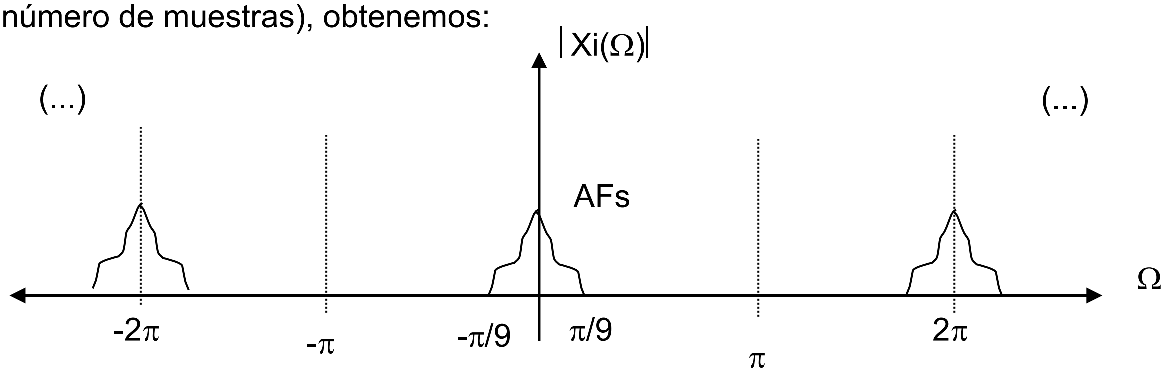


De acuerdo a la condición hallada, para que no exista traslape al decimar:

$$Ns < \frac{\pi}{\Omega_m} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{9}} = \frac{9}{2}$$

Luego, para que no exista traslape Ns puede ser máximo 4. Como el número total de muestras es de 18000, decimando por 4 obtendríamos un total de 4500 muestras mínimo.

Sin embargo, si realizamos primero una interpolación, con Fs=2 (duplicando el número de muestras), obtenemos:

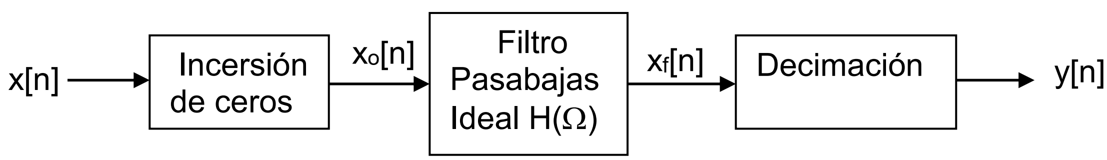


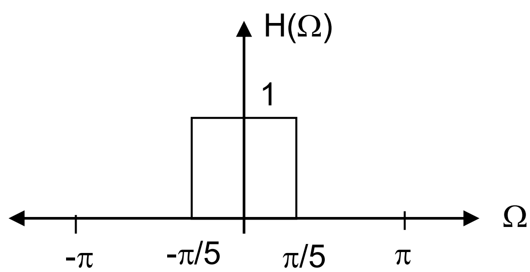
De la gráfica anterior, es evidente que con la interpolación se ha disminuido el ancho de banda de la señal a la mitad. En este momento se tendría el doble de muestras, es decir 36000. Ahora si se realiza decimación, la condición para que no exista traslape sería:

$$Ns < \frac{\pi}{\Omega_m} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{9}} = 9$$

Luego, ahora podemos decimar por un factor de 9 (tomar una de cada nueve muestras), entonces el número de muestras mínimo se reduce ahora a: 36000/9 = 4000, es decir 500 menos que en el caso anterior.

b) Considere el siguiente sistema:





El sistema de inserción de ceros, inserta dos ceros por cada muestra de x[n], y el sistema de decimación se define como y[n]=w[5n]. Si la señal de entrada es:

$$x[n] = \frac{\mathrm{sen}(n\Omega_0)}{\pi n}$$

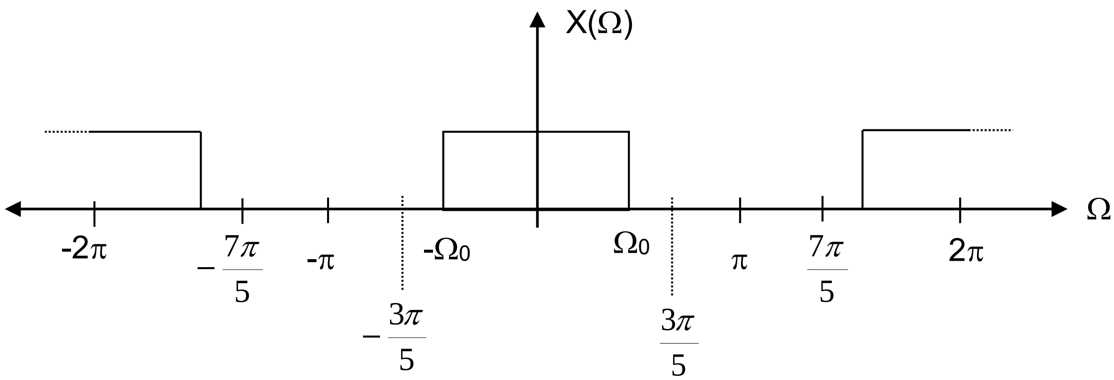
Determinar la salida y[n], para $\Omega_0 \leq \frac{3\pi}{5}$.

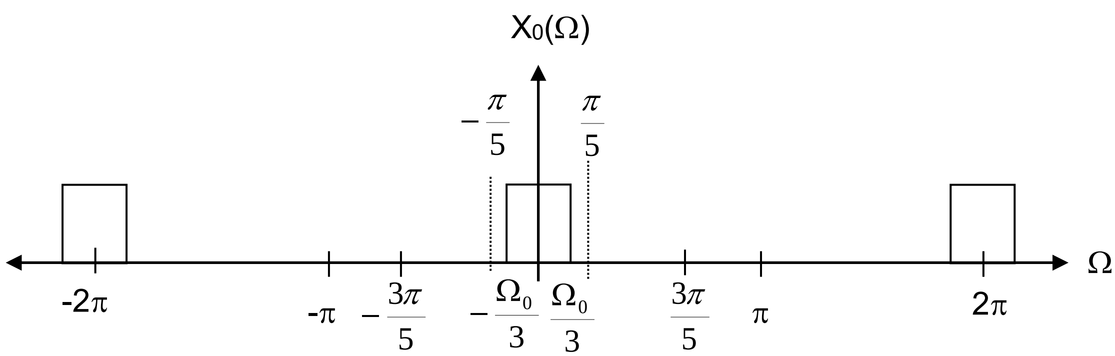
De tablas, $TF\{x[n]\} = TF\left\{\frac{\mathrm{sen}\,\Omega_0 n}{n\pi}\right\} = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0 \\ 0 & \Omega_0 < \Omega \leq \pi \end{cases}$

La inserción de 2 ceros, Fs=3, contrae el ancho de banda de la señal por 3:

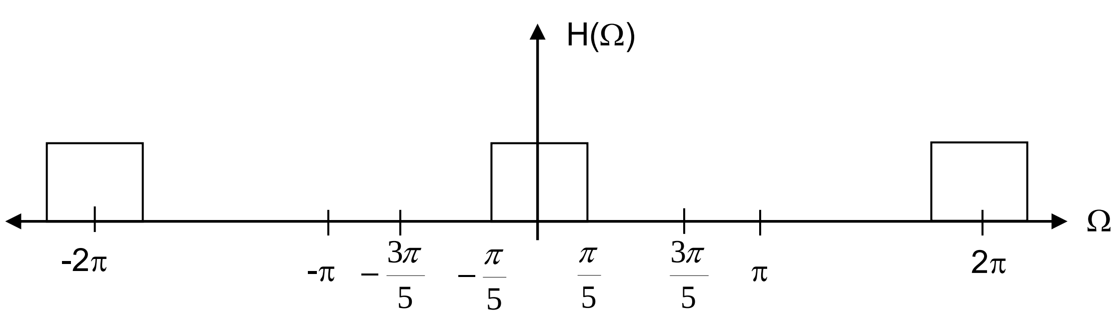
$$TF\{x_0[n]\} = \begin{cases} 1 & 0 \le |\Omega| \le \dfrac{\Omega_0}{3} \\ 0 & \dfrac{\Omega_0}{3} < \Omega \le \pi \end{cases}$$

Gráficamente:





Aplicando el filtro:



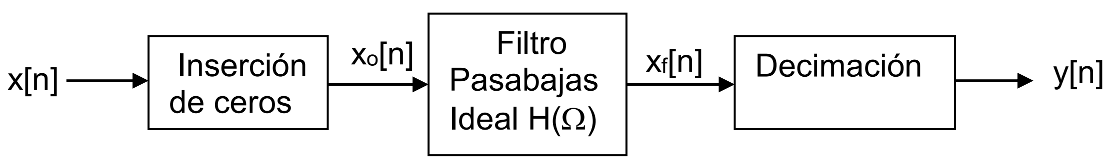
Ya que el ancho de banda de Xo(Ω) es menor, que la frecuencia de corte del filtro, la señal de salida $X_f(\Omega)$ será Xo(Ω), es decir $x_f[n]=x_o[n]$. Pero $x_o[n]$, se puede hallar como la transformada inversa de Xo(Ω). Es decir:

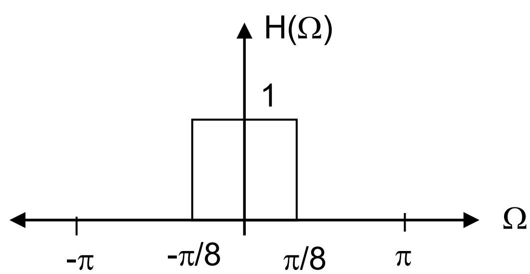
$$x_0[n]=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\Omega o}{3}\right)}{\pi n}$$

La salida será $y[n]=x_0[5n]=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{5n\Omega o}{3}\right)}{5\pi n}$

Ejercicios:

1. Resuelva el ejemplo anterior cuando $\Omega_0>\dfrac{3\pi}{5}$
2. Considere el siguiente sistema:





Demuestre que el anterior sistema equivale a un filtro pasabajas ideal con frecuencia de corte $\pi/4$.

7.0 TRANSFORMADA DE LAPLACE

7.1 DEFINICION

Normalmente, en el momento de aplicar una señal a un sistema determinado, ocurre un transiente que se atenúa progresivamente hasta desaparecer, quedando luego de un tiempo, una respuesta del sistema denominada de estado estable. Cuando se resuelve una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, la solución general es la suma de una solución Homogénea, más la de una solución Particular:

$$y_G = y_H + y_P$$

La solución Homogénea corresponde a la respuesta transitoria y siempre es de la forma $Ae^{-\sigma t}$, siendo A y σ valores reales, mientras que la respuesta particular (que existe solo si existe x(t), es decir si hay excitación) corresponde a la respuesta de estado estable del sistema.

Por conveniencia recordemos la definición de la Transformada de Fourier:

$$TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

Observamos que la Transformada de Fourier no incluye señales exponenciales decrecientes de la forma $Ae^{-\sigma t}$, solo exponenciales complejas (es decir senos y cosenos), las cuales son estables en el tiempo. De donde se deduce que la Transformada de Fourier solo puede darnos la respuesta de estado estable del sistema (la cual es la más importante en la mayoría de los casos).

Con el fin de obtener la respuesta completa de un sistema (transitoria y de estado estable) se define la Transformada de Laplace:

$$TL\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+jw)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Donde es claro, que la Transformada de Laplace, corresponde a una generalización de la Transformada de Fourier, para incluir el término $e^{-\sigma t}$; si σ=0, la Transformada de Laplace se reduce a la Transformada de Fourier.

Retomando convenientemente la definición de la Transformada de Laplace:

$$\mathbf{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x(t)e^{-(\sigma+jw)t}dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbf{x(t)e^{-\sigma t}}\right]\mathbf{e^{-jwt}dt}$$

Resulta claro que la Transformada de Laplace, es la Transformada de Fourier de la señal x(t) multiplicada por la función $e^{-\sigma t}$. Aplicando la Transformada inversa de Fourier a ambos miembros de la ecuación:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{jwt}dw$$

Despejando x(t) y haciendo el cambio de variable s=σ+jw, resulta que ds=jdw, si mantenemos fija a σ:

$$x(t) = TL^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

Se obtiene la definición de Transformada inversa de Laplace.

En este curso no será necesario emplear la definición de la Transformada de Laplace, ni de su Transformada Inversa, bastará con utilizar un conjunto básico de Transformadas y una tabla de propiedades.

No obstante, y debido a la existencia del término σ, la Transformada de Laplace existe en una determinada Región de Convergencia (ROC). Con el fin de ilustrar el origen de la ROC, se hallará la Transformada de Laplace de la señal:

$$x(t) = e^{-at}U(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}U(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = -\left.\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a}\right|_{0}^{\infty}$$

La anterior transformada existe, si Re{s+a}>0 (de lo contrario diverge cuando t→∞). Entonces:

$$TL\{e^{-at}U(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

Es la Transformada de Laplace, de la señal dada tal como figura en tablas, con su correspondiente ROC.

7.2 PARES BASICOS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

SEÑAL	*TRANSFORMADA* **DE LAPLACE**	**ROC**
$\delta(t)$	1	Toda s
U(t)	$\frac{1}{s}$	Re{s}>0
-U(-t)	$\frac{1}{s}$	Re{s}<0
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}U(t)$	$\frac{1}{s^n}$	Re{s}>0
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}U(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	Re{s}<0
$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{s+a}$	Re{s}>-a
$-e^{-at}U(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	Re{s}<-a
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	Re{s}>-a
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}U(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	Re{s}<-a
Cos(w_ot)U(t)	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$	Re{s}>0
Sen(w_ot)U(t)	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$	Re{s}>0
$Cos(w_0t)e^{-at}U(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$	Re{s}>-a
$Sen(w_0t)e^{-at}U(t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$	Re{s}>-a

7.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

PROPIEDAD	**SEÑAL**	**TRANSFORMADA DE LAPLACE**	**ROC**
Linealidad	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	$R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en el tiempo	x(t-to)	$e^{-sto}X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{-s_o t}x(t)$	$X(s+s_o)$	Cambiar s por $s-s_o$
Escalamiento en el tiempo	x(at)	$\frac{1}{\lvert a \rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Cambiar s Por s/a
Convolución	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$R_1 \cap R_2$
Derivación en el tiempo	$\frac{d^n(x(t))}{dt^n}$	$s^nX(s)-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x'(0)$ $-\ldots-sx^{(n-2)}(0)-x^{(n-1)}(0)$	R
Derivación en s	$t^n x(t)$	$(-1)^n\frac{d^n(X(s))}{ds^n}$	R
Integración en el tiempo	$\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \cap Re\{s\}>0$
Integración en s	$\frac{x(t)}{t}$	$-\int_{-\infty}^{s}X(s)ds$	R
Teorema del valor inicial	$x^{(n)}(0)=Lím_{s\to\infty}\left\{s^{n+1}X(s)-s^nx^{(n-1)}(0)-\ldots-x(0)\right\}$		
Teorema del valor final	$Lím_{t\to\infty}\left\{x(t)\right\}=Lím_{s\to 0}\left\{sX(s)\right\}$		

Ejemplos:

a) Hallar la $TL\left\{e^{-a|t|}\right\}$

$$e^{-a|t|} = e^{-at}U(t) + e^{at}U(-t)$$

Entonces, por la propiedad de linealidad:

$$TL\left\{e^{-a|t|}\right\} = TL\left\{e^{-at}U(t)\right\} + TL\left\{e^{at}U(-t)\right\}$$

De tablas:

$$TL\left\{e^{-at}U(t)\right\} = \frac{1}{s+a} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

Por la propiedad de escalamiento en el tiempo:

$$TL\left\{e^{at}U(-t)\right\} = \frac{1}{-s+a} \quad \operatorname{Re}\{-s\} > -a$$

Es decir:

$$TL\left\{e^{at}U(-t)\right\} = \frac{1}{-s+a} \quad \operatorname{Re}\{s\} < a$$

En resumen:

$$TL\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{-s+a} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -a \quad \cap \quad \operatorname{Re}\{s\} < a$$

Reduciendo:

$$TL\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2 - s^2} \quad -a < \operatorname{Re}\{s\} < a$$

b) Hallar la $TL\{x(t)\} \quad con \quad x(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2-t & 1 < t < 2 \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$

Es más conveniente expresar x(t) como:

$$x(t) = t[U(t) - U(t-1)] + (2-t)[U(t-1) - U(t-2)]$$

Por linealidad:

$$TL\{x(t)\} = TL\{tU(t)\} - 2TL\{tU(t-1)\} + 2TL\{U(t-1)\} - 2TL\{U(t-2)\} + TL\{tU(t-2)\}$$

En las transformadas anteriores existen solo dos tipos diferentes de funciones, que se pueden resumir como:

$$TL\{U(t-to)\} \quad y \quad TL\{tU(t-to)\}$$

La primera se obtiene de tablas y por la propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$TL\{U(t-to)\} = \frac{e^{-sto}}{s} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

La segunda se obtiene a partir de la anterior, por la propiedad de diferenciación en frecuencia:

$$TL\{tU(t-to)\} = -\frac{d\left(\frac{e^{-sto}}{s}\right)}{ds} = \frac{e^{-sto}(1+sto)}{s^2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Aplicando estos resultados:

$$TL\{x(t)\} = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}(1+s)}{s^2} + 2\frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}(1+2s)}{s^2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Reduciendo:

$$TL\{x(t)\} = \frac{1}{s^2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

c) Hallar la $TL^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^3+5s^2+6s}\right\} \quad -3<\mathrm{Re}\{s\}<-2$

Factorizando el denominador y expandiendo en fracciones parciales:

$$\frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)}+\frac{C}{(s+3)}$$

$$A=\left.\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=0}=\frac{1}{6};\quad B=\left.\frac{s+1}{s(s+3)}\right|_{s=-2}=\frac{1}{2};\quad C=\left.\frac{s+1}{s(s+2)}\right|_{s=-3}=\frac{-2}{3}$$

Por linealidad:

$$TL^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+5s^2+6s}\right\}=\frac{1}{6}TL^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{2}TL^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{2}{3}TL^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}\quad -3<\mathrm{Re}\{s\}<-2$$

De tablas y teniendo en cuenta que se debe cumplir la condición impuesta por la ROC:

$$TL^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=-u(-t)\quad \mathrm{Re}\{s\}<0;$$
$$TL^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=-e^{-2t}u(-t)\quad \mathrm{Re}\{s\}<-2;$$
$$TL^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}u(t)\quad \mathrm{Re}\{s\}>-3$$

Resumiendo:

$$TL^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+5s^2+6s}\right\}=-\left(\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)U(-t)+\frac{2}{3}e^{-3t}U(t)\right)\quad -3<\mathrm{Re}\{s\}<-2$$

7.4 FUNCION DE TRANSFERENCIA DE UN SISTEMA

Todo sistema LTI, está descrito por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, de forma general:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Si aplicamos la Transformada de Laplace a la ecuación anterior, en general:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(s^k Y(s) - s^{k-1} y(0) - \ldots - y^{(k-1)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{m} b_k \left(s^k X(s) - s^{k-1} x(0) - \ldots - x^{(k-1)}(0)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(s^k Y(s)\right) = \sum_{k=0}^{m} b_k \left(s^k X(s)\right) - \sum_{k=0}^{m} b_k \left(s^{k-1} x(0) + \ldots + x^{(k-1)}(0)\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(s^{k-1} y(0) + \ldots + y^{(k-1)}(0)\right)$$

$$Y(s)\sum_{k=0}^{n} a_k s^k = X(s)\sum_{k=0}^{m} b_k s^k - \sum_{k=0}^{m} b_k \left(s^{k-1} x(0) + \ldots + x^{(k-1)}(0)\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(s^{k-1} y(0) + \ldots + y^{(k-1)}(0)\right)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} + \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(s^{k-1} y(0) + \ldots + y^{(k-1)}(0)\right) - \sum_{k=0}^{m} b_k \left(s^{k-1} x(0) + \ldots + x^{(k-1)}(0)\right)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}$$

Donde se observa que en general la función de transferencia del sistema Y(s)/X(s), depende de los coeficientes de la ecuación diferencial y de las condiciones iniciales del sistema.

Si la señal de entrada fuera la función Delta - Dirac x(t)=δ(t), claramente su respuesta sería y(t)=h(t) y X(s)=1, Y(s)=H(s). Ahora, si las condiciones iniciales del sistema son cero, entonces:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k \left(s^k\right)}{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(s^k\right)}$$

Que es la función de transferencia del sistema en el dominio de s, con condiciones iniciales cero.

Ejemplo:

Cuál es la respuesta del sistema descrito por la ecuación diferencial:

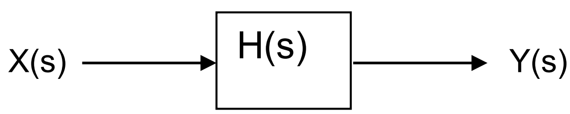
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

A la entrada $x(t) = e^{-t}U(t)$ con condiciones iniciales cero.

De tablas $X(s) = \dfrac{1}{s+1}$ $\operatorname{Re}\{s\} > -1$.La función de transferencia del sistema será:

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$$

El sistema en forma de diagrama de bloques es:



Luego:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+3s+2)} = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

Aplicando fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \left.\frac{s+3}{s+2}\right|_{s=-1} = 2;$$

$$B = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s+2}\right)\right|_{s=-1} = \left.\frac{-1}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

$$C = \left.\frac{s+3}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = 1$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace:

$$y(t) = TL^{-1}\{Y(s)\} = 2TL^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - TL^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + TL^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

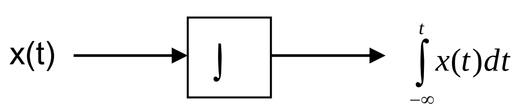
$$y(t) = \left(2te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}\right)U(t)$$

No obstante si las condiciones iniciales no son cero, debemos aplicar la ecuación general:

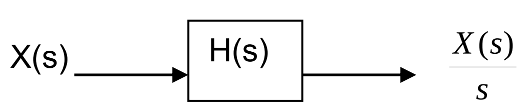
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) + \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k\left(s^{k-1}y(0) + \ldots + y^{(k-1)}(0)\right) - \sum_{k=0}^{m} b_k\left(s^{k-1}x(0) + \ldots + x^{(k-1)}(0)\right)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k}$$

7.4.1 Representación en diagramas de bloques

En el Capítulo 2 se representaron las ecuaciones diferenciales, por diagramas de bloques basados en sistemas integradores:

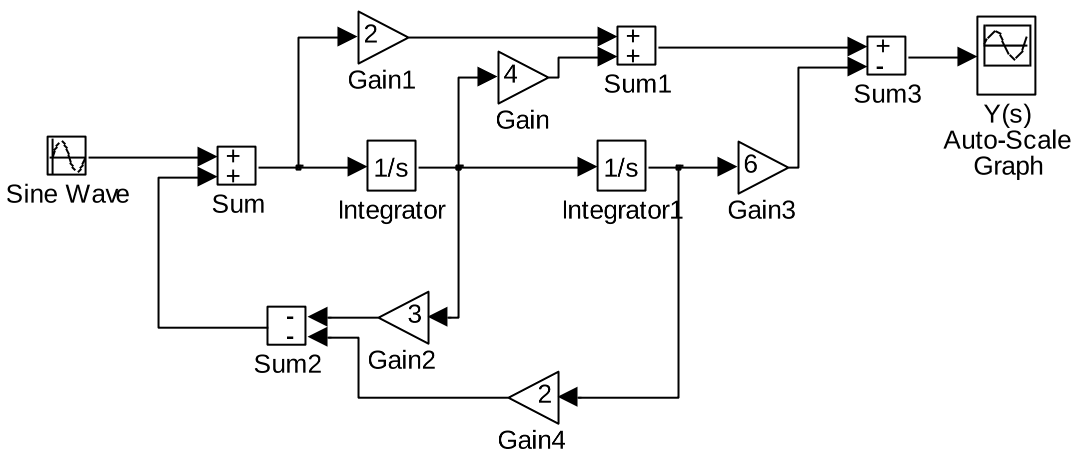


Aplicando la Transformada de Laplace, al sistema Integrador:

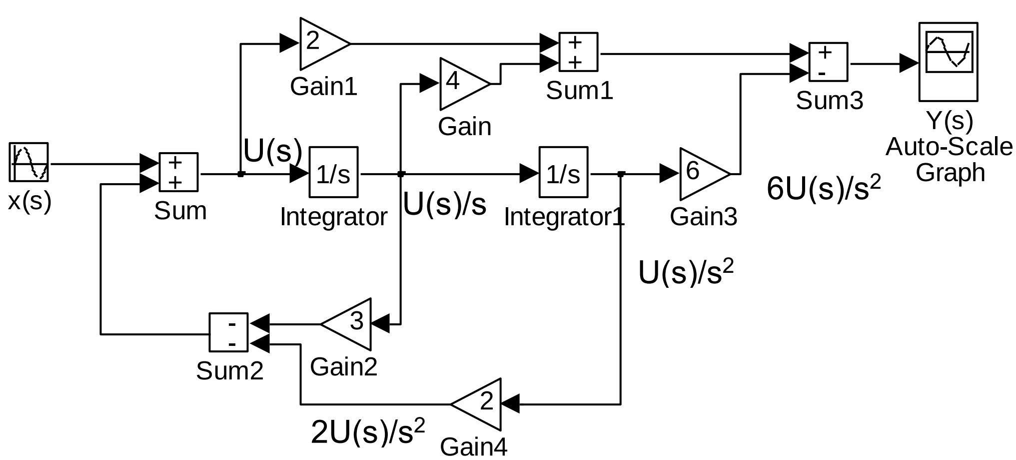


Es claro que la función de transferencia, en el dominio de s, del sistema integrador es: 1/s.

Ejemplo: Cuál es la Respuesta al impulso del siguiente sistema:



Para obtener la función de transferencia del sistema, hay que hallar la relación Y(s)/X(s). Para ello planteamos las siguientes ecuaciones, donde se ha llamado U(s) a la salida del primer integrador:



Luego:

$$X(s) - \left(3\frac{U(s)}{s} + 2\frac{U(s)}{s^2}\right) = U(s)$$

De donde se despeja U(s):

$$U(s) = X(s)\frac{s^2}{s^2 + 3s + 1}$$

Para la salida:

$$Y(s) = 2U(s) + 4\frac{U(s)}{s} - 6\frac{U(s)}{s^2} = U(s)\left(\frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2}\right) = X(s)\frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 1}$$

Entonces:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 1} = 2 - \frac{2s + 8}{(s+2)(s+1)} = 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace, se obtiene:

$$h(t) = 2\delta(t) + \left(6e^{-2t} - 8e^{-t}\right)U(t)$$

7.4.2 Criterio de Estabilidad de los Polos

En general la función de Transferencia de un sistema, puede expresarse en fracciones parciales de la forma:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{s - p_k}$$

Donde n es el número de raíces del denominador de la función de transferencia. Estas raíces (p_k) se denominan los polos de la función de transferencia, ya que si $s=p_k$ entonces $H(s) \rightarrow \infty$.

Aplicando Transformada inversa de Laplace:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t} U(t)$$

Para que un sistema sea estable, a medida que $t \rightarrow \infty$, el sistema debe tender a cero o un valor constante. De la ecuación anterior es claro que un sistema siempre será estable si se cumple que:

$$\textit{Todos los polos son menores o iguales a } 0 : \quad p_k \leq 0$$

La anterior condición se conoce como el criterio de estabilidad de los polos.

Ejemplo: Determinar si el sistema del ejemplo anterior es estable

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 1} = \frac{2s^2 + 4s - 6}{(s+2)(s+1)}$$

Los polos de la función de transferencia del sistema son {-1,-2}, ambos menores que cero, luego el sistema es estable.

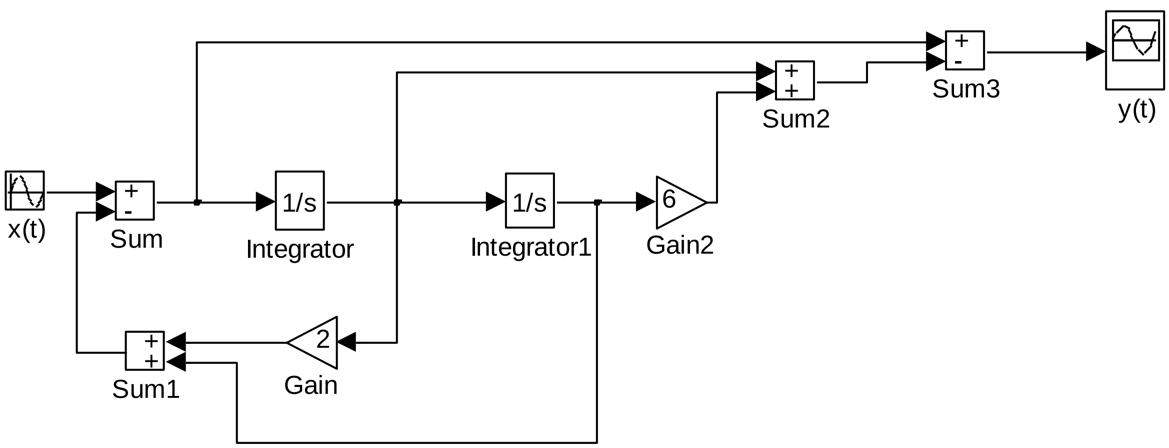
Ejercicios de Repaso.

1) $TL\left\{|t|e^{2t}U(-t)\right\}$

2) $TL\{x(t)\} \quad x(t)=\begin{cases} e^{-3t}\,\mathrm{sen}(5t) & t>0 \\ e^{2t} & -5<t<0 \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$

3) $TL^{-1}\left\{\dfrac{s^2-s+1}{(s+1)^2}e^{-3s} \quad \mathrm{Re}\{s\}>-1\right\}$

4) Para el siguiente sistema:



Determine:

a) La salida y(t) sí la entrada $x(t)=e^{-2t}U(t)$, con condiciones iniciales cero.

b) La ecuación diferencial que define el sistema

5) Determinar si el anterior sistema es estable

8.0 TRANSFORMADA Z

8.1 DEFINICION

La Transformada Z es el equivalente de la Transformada de Laplace, pero para tiempo discreto. La Transformada de Fourier de tiempo discreto se definió como:

$$TF\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Al igual que la Transformada de Fourier de tiempo continuo, la Transformada de Fourier de tiempo discreto, es función de una exponencial compleja, que en este caso es una función periódica:

$$e^{j\Omega} = \cos\Omega + j\,\mathrm{sen}\,\Omega$$

La magnitud de $e^{j\Omega}$, siempre es igual a uno. La generalización obtenida con la Transformada Z, consiste en definir: $z=re^{j\Omega}$, de tal modo que z abarca ahora todo el plano complejo

$$TZ\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\Omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Al igual que la Transformada de Laplace, la Transformada Z se puede escribir como la Transformada de Fourier de $(x[n]r^{-n})$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\Omega}$$

Aplicando la Transformada inversa de Fourier a ambos miembros de la ecuación:

$$x[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\oint_{2\pi} X(z)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Despejando x[n] y haciendo el cambio de variable $z=re^{j\Omega}$, resulta $dz=jre^{j\Omega}d\Omega=jzd\Omega$, si mantenemos fija r:

$$x[n] = TZ^{-1}\{X(z)\} = \frac{r^n}{2\pi j}\oint_{2\pi} X(z)e^{j\Omega n}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{2\pi} X(z)z^{n-1}dz$$

Se obtiene la definición de Transformada inversa Z.

Al igual que con la Transformada de Laplace, en este curso se trabajará con un conjunto básico de Transformadas y una tabla de propiedades.

La Transformada Z también posee una región de convergencia. Como ilustración se hallará la Transformada Z y su ROC asociada, para una función de tiempo discreto elemental:

$$x[n] = a^n U[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n U[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1 - Lím_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a}{z}\right)^n\right\}}{1 - \frac{a}{z}}$$

Es claro que el Límite existe si $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$, es decir | z | >| a | . En resumen:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

8.2 PARES BASICOS DE TRANSFORMADAS Z

SEÑAL	*TRANSFORMADA* **Z**	**ROC**
$\delta[n]$	1	Toda z
U[n]	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
-U[-n-1]	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$
$a^nU[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$-a^nU[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
$na^nU[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$-na^nU[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$Cos(\Omega_o n)U[n]$	$\frac{1-\cos\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$Sen(\Omega_o n)U[n]$	$\frac{\operatorname{sen}\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$a^nCos(\Omega_o n)U[n]$	$\frac{1-a\cos\Omega_0 z^{-1}}{1-2a\cos\Omega_0 z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > a$
$a^nSen(\Omega_o n)U[n]$	$\frac{a\operatorname{sen}\Omega_0 z^{-1}}{1-2a\cos\Omega_0 z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > a$

8.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

PROPIEDAD	**SEÑAL**	**TRANSFORMADA Z**	**ROC**
Linealidad	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	$R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en el tiempo	x[n-no]	$z^{-n_0}X(z)+z^{-n_0+1}x[-1]+$ $\ldots+z^{-1}x[-n_0+1]+x[-n_0]$	R
Escalamiento en el tiempo	x[an]	$X\left(z^{\frac{1}{a}}\right)$	Cambiar z Por $z^{1/a}$
Escalamiento en z	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	Cambiar z Por z/z_0
Convolución	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R_1 \cap R_2$
Sumatoria	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$	$R \cap \lvert z \rvert >1$
Diferenciación en z	$n^m x[n]$	$(-z)^m \frac{d^m(X(z))}{dz^m}$	R
Teorema del valor inicial	Si x[n]=0 para n<0 $\rightarrow$ $x[0]=Lím_{z\to\infty}\{X(z)\}$		

Ejemplos:

a) Hallar la $TZ\left\{a^{|n|}\right\}$

$$a^{|n|} = a^n U[n] + a^{-n} U[-n-1]$$

Entonces, por la propiedad de linealidad:

$$TZ\left\{a^{|n|}\right\} = TZ\left\{a^n U[n]\right\} + TZ\left\{a^{-n} U[-n-1]\right\}$$

De tablas:

$$TZ\left\{a^n U[n]\right\} = \frac{1}{1+az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

Por la propiedad de escalamiento en el tiempo:

$$TZ\left\{a^{-n} U[-n]\right\} = \frac{1}{1+az} \qquad \left|z^{-1}\right| > |a| \quad ó \quad |z| < \frac{1}{|a|}$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$TZ\left\{a^{-(n+1)} U[-(n+1)]\right\} = a^{-1} TZ\left\{a^{-n} U[-(n+1)]\right\} = \frac{z}{1+az} \qquad |z| < \frac{1}{|a|}$$

Es decir:

$$TZ\left\{a^{-n} U[-n-1]\right\} = \frac{az}{1+az} \qquad |z| < \frac{1}{|a|}$$

En resumen:

$$TZ\left\{a^{|n|}\right\} = \frac{1}{1+az^{-1}} + \frac{az}{1+az} \qquad |z| > |a| \quad \cap \quad |z| < \frac{1}{|a|}$$

Reduciendo:

$$TZ\left\{a^{|n|}\right\} = \frac{2a + (1+a^2)z^{-1}}{a + (1+a^2)z^{-1} + az^{-2}} \qquad |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

b) Hallar la $TZ\{x[n]\} \quad con \quad x[n]=\begin{cases} n & 0\le n\le 1 \\ 2-n & 1<n\le 2 \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$

Es más conveniente expresar x[n] como:

$$x[n]=n(U[n]-U[n-2])+(2-n)(U[n-2]-U[n-3])$$

Por linealidad:

$$TZ\{x[n]\}=TZ\{nU[n]\}-2TZ\{nU[n-2]\}+2TZ\{U[n-2]\}-2TZ\{U[n-3]\}+TZ\{nU[n-3]\}$$

En las transformadas anteriores existen solo dos tipos diferentes de funciones, que se pueden resumir como:

$$TZ\{U[n-n_0]\} \quad y \quad TL\{nU[n-n_0]\}$$

La primera se obtiene de tablas y por la propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$TZ\{U[n-n_0]\}=\frac{z^{-n_0}}{1+z^{-1}} \qquad |z|>1$$

La segunda se obtiene a partir de la anterior, por la propiedad de diferenciación en z:

$$TZ\{nU[n-n_0]\}=\frac{d\left(\dfrac{z^{-n_0}}{1+z^{-1}}\right)}{dz}=\frac{z^{-n_0}\left(-n_0(1+z^{-1})+z^{-2}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)^2} \qquad |z|>1$$

Aplicando estos resultados:

$$TZ\{x[n]\}=\frac{z^{-2}}{\left(1+z^{-1}\right)^2}-2\frac{z^{-2}\left(-2(1+z^{-1})+z^{-2}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)^2}+2\frac{z^{-2}}{1+z^{-1}}+\frac{z^{-3}\left(-3(1+z^{-1})+z^{-2}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)^2} \qquad |z|>1$$

Reduciendo:

$$TZ\{x[n]\}=\frac{7z^{-2}+3z^{-3}-5z^{-4}+z^{-5}}{(1+z^{-1})^2} \qquad |z|>1$$

c) Hallar la $TZ^{-1}\left\{\dfrac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}\right\} \quad |z| > \dfrac{1}{2}$

Por sencillez realizamos el cambio de variable u=z^{-1}:

$$\frac{1-u}{1-\frac{1}{4}u^2} = \frac{4(u-1)}{u^2-4} = \frac{4(u-1)}{(u+2)(u-2)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u-2}$$

$$A = \left.\frac{4(u-1)}{(u-2)}\right|_{u=-2} = 3; \quad B = \left.\frac{4(u-1)}{(u+2)}\right|_{u=2} = 1$$

Por linealidad:

$$TZ^{-1}\left\{\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}\right\} = 3TZ^{-1}\left\{\frac{1}{2+z^{-1}}\right\} + TZ^{-1}\left\{\frac{1}{z^{-1}-2}\right\} =$$

$$\frac{3}{2}TZ^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} - \frac{1}{2}TZ^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

De tablas y teniendo en cuenta que se debe cumplir la condición impuesta por la ROC:

$$TZ^{-1}\left\{\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}\right\} = \left[3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]U[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[3(-1)^{n+1} - 1\right]U[n]$$

8.4 FUNCION DE TRANSFERENCIA DE UN SISTEMA DE TIEMPO DISCRETO

Como vimos en el capítulo anterior, los sistemas LTI de tiempo continuo están descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Así mismo un sistema LTI de tiempo discreto viene descrito por una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de la forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{m} b_k x[n-k]$$

Aplicando la Transformada Z a la ecuación anterior:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^{-k}Y(z) + z^{-k+1}y[-1] + \ldots + y[-k]\right) = \sum_{k=0}^{m} b_k \left(z^{-k}X(z) + z^{-k+1}x[-1] + \ldots + x[-k]\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^{-k}Y(z)\right) = \sum_{k=0}^{m} b_k \left(z^{-k}X(z)\right) + \sum_{k=0}^{m} b_k \left(z^{-k+1}x[-1] + \ldots + x[-k]\right) - \sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^{-k+1}y[-1] + \ldots + y[-k]\right)$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{m} b_k \left(z^{-k+1}x[-1] + \ldots + x[-k]\right) - \sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^{-k+1}y[-1] + \ldots + y[-k]\right)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k}} + \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k \left(z^{-k+1}x[-1] + \ldots + x[-k]\right) - \sum_{k=0}^{m} a_k \left(s^{k-1}y[-1] + \ldots + y[-k]\right)}{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k}}$$

En forma muy similar a la función de transferencia del capítulo anterior. De la misma forma si las condiciones iniciales son todas cero y la señal de entrada es x[n]=δ[n]:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k \left(z^{-k}\right)}{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^{-k}\right)}$$

Ejemplo:

Cuál es la respuesta al impulso, del sistema descrito por la ecuación en diferencias, con condiciones iniciales cero:

$$y[n-1]-\frac{5}{2}y[n]+y[n+1]=x[n]$$

Primero, debemos realizar un cambio de variable conveniente n→n-1, con el fin de poder aplicar las tablas:

$$y[n-2]-\frac{5}{2}y[n-1]+y[n]=x[n-1]$$

Ahora, aplicando el resultado de la sección anterior:

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

Realizando el cambio de variable u=z^{-1} y aplicando fracciones parciales:

$$H(z)=\frac{u}{1-\frac{5}{2}u+u^{2}}=\frac{u}{(u-\frac{1}{2})(u-2)}=\frac{A}{u-\frac{1}{2}}+\frac{B}{u-2}$$

$$A=\left.\frac{u}{u-2}\right|_{u=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3};$$

$$C=\left.\frac{u}{u-\frac{1}{2}}\right|_{u=2}=\frac{4}{3}$$

Aplicando Transformada Inversa Z:

$$h(t) = TZ^{-1}\{H(z)\} = -\frac{1}{3}TZ^{-1}\left\{\frac{1}{z^{-1}-\frac{1}{2}}\right\} + \frac{4}{3}TZ^{-1}\left\{\frac{1}{z^{-1}-2}\right\}$$

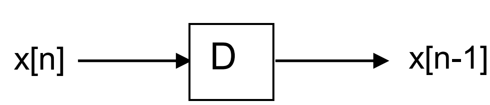
$$= \frac{2}{3}\left[TZ^{-1}\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}}\right\} - TZ^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}\right]$$

$$h(t) = \frac{2}{3}\left(2^{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)U[n]$$

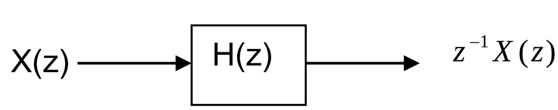
Donde se escogieron las Transformada Inversas, correspondientes a una respuesta para n>0 (U[n]), considerando un sistema causal (no puede existir respuesta antes de la aplicación de la señal).

8.4.1 Representación en diagramas de bloques

Una representación en diagrama de bloques de una ecuación en diferencias siempre tendrá como componente principal el sistema de retardo en el tiempo:

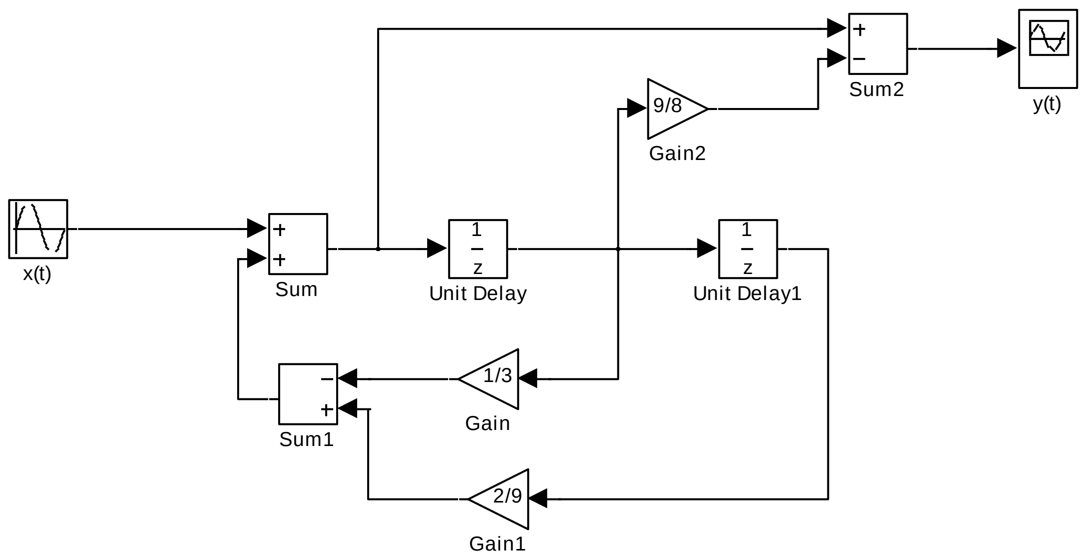


Aplicando la Transformada Z, al sistema de retardo (Delay):

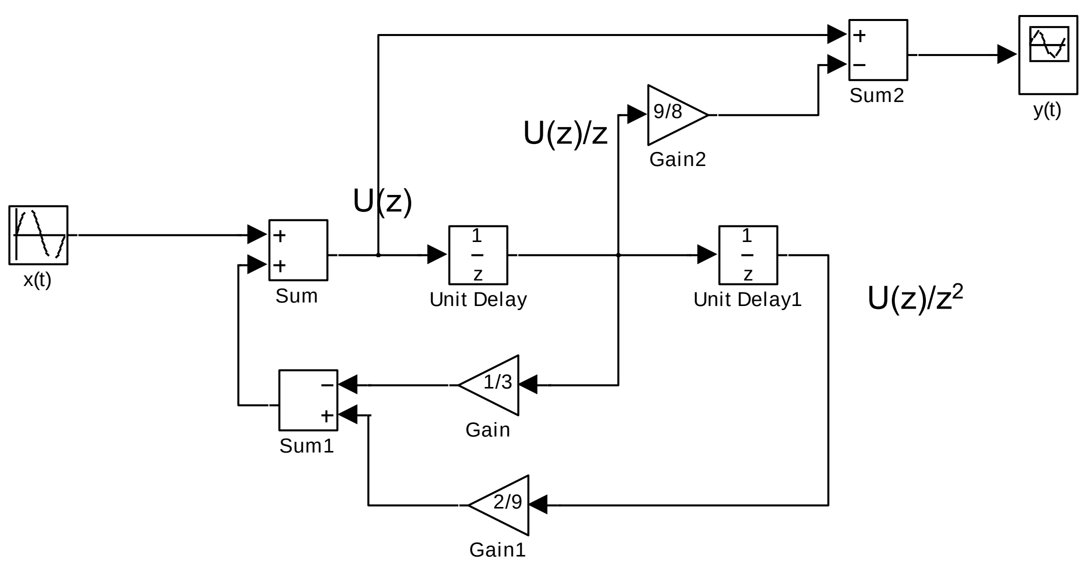


De donde se deduce que $H(z)=z^{-1}$.

Ejemplo: Determinar la Respuesta al impulso del siguiente sistema:



Al igual, que en el capítulo anterior, seleccionamos como variable desconocida U(z), la salida del primer sumador:



Entonces:

$$X(z) + \left(\frac{2U(z)}{9z^2} - \frac{U(z)}{3z} \right) = U(z)$$

Despejando U(z):

$$U(z) = X(z) \frac{9z^2}{9z^2 + 3z - 2}$$

En la salida:

$$Y(z) = U(z) - \frac{9}{8z} U(z) = U(z) \left(\frac{8z - 9}{8z} \right) = X(z) \frac{9z^2 - \frac{81}{8} z}{9z^2 + 3z - 2}$$

Entonces:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{9z^2 - \frac{81}{8} z}{9z^2 + 3z - 2} = 1 - \frac{\frac{105}{8} z - 2}{(z - \frac{1}{3})(z + \frac{2}{3})} = 1 - \frac{\frac{57}{24}}{z - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{129}{12}}{z + \frac{2}{3}}$$

Aplicando Transformada Inversa Z:

$$h[n] = \delta[n] + \left(9 \frac{1}{8} (3)^n - 16 \frac{1}{8} \left(\frac{3}{2} \right)^n \right) U[n]$$

8.4.2 Criterio de Estabilidad de los Polos

La función de Transferencia de un sistema de tiempo discreto, puede expresarse en fracciones parciales de la forma general:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

Donde los polos (p_k) son las raíces del denominador de la función de transferencia. Aplicando Transformada inversa Z:

$$h[n] = \sum_{k=1}^{m} A_k (p_k)^n U[n]$$

De la ecuación anterior es claro que para que un sistema de tiempo discreto sea estable se tiene que cumplir que:

$$Todos\ los\ polos\ tienen\ magnitud\ menor\ o\ igual\ a\ 1: \quad |p_k| \leq 1$$

La anterior condición es el criterio de estabilidad de los polos, para tiempo discreto.

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es estable:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{2} z^{-1}\right)}$$

Los polos de H(z) son {0.5,1.5}, ya que existe uno de ellos que es mayor que uno, el sistema es inestable.

Ejercicios de Repaso.

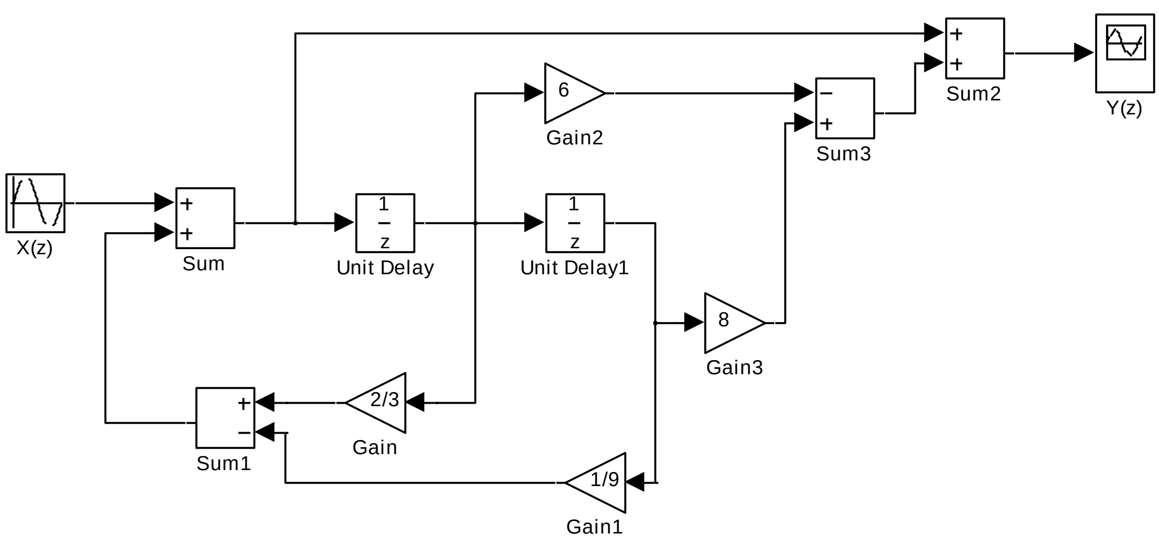
1) $TZ\left\{ |n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \right\}$

2) $TZ\{x[n]\} \quad x[n] = \begin{cases} n-1 & 2 \le n \le 7 \\ 13-n & 8 \le n \le 12 \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$

3) $TZ^{-1}\left\{ \frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)} e^{-3s} \right\}$

$Escoja\ la\ ROC\ de\ \text{mod}\ o\ que\ la\ Rta.\ exista\ para\ n > 0$

4) Para el siguiente sistema:



5) Determinar si el anterior sistema es estable.

BIBLIOGRAFIA

Oppenheim, Alan V. Willsky, Alan S. Nawab Hamid. Señales y Sistemas. Segunda Edición. Prentice Hall-Pearson.

Haykin Simon, Señales y Sistemas. Segunda Edición. Wiley&Sons. México.

Proakis, Manolakis. Tratamiento Digital de Señales. Cuarta Edición. Prentice Hall-Pearson. España.

Nakamura, Shoichiro. Análisis Númerico y visualización gráfica con Matlab.Prentice Hall. Mexico.

Kamen, Edward W. Introducción a Señales y Sistemas. Segunda Edición.CECSA. Mexico.

Lindner,Douglas K. Introducción a Señales y Sistemas. McGraw-Hill.Colombia.

Hsu, Hwei P. Señales y Sistemas. Segunda Edición. Mc-Graw-Hill. México.

Ediciones
Tecnológica de Bolívar
CARTAGENA DE INDIAS