

**DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVO
PARA ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE DE UNA CADENA DE SUMINISTRO
MULTI-NIVEL: CASO DE APLICACIÓN SECTOR MADERA Y MUEBLES DE LA
REGIÓN CARIBE DE COLOMBIA**

Katherinne Paola Salas Navarro
Ingeniera Industrial



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR
FACULTAD DE INGENIERÍAS
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
ENFASIS INGENIERIA INDUSTRIAL
CARTAGENA DE INDIAS D.T Y C.
AGOSTO DE 2013**

**DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVO PARA
ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE DE UNA CADENA DE SUMINISTRO MULTI-NIVEL:
CASO DE APLICACIÓN SECTOR MADERA Y MUEBLES DE LA REGIÓN CARIBE DE
COLOMBIA**

KATHERINNE PAOLA SALAS NAVARRO
Ingeniera Industrial

**Trabajo de Tesis para Optar al Título de
Magister en Ingeniería con Énfasis en Ingeniería Industrial**

Director
Jaime Acevedo Chedid
PhD(c) Ingeniería Industrial

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR
FACULTAD DE INGENIERÍAS
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
ENFASIS INGENIERIA INDUSTRIAL
CARTAGENA DE INDIAS D.T Y C.
AGOSTO DE 2013**

Cartagena de Indias, 22 de Agosto de 2013

Señores:

**COMITÉ EVALUADOR
Maestría en Ingeniería
Facultad de Ingeniería
Universidad Tecnológica de Bolívar
Ciudad**

Respetados Señores:

Por medio de la presente me permito someter para estudio, consideración y aprobación el trabajo de grado titulado **“DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVO PARA ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE DE UNA CADENA DE SUMINISTRO MULTI-NIVEL: CASO DE APLICACIÓN SECTOR MADERA Y MUEBLES DE LA REGIÓN CARIBE DE COLOMBIA”** desarrollada por la estudiante Katherinne Salas Navarro, en el marco de la **Maestría en Ingeniería (Énfasis Ingeniería Industrial)**.

Como director del proyecto considero que el trabajo cumple los objetivos planteados y amerita ser presentado para su evaluación.

Cordialmente,

PhD(c) Jaime Acevedo Chedid
Director de Trabajo de Grado

Cartagena de Indias, 22 de Agosto de 2013

Señores:
COMITÉ EVALUADOR
Maestría en Ingeniería
Facultad de Ingeniería
Universidad Tecnológica de Bolívar
Ciudad

Respetados Señores:

Por medio de la presente me permito someter para estudio, consideración y aprobación el trabajo de grado titulado **“DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVO PARA ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE DE UNA CADENA DE SUMINISTRO MULTI-NIVEL: CASO DE APLICACIÓN SECTOR MADERA Y MUEBLES DE LA REGIÓN CARIBE DE COLOMBIA”** desarrollada en el marco de la **Maestría en Ingeniería (Énfasis Ingeniería Industrial)**.

Cordialmente,

Ing. Katherinne Salas Navarro
Investigadora

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del Presidente del Jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Cartagena, Agosto de 22 de 2013

DEDICATORIA

A Dios, por ser la fuente de mi inspiración que me guía y me da fuerzas para seguir adelante en la construcción de mis sueños.

A mi esposo, Francisco, por su amor, apoyo incondicional y motivación para cumplir mis metas y hacer realidad mis sueños. Por comprender que el desarrollo de este proyecto, más que el cumplimiento de una meta personal hace parte de mi vocación de vida.

A mi madre, Dolores, por su dedicación, cuidado, amor y por ser el motor que me ha impulsado durante toda mi vida para trabajar fuertemente en la realización de mi proyecto de vida.

A mi padre Jorge y hermana Leidy, por confiar y creer en mis capacidades y estar ahí conmigo apoyándome en los momentos que más los he necesitado.

A mis familiares, por comprender mis ausencias en actividades y eventos por el desarrollo de mis estudios durante estos años.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad de la Costa por darme la oportunidad de realizar mis estudios de Maestría en Ingeniería a través de una beca y por creer en mis capacidades.

Al grupo de empresas del Sector Madera y Muebles de la Ciudad de Barranquilla por creer en este proyecto y brindarme información vital para la culminación del mismo.

Al PhD(C) Jaime Acevedo Chedid, por su amable disposición y dedicación para dirigir este trabajo, por sus valiosas enseñanzas y sugerencias que enriquecen este documento, muchas gracias por su apoyo incondicional.

Al PhD Shib Sankar Sana, Assistant Professor, Dept. of Mathematics, Bhangar Mahavidyalaya (Calcutta University, India), por su disposición para la revisión del modelo matemático y por su apoyo para publicarlo. Gracias por creer en nuestro trabajo.

Al M.Sc. Juan Carlos Palomino Mantilla, Docente de la Facultad de Ciencias Básica, por su amable orientación en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

A mi amigo, Holman Ospina, por sus valiosos consejos, apoyo incondicional y colaboración. Gracias por compartir conmigo estos dos años de arduo estudio y dedicación.

A mis amigos, Ronald Zamora y Nohora Mercado, por compartir conmigo estos años de estudio que fortalecieron nuestros lazos de amistad.

A todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron en la realización de este trabajo.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	14
1. ESTADO DEL ARTE: GESTIÓN DE INVENTARIOS EN CADENAS DE SUMINISTRO COLABORATIVAS	17
1.1. CADENA DE SUMINISTRO.....	17
1.1.1. Enfoque Tradicional.....	17
1.1.2. Enfoque Colaborativo.....	20
1.1.2.1. Principales Componentes de la Colaboración.....	21
1.1.2.2. Tipos de Colaboración.....	22
1.1.2.3. Modelos de Cadenas de Suministro Colaborativas.....	24
1.2. GESTIÓN DE INVENTARIOS.....	26
1.2.1. Modelos de Inventarios Determinísticos.....	29
1.2.2. Modelos de Inventarios Estocásticos.....	33
1.3. PROGRAMACIÓN NO LINEAL.....	37
1.3.1. Condiciones necesarias de optimalidad.....	38
1.3.2. Algoritmos de optimización con restricciones.....	38
1.3.3. Algoritmos de optimización sin restricciones.....	39
1.4. PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA.....	40
1.4.1. Estructura del Modelo de Programación Estocástica.....	40
1.4.2. Metodología de solución Problema de Programación Estocástica.....	41
2. MODELO DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVO EN CADENAS DE SUMINISTRO MULTINIVEL.....	43
2.1. MODELO CONCEPTUAL DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS.....	44
2.2. MODELO MATEMÁTICO PARA LA GESTIÓN DE INVENTARIOS EN LA CADENA DE SUMINISTRO MULTINIVEL EN ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE.....	50
2.2.1. Modelo Matemático para la Gestión de Inventarios Colaborativos en escenarios de incertidumbre.....	51
3. GESTIÓN DE ESQUEMAS DE INTEGRACIÓN Y COLABORACIÓN DE INVENTARIOS EN CADENAS DE SUMINISTRO.....	76
3.1. METODOLOGÍA DE GESTIÓN DE INVENTARIOS PARA FORTALECER LAS RELACIONES DE COLABORACIÓN EN UNA CADENA DE SUMINISTRO.....	76
4. CASO APLICADO A SECTOR MADERA Y MUEBLES DE LA REGIÓN CARIBE DE COLOMBIA.....	81
4.1. CARACTERIZACIÓN DEL SECTOR MADERA Y MUEBLES DE REGIÓN CARIBE DE COLOMBIA.....	81
4.2. SECTOR MADERA Y MUEBLES EN LA CIUDAD DE BARRANQUILLA Y SU ÁREA METROPOLITANA.....	89
4.3. GESTIÓN DE INVENTARIOS EN EL SECTOR MADERA Y MUEBLES EN LA CIUDAD DE BARRANQUILLA Y SU ÁREA METROPOLITANA.....	91
4.3.1. Proveedores.....	92
4.3.2. Fabricantes de muebles.....	93
4.3.3. Distribuidores.....	94

4.4.MODELO MATEMÁTICO DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS EN CADENA DE SUMINISTRO MULTINIVEL EN ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE: CASO DE APLICACIÓN	95
4.4.1.Datos del Modelo Matemático	97
4.5.RESULTADOS DEL MODELO.....	103
4.6.ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	108
CONCLUSIONES.....	112
TRABAJOS FUTUROS	114
REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA.....	115
ANEXOS.....	121
ANEXO 1. ANÁLISIS DE LA DEMANDA DEL MERCADO	121
ANEXO 2. PROGRAMACIÓN MODELO MATEMÁTICO GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS SIN COLABORACIÓN (ENFOQUE STACKELBERG)	126
ANEXO 3. PROGRAMACIÓN MODELO MATEMÁTICO GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS (3 NIVELES).....	131
ANEXO 4. PROGRAMACIÓN MODELO MATEMÁTICO GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS (2 NIVELES).....	136

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Procesos de la Cadena de Suministro	18
Figura 2. Casa de la Gestión de la Cadena de Suministro	19
Figura 3. Estimación de la Demanda Colaborativa.....	23
Figura 4. Inventario Colaborativos.....	23
Figura 5. Niveles de Colaboración en redes.....	24
Figura 6. Componentes del modelo.....	25
Figura 7. Modelo de la Cadena de Suministro Colaborativa	25
Figura 8. Modelos de Inventarios Deterministas	29
Figura 9. Modelos de Inventarios Estocásticos.	34
Figura 10. Gestión de Inventario Colaborativo para escenarios de incertidumbre en cadenas de suministro multinivel.....	44
Figura 11. Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativos en Cadenas de Suministro Multinivel Enfoque Global.....	45
Figura 12. Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativo en Cadenas de Suministro Multinivel.....	46
Figura 13. Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativos en Cadenas de Suministro Multinivel.....	47
Figura 14. Niveles del Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativo.	48
Figura 15. Diagrama de la Cadena de Suministro.....	55
Figura 16. Metodología de Gestión de Inventarios Colaborativos.	76
Figura 17. Cadena de abastecimiento de Sector Madera y Mueble de la Región Caribe de Colombia.	85
Figura 18. Configuración de Suministro para el Caso de Aplicación del Sector Madera y Muebles.	96
Figura 19. Metodología de Programación del Modelo Matemático Bajo el Enfoque de Stackelberg.	104
Figura 20. Metodología de Programación del Modelo Matemático Bajo el Enfoque de Colaboración (3 niveles).	105
Figura 21. Metodología de Programación del Modelo Matemático Bajo el Enfoque de Colaboración (2 niveles).	107

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Mediciones de los Procesos de la Cadena de Suministro.....	28
Tabla 2. Consideraciones Modelos de Inventarios Determinísticos.....	29
Tabla 3. Modelos de Inventarios deterministas en Cadenas de Suministro.....	33
Tabla 4. Modelos de Inventarios Estocásticos en Cadenas de Suministro.....	36
Tabla 5. Niveles del Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios.....	49
Tabla 6. Mediciones de los Procesos de la Cadena de Suministro.....	80
Tabla 7. Información de las Empresas pertenecientes a la cadena de suministro.....	95
Tabla 8. Información de Materia Prima y Productos finales.....	96
Tabla 9. Combinación de artículos de los proveedores.....	97
Tabla 10. Tasa de Producción de los proveedores.....	97
Tabla 11. Tasa de Producción esperada de los proveedores.....	98
Tabla 12. Tasa de detección de unidades en los proveedores.....	98
Tabla 13. Costo unitario de inspección en los proveedores.....	98
Tabla 14. Costo de alistamiento de los proveedores.....	99
Tabla 15. Costo unitario de almacenamiento de los proveedores.....	99
Tabla 16. Fracción de artículos defectuosos en el proveedor.....	99
Tabla 17. Costo unitario de compra en los proveedores.....	99
Tabla 18. Precio unitario de venta de los proveedores.....	100
Tabla 19. Precio unitario de venta de artículos defectuosos en el proveedor.....	100
Tabla 20. Combinación de artículos en el fabricante.....	100
Tabla 21. Fracción de productos defectuosos en el fabricante.....	100
Tabla 22. Costo de alistamiento en el fabricante.....	101
Tabla 23. Costo unitario de almacenamiento en el fabricante.....	101
Tabla 24. Costo fijo de mantenimiento en el fabricante.....	101
Tabla 25. Costo de mano de obra en el fabricante.....	101
Tabla 26. Costo variable en el fabricante.....	101
Tabla 27. Precio de venta unitario en el fabricante.....	102
Tabla 28. Precio de venta unitario productos defectuosos en el fabricante.....	102
Tabla 29. Costo de Inspección en el fabricante.....	102
Tabla 30. Tasa de detección en el fabricante.....	102
Tabla 31. Demanda del distribuidor.....	102
Tabla 32. Demanda del mercado.....	103
Tabla 33. Costo de Alistamiento en el distribuidor.....	103
Tabla 34. Costo unitario de almacenamiento en el distribuidor.....	103
Tabla 35. Precio de venta unitario en el distribuidor.....	103
Tabla 36. Resultados tamaño de lote de proveedores bajo enfoque Stackelberg.....	104
Tabla 37. Resultados beneficio esperado bajo enfoque Stackelberg.....	105
Tabla 38. Resultados tamaño de lote de proveedores bajo enfoque colaborativo (3 niveles).....	106
Tabla 39. Resultados beneficio esperado bajo enfoque colaborativo (3 niveles).....	106

Tabla 40. Resultados tamaño de lote de proveedores bajo enfoque colaborativo (2 niveles).....	107
Tabla 41. Resultados beneficio esperado bajo enfoque colaborativo (2 niveles).....	108
Tabla 42. Comparación de los resultados de los tamaños de Lote de los proveedores.....	110
Tabla 43. Comparación de Beneficios Esperados para los niveles de la Cadena de Suministro.....	110
Tabla 44. Demanda Anual de grupos de productos del distribuidor.....	121
Tabla 45. Ventas de Productos seleccionados.....	123
Tabla 46. Prueba de Kolmogorov-Smimov para Producto 1. Fuente: Elaboración propia.....	123
Tabla 47. Prueba de Kolmogorov-Smimov para Producto 2. Fuente: Elaboración propia.....	124

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Factores del Modelo de la Cadena de Abastecimiento Sector Madera y Muebles de la ciudad de Barranquilla	86
Gráfico 2. Factores del Modelo de la Cadena de Abastecimiento Sector Madera y Muebles de la ciudad de Cartagena.....	87
Gráfico 3. Factores de Modelo de la Cadena de Abastecimiento del Sector Madera y Muebles de la ciudad de Santa Marta	88
Gráfico 4. Beneficio Esperado en los Niveles de la Cadena bajo el Enfoque Colaborativo y no colaborativo.	111
Gráfico 5. Análisis de Pareto para los Grupos de Productos del Distribuidor. Fuente: Adaptación datos Distribuidor.	122
Gráfico 6. Histograma de Frecuencias para la Alcoba 1	123
Gráfico 7. Histograma de Frecuencias para la Alcoba 1.	124

INTRODUCCIÓN

Son muchos los retos a los que las empresas deben enfrentarse hoy en día. La creciente competitividad y los fenómenos de globalización en la actualidad, exige a las empresas, el diseño de estrategias y respuestas cada vez más eficientes en la gestión de los procesos, que les permitan sobrevivir y crecer en un mundo en continuo cambio, en el cual el cliente es quien asume cada vez más el poder de negociación y quien al final define el éxito o fracaso de todo el engranaje empresarial (Cadena de Suministro) que se encuentra tras la fabricación de un producto. Para los expertos en administración de negocios, no basta sólo con hacer las cosas bien, es necesario ser excelentes.

El concepto de cadena de suministro aparece por primera vez en los estudios de Forrester cuando manifestó que el éxito de las empresas dependía de la interacción entre los flujos de información, materiales, pedidos, dinero, mano de obra y equipos, y que la comprensión y control de estos flujos es el principal trabajo de la gestión. La cadena de suministro representa una red de trabajo para las funciones de abastecimiento de material, su transformación en productos terminados y la distribución de esos productos a los clientes finales (Lee & Billington, 1993), en este sentido, es un sistema integrado que sincroniza una serie de procesos: adquisición de materiales, transformación de materiales y partes en productos terminados, agregar valor a estos productos, distribuir y entregar estos los productos a minoristas y clientes finales y facilitar el intercambio de información entre los grupos de interés de la cadena, cuyo objetivo principal es aumentar la eficiencia de las operaciones, productividad y ventajas competitivas frente a sus competidores.

Por otro lado, típicamente está compuesta de dos procesos de negocios principales: i) Gestión de Materiales, concebida como la adquisición y almacenamiento de materia prima, partes y suministros, y soporta el ciclo completo del flujo de materiales desde compras y el control de los materiales de producción para la planeación y control de trabajo en proceso, hasta el almacenamiento, venta y distribución de los productos finales (Johnson & Malucci, 1999) y ii) Distribución Física, que contiene todas las actividades logísticas de salida para atender a los clientes, e incluyen la recepción y procesamiento de órdenes, despliegue de inventarios, mantenimiento y manejo de inventarios, transporte, consolidación, precios, promociones, devoluciones y el soporte al ciclo de vida de producto (Bowersox & Closs, 1996), es por eso que Incrementar la eficiencia de los procesos entre las empresas es una alternativa prioritaria para reducir costos, mejorar la calidad y agilizar las operaciones.

Considerando el amplio espectro de las cadenas de suministro, es evidente que no se puede incluir en un solo modelo todos los procesos que la integran, por lo tanto, para los investigadores que abordan el problema existe el compromiso de hacer una evaluación entre la complejidad y la realidad del modelo, requiriendo de ellos que se defina con precisión el foco de atención en el

proceso a modelar. Del análisis de los procesos se resalta que la gestión de inventarios es una actividad transversal a la cadena de suministro y constituye uno de los aspectos logísticos más relevantes y complejos dentro de cualquier sector económico. Es por ello, que la definición de políticas que permitan determinar cuánto ordenar y cuándo ordenar, ya sea en un ambiente con demanda determinístico (constante en el horizonte de planeación) o en un ambiente de incertidumbre con demanda estocástica (variable aleatoria continua), se constituyen en factor esencial para una buena gestión de inventarios.

En la revisión de la literatura, se encontró que Shib Sankar Sana (2011) desarrollo un modelo integrado de producción e inventario para una cadena de suministro de tres niveles (proveedor, fabricante y minorista), considerando productos en buen estado y productos defectuosos, el impacto de las estrategias de negocio relacionadas con el tamaño óptimo de pedidos de materia prima, la tasa de producción y los tiempos de espera entre cada uno de los eslabones que intervienen y colaboran en el sistema producción y comercialización. El problema planteado radicaba en coordinar las decisiones de producción e inventario en la cadena de suministro con el propósito de maximizar la utilidad neta en todos los miembros de la cadena. El modelo propuesto fue resuelto por el método de cálculo analítico para optimizar la función objetivo. Dentro de las extensiones propuestas para futuras investigaciones sobre el modelo, propuso: i) investigar el efecto de múltiples- proveedores y múltiples-minoristas con tiempos de ciclo diferentes, ii) considerar el efecto de un porcentaje de productos defectuosos que podrían ser modificados por el fabricante y los artículos de desecho que deben ser eliminados de la cadena de suministro y iii) considerar demanda estocástica y tasa de producción en cada miembro de la cadena.

Dado que el escenario planteado por Sana para futuras investigaciones se ajusta más a la realidad de las empresas, se asumieron las recomendaciones planteadas para extender lo desarrollado a través de la formulación de un modelo de gestión de inventarios en ambientes colaborativos para una cadena de suministro de tres (3) niveles, considerando múltiples proveedores, múltiples fabricantes, múltiples distribuidores, múltiples productos, tasa de producción y tasa de demanda estocástica, con el objetivo de maximizar el beneficio de los actores de la cadena.

En las cadenas de suministro, la colaboración se define como el trabajo en conjunto entre dos o más empresas independientes para planificar y ejecutar las operaciones con mayor éxito que cuando se actúa de forma aislada (Simatupang & Sridharan, 2003); permite sinergia para el desarrollo de actividades entre los socios y anima a la planificación conjunta y el intercambio de información en tiempo real. La colaboración es el compromiso de compartir, la confianza y el respeto, habilidades y conocimientos, y la agilidad intelectual entre los socios de la cadena (Barratt, 2004). La razón fundamental detrás de la colaboración es que una empresa no puede competir con éxito por sí misma, debido a que los clientes y la competencia son cada vez mayores.

¿Cuál es modelo de gestión de inventarios colaborativo que contempla escenarios de incertidumbre en una cadena de suministro multinivel en un enfoque de programación estocástica?

Para validar el modelo matemático construido para la gestión de inventario colaborativo en una cadena de suministro multinivel, se tomó el Sector Madera y Muebles de la Región Caribe el cual presenta deficiencias, en cuanto al almacenamiento de materia prima, insumos, productos intermedios y productos finales, ya que no tienen definido claramente las políticas de almacenamiento de materias primas y de producto terminado, el manejo de inventarios se realiza manualmente, existe escasa planificación en el proceso de compras y adquisición de materia prima, así como el mantenimiento de un nivel mínimo y máximo de inventarios. De igual forma, la manipulación del producto final no es la adecuada y las empresas no cuentan con los sitios apropiadas para almacenar los productos bajos las condiciones óptimas que garanticen su buen estado y calidad. Por todo lo anterior, que las empresas requieren de un modelo que les permita definir políticas de almacenamiento en donde se establezcan los lineamientos necesarios para realizar las actividades propias del proceso y se mejore la manipulación y disposición del producto final en cada empresa (Salas, 2011).

El presente documento está organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo se desarrolla una revisión de los modelos generales de gestión de inventarios y su importancia en la cadena de suministro, los modelos de integración y colaboración, y los esquemas de modelado bajo escenarios de incertidumbre de la cadena de suministro; en el segundo capítulo se presenta el diseño de los modelos conceptual y matemático para la gestión de inventarios colaborativos en una cadena de suministro multinivel en escenarios de incertidumbre; en el tercer capítulo se presenta la metodología de gestión de inventarios colaborativos en cadenas de suministro multinivel, que incluye la definición de políticas de contratación y los esquemas de integración y colaboración para la gestión adecuada de inventarios en cada uno de los actores de la cadena; en el cuarto capítulo se presenta para la validación del modelo matemático construido un caso de aplicación en el Sector Madera y Muebles de la Región Caribe de Colombia, que consta de un diagnóstico de los niveles de integración y colaboración en el manejo de inventarios en la cadena de suministro de dicho sector y la solución del modelo matemático con los datos suministrados por las empresas del sector; al final del documento se presentan los anexos que soportan la investigación y las referencias que se utilizaron.

1. ESTADO DEL ARTE: GESTIÓN DE INVENTARIOS EN CADENAS DE SUMINISTRO COLABORATIVAS

1.1. CADENA DE SUMINISTRO

El concepto de cadena de suministro aparece por primera vez en los estudios de Forrester cuando manifestó que el éxito de las empresas dependía de la interacción entre los flujos de información, materiales, pedidos, dinero, mano de obra y equipos, donde la comprensión y control de estos flujos es el principal trabajo de la gestión, y solo a partir de los años 80' se introdujo el término de Gestión de la Cadena de Suministro (Supply Chain Management - SCM) y fue llamando la atención de los académicos a nivel mundial, quienes fueron consolidando las teorías alrededor del tema (Oliver & Webber, 1982). La cadena de suministro representa una red de trabajo para las funciones de abastecimiento de material, su transformación en productos terminados y la distribución de esos productos a los clientes finales (Lee & Billington, 1993). Dentro de la evolución del concepto de cadena de suministro se encuentra en la literatura que existen dos enfoques como lo son: el tradicional y el colaborativo, que se presentan a continuación.

1.1.1. Enfoque Tradicional. La cadena de suministros tradicional es vista como la interacción entre los sistemas totalmente integrados verticalmente y aquellos en los que cada miembro del canal opera de forma completamente independiente (Cooper & Ellram, 1993), y a su vez sincroniza una serie de procesos: adquisición de materiales, transformación de materiales y partes en productos terminados, agregar valor a estos productos, distribuir y entregar estos los productos a minoristas y clientes finales y facilitar el intercambio de información entre los grupos de interés de la cadena (proveedores, fabricantes, distribuidores y minoristas), cuyo objetivo principal es aumentar la eficiencia de las operaciones, productividad y las ventajas competitivas frente a sus competidores. Sintetizando, la gestión de la cadena de suministro es definida como "la integración de procesos claves de negocio, desde el usuario final a través de proveedores originales, que suministran productos, servicios e información y agregan valor a los clientes y grupos de interés (Cooper et al., 1997).

Una cadena de suministro se caracteriza como el flujo de bienes y de información (Ver Figura 1). Por otro lado, típicamente está compuesta de dos procesos de negocios principales: i) Gestión de Materiales y ii) Distribución Física. La gestión de materiales es concebida como la adquisición y almacenamiento de materia prima, partes y suministros, y soporta el ciclo completo del flujo de materiales desde compras y el control de los materiales de producción para la planeación y control de trabajo en proceso, hasta el almacenamiento, venta y distribución de los productos finales (Johnson & Malucci, 1999). Por otro lado, la distribución física contiene todas las actividades logísticas de salida para atender a los clientes, estas actividades incluyen la recepción y

procesamiento de órdenes, despliegue de inventarios, mantenimiento y manejo de inventarios, transporte, consolidación, precios, promociones, devoluciones y el soporte al ciclo de vida de producto (Bowersox & Closs, 1996).

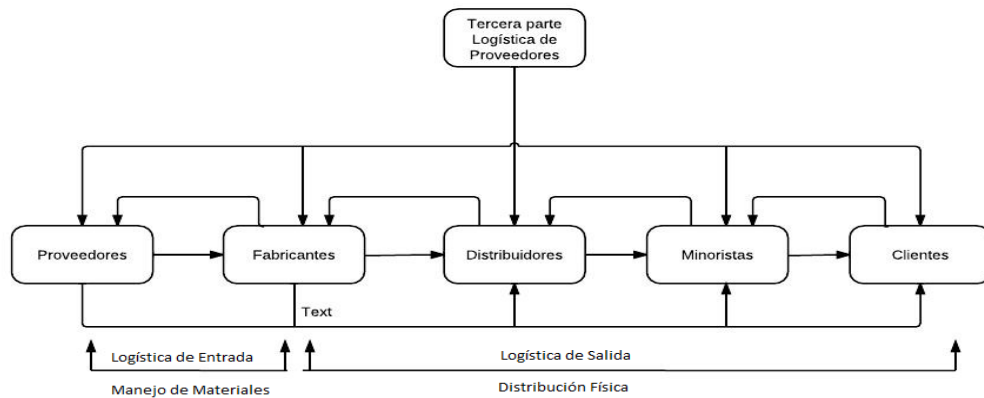


Figura 1. Procesos de la Cadena de Suministro
Fuente: Adaptación (Cooper et al., 1997)

Existen tres dimensiones de la cadena de suministros: coordinación interfuncional (administración de actividades y procesos logísticas de la empresa), coordinación de actividades interfuncionales (logística, finanzas, producción y comercialización) y la coordinación interinstitucional de las actividades que tienen lugar entre empresas de diferentes eslabones de la cadena de suministro (Ballou et al., 2000). Incrementar la eficiencia de los procesos entre las empresas en una alternativa prioritaria para reducir costos, mejorar la calidad y agilizar las operaciones. La orientación a los procesos de esta forma, propone eliminar barreras no solo en las actividades de negocio al interior de la empresa, sino entre las empresas para simplificarlas, hacerlas más eficientes y eliminar tareas duplicadas (Hammer, 2001).

Los esfuerzos de los integrantes de una cadena de suministro se ven enfocados en el aumento de la competitividad, tanto de los productos y servicios suministrados, como de toda la cadena en general. Por lo que dichos esfuerzos deben reflejarse en el eslabón final en el nivel del servicio al cliente, en la calidad del producto final, en los servicios post-venta y en el nivel de satisfacción del cliente. Existen dos formas para aumentar la competitividad, una es la integración de las organizaciones participantes, y otra es una mejor coordinación de los flujos de materiales, información y financieros. Un concepto más amplio de gestión de la cadena de suministro es presentado por Standler (2005), quien la define como la tarea de integrar diferentes organizaciones a lo largo de toda la cadena coordinando el flujo de materiales, información y finanzas, de forma que satisfaga la demanda de los clientes e incremente la competitividad de toda la cadena. Dicho concepto fue representado como la Casa de la Gestión de la Cadena de Suministro (Ver Figura 2).



Figura 2. Casa de la Gestión de la Cadena de Suministro

Fuente: Adaptación Standler (2005)

El techo representa el fin último de SCM, la competitividad y el servicio al cliente, los cuales se pueden mejorar reduciendo costos, flexibilidad ante variaciones en la demanda o proporcionando un elevado nivel de calidad de los productos y servicios. El techo descansa sobre dos pilares: la integración de una red de organizaciones y la coordinación de flujos de información, materiales y financieros. Los pilares descansan en los fundamentos y procesos que sirven de apoyo para la gestión de la cadena (la logística, el mercadeo, investigación de operaciones, teoría organizacional, entre otros) (Stadtler & Kilger, 2005).

Competitividad. Para Porter (1999) la competitividad de una nación depende de la capacidad de su industria para innovar y mejorar. Las compañías ganan ventaja sobre los mejores competidores del mundo debido a la presión y al reto. Se benefician de tener fuertes rivales nacionales, agresivos proveedores con base en su país y clientes locales exigentes.

Servicio al Cliente. El servicio al cliente es un concepto multi-dimensional y se puede descomponer en tres elementos, según estudios citados por Christopher (1998), ellos son: pre-operación, operación y post-operación. El primero se refiere al acceso del cliente a la información de los productos y servicios que ofrece la empresa; el segundo, consiste en proporcionar el producto y/o servicio requerido por el cliente, durante tiempos de entrega prudentes; y el tercero, se refiere a la prestación del servicio una vez la orden se cumple.

Integración. La integración de los actores de la cadena se refiere a la colaboración que pueda existir entre los mismos en el largo plazo, en actividades como la elección de socios, las redes de colaboración entre las organizaciones y el liderazgo que ejerzan algunos de los integrantes. El objetivo de la integración en la cadena de suministro es eliminar las barreras para facilitar el flujo de

materiales, dinero, recursos e información, y para lograrlo Van der Vaart & Van Donk (2004) plantean tres etapas: la etapa de transparencia (los miembros de la cadena de suministro comparten información pertinentes de inventarios, demanda, promociones), la etapa de compromiso y coordinación (los miembros de la cadena comparten toda la información y poseen cláusulas de compromiso definidas en contratos) y la etapa de planificación integral (la toma de decisiones se realiza de manera centralizada y existen recursos compartidos).

Coordinación. La coordinación de los flujos de información, materiales y financieros consta de tres componentes básicos: utilización de las tecnologías de la información, el proceso de orientación y la planificación avanzada. El objetivo de una cadena de suministro debe ser maximizar el valor agregado, el cual hace referencia a la diferencia entre el valor del producto final para el cliente y los costos que se incurren en la cadena para cumplir con las expectativas del cliente. Para ello, se deben llevar a cabo una serie de procesos y flujos que tienen lugar dentro y entre diferentes etapas que se combinan para satisfacer las necesidades del cliente. Existen dos formas de ver los procesos: el enfoque de ciclos y el enfoque empuje/tirón; en el primero, los procesos se dividen en una serie de ciclos que se realizan en etapas sucesivas de la cadena de suministro: ciclo de pedido al cliente, ciclo de reabastecimiento, ciclo de fabricación y ciclo de abasto; y en segundo, los procesos de tirón inician con el pedido del cliente mientras que los de empuje comienzan y se realizan en anticipación a los pedidos de los clientes (Chopra & Meindl, 2008).

1.1.2. **Enfoque Colaborativo.** Una cadena de suministro colaborativa es aquella en la que varios de sus integrantes trabajan conjuntamente para planear y ejecutar actividades de la cadena de suministro para lograr un mayor éxito que cuando actúan por separado, para lograrlo se establece una estrategia de colaboración basada en vincular a las operaciones todas las actividades comerciales de las empresas con el fin de lograr una visión compartida de las oportunidades del mercado (Bowersox, 1991). Dichas estrategias se basan en un paradigma de ventajas colaborativas (Kanter, 1994) que tiene lugar cuando las empresas desarrollan mecanismos (estructuras, proceso y habilidades) para reducir las diferencias entre las organizaciones y las personas que lo conforman, para lograr una verdadera asociación. Múltiples vínculos, en múltiples niveles garantiza la comunicación, coordinación y control en la cadena de suministro, así mismo las relaciones entre las personas permite asegurar que las necesidades propias de las compañías y los objetivos se encuentran bien representados. Mediante la colaboración, los socios de la cadena de suministro pueden trabajar como si pertenecieran a la misma empresa (Lambert & Christopher, 2000), acceder y aprovechar los recursos de los demás y disfrutar los beneficios asociados. Esta colaboración puede aumentar las ventajas y mejorar el desempeño de la empresa.

Existen tres grados de complejidad en una cadena de suministro: "Direct Supply Chain", "Extended Supply Chain" y "Ultimate Supply Chain", según Mentzer et al. (2001). La primera, se compone de una organización, un proveedor y un cliente; la segunda incluye a los proveedores de los

proveedores de la organización y a los clientes de los clientes inmediatos; y la tercera incluye todas las organizaciones involucradas aguas arriba y aguas abajo en la cadena de suministro. Stank et al. (2001), definen la colaboración con entidades externas la cadena de suministro que influye en el aumento de la colaboración, que a su vez mejora el rendimiento del servicio. Esta relación puede ser la clave para ayudar a los gerentes a comprender cuál es la mejor decisión para facilitar el cambio de comportamiento. La implicación es que la colaboración con clientes y proveedores es un primer paso hacia una colaboración efectiva dentro de la empresa.

La colaboración se define como el trabajo en conjunto entre dos o más empresas para planificar y ejecutar las operaciones de la cadena de suministro (Simatupang & Sridharan, 2003), a partir del compromiso, confianza, respeto, habilidades y conocimientos de los socios de la cadena (Barratt, 2004). La colaboración permite sinergia para el desarrollo de actividades entre los socios y anima a la planificación conjunta y el intercambio de la información en tiempo real. La razón fundamental detrás de la colaboración es que una empresa no puede competir con éxito por sí misma, debido a que los clientes y la competencia son cada vez mayores. Es por ello, que la integración en la cadena de suministros comprende la integración y colaboración de organizaciones, recursos, actividades que están implicados en la etapa de diseño, proceso de fabricación, fases de transporte y puntos de entrega de los productos y/o servicios a los clientes (Mehrjerdi, 2009).

La colaboración (SCC) y la integración de la cadena de suministro (SCI) a veces se han utilizado indistintamente, ya que ambos se refieren a un proceso de estrecha conexión entre los actores de la cadena de suministro. Sin embargo, el término integración significa que el control unificado (o propiedad) de varios procesos sucesivos o similar anteriormente realizado sobre independientemente (Flynn et al., 2010). Aunque existen coincidencias entre la colaboración (SCC) y la integración (SCI) de la cadena, la colaboración es una mejor opción para construir una relación en conjunto entre los socios autónomos de la cadena, debido a que es una interconexión de siete componentes: intercambio de información, congruencia de metas, sincronización en la toma de decisiones, alineación de incentivos, intercambio de recursos, comunicación colaborativa y la creación conjunta de conocimientos. Estas siete dimensiones interconectadas añaden valor a la colaboración en la cadena de suministro mediante la reducción de costos y tiempos de respuesta, el aprovechamiento de los recursos y la mejora de la innovación (Cao & Zhang, 2011).

1.1.2.1. Principales Componentes de la Colaboración. La Gestión de la Cadena de Suministro permite generar enlaces entre la planificación y control de los procesos de suministro y la competitividad de las organizaciones (Mehrjerdi, 2009), para ello es importante tener en cuenta los siguientes componentes:

- ✓ Integración: consiste en la unión de los recursos de las organizaciones para desarrollar actividades relacionadas a la fase de diseño, proceso de fabricación, transporte y servicios finales para ganar clientes y aumentar la competitividad de las organizaciones.
- ✓ Automatización: en una cadena de suministro las organizaciones comparten información relacionada a inventarios, ventas, demanda, pronósticos, estado del pedido, planificación del producto, logística, precios de venta y programación de la producción. Los procesos de colaboración se facilitan con el intercambio de información de manera automatizada para tener acceso a la información en tiempo real.
- ✓ Información: las tecnologías de la información tienen un papel muy importante en todas las etapas de la cadena de suministro, ya que permiten capturar, mostrar y analizar la información para la toma de decisiones relacionadas con la planificación o funcionamiento de la cadena de suministro.
- ✓ Confianza: la cooperación y la confianza dentro de la cadena de suministro ayudan a mejorar el rendimiento de los procesos, ya que facilita la toma de decisiones y acelera de las actividades y los productos, servicios e ideas fluyen libremente para diseñar, implementar y gestionar iniciativas que crean valor agregado.

1.1.2.2. Tipos de Colaboración. La colaboración es un proceso mediante el cual se alcanzan unos objetivos que no se pueden lograr si se actúa solo o no se pueden hacer de forma eficiente, para ello se requiere que se determinen los objetivos en conjunto, responsabilidad compartida en la obtención de los mismos y utilizar la experiencia de cada colaborador. Las actividades colaborativas en una cadena de suministro requieren de las relaciones entre los proveedores, fabricantes, clientes y demás actores en la planificación de la demanda, de capacidades, servicio al cliente, entre otras actividades que requieran intercambio de información en tiempo real para poder atender a los requerimientos de los clientes y a las fluctuaciones de la demanda.

La colaboración en una cadena de suministro puede clasificarse de acuerdo a múltiples dimensiones: liderazgo, objetos, y la estructura de la red de colaboración. Por lo general, uno de los socios que participan en la colaboración tiene un líder papel, mientras que el otro (u otros) son seguidores (Standler, 2005). De acuerdo a lo anterior, se establecen los siguientes tipos de colaboración.

- ✓ Estimación de la Demanda colaborativa: permite hacer una previsión analítica entre los diferentes departamentos de las empresas involucradas en la cadena de suministro conectando entre si el proceso de previsión de los diferentes dominios de planificación. En la Figura 3, se presenta la

metodología para realizar una estimación de la demanda bajo el enfoque de colaboración entre el proveedor y el cliente.

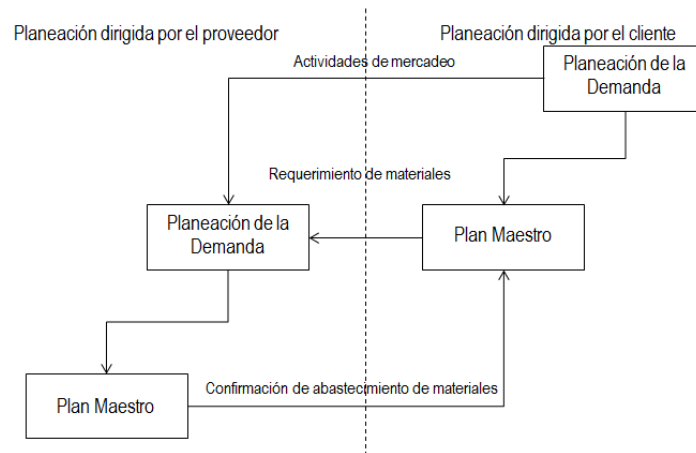


Figura 3. Estimación de la Demanda Colaborativa. Fuente: Adaptación (Stadtler & Kilger, 2005)

- ✓ Compras colaborativas: conecta al proceso de planificación del proveedor con el dominio de planificación del proveedor. A mediano plazo, la compra colaborativa informa sobre las limitaciones de suministro de material al plan maestro y en el corto plazo informa de desajustes en el plan de compra consensuado que pueden afectar a los programas de producción.
- ✓ Inventarios Colaborativos: es una aplicación especial de la colaboración bajo la demanda, en el que el consumidor proporciona información sobre su demanda futura y sobre el inventario actual al proveedor (Ver Figura 4). De ahí, que se deriven el concepto Vendor Managed Inventory (VMI) que implica que el proveedor sea el encargado de “vigilar” el nivel del inventario del cliente. El proveedor planifica sus necesidades de materiales a través de la previsión de ventas del cliente y el nivel de inventario deseado. De esta forma, el cliente se olvida del proceso de compra a cambio de facilitarle la información necesaria, y el proveedor puede diseñar su plan de materiales en sincronía con las necesidades de su cliente.

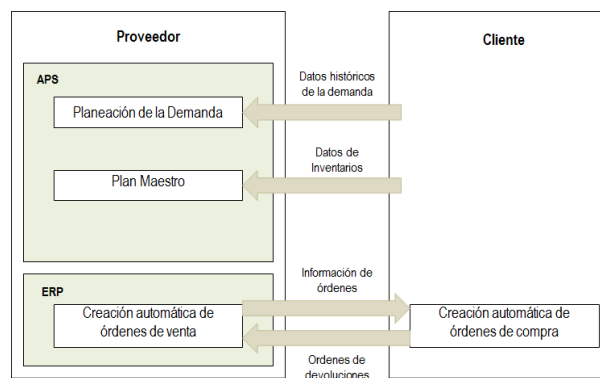


Figura 4. Inventario Colaborativos. Fuente: Adaptación (Stadtler & Kilger, 2005)

Capacidad colaborativa: permite determinar el plan de capacidad contratado o disponible con sus clientes, para negociar un nivel mínimo y máximo de capacidad, de tal forma que no se afecte la producción, ni los costos de ambos.

Transporte colaborativo: permite determinar la planificación del transporte y la programación de vehículos en los procesos de compras y distribución. En una relación de transporte colaborativo el consumidor suele ser un fabricante o minorista y el proveedor es un transportador y/o proveedor de logística.

Niveles de colaboración en redes: Los tipos de colaboración descritos hasta ahora son de un solo nivel entre un cliente y un proveedor. Si la cadena de suministro se extiende sobre los niveles de proveedores, fabricantes, mayoristas, minoristas y clientes, la información sobre los cambios de la demanda o la oferta se propagan dentro de un ciclo de planificación a todos los miembros de la cadena. Con el fin de acelerar el intercambio de información en la cadena de suministro multinivel se establecen relaciones de colaboración entre cada nivel, como la muestra la figura 5.

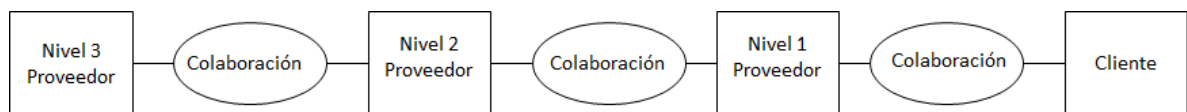


Figura 5. Niveles de Colaboración en redes. Fuente: Adaptación (Stadtler & Kilger, 2005)

De acuerdo a lo anterior, se puede establecer que las relaciones de colaboración entre los agentes de la cadena de suministro permiten la reducción de inventarios, aumento de los ingresos, reducción de los costos de gestión, aumento del margen bruto, mejor precisión de pronósticos y mejor asignación de presupuestos de promoción por parte de los clientes. De igual forma, a los proveedores les permite reducir sus niveles de inventarios en la medida en que exista una planificación de ventas para sus clientes, así como reducir los costos de almacenamiento, la adquisición de materiales y evitar el desabastecimiento.

1.1.2.3. Modelos de Cadenas de Suministro Colaborativas. Ganeshan et al. (1999), estudiaron la dinámica de la cadena de suministro considerando como escenarios a dos proveedores (uno confiable y otro no tan confiable) analizando los costos y beneficios de usar un solo proveedor, teniendo en cuenta la demanda en un período de tiempo, el sistema de inventario utilizado, el punto de reorden y los costos de transportes. Concluyeron que no es recomendable confiar en un solo proveedor, debido a que constituye un gran riesgo y muchas veces no podrían obtener costos bajos para el producto. De igual forma, se establece que una fuente múltiple de aprovisionamiento puede reducir los tiempos de entrega y reducir los costos del sistema de inventarios. Minner (2003) consideró que en este tipo de esquemas se hacía necesario revisar los plazos de entrega desde un

enfoque determinístico o estocástico. Tener en cuenta costos de alistamiento cero, tiempos de entrega estocásticos de un período, genera ventajas de reducción de los tiempos de entrega con múltiples proveedores.

Manthou et al., (2004), definieron un modelo virtual e-chain, que presentaba una cadena colaborativa en un entorno virtual y desarrollaba la clasificación de las funciones de los asociados, la determinación de la capacidades claves de los esquemas de colaboración, la evaluación de los socios y la disposición a colaborar. Los socios de la cadena de suministro en un ambiente virtual colaboran en la previsión de la demanda, compras, producción e inventario en cada uno de los procesos de gestión para sincronizar los tiempos de entrega y distribución. Por otro lado, Sheu et al., (2006), establecen un modelo de relación para evaluar los esquemas de colaboración entre proveedores y minoristas en Taiwán, teniendo en cuenta la planificación conjunta (demanda, gestión de categorías, diseño de nuevos productos, campañas de promoción, publicidad, entre otros), y la resolución de problemas (desvío de mercancía, ofertas, órdenes de emergencia).

El modelo de medición de desempeño de una cadena de suministro, incluye las interconexiones (topología) e interrelaciones (niveles de colaboración) de los grupos de interés con los procesos, el soporte tecnológico y las estrategias de negocio empleadas. En la Figura 6 se muestran cada uno de los componentes del modelo. Los grupos de interés están conformado por: los proveedores, fabricantes, distribuidores, minoristas y los clientes. La topología hace referencia a las relaciones que pueden existir entre los diferentes grupos de interés, la implementación de tecnología en todos los niveles de la organización: nivel operativo, nivel de control y nivel de supervisión. Los niveles de colaboración: operacional, control y supervisión. Las estrategias de negocio de los grupos de interés de manera individual y de carácter grupal. Y finalmente, los procesos en los que intervienen cada grupo de interés: abastecimiento, fabricación y distribución en la cadena de suministro (Angerhofer & Angelides, 2006).

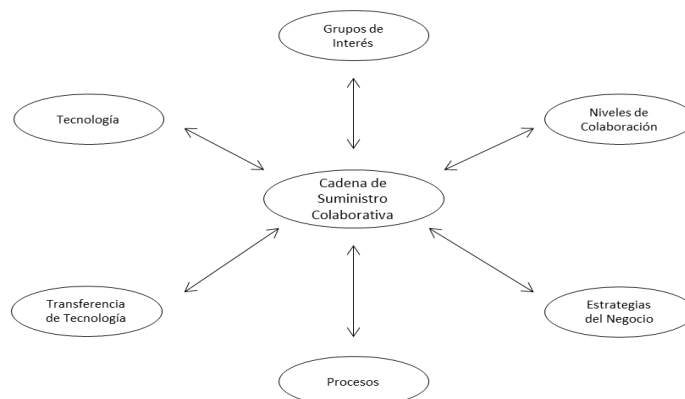


Figura 7. Modelo de la Cadena de Suministro Colaborativa
Fuente: Adaptación Angerhofer & Angelides (2006)

El problema de planificación de producción-distribución en cadena de suministro colaborativas es resuelto a través de un modelo programación lineal multiobjetivo, con múltiples productos, varios períodos de planificación de la producción y distribución. El sistema de de la cadena de suministro en el problema consiste en una compañía fabricante que tiene varias plantas en diferentes regiones geográficas, múltiples centros de distribución, minoristas y demanda de clientes en diferentes mercados. Los objetivos del modelo son: la maximización de las utilidades del fabricante y de los centros de distribución, la reducción de los costos totales y faltantes de los minoristas. Esta investigación contribuye a la literatura en el uso de los enfoques FGP empleados en el manejo de los problemas de planificación de la producción y distribución en la cadena de suministro (Selim et al., 2008).

La integración de la cadena de suministro ha afectado las operaciones de reabastecimiento entre proveedores y minoristas nivel tienda. Es por ello, que Lyu et al. (2010), estudian los problemas de reposición de recursos del minorista y propone un modelo de colaboración como mecanismo de reposición en el proveedor y el minorista, el cual está compuesto de los siguientes factores: comportamiento de compra del cliente (patrón de compra), los productos almacenados en una tienda, la política de control de inventario del proveedor y los minoristas.

1.2. GESTIÓN DE INVENTARIOS

Un propósito fundamental de una cadena de suministro es controlar el inventario mediante la administración de flujo de materiales, ya que tanto el fabricante y el proveedor gastan gran parte de sus ingresos totales en la adquisición de materiales para tener provisiones que les permitan satisfacer la demanda de los clientes o apoyar la producción de bienes o servicios.

Los inventarios en una cadena de suministro existen en tres categorías agregadas, que resultan útiles para propósitos de contabilidad. Los inventarios de materia prima (en inglés *raw materials*) son los insumos indispensables para los procesos de transformación de la empresa. Los inventarios en proceso (WIP) (del inglés *work-in-process*) constan de elementos, como componentes o embalajes, necesarios para producir un producto final en una empresa manufacturera. Los inventarios de bienes finales (del inglés *finished goods*) en plantas manufactureras, almacenes y establecimientos detallistas son los artículos que se venden a los clientes de la empresa.

Los inventarios en una compañía son necesarios para mantener la capacidad de predicción, atender a fluctuaciones de la demanda, protegerse de la falta de confiabilidad de proveedores u ante la escasez de un artículo. El inventario refleja la inversión de la compañía y una mala gestión del mismo puede afectar el estado financiero de la misma, y su mantenimiento, manipulación, almacenamiento, seguros e impuestos generan una serie de costos que son crecientes a medida que aumenta el inventario, de allí su relevancia.

El inventario representa gran proporción de los bienes de una compañía, tener demasiado inventario es tan problemático como disponer de poco. Demasiado, implica costos adicionales innecesarios relacionados con el almacenaje, seguros, impuestos y los correspondientes al deterioro u obsolescencia de los artículos que se mantienen en existencia. Dichos costos son crecientes con el aumento del inventario. Sin embargo, existen otros que disminuyen cuando el inventario aumenta (Jimenez, 2005). Generalmente las empresas expresan el costo de inventario, por cierto período de tiempo, como un porcentaje de su respectivo valor (Krajewski & Ritzman, 2000). En general, los costos relevantes del inventario son los siguientes:

- ✓ Costo de almacenamiento: el inventario requiere espacio y tiene que ser acarreado para entrar o salir del almacén. Los costos de almacenamiento incluyen los costos de manipulación, costos de seguros, obsolescencia, deterioro de calidad, entre otros.
- ✓ Costo de adquisición o de manufactura (en caso de fabricación): considera costo de mano de obra directa o indirecta, costo de materiales directos o indirectos, gastos generales (se expresa en unidad monetaria por unidad de producto).
- ✓ Costos por ordenar: costos administrativos y de oficina involucrados en el proceso de una orden de compra, despacho, trámite del pedido, costo de transporte o costo de iniciar una tanda de producción, en caso de fabricación (se expresa en unidad monetaria por orden).
- ✓ Costo por faltantes/escasez (déficit): considera los requerimientos de tiempo extra ocasionado por el déficit, tiempo adicional de oficinas administrativas, costo de apresuramiento, pérdida de reputación, costo especial de manipulación y embarque, pérdida de tiempo de producción y cualquier otro costo atribuible al déficit (expresado en unidad monetaria/unidad-unidad de tiempo). No considera ventas perdidas porque supone que esto no ocurre ya que contemplan solo retrasos en las entregas.
- ✓ Otros Costos: Los costos de inventarios asociados al retraso se traducen en pérdidas en ventas o de clientes, los costos de preparación procesamiento, y de realizar una orden de compra (o de producción), o los relacionados con la puesta en marcha para la producción de un lote, crecen para lotes de pequeño tamaño; también, los costos asociados con el ahorro obtenido por descuentos en el precio de compra o por las economías de escala al producir grandes lotes, se pueden ver reducidos ante un aumento en los costos de almacenamiento (Jimenez, 2005).

Las medidas de inventarios que se utilizan típicamente para monitorear el desempeño de una cadena de suministro, son: (1) valor promedio de inventario agregado, (2) semanas de aprovisionamiento y (3) rotación de inventario (Krajewski et al., 2008).

- El valor promedio de inventarios es el valor total de los artículos que mantiene una empresa en su inventario. En esta medida el inventario se expresa en valores monetarios, porque representa la inversión promedio de materiales en cierto tiempo.

$$\text{Valor promedio de inventario agregado} = (\text{Número de Unidades disponibles})(\text{Valor de cada unidad})$$

- Las semanas de aprovisionamiento es una medida de inventario que se obtiene dividiendo el valor promedio de inventario agregado entre las ventas por semana al costo.

$$\text{Semanas de Aprovisionamiento} = \frac{\text{Valor promedio del inventario agregado}}{\text{Ventas Semanales (al costo)}}$$

- La rotación del inventario es una medida que se obtiene dividiendo las ventas anuales al costo entre el valor promedio del inventario agregado que se haya mantenido durante un año.

$$\text{Rotación de Inventario} = \frac{\text{Ventas anuales (al costo)}}{\text{Valor promedio del inventario agregado}}$$

Por otro lado, también es importante monitorear el desempeño de procesos internos de la cadena de suministro como: las relaciones con los clientes, surtido de pedidos y relaciones con los proveedores.

Tabla 1. Mediciones de los Procesos de la Cadena de Suministro. Fuente: (Krajewski et al., 2008)

Mediciones de los Procesos de la Cadena de Suministro		
Relaciones con los Clientes	Surtido de Pedidos	Relaciones con los Proveedores
<ul style="list-style-type: none"> • Porcentaje de pedidos tomados con precisión • Tiempo para completar el proceso de colocación de pedidos • Satisfacción de los clientes con el proceso de colocación de los pedidos 	<ul style="list-style-type: none"> • Porcentaje de pedidos incompletos enviados • Porcentaje de pedidos enviados puntualmente • Tiempo para surtir el pedido • Porcentaje de servicios estropeados o artículos devueltos • Costo para producir el servicio o el artículo • Satisfacción de los clientes con el proceso de surtido de pedidos 	<ul style="list-style-type: none"> • Porcentaje de entregas puntuales de los proveedores • Tiempos de entrega de los proveedores • Porcentaje de defectos en servicios y materiales comprados • Costo de los servicios y materiales comprados • Niveles de inventarios de suministros y componentes comprados

1.2.1. Modelos de Inventarios Determinísticos. El tema de gestión de inventarios es por excelencia uno de los temas más investigado por los académicos por su repercusión directa sobre los estados financieros de una empresa y por el gran interés de la industria por darle soluciones a una de las problemáticas que más impacta en las organizaciones. En la Figura 8. se representa la clasificación de los inventarios determinísticos en estáticos y dinámicos y las sub-clasificaciones de estos últimos.

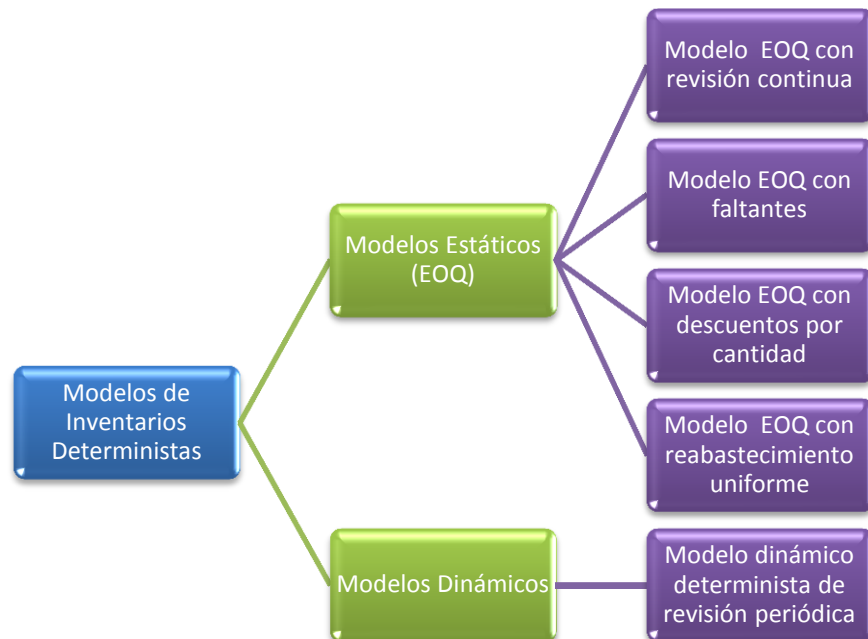


Figura 8. Modelos de Inventarios Deterministas. Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 2. se muestra brevemente las características de cada tipo de modelo de inventario determinístico de acuerdo a su demanda, tiempo de entrega, abastecimiento, costos asociados y otras consideraciones específicas.

Tabla 2. Consideraciones Modelos de Inventarios Determinísticos. Fuente: Elaboración propia.

Modelo de Inventario	Demanda	Tiempo de entrega	Abastecimiento	Costos asociados	Otras consideraciones
Modelo de lote económico	Uniforme	Constante	Instantáneo	Costo de Compra, Costo de ordenar, Costo de Mantener Inventario	No aplica
Modelo de lote económico con reabastecimiento uniforme	Uniforme	Constante	Los bienes llegan uno a uno conforme salen de la línea de ensamble	Costo de Compra, Costo de ordenar, Costo de Mantener Inventario	No aplica
Modelo de lote económico con faltantes	Uniforme	Constante	Instantáneo	Costo de Compra, Costo de ordenar, Costo de Mantener Inventario,	Se admiten faltantes

				Costo por faltantes	
Modelo de lote económico con descuentos por cantidad	Uniforme	Constante		Costo de Compra, Costo de ordenar, Costo de Mantener Inventario	Se admiten descuentos por cantidad
Modelo dinámico determinista de revisión periódica	Periódica conocida	Constante	Instantáneo		Diferentes períodos de estudio

El problema planteado es más complejo cuando el sistema de inventarios tiene carácter multini-nivel. Es decir, cuando el suministro involucra más de un elemento por eslabón. Por ejemplo, si existe más de un proveedor que abastece los componentes a un fabricante para su ensamble, y que éste a su vez envíe sus productos terminados a más de un distribuidor. Este tipo de esquemas es complejo debido a que cada miembro del eslabón manejará distintos niveles de inventario (Jimenez, 2005). Por lo anterior, la gestión de inventarios y sus flujos se convierte en un desafío clave de la cadena de suministro, a medida que aumenten los niveles de la cadena, más alto será el costo de almacenaje en la misma, pero una buena gestión y colaboración entre sus integrantes permitiría reducirlos.

Los modelos de inventarios se clasifican de acuerdo al conocimiento o desconocimiento de la demanda en un periodo de tiempo, como los deterministas y aquellos en los cuales se desconoce la demanda, pero se tienen datos históricos que muestran una tendencia o están asociados a una distribución de probabilidad. Un modelo de inventario se utiliza para establecer una política óptima para determinar cuándo realizar un pedido y el tamaño del lote que se debe adquirir o fabricar. Esto se realiza con el objetivo de mantener una cantidad de mercancía en existencia para minimizar los costos y poder atender a las variaciones de la demanda, de tal forma que se logran un mejor nivel de servicio al cliente.

El modelo básico que define esta situación se conoce como “Cantidad Económica de Pedido” (Economic Order Quantity, EOQ, por sus siglas en inglés). Dicho modelo ha sido ampliamente utilizado y extendido por muchos investigadores. Las primeras extensiones consideran descuentos por volúmenes de compra; cambio del precio de los productos en el tiempo; restricciones de capacidad de producción; tasa de producción infinita, ente otros.

Otro escenario de la cadena de suministro es el problema de inventario de dos niveles, que integra a un único vendedor, varios compradores y n diferentes números de artículos, supone que las tasas de demanda, las tasas de producción y todos los costos son conocidos y constantes; no se permite la escasez, el tiempo de aprovisionamiento es constante y la reposición para cada comprador es inmediata. Dicho modelo resultó ser adecuado cuando el vendedor tiene una ventaja sobre el

comprador en la negociación de compra y en la cual para implementar el modelo el vendedor solo necesita conocer la demanda anual del comprador, para que a partir del comportamiento pasado se pueda deducir su frecuencia de compra (Lu Lu, 1995).

El principal tema de los sistemas de inventarios multinivel (más de dos niveles) ha sido la coordinación de las decisiones de tamaño de lote para la integración vertical. En este sentido, Boyaci & Gallego (2002) estudiaron la cadena de suministro constituido por: un mayorista, un minorista y un grupo de consumidores, cuya demanda colectiva disminuye el precio, centrando la atención en el manejo del inventario y en la definición de políticas de precio, que en conjunto buscan maximizar la utilidad neta a través de los eslabones de la cadena (mayoristas y minoristas).

Un modelo de inventario integrado para evitar el deterioro de ítems en una cadena de suministro multinivel, fue considerado a través de la construcción de un modelo matemático en donde se integra a un proveedor, un productor y un comprador, para obtener el número óptimo de solicitudes y tamaño de lote, cuando se minimiza el costo total resultado de la integración del proveedor, productor y comprador (Rauet al., 2003).

El problema de determinar la localización de una bodega para llevar los inventarios en una cadena de suministro fue tratado primero como un problema de optimización inventario-costo mono-objetivo y posteriormente como un problema de optimización multi-objetivo considerando por separado dos componentes de los costos (mantenimiento de inventarios y los de faltantes). Una cadena de suministro multinivel (proveedor, fabricante, distribuidor y minorista) fue considerada, y en donde todos los miembros operaban basados en la política de inventario de revisión periódica. Para resolver el modelo se usaron un algoritmo genético simple para el caso mono-objetivo, y un algoritmo genético multi-objetivo para el caso multi-objetivo obteniendo así un conjunto de soluciones no dominadas (Daniel & Rajendran, 2006).

Cárdenas-Barrón (2007) presentó un modelo multinivel con varios clientes de una cadena de suministro, donde el fabricante puede suministrar los productos a varios clientes. Para ello construyeron un modelo matemático que permitía simplificar los mecanismos de coordinación de inventarios para calcular el tiempo de ciclo óptimo y reducir los costos anuales.

Yu et al. (2009), estudiaron la interacción entre los fabricantes y minoristas con el fin optimizar las utilidades individuales de la comercialización del producto y las políticas de inventario manejado por el proveedor (VMI) en la cadena de suministros. La tasa de demanda del mercado fue considerada como una función creciente y cóncava, en la cual el fabricante determinaba sus precios al por mayor, los ciclos de reposición de materia prima y la cantidad de inventarios. Este problema se modeló como un juego de Stackelberg, donde el fabricante asumía una posición de líder y los minoristas de

seguidores; los autores propusieron un algoritmo para para buscar el equilibrio del juego de Stackelberg.

Un inventario manejado por el proveedor (VMI), es un enfoque integrado para la coordinación minorista-proveedor, de acuerdo con las decisiones asumidas por el proveedor en relación a los niveles de inventario adecuados y dentro de los límites acordados en un esquema de contrato entre ellos. En dicho contrato, el proveedor generalmente asume los costos de faltantes que exceden sus límites. Darwish & Odah (2010), desarrollaron un modelo para la cadena de suministro con con único proveedor y múltiples minoristas bajo el enfoque VMI, estableciendo teoremas que reducían la complejidad del modelo permitían encontrar los puntos Karush-Kuhn-Tucker (KKT) asociados a una función de costo; el modelo es resuelto a través de un algoritmo eficiente que reduce los esfuerzos computacionales de manera significativa.

Un modelo integrado de producción e inventario fue presentado por Sana (2011) para una cadena de suministro de tres niveles (proveedor, fabricante y minorista), considerando productos en buen estado y productos defectuosos, considerando el impacto de las estrategias de negocio como el tamaño óptimo de pedidos de materia prima, la tasa de producción y los tiempos de espera entre cada uno de los eslabones que intervienen y colaboran en el sistema producción y comercialización. El problema radica en coordinar las decisiones de producción e inventario en la cadena de suministro con el propósito de maximizar la utilidad neta en todos los miembros. Una limitación de la propuesta es que cuando no se planifica adecuadamente la demanda, se produce incertidumbre en la entrega, afectando la producción y el despacho final a los clientes, lo cual no es considerado. El modelo propuesto fue resuelto por el método de cálculo analítico, pero se propone la solución a través de algoritmos genéticos con técnicas de búsqueda aleatorias para optimizar la función objetivo. Dentro de las extensiones propuestas para futuras investigaciones de este modelo se tienen: i) investigar el efecto de múltiples- proveedores y múltiples-minoristas con tiempos de ciclo diferentes, ii) considerar el efecto de un porcentaje de productos defectuosos que podrían ser modificados por el fabricante y los artículos de desecho que deben ser eliminados de la cadena de suministro y ii) considerar demanda estocástica y tasa de producción en cada miembro de la cadena de suministro.

El problema de la coordinación y competencia en una cadena de suministro de dos niveles con un proveedor y un comprador es abordado por Bylka (2012) a través de un modelo determinístico para satisfacer la demanda del comprador, asumiendo que el producto se entrega en lotes desde el almacén del proveedor hasta las instalaciones del cliente y abastecimiento instantáneo. El autor describe los patrones de inventario y la estructura de los costos asociados al ciclo de producción y distribución, y cuyo principal logro fue la coordinación de inventarios que se puede lograr, usando un enfoque competitivo como los juegos no cooperativos.

El modelo de Producción-Inventario para múltiples productos, con tres niveles de la cadena de suministro (Pal et al., 2012) con múltiples proveedores, un fabricante y múltiples distribuidores, para calcular la unitilidad integrada de la cadena de suministro optimizando el tamaño de los lotes de materia prima.

A continuación en la Tabla 3. se presenta un resumen de los modelos de inventarios determinísticos abordados en la literatura relacionados con el problema de estudio, teniendo en cuenta el tipo de modelo, niveles de la cadena de suministro y consideraciones específicas en la demanda, tasa de producción, entre otras.

Tabla 3. Modelos de Inventarios deterministas en Cadenas de Suministro. Fuente: Elaboración propia.

AUTOR	TIPO DE MODELO	NIVELES DE LA CADENA DE SUMINISTRO	CONSIDERACIONES
Cárdenas-Barrón (2007)	Modelo de Inventario de múltiples niveles de la cadena	4 Niveles Un Proveedor Múltiples Fabricantes Múltiples Distribuidores	Demanda Determinística Tasa de Producción constante Tiempos de ciclo diferente
Yu et al. (2009).	Modelo de juego Stackelberg de inventarios en una cadena de suministro con VMI	2 Niveles Un Fabricante Múltiples Distribuidores	Demanda (Función creciente y cóncava) Tasa de Producción constante
Darwish & Odah (2010)	Modelo de Inventario Manejado por el Proveedor (VMI)	2 Niveles Un Proveedor Múltiples Distribuidores	Demanda Determinística Tiempos de ciclo diferentes Único producto
Sana (2011)	Modelo de Integración Producción-Inventario	3 Niveles Un Proveedor Un Fabricante Un Distribuidor	Demanda Determinística Tasa de producción constante Productos conformes/defectuosos
Pal et al. (2013)	Modelo de Producción e Inventarios	3 Niveles Múltiples proveedores Un Fabricante Múltiples Distribuidores	Demanda Determinística Tasa de producción constante

1.2.2. Modelos de Inventarios Estocásticos. Al considerar la aleatoriedad de la demanda se identifican dos metodologías: la sistematización de los sistemas de pronósticos a través de la simulación y la modelación estocástica. Los sistemas de pronósticos utiliza la simulación

combinando series de tiempo con métodos causales y métodos cualitativos de series de tiempo y causales. La programación estocástica permite estimar la distribución de probabilidad de la demanda a partir de unos datos históricos que permitan conocer su comportamiento. En la Figura 9, se presenta la clasificación de los modelos de inventarios estocásticos, teniendo en cuenta el tipo de revisión, si es continua o periódica.

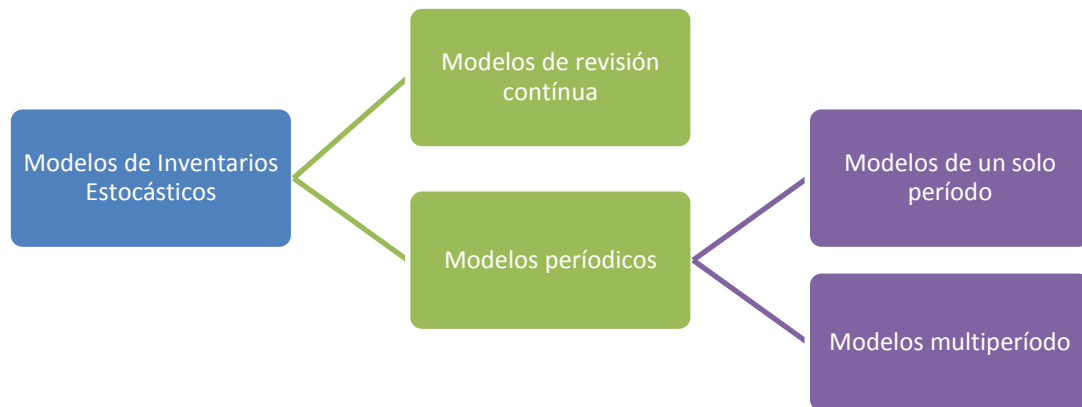


Figura 9. Modelos de Inventarios Estocásticos. Fuente: Elaboración propia.

El modelo de revisión periódica de inventario con dos fuentes estacionarias de la demanda: demanda determinista (debe ser satisfecha en cada período) y demanda estocástica (no puede satisfacer si hay faltantes), se estudian ambos escenarios y establece una política óptima para condiciones generales asumiendo un costo de instalación (Sobel & Zhang, 2001). Por su parte, Ben-Daya & Hariaga (2004) estudia el problema de integración de inventario-producción bajo un enfoque de demanda y lead time estocástico y dependiendo del tamaño del lote y de los retrasos que se puedan presentar.

El modelo de gestión de inventarios en una cadena de suministro con demanda no estacionaria y estocástica, describe como los modelos de inventarios deben adaptarse a los cambios en la demanda en una sola etapa y como la demanda no estacionaria se propaga en una cadena de suministro, permitiendo vincular las etapas y aplicar un algoritmo de optimización multi-nivel diseñado para demanda estacionaria. La primera aplicación exitosa de este modelo se realizó para apoyar la planificación mensual de las existencias de seguridad de Microsoft, y la segunda para evaluar los beneficios de la utilización de inventarios en Case New Holland (Neale & Willems, 2009).

Los problemas de optimización correspondiente a los juegos de inventarios se formulan con programación estocástica, debido a que la dualidad fuerte de la programación lineal estocástica sugiere una forma de encontrar un elemento en el núcleo (Chen & Zhang, 2009).

El problema de ubicación del inventario de seguridad de una cadena de suministro de varios niveles comprende varios puntos de almacenamiento, los cuales presentan variabilidad de la demanda en sentido descendente y el tiempo de entrega de los proveedores. Para ello Osman & Demirli (2012) proponen dos modelos, uno de acción descentralizada de la colocación de los inventarios de seguridad y uno de consolidación centralizada. El modelo descentralizado coloca los inventarios de seguridad en cada punto con tiempo de entrega adecuado que permita atender a la variabilidad de la demanda. El modelo centralizado considera que se deben consolidar los inventarios de seguridad en un centro de cada nivel de la cadena de suministro. Los autores proponen que los modelos de colocación de los inventarios de seguridad podrían ampliarse teniendo en cuenta otras distribuciones de probabilidad, diferentes a la distribución normal para representar el tiempo de entrega y la variabilidad de la demanda. De igual forma, se podría considerar el rendimiento de la entrega en la selección de un centro de consolidación y estudiar el efecto de la consolidación de los inventarios de seguridad en los plazos de entrega.

El modelo de ubicación estratégica de los inventarios de seguridad en el diseño de una cadena de suministro para productos de tipo-ensamble con demanda dual, donde los datos de la demanda se basan en comportamiento pasado de los clientes. Funaki (2012) formula un modelo de colocación de inventarios de seguridad multi-nivel para garantizar el nivel de servicio, con las ecuaciones de propagación de la demanda a través de una explosión hacia atrás, donde la demanda puede ser estacionaria o no estacionaria. El objetivo del modelo es minimizar los costos totales, incluyendo los de procesamiento y de tránsito, junto con los costos de mantenimiento de inventarios. Para futuras investigaciones el autor propone la extensión a otras estructuras de la cadena de suministro en el nodo final de envíos que satisfaga la demanda sea basada en las fechas de vencimiento de los productos o la optimización del algoritmo utilizado para calcular la ubicación de los inventarios de seguridad en los casos de demanda no estacionarias.

Otros autores abordan el problema de ubicación de inventarios de seguridad en cadenas de suministro con redes acíclicas y lo transforman en una red de programación de proyectos, para convertirlo en un modelo de dependencia natural entre los tiempos de servicio inicial y final y las limitaciones de capacidad como relaciones temporales de en la programación de proyectos. Con técnicas eficaces de propagación de restricciones y estrategia de búsqueda personalizadas, los autores plantean un algoritmo capaz de encontrar soluciones óptimas a problemas pequeños que se integran con algoritmos genéticos para mejorar la calidad de la solución (Li & Jiang, 2012). La optimización estocástica apareció en 1955 como una extensión de la programación lineal con énfasis en el gran número de variables y parámetros con trabajos independientes de Dantzing (1955) y Beale (1955). Aunque las primeras investigaciones aparecen muy temprano, solo recientemente el avance en la tecnología de los ordenadores ha permitido la solución de problemas de gran tamaño y ha devuelto el interés al tema de la optimización estocástica (Ramos & Cerisola, 2010).

El modelo de inventarios EOQ estocástico (Sana, 2011) es una extensión del modelo del vendedor de periódicos donde la demanda depende de los precios; que a su vez sigue una función de densidad de probabilidad uniforme y los precios son una variable aleatoria. El modelo se desarrolla para un solo producto, la tasa de reabastecimiento es infinita y se consideran faltantes. Otra extensión del modelo de vendedor de periódicos es el modelo de EOQ en un contexto de tres niveles de la cadena de suministro (Roy et al., 2012) donde la demanda de cada integrante sigue una función de densidad de probabilidad uniforme para un periodo de tiempo finito.

El modelo de Producción-Inventario para productos reprocesados con tres niveles de la cadena de suministro para un único producto (Pal et al., 2012) considera un proveedor, un fabricante y distribuidor; el sistema de producción se somete a un estado “fuera de control”, que sigue función de densidad de probabilidad exponencial. Una extensión del mismo, es el modelo EPQ con demanda estocástica con un sistema de producción con fallas de mantenimiento (Pal et al., 2013); la demanda sigue una función de densidad de probabilidad especial para reducir el almacenamiento durante la producción y el cambio de estado de sistema sigue una distribución de densidad de probabilidad exponencial.

El problema de reducir los tiempos de entrega y su impacto en los inventarios de seguridad y costos del sistema es abordado por Glock (2012) quien presenta un modelo de inventario integrado con único vendedor y comprador con demanda estocástica con función de densidad de probabilidad normal y variable para estudiar el impacto de las decisiones individuales sobre los costos totales del sistema.

El modelo de inventarios estocástico (Pal et al., 2013) considera dos tipos de mercados: para productos conformes y productos defectuosos, donde estos últimos son reprocesados. La demanda de los mercados es una variable aleatoria que sigue una distribución de densidad de probabilidad uniforme, la tasa de producción es constante y con ciclos diferentes. Lin (2013) desarrolla un modelo de inventario estocástico con productos defectuosos para un distribuidor que asume una demanda y lead time estocásticos.

Tabla 4. Modelos de Inventarios Estocásticos en Cadenas de Suministro. Fuente: Elaboración propia.

AUTOR	TIPO DE MODELO	NIVELES DE LA CADENA DE SUMINISTRO	CONSIDERACIONES
Glock (2012)	Modelo de Integración de Inventario para reducción de tiempos de entrega	2 Niveles Vendedor-comprador	Demanda Estocástica (Distribución Normal)

Roy et al. (2012)	Modelo de Integración EOQ (Extensión Vendedor de Periódico)	3 Niveles Proveedor-Fabricante-Distribuidor	Demanda Incierta (Distribución Uniforme) Un solo producto
Sana (2011)	Modelo EOQ Estocástico	1 Nivel	Demanda Estocástica (Distribución Uniforme) Precios (Variable Aleatoria) Faltantes
Pal et al. (2013)	Modelo de Colaboración Producción-Inventario	3 Niveles Proveedor-Fabricante-Distribuidor	Demanda Determinística Tasa de Productos defectuosos (Distribución Exponencial) Sistema de producción "fuera de control"
Pal et al.(2013)	Modelo de Colaboración en Producción e Inventarios	1 Nivel Fabricante	Demanda Estocástica (Distribución especial) Tasa de producción constante Cambio de estado de sistema (Distribución exponencial) Productos defectuosos
Pal et al. (2013)	Modelo de Inventarios Estocástico	1 Nivel Fabricante	Demanda Estocástica (distribución Uniforme) Tasa de producción constante Productos defectuosos/reproceso
Lin (2013)	Modelo de Inventarios	1 Nivel Distribuidor	Demanda Estocástica (Distribución Normal) Productos defectuosos Lead Time

1.3. PROGRAMACIÓN NO LINEAL

Un problema de programación no lineal (PNL) (Bazaraa et al., 2006) general se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \min f(x) \\
 & \text{s. a. } g_i(x) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m \\
 & \quad h_i(x) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, l \\
 & \quad x \in X
 \end{aligned}$$

Donde $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_l$ son funciones definidas en R^n , X es un subconjunto de R^n y x es un vector de n componentes x_1, \dots, x_n . El problema anterior puede ser resuelto para las variables x_1, \dots, x_n que satisfacen las restricciones y minimicen la función f .

La región factible para el PNL es el conjunto de puntos (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfacen las m restricciones. Un punto en la región factible es un punto factible, y el punto que no se encuentra en dicha región se le denomina punto no factible (Wisnton, 2005).

1.3.1. Condiciones necesarias de optimalidad

- ✓ **Diferenciabilidad:** esta propiedad permite caracterizar los extremos locales (máximos y mínimos), proporcionando condiciones necesarias para la optimalidad de una solución. Se centrará la atención en la búsqueda de mínimos, ya que los máximos se pueden obtener a partir de esta relación:

$$\text{Maximizar}_{x \in S} f(x) = -\text{Minimizar}_{x \in S} -f(x)$$

Una función $f(x)$ tienen un mínimo global en el conjunto de puntos S (respectivamente, un mínimo global estricto) en el punto x^* , si y solo si $f(x^*) \leq f(x)$ para todo x en S . Una función $f(x)$ tienen un mínimo local en el conjunto de puntos S (respectivamente, un mínimo global estricto) en el punto \bar{x} , si y solo si existe un número positivo ε cumpliendo $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo x en S tal que $0 < \|\bar{x} - x\| < \varepsilon$. De lo anterior, se puede concluir que el mínimo global también es local.

Se dice que $f: R^n \rightarrow R$ es diferenciable en x si las derivadas parciales $\partial f / (\partial x_i)$, $i = 1, \dots, n$ existen y

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T (y - x)}{\|y - x\|} = 0$$

1.3.2. Algoritmos de optimización con restricciones

Los problemas de programación no lineal con restricciones se pueden resolver usando fundamentalmente las siguientes familias de métodos:

- ✓ **Métodos duales:** resuelven el problema dual en lugar del primal.
- ✓ **Métodos de penalizaciones:** que transforman el problema con restricciones en una sucesión de problemas sin restricciones. Las restricciones se introducen en la función objetivo mediante la llamada función de penalización–barrera y un adecuado parámetro de penalización. La idea de

convertir problemas con restricciones en problemas sin restricciones es muy adecuada, debido en parte a que estos problemas se pueden resolver muy eficazmente. Existen dos métodos de penalizaciones:

El método de penalización exterior, la penalización impone que la función objetivo incremente su valor cuando el valor de x se aleja de la región factible. Se actualizan los parámetros de penalización haciendo que la sucesión de soluciones de los problemas de optimización sin restricciones asociados converja a la solución óptima. Ésta sucesión está contenida en el exterior de la región factible.

- ✓ **Método de los multiplicadores o del Lagrangiano aumentado:** este es un método de penalizaciones (cuadráticos), en el que en lugar de incorporarlas restricciones en la función objetivo se añaden a la función Lagrangiano.
- ✓ **Métodos de direcciones factibles:** esta clase de métodos extiende los algoritmos de direcciones de descenso analizados en la sección anterior al caso de problemas con restricciones. En este contexto se fuerza a las direcciones de búsqueda, además de ser de descenso, a que den lugar a desplazamientos dentro de la región factible.
- ✓ **Métodos de programación cuadrática secuencial:** que resuelven una sucesión de problemas cuadráticos que aproximan iterativamente al problema original.

1.3.3. Algoritmos de optimización sin restricciones

Un problema de PNL con una variable se puede resolver a través del método de búsqueda lineal que se clasifica en dos categorías: los que emplean información sobre las derivadas y operan directamente sobre la condición necesaria de optimalidad (condición KKT) $f'(x^*) = 0$ para obtener x^* , que es la solución buscada. Y los que emplean solamente las evaluaciones de la función objetivo, que son algoritmos que interpolan iterativamente la función objetivo y derivan fórmulas para calcular el mínimo de la función interpolada, los cuales generan una sucesión que converge en la solución buscada.

Un problema de PNL con varias variables se puede resolver aplicando los métodos de descenso, los cuales generan una secuencia de puntos que van reduciendo el valor de la función objetivo, o más formalmente generan una sucesión x^t que cumple $f(x^1) > f(x^2) > \dots > f(x^t)$, éstos métodos terminan cuando se satisface algún criterio de parada (Castillo et al., 2002).

1.4. PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA

En la vida real muchos de los problemas los datos no pueden ser conocidos con exactitud, ya sea por errores de medida o porque los datos hacen referencia a situaciones que sucederán en el futuro, y simplemente no pueden ser conocidos con anterioridad. Dichas circunstancias adicionan cierta complejidad al problema la incertidumbre que existe en las condiciones iniciales, lo cual afecta directamente las soluciones y las decisiones tomadas a partir de las mismas. Es por ello, que la programación estocástica trata de problemas de Programación matemática en cuya formulación aparece algún elemento estocástico (incertidumbre), en el que los datos (o al menos uno de ellos) son desconocidos y para ello se puede estimar su distribución de probabilidad a partir de unos datos históricos que permitan conocer su comportamiento.

Para Prekopa (1995), la Programación Estocástica es la ciencia que ofrece soluciones para problemas formulados en conexión con sistemas estocásticos, en los que el problema numérico resultante a resolver es un problema de Programación Matemática de tamaño no trivial. De igual forma plantea que la programación estocástica trata de problemas de programación lineal en los que algunos de los parámetros son variables aleatorias, bien estudiando las propiedades estadísticas del valor óptimo aleatorio o de otras variables aleatorias presentes en el problema.

1.4.1. Estructura del Modelo de Programación Estocástica

Los problemas de programación estocástica pueden dividirse en modelos estáticos y dinámicos. La formulación general de un problema estático de programación estocástica es:

$$\begin{aligned} & \min_x \check{g}_o(x, \vec{\xi}), \\ & \text{sujeto a:} \\ & \check{g}_i(x, \vec{\xi}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, \\ & x \in D, \end{aligned}$$

Donde el conjunto $D \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\xi}$ es un vector aleatorio definido sobre un conjunto $E \in \mathbb{R}^s$. Suponemos que están dados a una familia de eventos F , formada por subconjuntos E y una distribución de probabilidad P definida sobre F . Por tanto, para cada $A \in E$, es $A \in F$ y la probabilidad $P(A)$ es conocida. Además suponemos que las funciones $\check{g}_i(x, \cdot): E \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, i$ son variables aleatorias y que la distribución de probabilidad P es independiente del vector de variables de decisión x . De acuerdo a los anterior, en el problema de Programación Estocástica (PE) para cada realización de ξ del vector aleatorio $\vec{\xi}$ se tiene un problema determinístico. Un vector $x \in D$ puede ser factible para una realización del vector aleatorio y no serlo para otra realización (Prekopa, 1995).

1.4.2. Metodología de solución Problema de Programación Estocástica

A continuación se relacionan algunos enfoques para la solución de un problema de programación estocástica:

- ✓ **Resolución mediante teoría de juegos.** Corresponde a situaciones donde no se conoce exactamente la distribución de probabilidad del vector de parámetros $\vec{\xi}$, y solo puede que su función de distribución, F , pertenece a una cierta clase de funciones de distribución, \mathbf{F} . Para resolver el problema estocástico se puede utilizar una estrategia propuesta usualmente en teoría de juegos (en concreto en juegos bipersonales de suma cero): elegir el punto de vista más pesimista, escogiendo aquella distribución $F \in \mathbf{F}$, para la que el valor esperado del objetivo sea mayor.
- ✓ **Obtención de soluciones eficientes.** Se han definido en la literatura distintos conceptos de solución eficiente: Ben Abdelaziz (1992) realiza un análisis exhaustivo de este enfoque y agrupa estos conceptos de solución en dos bloques: la eficiencia puntual y la eficiencia en distribución. En el primero de ellos, eficiencia puntual, se encuadran todos los conceptos que se basan en la determinación de las posibles consecuencias de todos los posibles eventos o estados de la naturaleza que puedan darse en el problema y en la búsqueda del subconjunto formado por las soluciones eficientes de este conjunto de posibles resultados.
- ✓ **Modelos que penalizan la violación de las restricciones.** La resolución de problemas de programación estocástica mediante esta técnica conlleva la transformación del problema estocástico en uno determinista denominado problema determinista equivalente. Dicha transformación se realiza en base a las características estadísticas del problema estocástico y a las preferencias del decisor. Mediante este enfoque, para obtener el problema determinista equivalente se penaliza la posible violación del conjunto de restricciones del problema.
- ✓ **Programación con Restricciones Probabilísticas.** Al igual que en el enfoque anterior, estas técnicas transforman el problema estocástico en uno determinista, denominado problema determinista equivalente, cuya solución es considerada solución del problema estocástico. Para transformar las restricciones estocásticas en deterministas se fija una probabilidad y se exige que se verifiquen las restricciones estocásticas con esa probabilidad. En cuanto a la función objetivo se suele tomar su valor esperado, si bien existen distintos criterios para transformar el objetivo en una función determinista. En este trabajo nos centramos en este último enfoque: programación estocástica con restricciones probabilísticas o de azar. Es cuando se considera el problema de Programación Estocástica suponiendo que la función objetivo no contiene ninguna variable aleatoria:

$$\begin{aligned}
& \min_x g_o(x), \\
& \text{sujeto a:} \\
& \check{g}_i(x, \bar{\xi}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, \\
& x \in D,
\end{aligned}$$

Según el **método de restricciones al azar** introducido por (Charnes & Cooper, 1959) el problema se transforma en uno determinista equivalente en el que se verifiquen las restricciones con, al menos, una determinada probabilidad fijada de antemano. Hay que distinguir dos casos según se fije la probabilidad para el conjunto de las restricciones o para cada una de ellas por separado. La transformación del objetivo estocástico en determinista se realiza en base a las propiedades estadísticas del objetivo y depende del objetivo y depende de las preferencias de decisor. Para obtener el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente se exige que las restricciones del problema se verifiquen con una determinada probabilidad o en una proporción de casos. Esta probabilidad puede ser fijada para que la verifiquen todas las restricciones conjuntamente, y el problema resultante es con una restricción al azar conjunta, o bien, de manera separada, estableciendo una probabilidad por restricción y un problema al que se le denomina de restricciones al azar separadas. En ambos casos, el resultado es que cualquier solución del problema determinista equivalente es factible al menos con una determinada probabilidad o en una proporción de casos.

2. MODELO DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVO EN CADENAS DE SUMINISTRO MULTINIVEL

En la actualidad los inventarios constituyen una estrategia de contingencia por parte de las empresas frente a fluctuaciones inesperadas de la demanda, de tal forma, que se puedan satisfacer los requerimientos de materia prima, productos finales e insumos por parte del cliente. Por lo tanto, es importante que las empresas tomen decisiones asertivas en cuanto a la cantidad de inventarios que debe tener una empresa y su ubicación dentro de la red logística. Para ello, se deben asegurar de realizar una adecuada planificación para evitar niveles de existencia excesivamente altos, que son contraproducentes para el sistema de costos en los diferentes procesos, por lo que se debe sincronizar los requerimientos de la demanda con las variaciones de la oferta, para reducir los costos de almacenamiento, aprovechar los descuentos por cantidad y tener en cuenta las fluctuaciones estacionales.

Manthou et al. (2004) establece un modelo conceptual de colaboración en un entorno virtual para integrar los aspectos técnicos y de infraestructura de una organización, identificando los roles, sincronizando responsabilidades y la toma de decisiones inteligentes entre los proveedores, intermediarios y clientes finales. Holweg et al. (2005) implementan una estrategia de colaboración en diferentes cadenas de suministro y comparan el grado de eficacia de la colaboración entre las cadenas, teniendo en cuenta factores como operaciones internas y externas, nivel de esfuerzos en la planificación en conjunto y la ubicación geográfica de las empresas.

Para Hernández et al. (2010) El aprovisionamiento colaborativo en cadenas de suministro ocurre por la transmisión adecuada y oportuna de los planes de la demanda a los diferentes niveles de la cadena, favoreciendo el desarrollo de procesos de producción y aprovisionamiento, permitiendo la gestión adecuada de inventarios, el sentido de establecer niveles de seguridad más ajustados, mejorar los tiempos de respuesta y aumento de la capacidad de respuesta al cliente principal.

Teniendo en cuenta las anteriores referencias, se diseñará una Estrategia de Gestión de Inventarios Colaborativos (Ver Figura 10) que permita abordar de forma integral la problemática de gestión eficiente de inventarios en las cadenas de suministro desde el enfoque de colaboración entre los actores y la integración de procesos; dicha estrategia consta de tres componentes: un modelo conceptual que establece las interacciones entre los actores de la cadena de suministro para la gestión de inventarios; un modelo matemático que permita optimizar los tamaños de lotes y aumentar el beneficio neto esperado para cada actor; y una metodología de implementación en la cadena de suministro a través de políticas de contratación, esquemas de integración y colaboración para la gestión eficiente de inventarios en cada nivel de la cadena de suministro.

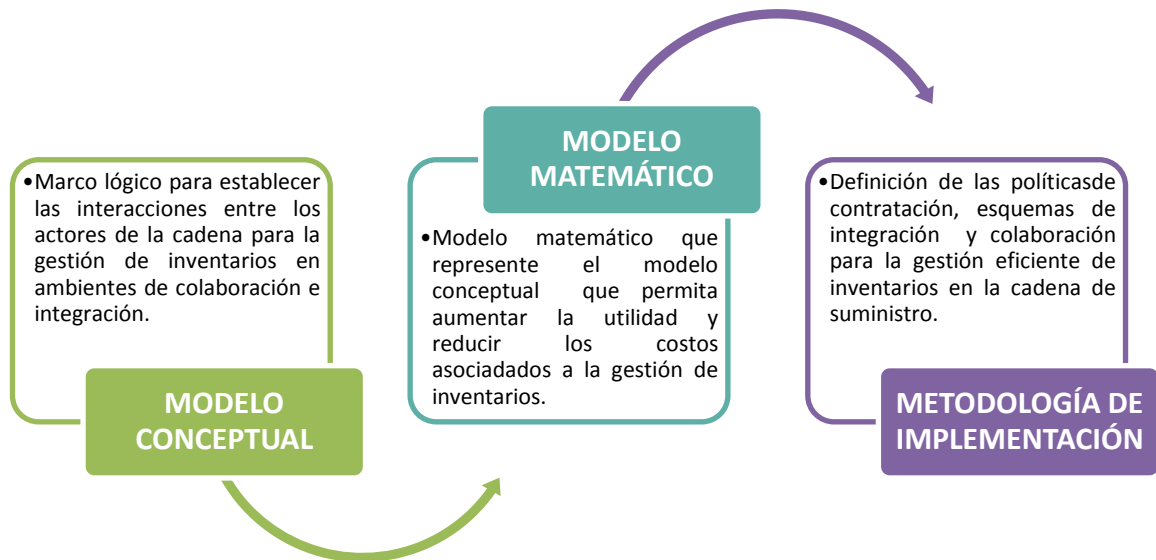


Figura 10 . Gestión de Inventario Colaborativo para escenarios de incertidumbre en cadenas de suministro multinivel.
Fuente: Elaboración Propia.

2.1. MODELO CONCEPTUAL DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS

La gestión de inventarios en una cadena de suministro es un proceso clave para mejorar el desempeño, el nivel de respuesta y la satisfacción del cliente final, por lo que se hace necesario considerar perspectivas como: la definición de políticas de inventario, planificación de la demanda, compras, producción y la distribución de materias primas y producto terminado a la largo de la cadena. El modelado conceptual se orientará a la representación de conceptos y sus relaciones, y para ello es importante hacer un diagrama conceptual, que muestre una secuencia lógica de procesos y actividades para contextualizar el modelo y mostrar su aplicabilidad.

El proceso de gestión de inventarios inicia desde que el cliente final solicita un producto al distribuidor, una vez esto el distribuidor envía las previsiones de la demanda al fabricante, para que realice la explosión de materiales de acuerdo a su sistema MRP, para establecer las necesidades de materia prima y generar pedidos al proveedor. Para poder desarrollar este tipo de actividades colaborativas en la previsión de la demanda se hace necesario que existan acuerdos contractuales entre cada uno de los actores de la cadena que intervienen en dicho proceso, para poder disminuir el efecto látigo en la cadena de suministro, disminuir los costos elevados de inventarios, aumentar la ganancia de cada uno de los actores y mejorar el nivel de cumplimiento al cliente.

El distribuidor a través de los datos históricos de la demanda realiza los pronósticos de la misma, proyecta sus ventas y comparte la información con otros actores de la cadena como los fabricantes y proveedores para que ajusten sus Planes de Requerimiento de Materiales y necesidades de previsión, respectivamente, de tal forma, que se puedan cumplir los tiempos de abastecimiento (lead time) y garantizar la entrega de materiales y productos finales justo a tiempo.



Figura 11. Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativos en Cadenas de Suministro Multinivel Enfoque Global. Fuente: Elaboración propia.

Para adoptar una producción justo a tiempo se requiere que se establezcan los niveles óptimos de inventario en cada uno de los eslabones, de tal forma, que se reduzcan los costos operativos y se maximice la ganancia individual y total de actores de la cadena de suministro. Para ello es necesario establecer unas políticas de inventario que incluyan una revisión continua de los niveles de inventarios hasta llegar al punto de reorden en el que se deben hacer los pedidos al actor anterior en la cadena.

Las actividades colaborativas en la cadena de suministro están enmarcadas en unas políticas de contratación que son los acuerdos realizados por los actores para el intercambio de información, establecimiento de precios, descuentos por cantidad, contratos con operadores logísticos que se encarguen de la distribución y entrega de materiales y productos terminados a lo largo de toda la cadena de suministro.

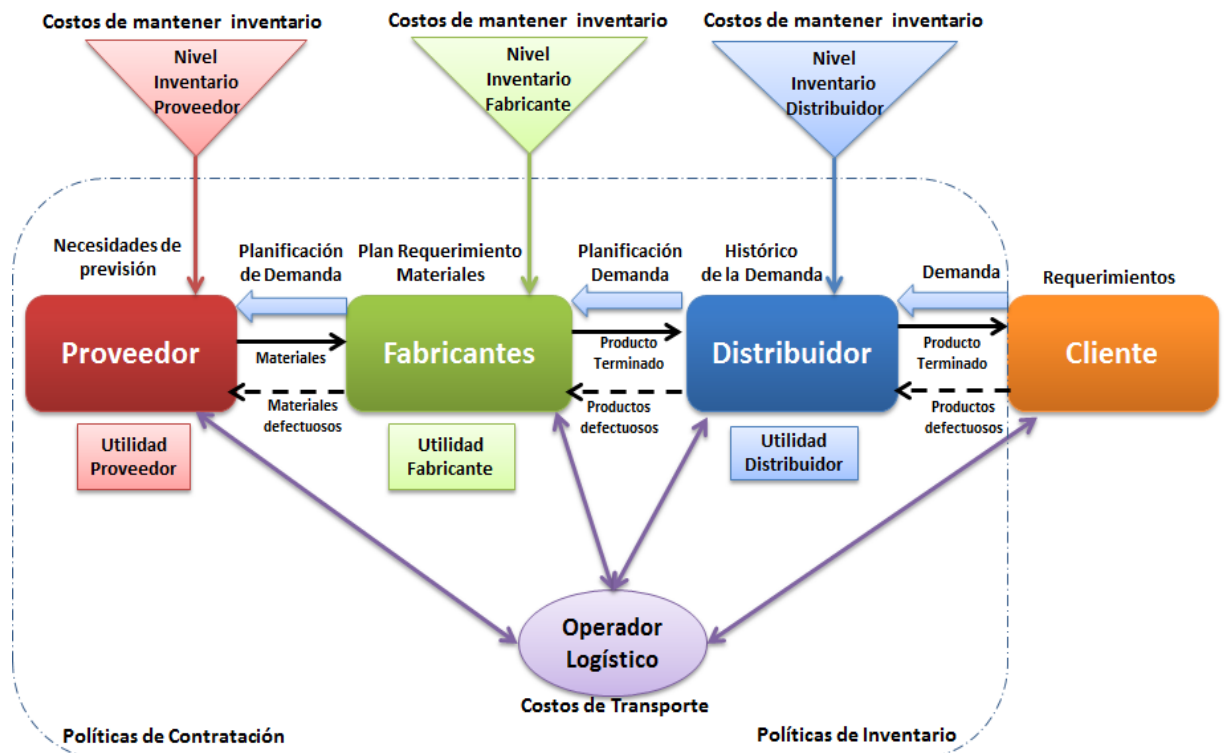


Figura 12. Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativo en Cadenas de Suministro Multinivel. Fuente: Elaboración propia

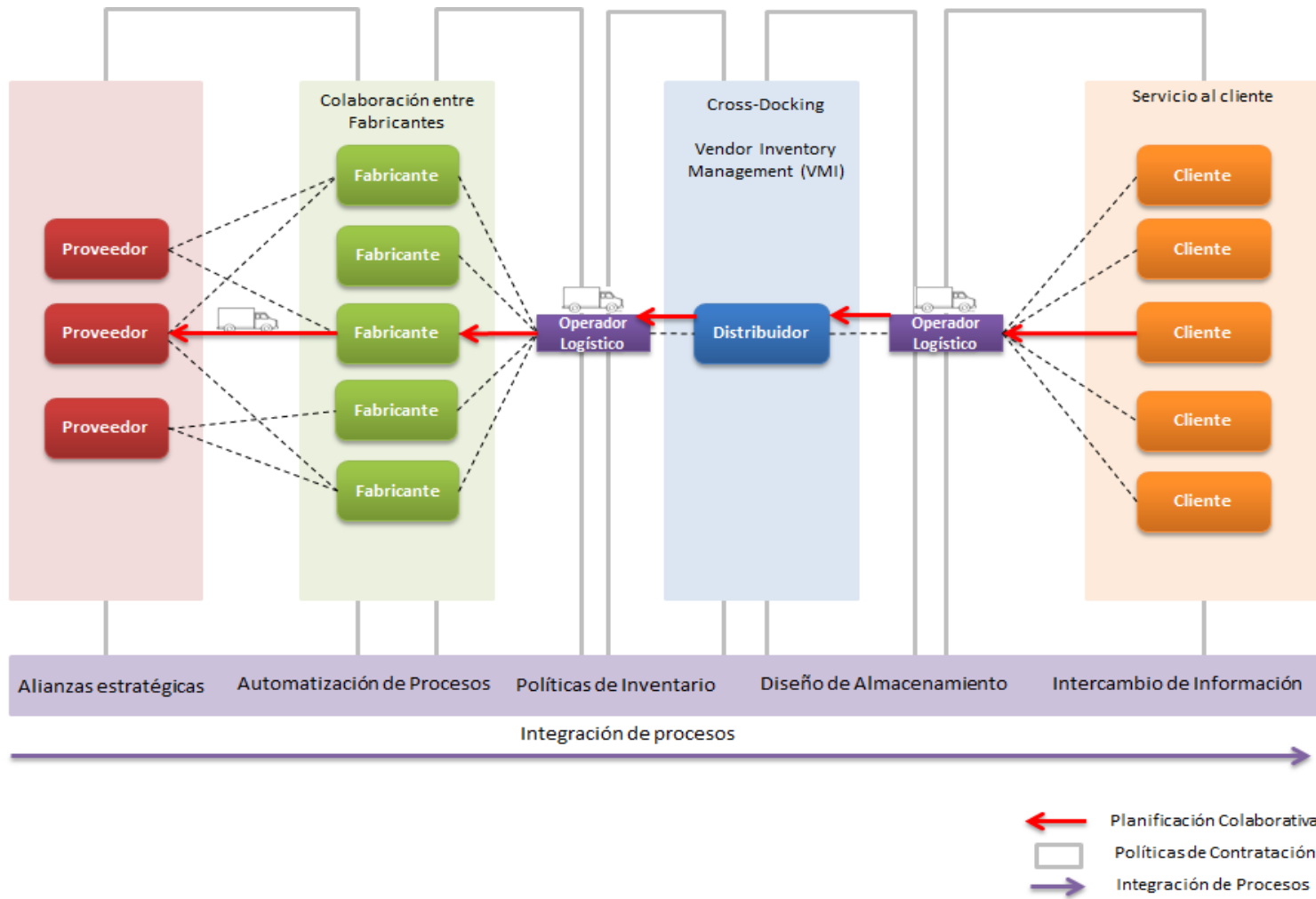


Figura 13. Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativos en Cadenas de Suministro Multinivel. Fuente: Elaboración Propia

- **Niveles del Modelo Conceptual**

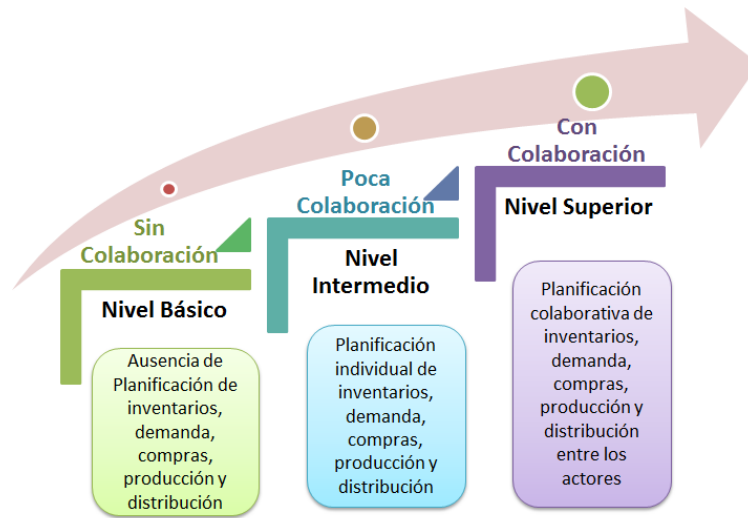


Figura 14. Niveles del Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativo. Fuente: Elaboración Propia.

El Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios Colaborativo contempla tres niveles: básico, intermedio y superior que incluyen cada uno de los aspectos en los cuales los actores de la cadena de suministro deben fortalecer para establecer relaciones mutuamente beneficiosas en torno a la colaboración e integración de actividades en común que aumenten el tiempo de respuesta y cumplimiento a clientes ante variaciones de la demanda.

En el nivel básico los actores de la cadena de suministro desarrollan sus actividades vitales del día a día sin planificar sus inventarios, demanda, compras producción y distribución, lo que conlleva a escasez, incumplimiento a clientes, alta tasa de productos defectuosos y elevados costos de transporte. En el nivel intermedio los actores de la cadena planifican de forma individual sus inventarios, demanda, compras, producción y distribución, sin compartir información con los demás miembros de la cadena, lo cual conlleva a altos costos de manejo de inventarios, escasez, incumplimiento a clientes, alta tasa de productos defectuosos y elevados costos de transporte. En el nivel superior los actores de la cadena colaboran entre si para la planificación de inventarios, demanda, compras, producción y distribución, e integran procesos como el transporte, establecen políticas de inventarios y de contratación para la regulación de las actividades desarrolladas en conjunto.

Tabla 5. Niveles del Modelo Conceptual de Gestión de Inventarios.

NIVELES MODELO CONCEPTUAL DE GESTIÓN DE INVENTARIOS		
INFERIOR	INTERMEDIO	SUPERIOR
<ul style="list-style-type: none"> ✓ Información básica de proveedores ✓ No se existen políticas documentadas para el proceso de compras ✓ No se planifica proceso de compras ✓ Registro de entregas a tiempo de materia prima y devoluciones por no calidad ✓ Órdenes de compra se realizan a través de documentos como pedidos y facturas ✓ No existen políticas documentadas para el almacenamiento de materia prima y producto terminado ✓ Control de inventarios a través de registros de entrada y salida ✓ Manejo de inventarios manualmente ✓ Personal que conoce su labor a través de la experiencia ✓ La organización cuanta con su propia flota de vehículos para el transporte externo de los productos terminado ✓ Distribución directa a los clientes ✓ Órdenes de salida en medio físico para el control de inventarios 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Información básica de proveedores ✓ Planificación del proceso de compras ✓ Registro de entregas a tiempo de materia prima y devoluciones por no calidad ✓ Medición de del cumplimiento de los proveedores a través de indicadores de desempeño ✓ Órdenes de compra se realizan a través del intercambio de datos electrónicos (EDI) y software para comunicaciones ✓ Se han establecido políticas de almacenamiento, pero aún no han sido documentadas ✓ Control de inventarios a través de registros de entrada y salida ✓ Manejo de materiales a través de equipos especializados ✓ Personal capacitado y con experiencia ✓ La organización cuanta con su propia flota de vehículos para el transporte externo de los productos terminado ✓ Distribución directa a los clientes y en menor grado a través de intermediarios ✓ Órdenes de salida en medio físico para el control de inventarios ✓ Verificación de los tiempos de entrega del producto terminado al cliente ✓ Seguimiento de la carga en tiempo real, a través de códigos de barra 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Información básica de proveedores ✓ Políticas claras para la selección y certificación de sus proveedores ✓ Establecimiento de relaciones mutuamente beneficiosas entre la empresa y los proveedores ✓ Planificación De la demanda entre distribuidores y fabricantes ✓ Medición de del cumplimiento de los proveedores a través de indicadores de desempeño ✓ Intercambio de datos con proveedores en tiempo real ✓ Órdenes de compra se realizan a través del intercambio de datos electrónicos (EDI) y software para comunicaciones ✓ Políticas definidas para el control de entradas, salidas y transporte de productos y/o materias primas ✓ Políticas de almacenamiento definidas y documentadas ✓ Control de inventarios a través de software especializado ✓ Manejo de materiales a través de equipos especializados ✓ Personal capacitado y con experiencia ✓ La organización terceriza el proceso de distribución y transporte de productos terminado ✓ Distribución a clientes a través de intermediarios y en menor grado de forma directa ✓ Órdenes de salida en medio físico para el control de inventarios ✓ Verificación de los tiempos de entrega del producto terminado al cliente ✓ Seguimiento de la carga en tiempo real se realiza a través de sistemas de rastreo y trazabilidad en tiempo real

2.2. MODELO MATEMÁTICO PARA LA GESTIÓN DE INVENTARIOS EN LA CADENA DE SUMINISTRO MULTINIVEL EN ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE

El modelo clásico el lote económico de producción (EPQ) ha sido desarrollado para productos en buen estado que cumplen con especificaciones de calidad. En la práctica, los productos fabricados no tienen una calidad perfecta, por lo que se llevan a cabo inspecciones de calidad para ser aceptados como productos conformes y al final de dicho proceso, los artículos defectuosos se venden a precio inferior y son devueltos a los proveedores que se encargan del transporte y costo de manejo o eliminación de costos. Sarkar (2012) investigó un modelo de cantidad económica de fabricación (EMQ) para el precio y la demanda sensible a la publicidad en un proceso de producción imperfecta bajo el efecto de la inflación. Sarkar & Sarkar (2013) proponen un modelo de cantidad de producción económica con siderando demanda exponencial con deterioro en el sistema de producción en un horizonte de tiempo finito bajo el efecto de la inflación y el valor del dinero. De igual forma, se pueden mencionar investigaciones que han considerado productos calidad defectuosa (Salameh & Jaber, 2000) (Konstantaras et al., 2007) (Cárdenas-Barrón, 2007) .

Una empresa puede aumentar su participación en el mercado mediante la colaboración con socios de la cadena de suministro, desde el suministro de materia prima hasta la distribución del producto terminado al cliente final. La colaboración en la cadena de suministro garantiza un mejor funcionamiento de la misma en términos de costos, descuentos, por cantidad, políticas de suministro oportuno, flexibilidad, cantidades de pedido, compromiso, entre otros. Goyal & Gunasekharan (2007) analizan un sistema de producción de varias etapas con el fin de determinar la cantidad económica de pedido (EOQ) y la cantidad de producción económica (EPQ) para materia prima teniendo en cuenta el efecto de diferentes políticas del mercado. Zhou et al. (2008) investigó los problemas de coordinación de descentralización de la cadena de suministro en dos niveles con una demanda dependiente del comercializador. Sana (2011) propone una cadena de suministro de tres niveles: un proveedor, un fabricante y un distribuidor que son responsables de satisfacer la demanda de los clientes finales.

El modelo propuesto es una extensión del modelo de Sana (2011) teniendo en cuenta múltiples proveedores, múltiples fabricantes y múltiples distribuidores para varios productos. Cada producto es fabricado por la combinación de varias materias primas que se entregan por cada proveedor para cada empresa que produce todo tipo de productos. Cada minorista satisface la demanda de todo tipo de productos que se reciben de cada fabricante en algunos por ciento de sus requisitos. Por último, las ganancias promedio de todos los miembros de la cadena se formula porteniendo en cuenta los precios de venta, establecer los costos en las diferentes etapas, los costos de inventario, los costos de selección con el fin de determinar el tamaño óptimo / cantidad de producción.

2.2.1. Modelo Matemático para la Gestión de Inventarios Colaborativos en escenarios de incertidumbre

Para formular el modelo matemático de gestión de inventarios colaborativos se consideran los siguientes supuestos para proveedores, fabricantes y distribuidores.

SUPUESTOS

Proveedor

- ✓ Se considera la presencia de Múltiples Proveedores.
- ✓ Los proveedores almacenan materia prima.
- ✓ Lead time de los proveedores es determinístico.
- ✓ Tasa de producción del proveedor es estocástica.
- ✓ α Fracción ($0 < \alpha < 1$) de defectuosos en el proveedor
- ✓ $f_s(\alpha)$ Función de densidad de α
- ✓ Los artículos defectuosos en cada nivel son reenviados a la etapa proveniente al precio en que fueron comprados. En este caso, el sistema de transporte de los productos defectuosos se realiza cuando se va a entregar una nueva orden. Por lo tanto, los costos de transporte en cada etapa dependen en el tamaño de los lotes y las distancias de la cadena.
- ✓ El efecto conjunto del proveedor, fabricante y distribuidor se examine en una gestión de la cadena de suministro.
- ✓ Los costos de instalación en cada miembro de la cadena son diferentes debido a su configuración diferente.

Fabricante

- ✓ Se considera la presencia de Múltiples Fabricantes
- ✓ Los fabricantes almacenan productos compuestos de materiales y componentes y productos terminados.
- ✓ Lead time de los fabricantes es determinístico.
- ✓ Tasa de reposición del fabricante es instantáneamente infinita, pero su tamaño es finito. (tamaño de lote finito).
- ✓ β Fracción ($0 < \beta < 1$) de defectuosos en el fabricante
- ✓ $f_m(\beta)$ Función de densidad de β .
- ✓ Los artículos defectuosos en cada nivel son reenviados a la etapa proveniente al precio en que fueron comprados. En este caso, el sistema de transporte de los productos defectuosos se realiza cuando se va a entregar una nueva orden. Por lo tanto, los costos de transporte en cada etapa dependen en el tamaño de los lotes y las distancias de la cadena.
- ✓ El costo unitario de producción es una función de la tasa de producción.

- ✓ El efecto conjunto del proveedor, fabricante y distribuidor se examine en una gestión de la cadena de suministro.
- ✓ El efecto conjunto del proveedor, fabricante y distribuidor se examine en una gestión de la cadena de suministro.

Distribuidor

- ✓ Se considera la presencia de múltiples distribuidores.
- ✓ Los distribuidores almacenan productos terminados.
- ✓ Lead time de los distribuidores es determinístico.
- ✓ Tasa de Demanda de los distribuidores es estocástica.
- ✓ γ Fracción ($0 < \gamma < 1$) de defectuosos en el fabricante.
- ✓ $f_r(\gamma)$ Función de densidad de γ .
- ✓ Los artículos defectuosos en cada nivel son reenviados a la etapa proveniente al precio en que fueron comprados. En este caso, el sistema de transporte de los productos defectuosos se realiza cuando se va a entregar una nueva orden. Por lo tanto, los costos de transporte en cada etapa dependen en el tamaño de los lotes y las distancias de la cadena.
- ✓ El efecto conjunto del proveedor, fabricante y distribuidor se examine en una gestión de la cadena de suministro.
- ✓ Los costos de instalación en cada miembro de la cadena son diferentes debido a su configuración diferente.

CONJUNTOS

Proveedor	
s	Proveedor, $s = 1, 2, 3, \dots S$
i	Referencia de Materiales $i=1,2,3,\dots I$
l_j	Número de referencia de Materiales $l_j=1,2,3,\dots n$
Fabricante	
m	Fabricante, $m = 1, 2, 3, \dots M$
j	Referencia de productos, $j=1,2,3, \dots J$
Distribuidor	
r	Minorista, $r = 1, 2, 3, \dots R$

PARÁMETROS

Proveedor	
$TS_{j,s,i}$	Tiempo de ciclo del proveedor s para el material i del producto j
$PS_{j,s,i}$	Tasa de producción del proveedor s para el material i del producto j
$X_{j,s,i}$	Valor esperado de la tasa de producción del proveedor s para el material i del producto j
$\alpha_{j,s,i}$	Fracción de artículos defectuosos en el proveedor s para el material i del producto j
$rS_{j,s,i}$	Tasa de detección por unidad de tiempo en el proveedor s para el material i del producto j
$CS_{j,s,i}$	Costo unitario de inspección en el proveedor s para el material i del producto j
$AS_{j,s,i}$	Costo de preparación o alistamiento en el proveedor s para el material i del producto j
$hS_{j,s,i}$	Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo en el proveedor s para el material i del producto j
$PC_{j,s,i}$	Costo unitario de compra del artículo en el proveedor s para el material i del producto j
$WS_{j,s,i}$	Precio de venta por unidad de artículo bueno en el proveedor s para el material i del producto j
$\tilde{W}S_{j,s,i}$	Precio de venta por unidad de artículo defectuoso en el proveedor s para el material i del producto j
Fabricante	
$TM_{m,j}$	Tiempo de ciclo del fabricante m para el producto j
$PM_{m,j}$	Tasa de producción del fabricante m para el producto j
$TPM_{m,j}$	Tiempo de producción del fabricante m para el producto j
$\beta_{m,j}$	Fracción ($0 < \beta < 1$) de defectuosos del fabricante m para el producto j
$AM_{m,j}$	Costo de alistamiento del fabricante m para el producto j
$hM_{m,j}$	Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo del fabricante m para el producto j
$LM_{m,j}$	Costo de hora/hombre para la producción del fabricante m para el producto j
$\delta_{m,j}$	Costo fijo de mantenimiento del fabricante m para el producto j
$\gamma M_{m,j}$	Costo proporcional (variable) del fabricante m para el producto j
$WM_{m,j}$	Precio unitario de venta de artículos conformes del fabricante m para el producto j
$\tilde{W}M_{m,j}$	Precio unitario de venta de artículos defectuosos del fabricante m para el producto j
$rSM_{m,j}$	Tasa de detección por unidad de tiempo en el fabricante m para el producto j
$SM_{m,j}$	Costo unitario de inspección en el fabricante m para el producto j
Distribuidor	
$TR_{r,j}$	Tiempo de ciclo del distribuidor r para el producto j
$TRC_{r,j}$	Tiempo para recibir producto j del fabricante m para el distribuidor r
$DR_{r,j}$	Demanda del distribuidor r para el producto j
$DC_{r,j}$	Demanda del mercado para el producto j
$Y_{r,j}$	Valor esperado para la demanda del mercado para el producto j
$AR_{r,j}$	Costo de alistamiento del distribuidor r para el producto j
$hR_{r,j}$	Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo del distribuidor r para el producto j

$WR_{r,j}$	Precio unitario de venta por unidad de artículo en el minorista.
------------	--

VARIABLES

Proveedor	
$R_{j,s,i}$	Tamaño del lote de envío del proveedor s para el material i para el producto j
$QS_{j,s,i}(t)$	Inventario de los artículos conformes en el proveedor s para el material i para el producto j
$APS_{j,s,i}$	Beneficio promedio del proveedor s para el material i para el producto j
$EAPS$	Valor esperado del beneficio promedio de los proveedores.
Fabricante	
$QM_{m,j}(t)$	Inventario de artículos buenos en el fabricante m para el producto j
$APM_{m,j}$	Beneficio promedio del fabricante m para el producto j
$EAPM$	Valor esperado de la ganancia promedio del fabricante.
Distribuidor	
$QR_{r,j}(t)$	Inventario de artículos conformes en el distribuidor r para el producto j
$APR_{r,j}$	Beneficio promedio del distribuidor r para el producto j
$EAPR$	Valor esperado del beneficio promedio del distribuidor r para el producto j
$EAPC$	Beneficio promedio esperado del sistema de colaboración.

Se consideran múltiples proveedores, múltiples fabricantes y múltiples distribuidores para varios productos. Cada producto es fabricado por la combinación de varias materias primas que se entregan por cada proveedor para cada empresa que produce todo tipo de productos. Cada minorista satisface la demanda de todo tipo de productos que se reciben de cada fabricante en algunos por ciento de sus requisitos. Por último, las ganancias promedio de todos los miembros de la cadena se formula teniendo en cuenta los precios de venta, establecer los costos en las diferentes etapas, los costos de inventario, los costos de selección con el fin de determinar el tamaño óptimo / cantidad de producción. A continuación se presenta la configuración de la cadena de suministro para el modelo (Ver Figura 15).

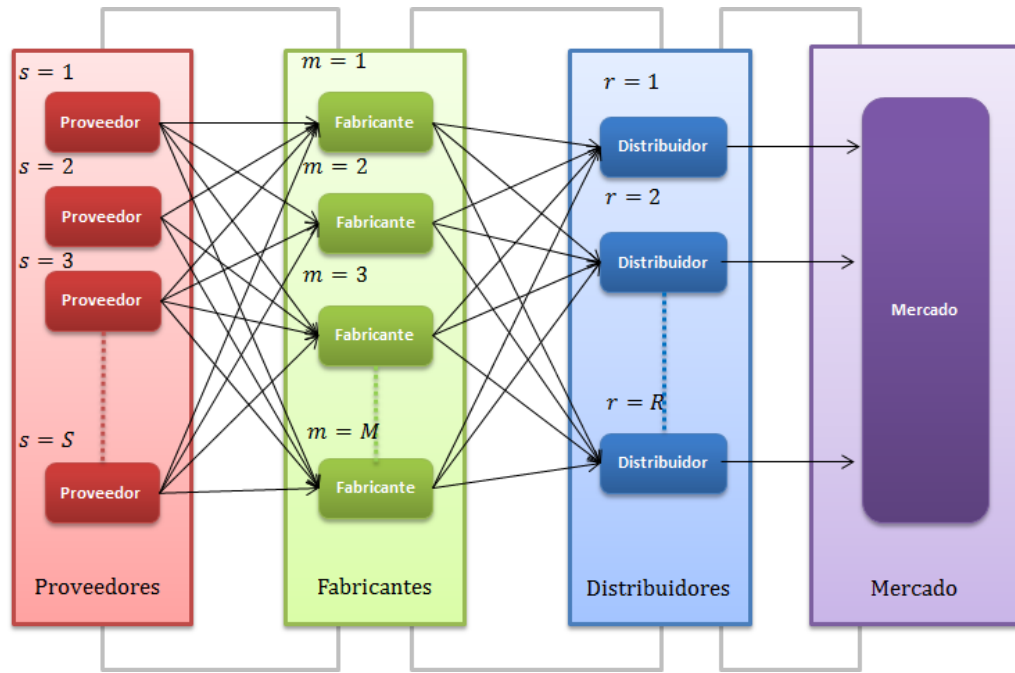


Figura 15. Diagrama de la Cadena de Suministro. Fuente: Elaboración propia.

Se desarrollará un modelo matemático multinivel, multi-producto, con múltiples proveedores, fabricantes y distribuidores, quienes son miembros de una cadena de suministro. Se considera un porcentaje $\alpha_{j,s,i}$ de materiales $i \in \{1,2, \dots, l_j\}$ defectuosos para el producto j en el proveedor s , los cuales son devueltos con un precio de compra más bajo que el precio de venta. Cada material requerido para producir $j \in \{1,2, \dots, J\}$ productos, es suministrado por cada proveedor con una tasa $PS_{j,s,i}$. El fabricante $m \in \{1,2, \dots, M\}$ produce múltiples productos como una combinación porcentual ($0 \leq \varepsilon_{j,s,i} \leq 1$) de los materiales suministrados por el proveedor, de allí, que la tasa de producción en el fabricante (m) para el producto j es:

$$PM_{m,j} = \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} = 1 \quad \forall j \in \{1,2, \dots, J\} \text{ y}$$

$$\varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} = \varepsilon_{j,s,k} PS_{j,s,k} \quad \forall i \neq k \in l_j$$

Si la tasa de demanda para el producto j en el distribuidor $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ es $DR_{r,j}$, entonces el tamaño de la tasa para el fabricante m es $\theta_{m,r,j}DR_{r,j}$ donde $(0 \leq \theta_{m,r,j} \leq 1)$ y $\sum_{m=1}^M \theta_{m,r,j} = 1 \forall r \in \{1, 2, 3 \dots R\}$ y $j \in \{1, 2, 3, \dots, J\}$. La tasa de demanda en el mercado esperada para el producto j en el distribuidor r es $DC_{r,j}$. A continuación, se formulará el beneficio para los proveedores, fabricantes y distribuidores.

PROVEEDORES

A continuación se formula el modelo de inventario para el proveedor, con l proveedores, donde cada uno suministra varios tipos de materiales. El fabricante ordena una cantidad $R_{j,s,i}$ de materiales para iniciar el proceso de producción a una tasa $PS_{j,s,i}$ para cada proveedor s . La tasa de producción sigue una función de distribución de probabilidad uniforme, de acuerdo con la capacidad instalada de cada proveedor. $Q_{j,s,i}(t)$ es el inventario de productos conformes y una vez finalizada la inspección de los materiales, son devueltos al respectivo proveedor y vendidos a un precio $\tilde{W}_{j,s,i}$ por unidad. Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema para cada producto son:

$$\frac{dQS_{j,s,i}(t)}{dt} = -PS_{j,s,i}, \quad QS_{j,s,i}(0) = (1 - \alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}, \quad QS_{j,s,i}(TS_{j,s,i}) = 0, \quad 0 \leq t \leq TS_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i) \quad (2)$$

$$\int_0^{TS_{j,s,i}} dQS_{j,s,i}(t) = \int_0^{TS_{j,s,i}} -PS_{j,s,i} dt \quad \forall(j, s, i)$$

$$[QS_{j,s,i}(t)]_0^{TS_{j,s,i}} = [-P_{j,s,i}t]_0^{TS_{j,s,i}} \quad \forall(j, s, i)$$

$$QS_{j,s,i}(TS_{j,s,i}) - QS_{j,s,i}(0) = -PS_{j,s,i}TS_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i)$$

$$\text{Usando la condición inicial } QS_{j,s,i}(0) = (1 - \alpha)R_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i)$$

$$QS_{j,s,i}(TS_{j,s,i}) = (1 - \alpha)R_{j,s,i} - PS_{j,s,i}TS_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i) \quad (3)$$

$$\text{Usando la condición inicial } QS_{j,s,i}(TS_{j,s,i}) = 0$$

$$0 = (1 - \alpha_{j,s,i})R_{j,s,i} - PS_{j,s,i}TS_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i)$$

$$TS_{j,s,i} = \frac{(1 - \alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}}{PS_{j,s,i}} \quad \forall(j, s, i) \quad (4)$$

En el sistema de inventarios la tasa de producción de los proveedores $PS_{j,s,i}$ sigue una función de densidad de probabilidad uniforme, debido a que dicha distribución permite describir el comportamiento de una variable aleatoria con probabilidad constante sobre el intervalo $[a_{j,s,i}, b_{j,s,i}]$ en el que está definida, ya que por lo general, la producción de bienes en una empresa se maneja entre un rango mínimo y máximo de unidades producidas, de acuerdo a la capacidad instalada y recursos disponibles.

$$f_{j,s,i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b_{j,s,i}-a_{j,s,i}} & a_{j,s,i} \leq x \leq b_{j,s,i} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \forall(j, s, i) \quad (5)$$

Para conocer el valor promedio de la tasa de producción (variable aleatoria) es necesario calcular su valor esperado. Por lo tanto, el valor esperado para x es:

$$X_{j,s,i} = \int_{a_{j,s,i}}^{b_{j,s,i}} x f_{j,s,i}(x) dx = \frac{1}{b_{j,s,i}-a_{j,s,i}} \int_{a_{j,s,i}}^{b_{j,s,i}} x dx = \frac{1}{b_{j,s,i}-a_{j,s,i}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{a_{j,s,i}}^{b_{j,s,i}} = \frac{b_{j,s,i}^2 - a_{j,s,i}^2}{2(b_{j,s,i}-a_{j,s,i})} = \frac{(b_{j,s,i}+a_{j,s,i})}{2} \quad \text{para } b_{j,s,i} \neq a_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i) \quad (6)$$

Reemplazando $PS_{j,s,i}$ por el valor esperado de la tasa de producción de los proveedores $X_{j,s,i}$, se obtiene:

$$TS_{j,s,i} = \frac{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}}{X_{j,s,i}} \quad \forall(j, s, i) \quad (7)$$

EGRESOS

Costo de Mantener Inventario de Productos Conformes

El costo de inventario de productos conformes es:

$$HS_{j,s,i} = \frac{hS_{j,s,i}}{TS_{j,s,i}} \int_0^{TS_{j,s,i}} QS_{j,s,i}(t) dt = hS_{j,s,i} \int_0^{TS_{j,s,i}} \{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i} - X_{j,s,i}t\} dt \quad \forall(j, s, i)$$

$$HS_{j,s,i} = \frac{hS_{j,s,i}}{TS_{j,s,i}} \left[(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}t - X_{j,s,i} \frac{t^2}{2} \right]_0^{TS_{j,s,i}} \quad \forall(j, s, i)$$

$$HS_{j,s,i} = \frac{hS_{j,s,i}}{TS_{j,s,i}} \left[(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}TS_{j,s,i} - \frac{1}{2}X_{j,s,i}TS_{j,s,i}^2 \right] \quad \forall(j, s, i) \quad (8)$$

Reemplazando $TS_{j,s,i}$ en (8)

$$\begin{aligned}
 HS_{j,s,i} &= \frac{hS_{j,s,i}X_{j,s,i}}{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}} \left[(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i} \left(\frac{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}}{X_{j,s,i}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}X_{j,s,i} \left(\frac{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}}{X_{j,s,i}} \right)^2 \right] \quad \forall(j, s, i) \\
 HS_{j,s,i} &= \frac{hS_{j,s,i}X_{j,s,i}}{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}} \left[\frac{(1-\alpha_{j,s,i})^2 R_{j,s,i}^2}{X_{j,s,i}} - \frac{(1-\alpha_{j,s,i})^2 R_{j,s,i}^2}{2X_{j,s,i}} \right] \quad \forall(j, s, i) \\
 HS_{j,s,i} &= \frac{hS_{j,s,i}}{2} (1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i) \tag{9}
 \end{aligned}$$

Costo de Mantener Inventario de Productos Defectuosos

Teniendo en cuenta que la detección de unidades defectuosas en un lote está dado por $\left(\frac{R_{j,s,i}}{rS_{j,s,i}}\right)$. El costo de inventario de productos defectuosos es:

$$\begin{aligned}
 HDS_{s,i} &= \frac{hS_{j,s,i}}{TS_{j,s,i}} \alpha_{j,s,i} R_{j,s,i} \left(\frac{R_{j,s,i}}{rS_{j,s,i}} \right) = \frac{hS_{j,s,i}X_{j,s,i}}{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}} \alpha_{j,s,i} \left(\frac{R_{j,s,i}^2}{rS_{j,s,i}} \right) \quad \forall(j, s, i) \\
 HDS_{s,i} &= hS_{j,s,i} \left(\frac{\alpha_{j,s,i}}{1-\alpha_{j,s,i}} \right) \left(\frac{X_{j,s,i}R_{j,s,i}}{rS_{j,s,i}} \right) \quad \forall(j, s, i) \tag{10}
 \end{aligned}$$

Costo de Inspección

El costo de inspección es:

$$\begin{aligned}
 CS_{j,s,i} &= \left(\frac{cS_{j,s,i}}{TS_{j,s,i}} \right) R_{j,s,i} = \left(\frac{cS_{j,s,i}X_{j,s,i}}{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}} \right) R_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i) \\
 CS_{j,s,i} &= \frac{cS_{j,s,i}X_{j,s,i}}{1-\alpha_{j,s,i}} \quad \forall(j, s, i) \tag{11}
 \end{aligned}$$

Costo de Compra

El costo de compra es:

$$PCS_{j,s,i} = \left(\frac{PC_{j,s,i}}{TS_{j,s,i}} \right) R_{j,s,i} = \left(\frac{PC_{j,s,i}X_{j,s,i}}{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}} \right) R_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i)$$

$$PCS_{j,s,i} = \frac{PC_{j,s,i}X_{j,s,i}}{1-\alpha_{j,s,i}} \quad \forall(j, s, i) \quad (12)$$

Costo de Alistamiento

El costo de alistamiento es:

$$\frac{AS_{j,s,i}}{TS_{j,s,i}} = \frac{AS_{j,s,i}X_{j,s,i}}{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}} \quad \forall(j, s, i) \quad (13)$$

INGRESOS

Los ingresos provenientes de la venta de productos conformes y productos defectuosos está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Ingresos por venta} &= \frac{1}{TS_{j,s,i}} [WS_{j,s,i}(1 - \alpha_{j,s,i})R_{j,s,i} + \widetilde{WS}_{j,s,i}\alpha_{j,s,i}R_{j,s,i}] = WS_{j,s,i}X_{j,s,i} + \\ &\widetilde{WS}_{j,s,i} \left(\frac{\alpha_{j,s,i}}{1-\alpha_{j,s,i}} \right) X_{j,s,i} \quad \forall(j, s, i) \\ &(14) \end{aligned}$$

BENEFICIO

El beneficio individual del proveedor s, para el producto j es:

$$\begin{aligned} APS_{j,s} &= \sum_{i=1}^I (\text{Ingresos} - \text{Egresos}) \\ APS_{j,s} &= \sum_{i=1}^{l_j} WS_{j,s,i}X_{j,s,i} + \sum_{i=1}^{l_j} \widetilde{WS}_{j,s,i} \left(\frac{\alpha_{j,s,i}}{1-\alpha_{j,s,i}} \right) X_{j,s,i} - \sum_{i=1}^{l_j} \frac{PC_{j,s,i}X_{j,s,i}}{1-\alpha_{j,s,i}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{l_j} \frac{hS_{j,s,i}}{2} (1 - \alpha_{j,s,i})R_{j,s,i} - \sum_{i=1}^{l_j} hS_{j,s,i} \left(\frac{\alpha_{j,s,i}}{1-\alpha_{j,s,i}} \right) \left(\frac{X_{j,s,i}R_{j,s,i}}{rS_{j,s,i}} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{l_j} \frac{cS_{j,s,i}X_{j,s,i}}{1-\alpha_{j,s,i}} - \sum_{i=1}^{l_j} \frac{AS_{j,s,i}X_{j,s,i}}{(1-\alpha_{j,s,i})R_{j,s,i}} \quad \forall(j, s) \quad (15) \end{aligned}$$

Usando en (15) $\varepsilon_{j,s,i}R_{j,s,i} = \varepsilon_{j,s,k}R_{j,s,k} \quad \forall i \neq k \in l_j$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
APS_{j,s} = & \sum_{i=1}^{l_j} WS_{j,s,i} X_{j,s,i} + \sum_{i=1}^{l_j} \widetilde{W}S_{j,s,i} \left(\frac{\alpha_{j,s,i}}{1 - \alpha_{j,s,i}} \right) X_{j,s,i} - \sum_{i=1}^{l_j} \frac{PC_{j,s,i} X_{j,s,i}}{1 - \alpha_{j,s,i}} \\
& - \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} \sum_{i=1}^{l_j} \frac{hS_{j,s,i}}{2} (1 - \alpha_{j,s,i}) R_{j,s,i} \frac{1}{\varepsilon_{j,s,i}} \\
& - \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} \sum_{i=1}^{l_j} hS_{j,s,i} \left(\frac{\alpha_{j,s,i}}{1 - \alpha_{j,s,i}} \right) \left(\frac{X_{j,s,i}}{rS_{j,s,i} \varepsilon_{j,s,i}} \right) - \sum_{i=1}^{l_j} \frac{cS_{j,s,i} X_{j,s,i}}{1 - \alpha_{j,s,i}} \\
& - \frac{R_{j,s,1}^{-1}}{\varepsilon_{j,s,1}} \sum_{i=1}^{l_j} \frac{AS_{j,s,i} X_{j,s,i} \varepsilon_{j,s,i}}{(1 - \alpha_{j,s,i})} \quad \forall (j, s) \tag{16}
\end{aligned}$$

Por lo anterior, el beneficio promedio esperado de los proveedores de materia prima es:

$$EAPS = \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S APS_{j,s} \tag{17}$$

FABRICANTES

A continuación se formula el modelo de inventario para el fabricante, con m fabricantes, donde cada uno produce diferentes productos. El fabricante m produce j productos con una tasa de producción $PM_{m,j}$ para cada uno. El tiempo de producción está dado por $TPM_{m,j}$ y el tiempo de ciclo del inventario para el fabricante m para el producto j es:

Tiempo de producción:

$$TPM_{m,j} = \frac{\sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} X_{j,s,i} TS_{j,s,i}}{PM_{m,j}} = \frac{\sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i}) \varepsilon_{j,s,i} R_{j,s,i}}{PM_{m,j}} \quad \forall m, j \tag{18}$$

Con $\varepsilon_{j,s,i} R_{j,s,i} = \varepsilon_{j,s,k} R_{j,s,k} \quad \forall i \neq k \in l_j$

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_{j,s,i} R_{j,s,i} = \varepsilon_{j,s,k} R_{j,s,k} \quad \forall i \neq k \in l_j$, se obtiene:

$$TPM_{m,j} = \frac{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{PM_{m,j}} \quad \forall (m,j) \quad (19)$$

Los fabricantes una vez terminan el lote de producción entregan los productos a los distribuidores. Las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema son:

$$\frac{dQM_{m,j}(t)}{dt} = (1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \quad \forall m,j,r$$

$$0 \leq t \leq TPM_{m,j} \quad \forall m,j \quad (20)$$

$$\int_0^{TPM_{m,j}} dQM_{m,j}(t) = \int_0^{TPM_{m,j}} \left[(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] dt \quad \forall m,j$$

$$[dQM_{m,j}(t)]_0^{TPM_{m,j}} = \left[(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j}t - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} t \right]_0^{TPM_{m,j}} \quad \forall m,j$$

$$QM_{m,j}(TPM_{m,j}) - QM_{m,j}(0)$$

$$= (1 - \beta_{m,j})PM_{m,j}TPM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} TPM_{m,j} \quad \forall m,j \quad (21)$$

Usando la condición inicial $QM_{m,j}(0) = 0 \quad \forall m,j$

$$QM_{m,j}(TPM_{m,j}) = (1 - \beta_{m,j})PM_{m,j}TPM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} TPM_{m,j} \quad \forall m,j \quad (22)$$

$$QM_{m,j}(TPM_{m,j}) = \left[(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] TPM_{m,j} \quad \forall j$$

La segunda ecuación diferencial que gobierna el sistema es:

$$\frac{dQM_{m,j}(t)}{dt} = - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}, \quad \forall m,j,r \quad TPM_{m,j} \leq t \leq TM_{m,j} \quad \forall (m,j) \quad (23)$$

$$dQM_{m,j}(t) = - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} dt \quad \forall j$$

$$\int_{TPM_{m,j}}^{TM_{m,j}} dQM_{m,j}(t) = - \int_{TPM_{m,j}}^{TM_{m,j}} \left(\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right) dt \quad \forall (m,j)$$

$$[QM_{m,j}(t)]_{TPM_{m,j}}^{TM_{m,j}} = - \left[\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} t \right]_{TPM_{m,j}}^{TM_{m,j}} \quad \forall (m,j)$$

$$\begin{aligned} QM_{m,j}(TM_{m,j}) - QM_{m,j}(TPM_{m,j}) \\ = -\theta_{m,r,j} DR_{r,j} TM_{m,j} + \theta_{m,r,j} DR_{r,j} TPM_{m,j} \quad \forall (m,j) \end{aligned} \quad (24)$$

Dado que:

$$\begin{aligned} QM_{m,j}(TPM_{m,j}) \\ = \left[(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] TPM_{m,j} \quad \forall j \quad QM_{m,j}(TM_{m,j}) \\ = 0 \quad \forall (m,j) \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 - \left[(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] TPM_{m,j} \\ = - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} TM_{m,j} + \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} TPM_{m,j} \quad \forall (m,j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} TM_{m,j} \\ = \left[(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] TPM_{m,j} \\ + \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} TPM_{m,j} \quad \forall (m,j) \end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} TM_{m,j} = (1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} TPM_{m,j} \quad \forall(m, j) \quad (25)$$

$$TM_{m,j} = \frac{(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} TPM_{m,j}}{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}} \quad \forall(m, j) \quad (26)$$

Al reemplazar(19) en (26), se obtiene:

$$TM_{m,j} = \frac{(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} \left(\frac{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{PM_{m,j}} \right)}{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}} \quad \forall(m, j)$$

$$TM_{m,j} = (1 - \beta_{m,j}) \frac{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}} \quad \forall(m, j) \quad (27)$$

EGRESOS

Costo de Mantener Inventarios de Productos Conformes

El costo de mantener el inventario de productos conformes es:

$$HM_{m,j} = \frac{hM_{m,j}}{TM_{m,j}} \int_0^{TPM_{m,j}} QM_{m,j}(t) dt + \int_{TPM_{m,j}}^{TM_{m,j}} QM_{m,j}(t) dt \quad \forall(m, j) \quad (28)$$

$$HM_{m,j} = hM_{m,j} \left[\int_0^{TPM_{m,j}} \left[(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] t dt \right. \\ \left. + \int_{TPM_{m,j}}^{TM_{m,j}} \left\{ \left[(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] TPM_{m,j} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} (t - TPM_{m,j}) \right\} dt \right] \quad \forall(m, j)$$

$$\begin{aligned}
HM_{m,j} = \frac{hM_{m,j}}{TM_{m,j}} & \left[\left[(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \right] \frac{TPM_{m,j}^2}{2} \right. \\
& + \left[(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \right] TPM_{m,j}(TM_{m,j} - TPM_{m,j}) \\
& \left. - \frac{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j}}{2} (TM_{m,j} - TPM_{m,j})^2 \right] \quad \forall(m, j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
HM_{m,j} = \frac{hM_{m,j}}{2TM_{m,j}} & \left[(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \right] TM_{m,j}^2 \left[\left(\frac{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j}} \right)^2 \right. \\
& + \frac{2 \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j}} \left(1 - \frac{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j}} \right) \\
& \left. - \frac{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j}}{2} \left(1 - \frac{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j}} \right)^2 \right] \quad \forall(m, j)
\end{aligned}$$

Reemplazando (19), se obtiene:

$$\begin{aligned}
HM_{m,j} = \frac{hM_{m,j}}{2 \left((1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} \right)^2} & \left[(1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} \right. \\
& - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \left. \right] TM_{m,j} \left[\left(\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \right)^2 \right. \\
& + 2 \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \left((1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \right) \\
& \left. - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \left((1 - \beta_{m,j})PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j}DR_{r,j} \right)^2 \right] \quad \forall(m, j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
HM_{m,j} &= \frac{hM_{m,j} \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{2 \left((1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} \right)^2} \left[(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] TM_{m,j} \left[- \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} + 2(1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} \right. \\
&\quad \left. - \left((1 - \beta_{m,j}) PM_{m,j} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right)^2 \right] \quad \forall(m, j) \\
\\
HM_{m,j} &= \frac{hM_{m,j} (1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{2 \left[(1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} \right]^2} \left[(1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] \left[- \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} + 2(1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} \right. \\
&\quad \left. - \left((1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right)^2 \right] \quad \forall(m, j) \quad (29)
\end{aligned}$$

Costo de Mantener Inventario de productos defectuosos

El costo de mantener inventario de productos defectuosos está dado por el consumo de inventarios en un instante de tiempo t y la tasa detección de productos defectuosos en cada lote de producción. El costo de mantener inventario de productos defectuosos es:

$$\begin{aligned}
HDM_{m,j} &= \frac{hM_{m,j}}{TM_{m,j}} \left[\left(\int_0^{TPM_{m,j}} \beta_{m,j} PM_{m,j} (TPM_{m,j} - t) dt \right) \right. \\
&\quad \left. + \beta_{m,j} P_{m,j} TPM_{m,j} \left(\frac{PM_{m,j}}{rSM_{m,j}} \right) \right] \quad \forall(m, j) \quad (30) \\
\\
HDM_{m,j} &= \frac{hM_{m,j}}{TM_{m,j}} \left[\left[\beta_{m,j} PM_{m,j} TPM_{m,j} t \right]_0^{TPM_{m,j}} - \left[\beta_{m,j} PM_{m,j} \frac{t^2}{2} \right]_0^{TPM_{m,j}} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{m,j} P_{m,j} TPM_{m,j} \left(\frac{PM_{m,j}}{rSM_{m,j}} \right) \right] \quad \forall(m, j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
HDM_{m,j} &= \frac{hM_{m,j}}{TM_{m,j}} \left[\beta_{m,j} PM_{m,j} TPM_{m,j}^2 - \beta_{m,j} PM_{m,j} \frac{TPM_{m,j}^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{m,j} PM_{m,j} TPM_{m,j} \left(\frac{PM_{m,j}}{rSM_{m,j}} \right) \right] \quad \forall(m,j) \\
HDM_{m,j} &= \frac{hM_{m,j}}{TM_{m,j}} \left[\beta_{m,j} PM_{m,j} \frac{TPM_{m,j}^2}{2} + \beta_{m,j} PM_{m,j} TPM_{m,j} \left(\frac{PM_{m,j}}{rSM_{m,j}} \right) \right] \quad \forall(m,j) \\
HDM_{m,j} &= \frac{hM_{m,j} TPM_{m,j}}{TM_{m,j}} \left[\beta_{m,j} PM_{m,j} \frac{TPM_{m,j}}{2} + \beta_{m,j} PM_{m,j} \left(\frac{PM_{m,j}}{rSM_{m,j}} \right) \right] \quad \forall(m,j) \quad (31)
\end{aligned}$$

Reemplazando por (19) y (27), se obtiene:

$$\begin{aligned}
HDM_{m,j} &= \frac{hM_{m,j} \beta_{m,j} \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})} \left[\left(\frac{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{2 \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i}}{rSM_{m,j}} \right) \right] \quad \forall(m,j) \quad (32)
\end{aligned}$$

Costo Alistamiento

El costo de alistamiento es:
$$\frac{AM_{m,j}}{TM_{m,j}} = \frac{AM_{m,j} \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})} \quad \forall(m,j) \quad (33)$$

Costo de Producción

El costo de producción unitaria de los productos finales es:

$$\begin{aligned}
cpM_{m,j} &= \text{costo unitario de materiales} + \delta M_{m,j} + \frac{L_{m,j}}{PM_{m,j} TPM_{m,j}} \\
&\quad + \gamma_{m,j} PM_{m,j} TPM_{m,j} \quad \forall(m,j) \quad (34)
\end{aligned}$$

Donde $\delta M_{m,j}$ costo unitario de embalaje para el producto j en el fabricante m , $L_{m,j}$ es el costo unitario de mano de obra para el producto j en el fabricante m que es distribuido sobre la tasa de producción de un lote ($PM_{m,j} TPM_{m,j}$) y $\gamma_{m,j}$ es el costo fijo proporcional a la tasa de producción de un lote ($PM_{m,j} TPM_{m,j}$). Entonces, el costo de producción promedio para el producto j para el distribuidor r en el fabricante m es:

$$CP_{m,j} = \frac{cpM_{m,j}}{TM_{m,j}} PM_{m,j} TPM_{m,j} \quad \forall(m,j) \quad (35)$$

$$CP_{m,j} = \frac{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})} \left(\frac{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} \sum_{i=1}^{l_j} WS_{j,s,i} (1 - \alpha_{j,s,i}) \frac{1}{\varepsilon_{j,s,i}}}{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})} + \delta M_{m,j} \right. \\ \left. + \frac{L_{m,j}}{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})} + \gamma_{m,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i}) \right) \quad \forall (m, j)$$

Costo de Inspección

El costo de inspección es: $SM_{m,j} = \frac{SM_{m,j}}{TM_{m,j}} PM_{m,j} TPM_{m,j} = \frac{SM_{m,j} \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})} \quad \forall m, j \quad (36)$

INGRESOS POR VENTA

Los ingresos provenientes de la venta de productos conformes y defectuosos son:

Ingresos por Venta =

$$\frac{1}{TM_{m,j}} [(1 - \beta_{m,j}) WM_{m,j} PM_{m,j} TPM_{m,j} + \widetilde{WM}_{m,j} \beta_{m,j} PM_{m,j} TPM_{m,j}] \\ = \frac{PM_{m,j} TPM_{m,j}}{TM_{m,j}} [(1 - \beta_{m,j}) WM_{m,j} + \widetilde{WM}_{m,j} \beta_{m,j}] \quad \forall (m, j) \\ = \frac{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})} [(1 - \beta_{m,j}) WM_{m,j} + \widetilde{WM}_{m,j} \beta_{m,j}] \\ = \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \left[WM_{m,j} + \frac{\widetilde{WM}_{m,j} \beta_{m,j}}{(1 - \beta_{m,j})} \right] \quad \forall (m, j) \quad (37)$$

Beneficios:

El beneficio individual del fabricante m está dado por:

Beneficio

- = Ingresos por venta de productos defectuosos y conformes
- Costo de mantener inventario de productos conformes y defectuosos
- Costo de alistamiento – Costo de Producción – Costo de Inspección

$$\begin{aligned}
APM_{m,j} = & \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \left[WM_{m,j} + \frac{\widetilde{WM}_{m,j} \beta_{m,j}}{(1 - \beta_{m,j})} \right] \\
& - \frac{\sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})} \left(\frac{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} \sum_{i=1}^{l_j} WS_{j,s,i} (1 - \alpha_{j,s,i}) \frac{1}{\varepsilon_{j,s,i}}}{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})} + \delta M_{m,j} \right. \\
& + \frac{L_{m,j}}{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})} + \gamma_{m,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i}) \left. \right) \\
& - \frac{sM_{m,j} \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})} \\
& - \frac{hM_{m,j} (1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{2 \left[(1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} \right]^2} \left[(1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right] \left[- \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right. \\
& + 2(1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} \\
& \left. - \left((1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} - \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j} \right)^2 \right] \\
& - \frac{hM_{m,j} \beta_{m,j} \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j})} \left[\left(\frac{\sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{2 \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i}} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{\sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i}}{rSM_{m,j}} \right) \right] \\
& - \frac{AM_{m,j} \sum_{r=1}^R \theta_{m,r,j} DR_{r,j}}{(1 - \beta_{m,j}) \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})} \quad \forall (m,j) \quad (38)
\end{aligned}$$

Entonces, el beneficio esperado para todos los productos por todos los fabricantes es:

$$EAPM = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J APM_{m,j} \quad (39)$$

DISTRIBUIDOR

La tasa de demanda para los productos es diferente en cada distribuidor. El distribuidor r recibe productos del fabricante m con una tasa $DR_{r,j}$ hasta el tiempo $TRC_{r,j}$. En este modelo cada distribuidor tiene una tasa de demanda del mercado $DC_{r,j}$ para el producto j , la cual sigue una función de densidad de probabilidad exponencial, ya que nos interesa saber la variación de la demanda en función del tiempo en cualquier instante dado de t . Cada fabricante entrega los productos terminados conformes en un tiempo $TM_{m,j}$. Las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema son:

$$\frac{dQR_{r,j}(t)}{dt} = DR_{r,j} - DC_{r,j} \quad \forall(r,j), \quad QR_{r,j}(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq TRC_{r,j} \quad \forall(r,j) \quad (40)$$

$$dQR_{r,j}(t) = [DR_{r,j} - DC_{r,j}]dt \quad \forall(r,j)$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\int_0^{TRC_{r,j}} dQR_{r,j}(t) = \int_0^{TRC_{r,j}} [DR_{r,j} - DC_{r,j}]dt \quad \forall(r,j)$$

$$[QR_{r,j}(t)]_0^{TRC_{r,j}} = [DR_{r,j}t]_0^{TRC_{r,j}} - [DC_{r,j}t]_0^{TRC_{r,j}} \quad \forall(r,j)$$

$$QR_{r,j}(TRC_{r,j}) - QR_{r,j}(0) = DR_{r,j}TRC_{r,j} - DC_{r,j}TRC_{r,j} \quad \forall(r,j)$$

Usando la condición inicial $QR_{r,j}(0) = 0 \quad \forall(r,j)$

$$QR_{r,j}(TRC_{r,j}) = DR_{r,j}TRC_{r,j} - DC_{r,j}TRC_{r,j} \quad \forall(r,j) \quad (41)$$

La segunda ecuación diferencial:

$$\frac{dQR_{r,j}(t)}{dt} = -DC_{r,j}(t - TRC_{r,j}) \quad \forall(r,j), \quad TRC_{r,j} \leq t \leq TR_{r,j} \quad \text{para } r = 1,2,\dots,R \text{ y } j = 1,2,\dots,J. \quad (42)$$

$$QR_{r,j}(TRC_{r,j}) = DR_{r,j}TRC_{r,j} - DC_{r,j}TRC_{r,j} \quad \forall j, \quad QR_{r,j}(TR_{r,j}) = 0 \quad \forall(r,j)$$

$$dQR_{r,j}(t) = -DC_{r,j}(t - TRC_{r,j})dt \quad \forall(r,j)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene:

$$\int_{TRC_{r,j}}^{TR_{r,j}} dQR_{r,j}(t) = - \int_{TRC_{r,j}}^{TR_{r,j}} [DC_{r,j}] dt \quad \forall(r, j)$$

$$[QR_{r,j}(t)]_{TRC_{r,j}}^{TR_{r,j}} = -[DC_{r,j}]_{TRC_{r,j}}^{TR_{r,j}} \quad \forall(r, j)$$

$$QR_{r,j}(TR_{r,j}) - QR_{r,j}(TRC_{r,j}) = -DC_{r,j}TR_{r,j} + DC_{r,j}TRC_{r,j} \quad \forall(r, j) \quad (43)$$

Teniendo en cuenta que $QR_{r,j}(TRC_{r,j}) = (DR_{r,j} - DC_{r,j})TRC_{r,j} \quad \forall(r, j)$ se reemplaza en la ecuación

$$QR_{r,j}(TR_{r,j}) - (DR_{r,j} - DC_{r,j})TRC_{r,j} = -DC_{r,j}TR_{r,j} + DC_{r,j}TRC_{r,j} \quad \forall(r, j)$$

$$QR_{r,j}(TR_{r,j}) = DR_{r,j}TRC_{r,j} - DC_{r,j}TRC_{r,j} - DC_{r,j}TR_{r,j} + DC_{r,j}TRC_{r,j} \quad \forall(r, j)$$

$$QR_{r,j}(TR_{r,j}) = DR_{r,j}TRC_{r,j} - DC_{r,j}TR_{r,j} \quad \forall(r, j) \quad (44)$$

De acuerdo a la condición $QR_{r,j}(TR_{r,j}) = 0 \quad \forall(r, j)$

$$0 = DR_{r,j}TRC_{r,j} - DC_{r,j}TR_{r,j} \quad \forall(r, j)$$

$$TR_{r,j} = \frac{DR_{r,j}TRC_{r,j}}{DC_{r,j}} \quad \forall(r, j) \quad (45)$$

Teniendo en cuenta que la tasa de producción durante el ciclo del fabricante debe ser igual a la demanda del distribuidor en su respectivo ciclo, se tiene:

$$DR_{r,j}TRC_{r,j} = \sum_{m=1}^M (1 - \beta_{m,j}) \theta_{r,j} PM_{m,j} TPM_{m,j} \quad \forall(r, j) \quad (46)$$

$$TRC_{r,j} = \frac{\sum_{m=1}^M (1 - \beta_{m,j}) \theta_{r,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{DC_{r,j}} \quad \forall(r, j)$$

Remplazando, se obtiene:

$$TR_{r,j} = \frac{\sum_{m=1}^M (1 - \beta_{m,j}) \theta_{r,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{DC_{r,j}} \quad \forall(r, j) \quad (47)$$

En el sistema de inventarios, la demanda del mercado se asume como una función de densidad de probabilidad exponencial, teniendo en cuenta lo desarrollado por Hollier & Mak (1983) quienes fueron los primeros en considerar la demanda exponencial en un modelo de inventario; de igual forma, (Ouyang, 2005), Singh Yadav & Swami (2013) proponen un modelo matemático EOQ para productos defectuosos con demanda exponencial. Pal et al. (2013) y Roy et al. (2012) estudian los modelos EPQ y EOQ en diferentes niveles de la cadena de suministro consideran demanda incierta a la que le atribuyen una función de densidad de probabilidad exponencial especial y uniforme, respectivamente. Para la solución analítica se considerará una demanda exponencial, sin embargo de acuerdo al caso particular de cada cadena de suministro se puede estudiar el comportamiento de la demanda en un período de tiempo para determinar si los datos siguen una distribución de probabilidad o la combinación de ambas.

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(y)} & a \leq y \leq b \\ 0 & \end{cases} \quad (48)$$

El valor esperado para y es

$$Y_{r,j} = \int_a^b yf(y)dy = \frac{e^{-\lambda(a)}(a\lambda + 1)}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda(L)}(b\lambda + 1)}{\lambda} \quad \forall(r, j) \quad (49)$$

Entonces, se reemplaza el valor esperado de la demanda de los clientes en $TR_{r,j}$

$$TR_{r,j} = \frac{\sum_{m=1}^M (1 - \beta_{m,j}) \theta_{r,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})}{Y_{r,j}} \quad \forall(r, j) \quad (50)$$

COSTOS

Costo de Mantener Inventario de productos conformes ($HR_{r,j}$):

El costo de mantener el inventario es:

$$HR_{r,j} = \frac{hR_{r,j}}{TR_{r,j}} \left[\int_0^{TR_{r,j}} (DR_{r,j} - Y_{r,j})t dt + \int_{TR_{r,j}}^{TR_{r,j}} [(DR_{r,j} - Y_{r,j})TR_{r,j} - Y_{r,j}t] dt \right] \quad \forall(r, j) \quad (51)$$

$$HR_{r,j} = \frac{hR_{r,j}}{TR_{r,j}} \left[\left[DR_{r,j} \frac{t^2}{2} \right]_0^{TRC_{r,j}} - \left[Y_{r,j} \frac{t^2}{2} \right]_0^{TRC_{r,j}} + [(DR_{r,j} - Y_{r,j})TRC_{r,j}t]_{TRC_{r,j}}^{TR_{r,j}} \right. \\ \left. - \left[Y_{r,j} \frac{t^2}{2} \right]_{TRC_{r,j}}^{TR_{r,j}} \right] \quad \forall(r, j)$$

$$HR_{r,j} = \frac{hR_{r,j}}{TR_{r,j}} \left[\frac{DR_{r,j}TRC_{r,j}^2}{2} - \frac{Y_{r,j}TRC_{r,j}^2}{2} + (DR_{r,j} - Y_{r,j})TRC_{r,j}(TR_{r,j} - TRC_{r,j}) \right. \\ \left. - \frac{Y_{r,j}}{2}(TR_{r,j} - TRC_{r,j})^2 \right] \quad \forall(r, j)$$

$$HR_{r,j} = \frac{hR_{r,j}TR_{r,j}^2}{TR_{r,j}} \left[(DR_{r,j} - Y_{r,j}) \frac{Y_{r,j}^2}{2DR_{r,j}^2} + (DR_{r,j} - Y_{r,j}) \frac{Y_{r,j}}{2DR_{r,j}^2} (DR_{r,j} - Y_{r,j}) \right. \\ \left. - \frac{Y_{r,j}}{2DR_{r,j}^2} (DR_{r,j} - Y_{r,j})^2 \right] \quad \forall(r, j)$$

$$HR_{r,j} = \frac{hR_{r,j}TR_{r,j}}{2DR_{r,j}^2} (DR_{r,j} - Y_{r,j})Y_{r,j} [Y_{r,j} + 2(DR_{r,j} - Y_{r,j}) - (DR_{r,j} - Y_{r,j})] \quad \forall(r, j)$$

Reemplazando (50) se obtiene:

$$HR_{r,j} = \frac{hR_{r,j}}{2DR_{r,j}} (DR_{r,j} - Y_{r,j}) \sum_{m=1}^M (1 - \beta_{m,j}) \theta_{m,r,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i}) \quad \forall(r, j) \quad (52)$$

Costo de Alistamiento:

El costo total de alistamiento es:

$$\frac{AR_{r,j}}{TR_{r,j}} = \frac{AR_{r,j}Y_{r,j}}{\sum_{m=1}^M (1 - \beta_{m,j}) \theta_{m,r,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1} R_{j,s,1} l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})} \quad \forall(r, j) \quad (53)$$

Costo de Compra:

El costo de compra es

$$WM_{m,j}Y_{r,j} \quad \forall(r, j) \quad (54)$$

INGRESOS

Los ingresos provenientes de las ventas son: $WR_{r,j}Y_{r,j}\forall j$ (55)

El beneficio individual del distribuidor está dado por:

Beneficio del distribuidor

*= Ingresos por ventas – Costo de alistamiento – Costo de Compra
– Costo de Mantener Inventario*

$$\begin{aligned}
 APR_{r,j} &= WR_{r,j}Y_{r,j} \\
 &- \sum_{m=1}^M WM_{m,j}\theta_{m,r,j}Y_{r,j} \\
 &- \frac{hR_{r,j}}{2DR_{r,j}}(DR_{r,j} - Y_{r,j}) \sum_{m=1}^M (1 - \beta_{m,j})\theta_{m,r,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1}R_{j,s,1}l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i}) \\
 &- \frac{AR_{r,j}Y_{r,j}}{\sum_{m=1}^M (1 - \beta_{m,j})\theta_{m,r,j} \sum_{s=1}^S \varepsilon_{j,s,1}R_{j,s,1}l_j \sum_{i=1}^{l_j} (1 - \alpha_{j,s,i})} \quad \forall r, j \quad (56)
 \end{aligned}$$

El beneficio esperado para todos los productos de todos los distribuidores es:

$$EAPR = \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^J APR_{r,j} \quad (57)$$

MODELO MATEMÁTICO PARA LA GESTIÓN DE INVENTARIOS SIN COLABORACIÓN EN ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE

Por enfoque de Stackelberg cualquier miembro de la cadena de suministro es un líder que toma las decisiones y su estrategia óptima hacia los miembros anteriores o posteriores y los seguidores planifican su propia producción de acuerdo a las estrategias del líder. Si los fabricantes son los responsables de tomar las decisiones en la cadena, entonces los proveedores de materias primas y los distribuidores son los seguidores de los fabricantes. Por lo tanto, la ganancia promedio esperado para toda la cadena es:

$$\text{Min } Z = -EAPR = - \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^J APR_{r,j} \quad (58)$$

Sujeto a las condiciones:

$$\sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} = 1 \quad \forall j \in \{1,2,3 \dots J\} \quad (59)$$

$$\varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} = \varepsilon_{j,s,k} PS_{j,s,k} \quad \forall i \neq k \in l_j \quad (60)$$

$$\varepsilon_{j,s,i} R_{j,s,i} = \varepsilon_{j,s,k} R_{j,s,k} \quad \forall i \neq k \in l_j \quad (61)$$

Entonces, el problema puede resolverse mediante cualquier método de cálculo o técnicas de búsquedas.

Una vez obtenido los valores óptimos de los tamaños del lote para los distribuidores como líderes de la cadena de suministro, se calcula el beneficio esperado para cada uno de los miembros de la cadena, así como el beneficio esperado en conjunto para todos los actores bajo el enfoque sin colaboración.

$$EAPS = \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} APS_{j,s,i}$$

$$EAPM = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J APM_{m,j}$$

Por lo tanto, el beneficio esperado para toda la cadena de suministro en el esquema sin colaboración es:

$$EAPC = EAPS + EAPM + EAPS \quad (62)$$

MODELO MATEMÁTICO PARA LA GESTIÓN DE INVENTARIOS CON COLABORACIÓN EN ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE

En un sistema colaborativo todos los miembros de la cadena toman las decisiones en torno a precios de compra negociables, contrato de abastecimiento continuo en cada etapa (nivel de la cadena), estimación de la demanda del cliente final con un alto nivel de confiabilidad para evitar los faltantes e incumplimiento al mismo y productos con calidad conforme, debido a que en los dos niveles

anteriores (proveedores y fabricantes) se presentan devoluciones de productos defectuosos. En esta situación, la ganancia promedio esperada para todo el sistema que maximiza los beneficios de los miembros individuales dependen de las estrategias óptimas en común. Por lo tanto, la ganancia promedio esperado para toda la cadena es:

$$Min Z = - \left(\sum_{i=1}^J \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} APS_{j,s,i} + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J APM_{m,j} + \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^J APR_{r,j} \right) \quad (63)$$

Sujeto a las condiciones:

$$\sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^{l_j} \varepsilon_{j,s,i} = 1 \quad \forall j \in \{1,2,3 \dots J\} \quad (64)$$

$$\varepsilon_{j,s,i} PS_{j,s,i} = \varepsilon_{j,s,k} PS_{j,s,k} \quad \forall i \neq k \in l_j \quad (65)$$

$$\varepsilon_{j,s,i} R_{j,s,i} = \varepsilon_{j,s,k} R_{j,s,k} \quad \forall i \neq k \in l_j \quad (66)$$

Entonces, el problema puede resolverse mediante cualquier método de cálculo o técnicas de búsquedas. Una vez obtenido los resultados óptimos del modelo, estos permiten hacer comparaciones con cada uno de los resultados obtenidos en el modelo sin colaboración.

3. GESTIÓN DE ESQUEMAS DE INTEGRACIÓN Y COLABORACIÓN DE INVENTARIOS EN CADENAS DE SUMINISTRO

3.1. METODOLOGÍA DE GESTIÓN DE INVENTARIOS PARA FORTALECER LAS RELACIONES DE COLABORACIÓN EN UNA CADENA DE SUMINISTRO

La Metodología de Gestión de Inventarios comprende los pasos lógicos que permiten la implementación del modelo de gestión de inventarios colaborativos para fortalecer las relaciones entre los actores de la cadena de suministro. Dicha metodología incluye 5 pasos que permiten implementar una estrategia de colaboración e integración en la planificación de la cadena de suministro bajo un enfoque de mejoramiento continuo.

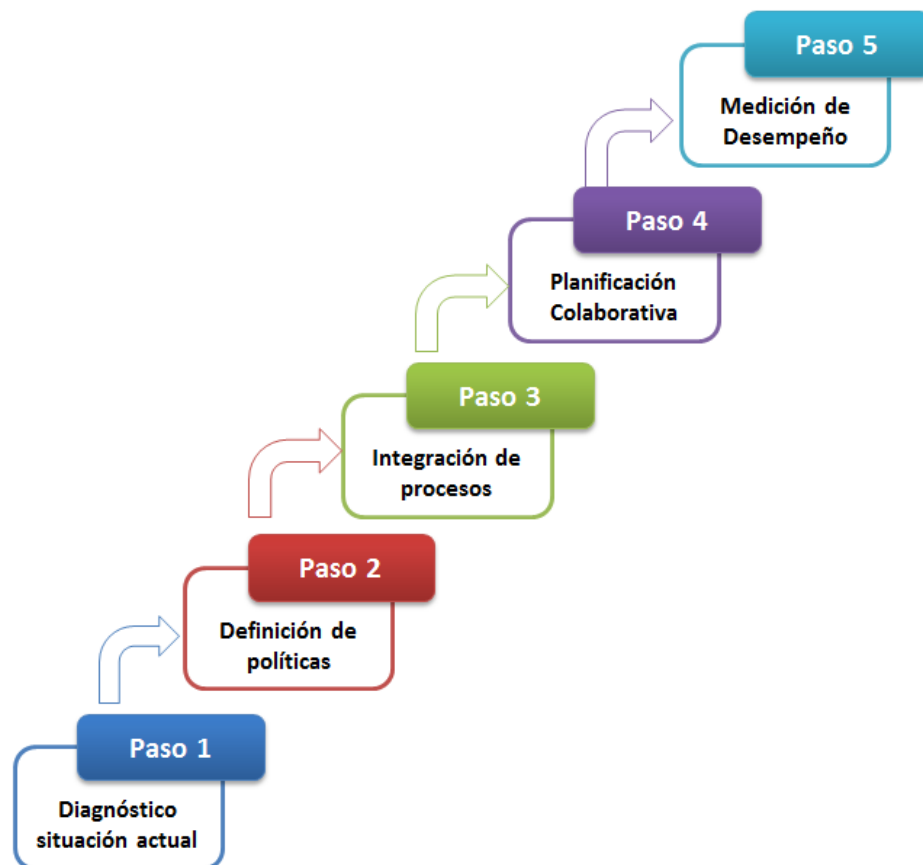


Figura 16. Metodología de Gestión de Inventarios Colaborativos. Fuente: Elaboración Propia

Paso 1: Diagnóstico de la Situación Actual

Consiste en concientizar a los actores de la cadena acerca de la importancia de la colaboración e integración de procesos para lograr un mutuo beneficio. Seguidamente es necesario, conocer la situación actual de las empresas, por lo que deben diligenciar el formulario de la herramienta por medio de una entrevista y una visita técnica para reconocer los procesos y prácticas de la empresa.

Paso 2: Definición de Políticas

Para establecer esquemas de colaboración e integración en la cadena de suministro es necesario que los actores establezcan unas políticas que regulen el trabajo en conjunto para obtener beneficios grupales.

Políticas de Contratación

La organización debe contar con políticas claras para la selección y certificación de sus proveedores y establecer relaciones mutuamente beneficiosas para realizar esfuerzos en conjunto, de tal forma que se puedan minimizar el costo total de compra de equipos y materiales, de tal forma que se garantice el alineamiento estratégico entre las organizaciones, la conformidad de los procesos y el cumplimiento de los requisitos mínimos definidos por cada una de las partes.

Para seleccionar a un proveedor la empresa debe tener en cuenta criterios de objetividad de acuerdo a sus propias necesidades, imparcialidad entre las diferentes opciones de proveedores, de tal forma que se evite cualquier conflicto de interés entre las partes involucradas. Para ello es necesario tener en cuenta las siguientes políticas de contratación:

- ✓ Conocer las expectativas del cliente para satisfacer sus necesidades y generar valor en los productos y servicios ofrecidos.
- ✓ Fomentar relaciones de colaboración entre las partes para obtener buenas condiciones de contratación en términos contractuales en el suministro de productos y/o servicios requeridos.
- ✓ Promover la transparencia en el desarrollo de las negociaciones para lograr claridad en acuerdos mutuamente beneficiosos entre las partes.
- ✓ Fomentar la responsabilidad medioambiental y social de cada una de las partes que participaran en el acuerdo, para garantizar que ambos sean respetuosos del entorno y de los recursos que este les provee.
- ✓ Motivar y potencializar las competencias de los empleados para poder ejecutar procesos de forma eficiente y tener relaciones efectivas, que generen conformidad y satisfacción en el cliente.
- ✓ Establecer mecanismos de comunicación, herramientas de gestión y de medición de todos los temas acordados, para garantizar el cumplimiento de las metas inicialmente pactadas.

- ✓ La empresa demandante de producto y/o servicio debe establecer el perfil de sus proveedores y seleccionar aquellos que cumplan con sus requerimientos legales, contractuales, de calidad (sistema de calidad, cumplimiento de la fecha de entrega, cumplimiento de la cantidad pactada, servicio post-venta, calidad del producto/servicio) y capacidad financiera (endeudamiento, razón de liquidez, precio).
- ✓ Establecer en términos contractuales las pólizas de cumplimiento, de calidad, de responsabilidad civil y social, y aquellas a las cuales hubiera lugar en la negociación.

Paso 3: Integración de Procesos

De acuerdo a la dinámica de la cadena de suministro, muchas veces se hace necesario que el eslabón más fuerte, por lo general, el fabricante de un bien o el prestador de un servicio, es quien desea organizar de tal forma todas sus operaciones que se hace necesario controlar o adquirir el dominio de sus proveedores, distribuidores o simplemente a su competencia. Es por ello, que se habla de integración hacia atrás (si se controla a los proveedores), integración hacia adelante (si se controla a los distribuidores) e integración horizontal (si se adquiere o se controla la competencia). Este tipo de estrategias son utilizadas cuando los proveedores o los distribuidores ejercen un gran poder de negociación en los procesos, o tienen grandes expectativas de crecimiento dentro del sector, o sus productos y/o servicios no son confiables, o cuando sus márgenes de utilidad son demasiado altos, lo cual hace necesario adquirir a dichos integrantes para aumentar el margen de utilidad de los eslabones que generan mayor valor agregado al producto y/o servicio final.

Para mejorar la gestión de inventarios el eslabón más fuerte, que ejerza liderazgo entre los otros integrantes de la cadena puede establecer relaciones o ejercer un control sobre las actividades y/o procesos que inciden sobre la gestión de inventarios: como los procesos de adquisición de materia prima, almacenamiento tanto de materia prima, como de producto en proceso y producto terminado, distribución y manipulación del producto final y todos aquellos procesos que incidan en los inventarios.

Es recomendable que se utilice la estrategia de integración cuando el eslabón más fuerte requiera mejorar, controlar y dirigir los procesos claves de la cadena de suministro que tienen gran incidencia sobre la actividad que realiza. Así como cuando se desea aumentar la productividad a través de la disminución de los niveles de inventarios y la capacidad de almacenamiento, y aumentar el nivel de confiabilidad de los procesos, a través de la coordinación eficiente de las actividades. A continuación se presenta el esquema de integración entre los eslabones de una cadena de suministro y las actividades que tienen lugar de forma transversal en ella.

Paso 4: Planificación Colaborativa

Las relaciones de colaboración en una cadena de suministro ocurren entre dos o más compañías o eslabones de la cadena que se desarrollan en el largo plazo con el propósito de planear y ejecutar acciones en conjunto, para maximizar los beneficios del trabajo en equipo. Es por ello que este tipo de relaciones incluyen esfuerzos en la toma de decisiones para la definición de estrategia en las cuales se direccionen las empresas y se establezcan relaciones de gana-gana; así como gestiones los inventarios a partir de la implementación de la estrategia de justo a tiempo, para la reducción de los costos de almacenamiento y de operación; desarrollar e innovar nuevos productos para satisfacer las necesidades latente de los clientes; intercambiar información relacionada con los datos históricos que permitan realizar pronósticos de la demanda forma sincronizada, para disminuir o eliminar el efecto látigo causado por las variaciones en la demanda.

Para desarrollar esquemas de colaboración es importante tener en cuenta los siguientes factores que podrían garantizar el éxito en las relaciones:

- ✓ Compromiso y confianza entre cada uno de los miembros de las organizaciones que establezcan relaciones de colaboración.
- ✓ Promover la colaboración en actividades vitales de la empresa y actividades lúdicas y sociales en las cuales intervengan los miembros de todas las organizaciones que establecen relaciones para mejorar el desempeño global de toda la cadena.
- ✓ Definir las funciones, responsabilidades y actividades tanto grupales como individuales de cada uno de los integrantes del grupo.

Proveedores

Cada proveedor tiene sus tiempos, condiciones y características, por lo que es necesario que establezcan sus tiempos de reposición de materiales, que desarrollen una buena gestión de sus inventarios y un adecuado reabastecimiento a través de la planificación de las compras y elaboración de programas que respondan a la demanda de los clientes finales en tiempo real, es decir, para poder cumplir con los requerimientos de los fabricantes en términos de materiales, tiempos de entrega, calidad y precio. Para ello, los proveedores deben tener conocimiento del plan de ventas de los distribuidores; el programa de producción y plan de despacho de los fabricantes, para poder reaccionar ante el efecto látigo, causado por las posibles variaciones de la demanda por parte de los clientes finales.

Fabricantes

Cada fabricante debe establecer relaciones mutuamente beneficiosas tanto con sus proveedores, como sus distribuidores mayoristas y minoristas, con el propósito de poder atender los requerimientos por parte del cliente final.

Con respecto a sus proveedores, debe compartir información del plan de producción y los pronósticos de las ventas, para que éste planifique sus actividades de tal forma que pueda cumplir con las cantidades de materia prima necesaria, tiempos de abastecimiento, calidad requerida y con las especificaciones que solicitadas por el fabricante.

Distribuidores (Mayoristas y Minoristas)

Los distribuidores mayoristas y minoristas son el eslabón que tienen contacto directo con los clientes finales, por los que serán aquellos que podrán obtener la información en tiempo real acerca de los requerimientos necesidades, expectativas de los clientes, así como las tendencias e innovaciones que se puedan desarrollar en los productos y/o servicios que se ofrece. Por lo que es muy importante que los distribuidores establezcan relaciones colaborativas tanto con los fabricantes como los proveedores, para planificar las ventas, pronóstico de la demanda, plan de requerimiento de materiales (proveedores y fabricantes), planificación de las distribución y tiempos de entrega y demás actividades vitales que hagan parte de la logística de distribución a lo largo de toda la cadena.

Paso 5: Medición de Desempeño

Para implementar un proceso de mejoramiento continuo es necesario medir el grado de cumplimiento de las actividades planificadas inicialmente, para de acuerdo a los resultados tomar medidas de carácter preventivo y/o correctivo que permitan fortalecer las relaciones de colaboración entre los miembros de la cadena de suministro. En la Tabla 6 se presentan los indicadores para medir los procesos colaborativos.

Tabla 6. Mediciones de los Procesos de la Cadena de Suministro. Fuente: Elaboración propia.

Mediciones de los Procesos de la Cadena de Suministro			
Relaciones con los Proveedores	Relaciones con los Fabricantes	Relaciones con los Distribuidores	Relaciones con los Clientes
<ul style="list-style-type: none"> ✓ Porcentaje de entregas puntuales de los proveedores ✓ Tiempos de entrega de los proveedores ✓ Porcentaje de defectos en servicios y materiales comprados ✓ Costo de los servicios y materiales comprados ✓ Niveles de inventarios de suministros y componentes comprados 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Tiempos de entrega de los fabricantes ✓ Niveles de inventarios de productos terminados 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Porcentaje de pedidos incompletos enviados ✓ Porcentaje de pedidos enviados puntualmente ✓ Tiempo para surtir el pedido ✓ Porcentaje de servicios estropeados o artículos devueltos ✓ Costo para producir el servicio o el artículo ✓ Nivel de Satisfacción de los clientes con el proceso de surtido de pedidos 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Satisfacción de los clientes con el proceso de colocación de los pedidos ✓ Cantidad de productos defectuosos devueltos

4. CASO APLICADO A SECTOR MADERA Y MUEBLES DE LA REGIÓN CARIBE DE COLOMBIA

4.1. CARACTERIZACIÓN DEL SECTOR MADERA Y MUEBLES DE LA REGIÓN CARIBE DE COLOMBIA

La cadena forestal, madera y muebles comprende la producción de madera (en bosques naturales o plantaciones forestales), las actividades de explotación de la madera (tala de árboles y extracción de la madera en rollo), aserrado y la fabricación de muebles y accesorios. La madera en rollo industrial puede utilizarse de varios modos: trozas para su transformación en madera aserrada, que a su vez es un insumo para la construcción de bienes diversos; trozas para chapas transformadas en tableros de madera con fines diversos, puntales para usos en minería, postes para comunicaciones y construcción, madera en pasta como insumo básico para la producción de papel y cartón, y otras maderas industriales con fines múltiples. Para presentar la caracterización del sector madera y muebles de la Región Caribe de Colombia se ha revisado el estudio desarrollado por Salas (2011), en 3 ciudades de la Región Caribe que concentran la mayoría de empresas que pertenecen al sector, ellas son: Barranquilla, Santa Marta y Cartagena.

La Región Caribe de Colombia, se caracteriza por reunir a empresas que desarrollan actividades de aserrío, venta y comercialización de madera inmunizada, fabricación de tableros aglomerados, chapados y contrachapados, hasta empresas fabricantes y comercializadoras de muebles y accesorios diversos para el hogar, oficinas y la industria en general. La actividad de plantación y comercialización de insumos, se concentra en menor grado al sur de la Región en el Departamento de Córdoba, en las cercanías al Darién, constituyéndose como proveedor de madera en bruto para los aserraderos. Lo cual, genera dos situaciones: una gran ventaja competitiva entre los eslabones de transformación de la materia prima y comercialización del producto final; pero, a su vez, se presenta una desventaja en los altos costos de transporte y distribución que se incurre en el abastecimiento de la madera, debido a que la extracción de la materia prima se hace en zonas cada vez más distantes y de difícil acceso.

Plantaciones Forestales

El eslabón de las plantaciones forestales consiste en el establecimiento, cultivo y manejo de especies forestales, en terrenos agropecuarios que han perdido su vegetación nativa, con el objeto de producir materia prima maderable y no maderable, destinadas para la comercialización. El departamento de Córdoba, es el que presenta una aptitud forestal, ya que de 2.502. 000 ha de su superficie continental, el 45% del territorio posee características biológicas y ecológicas para estar cubiertas de bosques. De esta área potencial, solo el 4,7% se utiliza para la actividad forestal. Se

estima que la superficie de bosque húmedo y seco tropical en el Departamento de Córdoba es de aproximadamente 360.000 ha, que representa el 0,31% del total de la superficie de los bosques naturales existentes en el país y el 43,2% de la reserva de la Costa Caribe, caracterizándose por su gran heterogeneidad; cerca de 200 especies maderables. (CONIF, 1998).

Actividades de Aserrío

El segundo eslabón de la cadena de abastecimiento está conformado por los aserraderos, o pequeñas empresas de primera transformación, es decir, que procesan la madera en tronco para obtener productos semielaborados como tablas, tablones, durmientes, vigas y madera aserrada, en general, que generalmente son destinados industria de segunda transformación, como la carpintería, ebanistería, construcción, entre otras. La materia prima de los aserraderos es la madera proveniente regiones como el Urabá Antioqueño y el sur del Departamento de Córdoba, en donde existen plantaciones forestales y bosques naturales. Entre las especies de madera provenientes de dichas regiones, las más utilizadas en los aserraderos son: Roble, Cedro, Caoba, entre otras especies.

Fabricación de Tableros Aglomerados y Contrachapados

En la fabricación de tableros se utiliza la madera de diferentes formas dependiendo del tipo de tablero que se desee fabricar, por lo que si se quiere fabricar tableros de contrachapados se usa madera en rollo y para tableros aglomerados se emplean restos de madera (costeros, retestes, madera reciclada, entre otros), astillas y virutas. En la ciudad de Barranquilla se encuentra ubicada Pizano S.A., la principal empresa de la Región y una de las más importantes del país en la producción de tableros aglomerados y contrachapados. Entre los productos fabricados se encuentran las láminas de triplex (tablero contrachapado), las láminas de tablex (tablero aglomerado), madecor, puertas y el pegante PVA, que es un adhesivo sintético formulado para ofrecer un excelente desempeño en uniones estructurales de alta resistencia y de fácil aplicación en grandes superficies.

Fabricación de Muebles de Madera

La materia prima para la fabricación de muebles es la madera, la cual constituye la mayor parte del mueble: el cuerpo. Para la fabricación de éstos se utiliza madera maciza de especies como el roble, pino, entre otras. El eslabón más importante, de mayor desarrollo y más extendido de la Región Caribe es el de fabricantes de muebles, ya que gran parte de las empresas del sector fabrican y comercializan muebles de madera para el hogar, oficinas e industrias, entre otros usos. En el Departamento del Atlántico se encuentran registradas 39 empresas (Cámara de Comercio de Barranquilla, 2011), que se dedican a la fabricación de productos en madera como muebles para el

hogar, oficinas, industrias, entre otros; accesorios decorativos e insumos para el sector construcción. En este eslabón es característica la presencia de microempresas, en su mayoría de carácter familiar, organizadas a través de algunas empresas grandes dedicadas a la comercialización de muebles a nivel local, regional, nacional e internacional.

Con lo anterior, se puede apreciar que gran parte de la madera proveniente de los aserraderos es utilizada en fabricación de muebles y accesorios para la decoración, lo que denota que éste segmento presenta mayor potencial para conformar organizaciones, asociaciones para establecer estrategias que fortalezcan las actividades productivas y logísticas del sector, y se propenda por la generación de valor agregado al cliente final, teniendo en cuenta que este eslabón presenta un contacto directo con los usuarios finales.

Comercializadores de Muebles

Éste es el eslabón final de la cadena de abastecimiento, y es de vital importancia en toda la cadena, debido a que tiene un contacto directo con los clientes, y permite conocer sus requerimientos, gustos, tendencias, facilita la retroalimentación para el eslabón de fabricación de muebles de madera, permitiendo que se puedan mejorar los diseños, procesos y, en general, los productos.

Por otro lado, la mayoría de empresas pertenecientes al Sector Madera y Muebles de la Región Caribe de Colombia son microempresas, lo que se demuestra con los altos porcentajes de 49%, 94% y 80% de las empresas de las ciudades de Barranquilla, Santa Marta y Cartagena, respectivamente (Salas, 2011). En la ciudad de Barranquilla el 69% de las empresas tiene definido claramente su direccionamiento estratégico, expresado generalmente a través de la definición de la misión, visión y objetivos empresariales. En la ciudad de Santa Marta, como las empresas son más de carácter personal, el 71,4% de las mismas, no han definido los componentes más relevantes de su planeación estratégica, y solo un 24,4% los tiene definidos o trabaja en su construcción. Esto debido a la escasa organización por parte de los empresarios, la falta de concientización para establecer el rumbo estratégico de la empresa y el desconocimiento de la importancia de definir lineamientos y valores corporativos que establezcan la carta de navegación de la organización. En Cartagena, el 93% de las empresas encuestadas han definido claramente los componentes más relevantes de la planeación estratégica o se encuentran en fase de construcción; y a su vez, los empresarios, son conscientes que los componentes como la misión, visión y objetivos deben ser divulgados a los empleados a través de charlas, avisos y carteleras que constantemente les recuerde.

En la ciudad de Barranquilla, se observa que el 85% de las empresas pertenecientes al sector realizan planificación del proceso de compras de materiales equipos, en Santa Marta, el 52% y en Cartagena el 93% de las empresas también planifican su proceso de compras, en el cual se

establecen unos lineamientos para seleccionar a los proveedores y unos niveles máximos y mínimos de inventarios para ordenar la compra de materia prima. En cuanto al cumplimiento de los proveedores, las empresas del sector Madera y Muebles realizan mediciones del cumplimiento de sus proveedores a través del registro de las entregas a tiempo y las devoluciones por no calidad, que por lo general son muy frecuentes, debido a que la mayoría de ellos, no presentan sistemas de aseguramiento y control de la calidad, lo que ocasiona que los productos defectuosos lleguen hasta los clientes.

En la ciudad de Barranquilla, se observa que el 85% de las empresas pertenecientes al sector realizan planificación del proceso de compras de materiales equipos, en Santa Marta, el 52% y en Cartagena el 93% de las empresas también planifican su proceso de compras, en el cual se establecen unos lineamientos para seleccionar a los proveedores y unos niveles máximos y mínimos de inventarios para ordenar la compra de materia prima. En cuanto al cumplimiento de los proveedores, las empresas del sector Madera y Muebles realizan mediciones del cumplimiento de sus proveedores a través del registro de las entregas a tiempo y las devoluciones por no calidad, que por lo general son muy frecuentes, debido a que la mayoría de ellos, no presentan sistemas de aseguramiento y control de la calidad, lo que ocasiona que los productos defectuosos lleguen hasta los clientes. Las empresas del sector carecen de plataformas tecnológicas o software especializado para intercambiar información que les permita agilizar los procesos de compras y adquisición de materia prima. También se presenta un alto índice de utilización de documentos en medio físico y facturas para la realización órdenes de pago en las empresas pertenecientes al sector madera y muebles de las ciudades objeto de estudio.

En general, las empresas del sector presentan unas actividades y políticas de almacenamiento definidas para evitar el deterioro de la madera y sus subproductos a causa de las malas condiciones ambientales y de infraestructura. El medio de transporte más utilizado para realizar la distribución de los productos finales de cada una de las empresas es el transporte terrestre, realizado a través de vehículos propios de la empresa, lo cual evita que se le adicione costos extra al valor del producto, puesto que el mismo proveedor, fabricante o comercializador es quien realiza la entrega directa a su cliente. En las empresas del sector no se han implementado mecanismos electrónicos que le permitan a las empresas conocer la ubicación exacta de la carga al momento de realizar la distribución a los clientes o mientras se manipula en la zona de almacenamiento de la compañía.

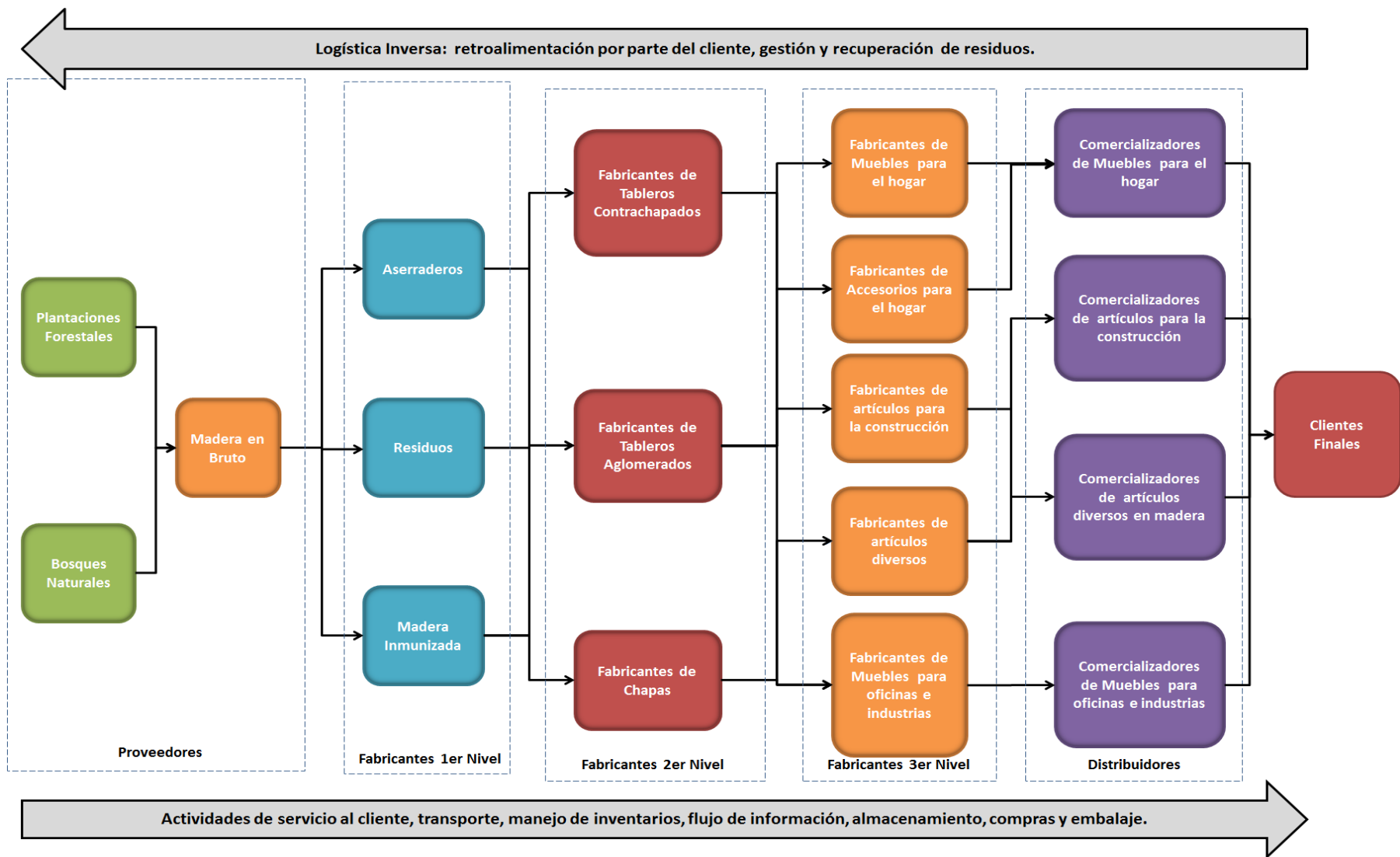


Figura 17. Cadena de abastecimiento de Sector Madera y Mueble de la Región Caribe de Colombia. (Salas, 2011)

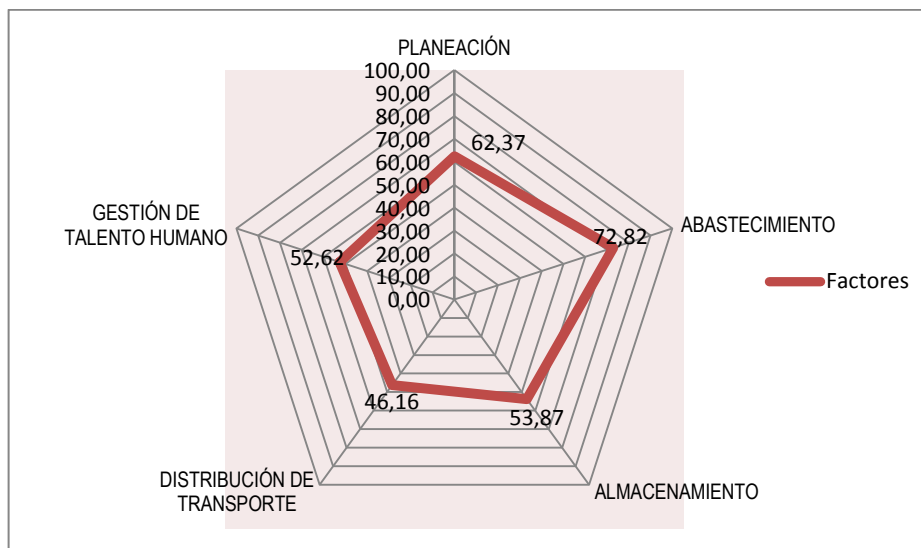


Gráfico 1. Factores del Modelo de la Cadena de Abastecimiento Sector Madera y Muebles de la ciudad de Barranquilla (Salas, 2011).

Las empresas del Sector en la ciudad de Barranquilla presentan una planeación estratégica completa y organizada o se encuentra en proceso de construcción y su divulgación se realiza de forma incipiente; de igual forma, en la mayoría de empresas no se realiza la definición y documentación de estrategias, pero se toman decisiones para dar cumplimiento a las metas establecidas. En cuanto al abastecimiento de materia prima, maquinaria, herramientas e insumos, las empresas del sector en la ciudad de Barranquilla realizan una planificación del proceso de compras y realiza una medición del cumplimiento de los proveedores a través de indicadores de desempeño y las órdenes de compra realizan a través del intercambio de datos electrónicos (EDI) y software para comunicaciones.

El almacenamiento de productos finales, intermedios y materia prima a lo largo de toda la cadena es crítico, ya que las empresas no han definido claramente las políticas de almacenamiento de materias primas y de producto terminado, y el manejo de inventarios se realiza manualmente, porque el personal posee conocimientos adquiridos a través de la experiencia. La distribución y transporte de materia prima, insumos, productos intermedios y finales en la cadena de abastecimiento del sector en la ciudad de Barranquilla es muy crítico, ya que las empresas comercializan gran parte de los productos directamente a sus clientes con vehículos propios, sin recurrir a intermediarios. Los controles que se han establecido en el proceso de distribución son las órdenes de salida en medio físico y no se lleva a cabo seguimiento de la carga en tiempo real.

En materia de gestión organizacional las empresas del sector madera y muebles de la ciudad de Barranquilla no cuentan con un Departamento de Talento Humano organizado, pero desarrollan los procesos de selección y contratación de personal de forma autónoma. De igual forma, se observa

que el personal operativo de la empresa ha adquirido los conocimientos empíricos en las funciones de cada cargo y que no se encuentran cualificados técnicamente para realizar las actividades que desarrollan actualmente en las empresas.

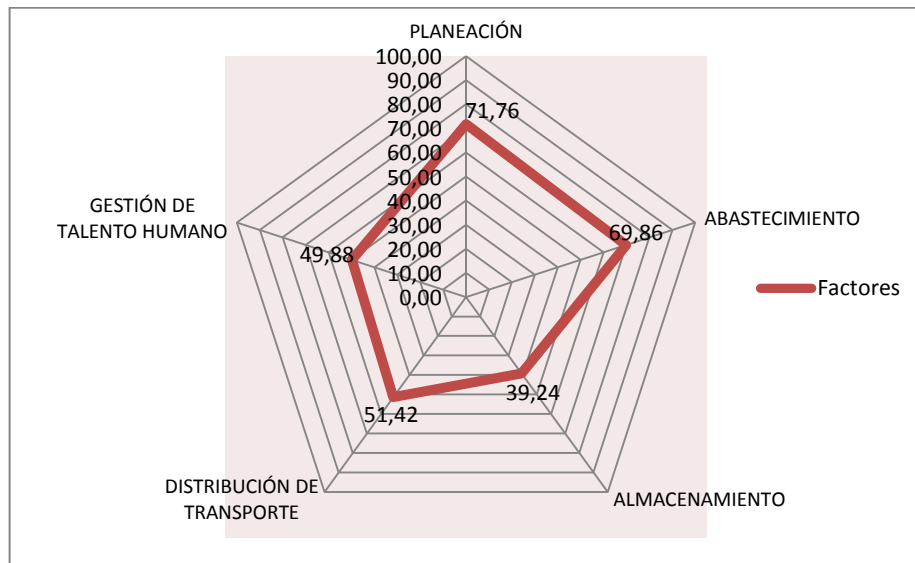


Gráfico 2. Factores del Modelo de la Cadena de Abastecimiento Sector Madera y Muebles de la ciudad de Cartagena (Salas, 2011).

Las empresas sector madera y muebles de la ciudad de Cartagena, se encuentran ubicado en el nivel intermedio del factor planeación, con 71,76 puntos, lo que demuestra que estas empresas tienen definidas su planeación estratégica, establecen estrategias y planes de trabajo, pero no realizan mediciones del cumplimiento de los planes. En cuanto al abastecimiento de materia prima e insumos, las empresas del sector en la ciudad de Cartagena se encuentran en un nivel intermedio, con una puntuación de 69,86, es decir, que la organización realiza un planificación del proceso de compras y realiza una medición del cumplimiento de los proveedores a través de indicadores de desempeño y las órdenes de compra realizan a través del intercambio de datos electrónicos (EDI) y software para comunicaciones. Las empresas del sector en la ciudad de Cartagena presentan deficiencias en el proceso de almacenamiento de materia prima, productos intermedios y finales a lo largo de toda la cadena, ya que, por lo general, no han definido claramente las políticas de almacenamiento de materias primas y de producto terminado, y el manejo de inventarios se realiza manualmente, porque personal realiza las actividades por los conocimientos adquiridos a través de la experiencia.

Con respecto al factor de distribución y transporte, las empresas del sector se ubican en un nivel intermedio, con 51,42 puntos, según la escala establecida en el modelo de la cadena de abastecimiento propuesto. Lo cual indica que las empresas comercializan gran parte de los productos directamente a sus clientes con vehículos propios, sin recurrir a intermediarios. Los

controles que se han establecido en el proceso de distribución son las órdenes de salida en medio físico y no se lleva a cabo seguimiento de la carga en tiempo real. El segundo factor más crítico de la cadena de abastecimiento sector en la ciudad de Cartagena es la Gestión Organizacional, que se ubica en el nivel básico, con 48,88 puntos, debido a la mayoría de las empresas no cuentan con un Departamento de Talento Humano organizado, pero desarrollan los procesos de selección y contratación de personal de forma autónoma. De igual forma, se observa que el personal operativo de la empresa ha adquirido los conocimientos empíricos en las funciones de cada cargo y que no se encuentran cualificados técnicamente para realizar las actividades que desarrollan actualmente en las empresas.

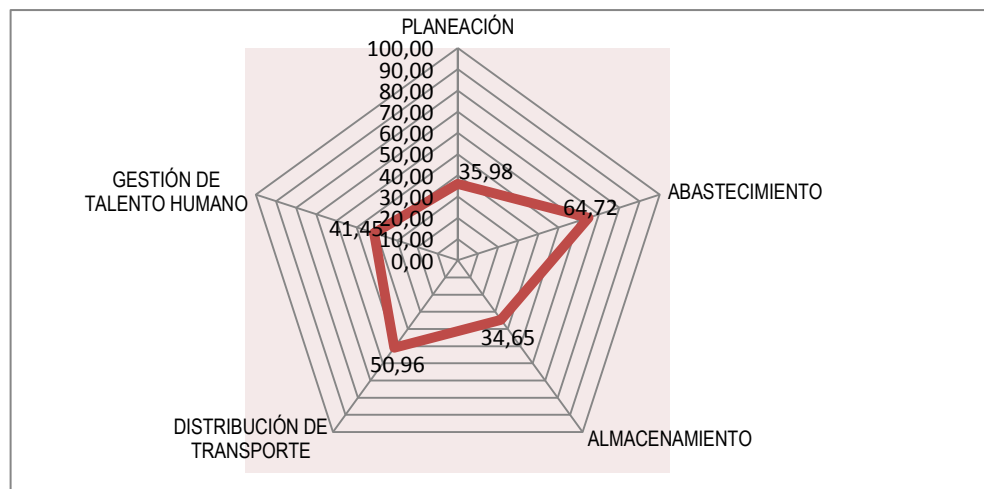


Gráfico 3. Factores de Modelo de la Cadena de Abastecimiento del Sector Madera y Muebles de la ciudad de Santa Marta (Salas, 2011).

En las empresas del sector en la ciudad de Santa Marta, se presenta una gran debilidad en la planeación estratégica, debido a que no existe una claridad en los lineamientos y estrategias por parte de las directivas que se cumplan metas y objetivos en el corto, mediano y largo plazo. De igual forma, los empresarios desconocen la importancia del planeamiento global de todas las actividades y estrategias necesarias para mejorar el desempeño de los procesos, lograr un crecimiento económico de las empresas, e incentivar la competitividad dentro del sector.

En cuanto al abastecimiento de materia prima e insumos, las empresas del sector en la ciudad de Santa Marta se encuentran en un nivel intermedio, con una puntuación de 64,72, es decir, que la organización realiza un planificación del proceso de compras y realiza una medición del cumplimiento de los proveedores a través de indicadores de desempeño y las órdenes de compra realizan a través del intercambio de datos electrónicos (EDI) y software para comunicaciones.

El Sector Madera y Muebles en la ciudad de Santa Marta presenta los índices más bajos, en cuanto al almacenamiento de materia prima, insumos, productos intermedios y productos finales, ya que no

han definido claramente las políticas de almacenamiento de materias primas y de producto terminado, y el manejo de inventarios se realiza manualmente, porque personal realiza las actividades por los conocimientos adquiridos a través de la experiencia. De igual forma, la manipulación del producto final no es la adecuada y las empresas no cuentan con los sitios apropiadas para almacenar los productos bajo las condiciones óptimas que garanticen su buen estado y calidad. Con respecto al factor de distribución y transporte, las empresas del sector se ubican en un nivel intermedio, con 50,96 puntos, según la escala establecida en el modelo de la cadena de abastecimiento propuesto. Lo cual indica que las empresas comercializan gran parte de los productos directamente a sus clientes con vehículos propios, sin recurrir a intermediarios. Los controles que se han establecido en el proceso de distribución son las órdenes de salida en medio físico y no se lleva a cabo seguimiento de la carga en tiempo real.

El segundo factor más crítico de la cadena de abastecimiento sector en la ciudad de Santa Marta es la Gestión Organizacional, que se ubica en el nivel básico, con 41,45 puntos, debido a la mayoría de las empresas no cuentan con un Departamento de Talento Humano organizado, pero desarrollan los procesos de selección y contratación de personal de forma autónoma. De igual forma, se observa que el personal operativo de la empresa ha adquirido los conocimientos empíricos en las funciones de cada cargo y que no se encuentran cualificados técnicamente para realizar las actividades que desarrollan actualmente en las empresas.

4.2. SECTOR MADERA Y MUEBLES EN LA CIUDAD DE BARRANQUILLA Y SU ÁREA METROPOLITANA

El Sector madera y Muebles de la ciudad de Barranquilla y su Área Metropolitana está conformado por empresas que desarrollan actividades de aserrío, diseño, producción, distribución, comercialización y consumo de bienes y servicios cuyo objetivo es contribuir al mejoramiento de la productividad a través de la articulación del sector y el desarrollo competitivo de sus productos y procesos. La actividad de plantación, y comercialización de insumos para tal fin se concentra en otras regiones del país.

Estas actividades son principalmente:

- ✓ Producción, distribución y comercializadores de insumos y/o materiales para la fabricación de muebles.
- ✓ Producción, distribución y comercialización de muebles.
- ✓ La prestación de servicios en el sector, tales como:
 - Reparación, mantenimiento y limpieza
 - Restauración

- Decoración
- ✓ Las actividades de investigación en el sector Muebles.
- ✓ Las actividades de articulación y promoción del sector realizadas tanto por los poderes públicos, entidades y asociaciones de promoción de distintos tipos.

El Sector Madera y Muebles en Barranquilla tiene alrededor de 186 empresas que se dividen de la siguiente manera¹:

- ✓ Fabricantes de madera y Proveedores: 9
- ✓ Fabricantes de Muebles: 94
- ✓ Comercializadores: 62
- ✓ Centros de formación e investigación: 5
- ✓ Servicios especializados: 6
- ✓ Gobierno: 2
- ✓ Agencias de promoción: 3
- ✓ Entidades reguladoras: 2

Según el reporte de la base de datos de la Cámara de Comercio, los tamaños de las empresas que hacen parte del sector muebles, se encuentran distribuidos de la siguiente manera: 3,4% empresas grandes, 5,7% medianas, 22,4% pequeñas y la mayor proporción la tienen las microempresas con un 64%.

De acuerdo al número de empleados Muebles Jamar hace parte de una de las grandes empresas del sector y se puede decir que es el más destacado comercializador a nivel local, actualmente maneja un nómina de 1090 empleados. También se resalta otras importantes empresas como Maderas del Darién y Espumados del Litoral siendo unos importantes agentes de la cadena en lo que respecta a la fabricación de insumos y muebles. Cabe resaltar que al listado también juegan un rol importante los hipermercados como Home Center, Carrefour y Almacenes SAO, donde los muebles hacen parte de su catálogo de productos².

El sector en Colombia ha tenido un crecimiento favorable especialmente en los últimos tres años, tal como es el caso del 2010 donde se reporta un crecimiento del 10.7% de la producción. Para el caso del Sector Madera y Muebles en el Atlántico representa el 2% del PIB industrial departamental. Para el período 2005 -2009 se presentó un importante crecimiento con un valor del 25%.

¹ Información según base de datos de la Cámara de Comercio de Barranquilla

² Información tomada de Documento de Clúster de Muebles del Departamento del Atlántico de la Cámara de Comercio de Barranquilla.

La gran mayoría de las empresas sector de muebles no invierten en recursos de investigación, desarrollo e innovación, ya que no lo tienen establecido dentro de sus políticas internas ni ha existido iniciativa por parte de las microempresas y pequeñas empresas especialmente. Sin embargo cabe destacar el interés de las empresas grandes, como es el caso de Muebles Jamar y su grupo de proveedores, a través de la participación continua en proyectos de investigación de tipo nacional y local, con el apoyo de instituciones académicas de la ciudad.

PROVEEDORES DE INSUMOS

De acuerdo a la información suministrada por la Cámara de Comercio en el Departamento se encuentran registrado de manera formal 9 proveedores entre aserraderos y actores que comercializan insumos.

FABRICANTES DE MUEBLES

Para el caso de los productores, en la base de datos se registra un número de 94 empresas las cuales se dedican en su mayoría a la fabricación de muebles para el hogar y otro grupo relevante a los muebles para oficinas.

DISTRIBUIDORES

En el departamento existe un número aproximado de 62 empresas entre los que se destacan almacenes de grandes superficies, tiendas especializadas en la venta de estos productos y afines y tiendas propias que manejan los mismos fabricantes. Dentro de este grupo se destaca Muebles Jamar, una empresa de tradición en el mercado local con 65 años de permanencia. Es líder en la comercialización no solo a nivel local sino también regional con la venta de muebles para el hogar. Cuenta con un total de 65 proveedores del departamento que fabrican al 100% para su marca, lo que corresponde a un 80% aproximadamente de la fabricación de muebles del departamento. Cubren todas las ciudades principales de la Región Caribe de Colombia y cuenta con el segundo Centro de Distribución más grande en Latinoamérica. Están ubicados además en países como Panamá aunque el 95% de sus productos son fabricados en la ciudad de Barranquilla.

4.3. GESTIÓN DE INVENTARIOS EN EL SECTOR MADERA Y MUEBLES EN LA CIUDAD DE BARRANQUILLA Y SU ÁREA METROPOLITANA

La gestión de inventarios en las empresas que conforman el Sector Madera y Muebles de la ciudad de Barranquilla y su Área Metropolitana es crítica debido a que la mayoría de las empresas no han definido claramente las políticas de almacenamiento de materias primas y de producto terminado, y

el manejo de inventarios se realiza manualmente, porque el personal posee conocimiento adquiridos a través de la experiencia.

Los muebles son productos conformados en su mayoría de materiales derivados de madera (tablero aglomerado, de fibras, contrachapado) y de madera maciza (pino, haya, roble, entre otros), que han sufrido algún tipo de transformación para la protección y/o presentación final del mismo. Las materias primas empleadas en el proceso productivo del sector del mueble se pueden clasificar en función de las características generales de las mismas:

- Madera y/o derivados
- Pegantes y adhesivos
- Pinturas, barnices y colorantes naturales
- Disolventes y diluyentes.
- Productos químicos inorgánicos e inorgánicos empleados como colorantes
- Material de empaque y embalaje

La generación de residuos es sin duda el aspecto de mayor impacto ambiental para el sector. A lo largo de todo el proceso productivo se pueden identificar residuos tanto asimilables a urbanos, no peligrosos como peligrosos, siendo este grupo el más significativo y problemático.

De todos los residuos generados, los residuos peligrosos son los que toman mayor protagonismo a la hora de su manipulación (gestión, reciclado, valorización, reutilización). La mayor parte de estos residuos peligrosos provienen principalmente de los productos químicos utilizados en las etapas de lijado y pulimento, así como los aglomerados utilizados en el mecanizado, y de todos los materiales que han sido tratados con estas materias peligrosas y se han convertido en residuo, además del aserrín, elemento contaminante número uno de las actividades de las unidades productivas.

4.3.1. Proveedores. El eslabón de aserrío y aserraderos utiliza madera en rollo industrial como insumo para producir madera aserrada para la industria del mueble, empaques de madera y para la construcción en forma de madera estructural y muebles en viviendas. Estas empresas enfrentan la presencia de múltiples intermediarios en el proceso de transporte y distribución de la madera, además del difícil abastecimiento y los altos costos de distribución dado que la extracción se hace en zonas cada vez más distantes y de difícil acceso, por el que el abastecimiento hacia el siguiente nivel de la cadena de abastecimiento es incierto, ya que no se puede garantizar un flujo determinado de materia prima.

Otro de los problemas que afronta este eslabón de la cadena lo constituye la baja calidad de la materia prima que reciben los aserraderos, en relación al exceso de humedad que ocasiona que la madera se deforme, la presencia de hongos y gusanos en la madera, entre otros. Se pudo constatar

que muchas de las compañías dedicadas a ésta actividad no secan la madera ni la inmunizan, actividad que le “transfieren” al carpintero, pequeño o mediano constructor.

En el caso particular de la ciudad de Barranquilla, se pudo observar que la gran mayoría de las empresas dedicadas a la actividad de aserrío, están constituidas bajo la figura aserradero-depósito, empresas con infraestructuras sencillas y pequeñas que no realizan actividades de secado e inmunizado, recibiendo casi que cualquier tipo de madera para su compra y distribución. Sin embargo, existe el caso particular de la empresa Pizano S.A., la cual cuenta con un aserradero integrado a su actividad industrial principal de fabricación de tableros aglomerados, realizando las labores de recepción de madera, operaciones de secado de la madera e inmunizado, selección y tratamiento de las mismas para luego proceder a utilizarlas en sus procesos de transformación industrial.

4.3.2. Fabricantes de muebles. Los productos de este segmento son una mezcla de varios tipos de muebles, desde los tradicionales hasta los reconocidos muebles RTA (Ready to Assamble) a partir de tableros aglomerados y contrachapados en ambientes de hogar y oficina. Trabajan bajo pedido pero mantienen un stock de muebles diversos que ha estudiado y tienen salida en el mercado nacional. Estas compañías tienen capacidad para responder a exigencias en especificaciones y tiempos de entrega, pero sus sistemas de control y gestión de costos aún no son sólidos. Utilizan sistemas de Información relativamente eficientes.

Por otro lado se encuentran los fabricantes tradicionales, esquema que ocupa la gran mayoría de empresas del segmento, siendo éstas en general de carácter familiar, informal y con una gran debilidad administrativa y tecnológica. Producen muebles para el mercado local, trabajando bajo pedido en talleres comerciales. En su mayor proporción son fabricantes de muebles para el hogar, puertas y estibas industriales. Emplean personal de baja calificación profesional y técnico que en general adquieren su destreza in situ, y con una alta rotación de personal, generando inestabilidad estructural.

Sus talleres son en general de tecnología insipiente, poco actualizada y especializada, con herramientas de trabajo desactualizadas y poco seguras, generando con ello altos costos de mantenimiento correctivo y problemas frecuentes de accidentalidad por la misma informalidad de sus procesos productivos. El know-how de este tipo de empresas se basa más en la experiencia de los más antiguos del negocio que en un proceso sostenible de formación. Su capacidad de producción es muy baja, y generalmente sus tiempos de entrega generan serios problemas de incumplimiento y satisfacción al cliente o usuario final que en muchas ocasiones prefiere comprar en almacenes o distribuidores más grandes a mayores costos pero con mejores beneficios y servicios de valor agregado. No utilizan ningún tipo de apoyo tecnológico en materia de administración y gestión de sus procesos, ni tampoco en sus procesos técnicos.

4.3.3. Distribuidores. En general, los canales de distribución del sector muebles han sido tradicionalmente homogéneos a través de los años, la figura por medio de la cual se llega más al consumidor final, es la de las tiendas especializadas minoristas, son ellas quienes realmente manejan el mercado del mueble.

En este eslabón de la cadena se destacan unidades de negocio como Muebles Jamar, Harvi Decoraciones, entre otros. Es de destacar el desarrollo que la primera ha generado en materia del impulso y apoyo a sus unidades de negocio y proveedores (fabricantes de muebles de madera), así como en la conformación de una sólida estructura en materia de almacenamiento, distribución, localización y comercialización de sus productos. De igual forma, Muebles Jamar la liderado la iniciativa de conformación de un Parque Industrial Tecnológico, que agrupe a los micro, pequeños y medianos talleres de fabricación de muebles en un conglomerado industrial que permita una importante reducción inicial de costos en materia de transporte y distribución de mercancías, así como el desarrollo de acciones de mejoramiento en materia de organización administrativa, formación especializada de los trabajadores, desarrollo tecnológico y la incursión en actividades de diseño de muebles y accesorios para el hogar con paquetes exclusivos del clúster.

Niveles de Integración y colaboración entre los niveles de la Cadena de Suministro

Las compañías logran satisfacer la demanda de productos requeridos por sus clientes aunque el manejo de inventarios sea informal, no existan políticas claras para ordenar y exista una carencia de recursos tecnológicos que faciliten su gestión. Además existe integración interna en la toma decisiones sólo en el 33% de las empresas. Esto se debe a que en el 67% de las organizaciones del sector madera y muebles de la ciudad no cuentan con departamentos/áreas funcionales bien definidas o simplemente porque las compañías no ven a la organización como un sistema compuesto de muchos procesos en donde la alteración de un proceso afecta todo el sistema (Maiguel et al., 2013).

Integración externa con proveedores y clientes clave de las empresas del Sector Madera y Muebles de Barranquilla es baja, ya que las barreras culturales como la desconfianza y el miedo a compartir información confidencial por parte de los propietarios de las compañías. Esta situación de desconfianza puede ser superada si todos los miembros de la cadena conocen los beneficios de la integración entre las empresas a la vez que se creen acuerdos de cooperación entre ellos (Por ejemplo, el compartimiento de recursos para disminuir costes). Es importante que desaparezca el miedo al cambio y que se vea a toda la cadena que como un ente donde todos necesitan de todos para alcanzar mayores resultados (Maiguel et al., 2013).

En cuanto a la colaboración con proveedores y clientes claves existen pocas actividades colaborativas entre los miembros de la cadena y su nivel de colaboración es bajo. Por lo tanto, las compañías deben estrechar sus relaciones con proveedores y clientes clave creando acuerdos colaborativos. Esto requiere un mayor esfuerzo conjunto para que se comparta la información. Por ejemplo, el manejo del inventario es un factor que absorbe costos en toda la cadena y su mal manejo genera el efecto látigo. La reducción del efecto látigo se consigue compartiendo información sobre la demanda y niveles de inventarios entre los diferentes eslabones. Las empresas deben tener en cuenta los siguientes elementos para propiciar la colaboración entre ellas: (i) intercambio de información, (ii) metas congruentes, (iii) sincronización de las decisiones, (iv) alineación de incentivos, (v) intercambio de recursos, (vi) comunicación colaborativa y (vii) creación común del conocimiento (Mauguel et al., 2013).

4.4. MODELO MATEMÁTICO DE GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS EN UNA CADENA DE SUMINISTRO MULTINIVEL EN ESCENARIOS DE INCERTIDUMBRE: CASO DE APLICACIÓN

Teniendo en cuenta, que en la Ciudad de Barranquilla se encuentra concentrado una gran masa crítica de empresas del Sector Madera y Muebles de la Región Caribe de Colombia de proveedores de madera en bruto y semielaborada y fabricantes de muebles de madera, así como la presencia de una empresa distribuidora minorista y comercializadora de muebles de madera muy representativa del sector, se seleccionaron dos empresas proveedoras de madera en bruto y semielaborada, dos fabricantes de muebles de madera y un gran distribuidor minorista (Por efectos de confidencialidad se reservan los nombres de las compañías participantes). A continuación se presenta la información de las empresas objeto de estudio, pertenecientes a la cadena de suministro del sector madera y muebles de la ciudad de Barranquilla (Ver tabla 7).

Tabla 7. Información de las Empresas pertenecientes a la cadena de suministro. Fuente: Elaboración propia.

Proveedores	Fabricantes	Distribuidor
Proveedor 1: Proveedor de madera en bruto y semielaborada como tableros de madera y tablas de madera dimensionadas	Fabricante 1: Fabricante de Muebles de madera para el hogar	Distribuidor 1: Distribuidor minorista y comercializador de muebles para el hogar. Empresa líder del sector en la región
Proveedor 2: Proveedor de madera en bruto y semielaborada como tableros de madera y tablas de madera dimensionadas	Fabricante 2: Fabricante de Muebles de madera para el hogar	

Tabla 8. Información de Materia Prima y Productos finales. Fuente: Elaboración propia.

Proveedores		Fabricantes		Distribuidor
Materia Prima		Productos Terminados		Productos Terminados
Proveedor 1	Proveedor 2	Fabricante 1	Fabricante 2	Distribuidor 1
<ul style="list-style-type: none"> ✓ Tableros de Madera ✓ Tablas de Madera dimensionadas 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Tableros de Madera ✓ Tablas de Madera dimensionadas ✓ Listones de madera 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Juego de Alcoba Contemporánea Volvo ✓ Juego de Alcoba Contemporánea Lexure 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Juego de Alcoba Contemporánea Volvo ✓ Juego de Alcoba Contemporánea Lexure 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Juego de Alcoba Contemporánea Volvo ✓ Juego de Alcoba Contemporánea Lexure

Para el caso de estudio se selección una cadena de suministro de tres niveles: dos proveedores, dos fabricantes y un distribuidor minorista. La configuración de la cadena de suministro se muestra en la Figura 17.

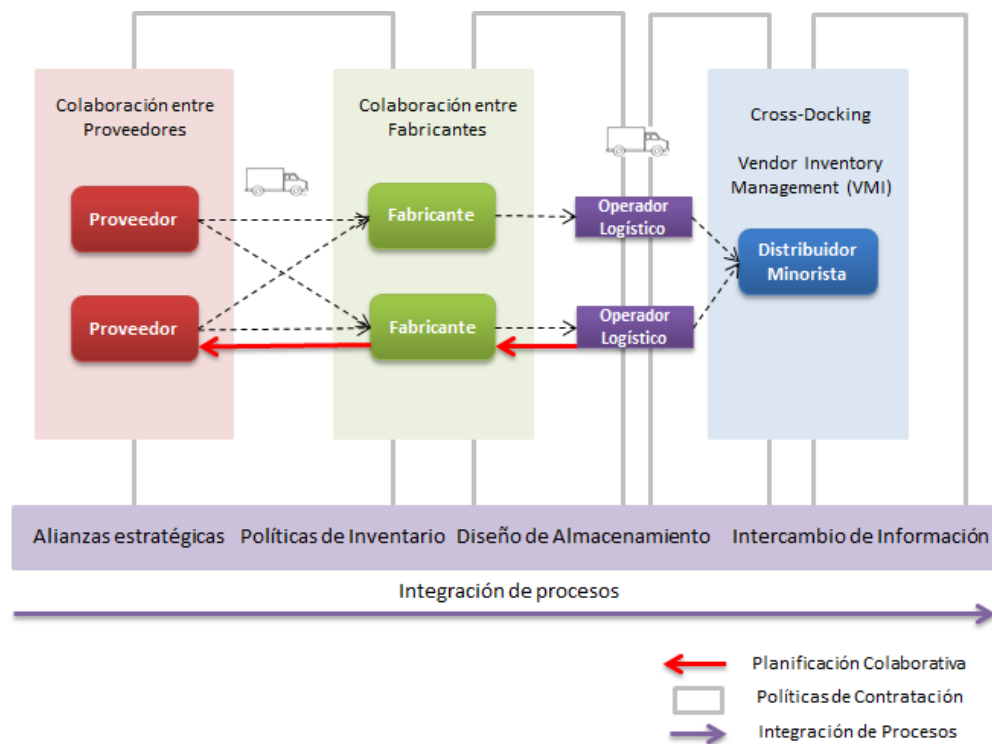


Figura 18. Configuración de Suministro para el Caso de Aplicación del Sector Madera y Muebles. Fuente: Elaboración propia.

4.4.1. Datos del Modelo Matemático

Las empresas seleccionadas para el caso de estudio, suministraron los siguientes datos de acuerdo al ejercicio de su actividad:

✓ Conjuntos

Conjunto	
$i = 2$	Materia prima
$s = 2$	Proveedores
$j = 2$	Producto terminado
$m = 2$	Fabricante
$r = 1$	Distribuidor

✓ Parámetros

Proveedores

A continuación se presentan los datos suministrados por las empresas proveedoras objeto de estudio.

Tabla 9. Combinación de artículos de los proveedores.

E(j,s,i) Combinación de artículos				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	0,30	0,20	
1	2	0,20	0,20	
2	1	0,25	0,20	0,05
2	2	0,20	0,20	0,05

La tasa de producción de los proveedores se calculó teniendo en cuenta la capacidad instalada y los recursos disponibles de cada una de las empresas, se estableció un rango mínimo y máximo a fabricar por producto, por empresa.

Tabla 10. Tasa de Producción de los proveedores.

X(j,s,i) Tasa de Producción (unidades)							
j	s	i					
		1		2		3	
		Min	Max	Min	Max	Min	Max
1	1	1960	6140	3860	8290		
1	2	1930	7470	3540	8210		

2	1	1890	7910	3840	8410	15450	33550
2	2	1825	7075	1950	6950	7950	27650

Para conocer el valor promedio de la tasa de producción (variable aleatoria) es necesario calcular su valor esperado. Por lo tanto, el valor esperado para x es:

$$X_{j,s,i} = \int_{a_{j,s,i}}^{b_{j,s,i}} x f_{j,s,i}(x) = \frac{1}{b_{j,s,i} - a_{j,s,i}} \int_{a_{j,s,i}}^{b_{j,s,i}} x dx = \frac{1}{b_{j,s,i} - a_{j,s,i}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{a_{j,s,i}}^{b_{j,s,i}} = \frac{b_{j,s,i}^2 - a_{j,s,i}^2}{2(b_{j,s,i} - a_{j,s,i})} = \frac{(b_{j,s,i} + a_{j,s,i})}{2}$$

para $b_{j,s,i} \neq a_{j,s,i} \forall (j, s, i)$

Tabla 11. Tasa de Producción esperada de los proveedores

X(j,s,i) Tasa de Producción esperada (unidades)				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	4050	6075	
1	2	4700	5875	
2	1	4900	6125	24500
2	2	4450	4450	17800

Tabla 12. Tasa de detección de unidades en los proveedores

rS(j,s,i) Tasa de detección (unidades)				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	5200	5670	
1	2	5650	5020	
2	1	5945	5024	5355
2	2	5500	5291	5355

Tabla 13. Costo unitario de inspección en los proveedores

cS(j,s,i) Costo unitario de inspección (\$/unidad)				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	0,20	0,10	
1	2	0,25	0,15	
2	1	0,20	0,10	0,10
2	2	0,25	0,15	0,10

Tabla 14. Costo de alistamiento de los proveedores

AS(j,s,i) Costo de alistamiento (\$)				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	750000	280000	
1	2	645000	272000	
2	1	635000	280000	130000
2	2	650000	272000	123000

Tabla 15. Costo unitario de almacenamiento de los proveedores

hS(j,s,i) Costo unitario de almacenamiento (\$/unidad)				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	0,30	0,25	
1	2	0,30	0,25	
2	1	0,30	0,25	0,15
2	2	0,30	0,25	0,15

Tabla 16. Fracción de artículos defectuosos en el proveedor

a(j,s,i) Fracción de artículos defectuosos en el proveedor				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	0,09	0,09	
1	2	0,08	0,08	
2	1	0,10	0,09	0,08
2	2	0,12	0,12	0,12

Tabla 17. Costo unitario de compra en los proveedores

PC(j,s,i) Costo unitario de compra (\$/unidad)				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	26000	15500	
1	2	26300	15950	
2	1	26000	15500	14250
2	2	26300	15950	14500

Tabla 18. Precio unitario de venta de los proveedores

WS(j,s,i) Precio unitario de venta (\$/unidad)				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	45500	27500	
1	2	45800	29000	
2	1	45500	27500	15450
2	2	45800	29000	16200

Tabla 19. Precio unitario de venta de artículos defectuosos en el proveedor

WDS(j,s,i) Precio unitario de venta artículos defectuosos				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	26000	15500	
1	2	26300	15950	
2	1	26000	15500	14250
2	2	26300	15950	14500

Fabricantes

A continuación se presentan los datos suministrados por las empresas proveedoras objeto de estudio.

Tabla 20. Combinación de artículos en el fabricante

O(m,r,j) Combinación de artículos			
m	r	j	
		1	2
1	1	0,5	0,3
2	1	0,5	0,4

Tabla 21. Fracción de productos defectuosos en el fabricante

b(m,j) Fracción de productos defectuosos		
m	j	
	1	2
1	0,08	0,07
2	0,06	0,07

Tabla 22. Costo de alistamiento en el fabricante

AM(m,j) Costo de alistamiento		
m	j	
	1	2
1	280000	280000
2	250000	250000

Tabla 23. Costo unitario de almacenamiento en el fabricante

hM(m,j) Costo unitario de almacenamiento		
m	j	
	1	2
1	0,05	0,05
2	0,05	0,05

Tabla 24. Costo fijo de mantenimiento en el fabricante

dM(m,j) Costo fijo de mantenimiento		
m	j	
	1	2
1	0,015	0,015
2	0,01	0,01

Tabla 25. Costo de mano de obra en el fabricante

LM(m,j) Costo mano de obra		
m	j	
	1	2
1	2500000	2500000
2	2800000	2800000

Tabla 26. Costo variable en el fabricante

yM(m,j) Costo variable		
m	j	
	1	2
1	0,003	0,003
2	0,002	0,002

Tabla 27. Precio de venta unitario en el fabricante

WM(m,j) Precio de venta unitario		
m	j	
	1	2
1	655000	780000
2	650000	795000

Tabla 28. Precio de venta unitario productos defectuosos en el fabricante

WDM(m,j) Precio de venta unitario productos defectuosos		
m	j	
	1	2
1	220000	275000
2	225000	280000

Tabla 29. Costo de Inspección en el fabricante

sM(m,j) Costo de Inspección		
m	j	
	1	2
1	0,05	0,04
2	0,04	0,04

Tabla 30. Tasa de detección en el fabricante

rM(m,j) Tasa de detección		
M	j	
	1	2
1	950	740
2	890	640

Distribuidores

A continuación se presentan los datos suministrados por las empresas proveedoras objeto de estudio.

Tabla 31. Demanda del distribuidor

DR(r,j) Demanda del distribuidor		
r	j	
	1	2
1	1300	1250

De acuerdo a los datos de las ventas de los últimos 18 meses por parte del distribuidor, se hizo un análisis del comportamiento de la demanda del mercado, que de acuerdo a la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk que está basada en la comparación de los cuartiles de la distribución normal ajustada a los datos, se obtiene que el Valor-P es mayor que 0,05, por lo que se puede afirmar que los datos provienen de una distribución normal (Ver Anexo 1).

Tabla 32. Demanda del mercado

Y(r,j) Demanda del mercado		
r	j	
	1	2
1	1150	1095

Tabla 33. Costo de Alistamiento en el distribuidor

AR(r,j) Costo de Alistamiento		
r	j	
	1	2
1	375000	350000

Tabla 34. Costo unitario de almacenamiento en el distribuidor

hR(r,j) Costo unitario de Almacenamiento		
r	j	
	1	2
1	0,05	0,04

Tabla 35. Precio de venta unitario en el distribuidor

WR(r,j) Precio de venta unitario		
r	j	
	1	2
1	2196700	1987300

4.5. RESULTADOS DEL MODELO

El Modelo Matemático de Gestión de Inventarios Colaborativos de Cadenas de suministro multinivel en escenarios de incertidumbre se solucionó a través de la programación en el Software Wolfram Mathematica 7.0 for students (Ver Anexo 2 y 3), en un equipo marca Dell Inspiron Intel(R) Core(TM) i3 de 32 bits, con memoria Ram de 3GB. La programación del modelo matemático de Gestión de Inventarios Colaborativos se realizó bajo dos enfoques:

- ✓ **Enfoque Stackelberg:** Por enfoque de Stackelberg cualquier miembro de la cadena de suministro es un líder que toma las decisiones y su estrategia óptima hacia los miembros anteriores o posteriores y los seguidores planifican su propia producción de acuerdo a las estrategias del líder. El distribuidor es el líder, por lo tanto es el responsable de tomar las decisiones en la cadena, entonces los proveedores de materias primas y los fabricantes los seguidores del distribuidor.

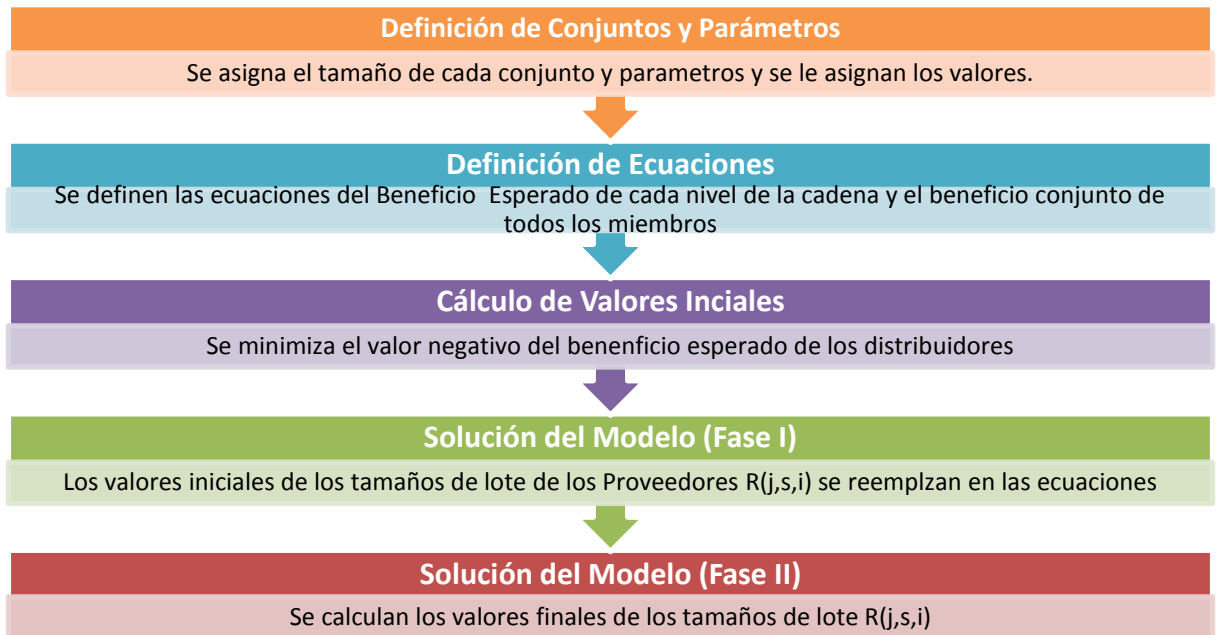


Figura 19. Metodología de Programación del Modelo Matemático Bajo el Enfoque de Stackelberg.
Fuente: Elaboración Propia.

A continuación se presentan los valores de los Tamaños de los Lotes de los Proveedores (1 y 2) para las materias primas (1, 2, 3) requeridas para fabricar los productos (1, 2) bajo el enfoque de Stackelberg.

Tabla 36. Resultados tamaño de lote de proveedores bajo enfoque Stackelberg.

		R(j,s,i)		
j	s	i		
		1	2	3
1	1	16736,40	25104,60	
1	2	5201,60	6502,00	
2	1	5847,65	7309,56	29238,30
2	2	5397,65	5397,65	21590,60

El Modelo Matemático de Gestión de Inventarios en una cadena de suministro bajo escenarios de incertidumbre sin colaboración (Enfoque Stackelberg) proporciona los valores de los beneficios totales esperados para cada nivel de la cadena de suministro EAPS (Beneficio esperado por los proveedores), EPM (Beneficio esperado por los fabricantes) y EPR (Beneficio esperado del distribuidor), así como el valor del beneficio total para la cadena de suministro EAPC.

Tabla 37. Resultados beneficio esperado bajo enfoque Stackelberg

ENFOQUE STACKELBERG	
EAPS	\$ 690.600.000
EPM	\$ 1.669.550.000
EPR	\$ 1.767.120.000
EAPC	\$ 4.127.270.000

- ✓ **Enfoque de Colaboración (3 niveles):** En un sistema colaborativo todos los miembros de la cadena toman las decisiones en torno a precios de compra negociables, contrato de abastecimiento continuo en cada etapa (nivel de la cadena), estimación de la demanda del cliente final con un alto nivel de confiabilidad para evitar los faltantes e incumplimiento al mismo y productos con calidad conforme, debido a que en los dos niveles anteriores (proveedores y fabricantes) se presentan devoluciones de productos defectuosos. En esta situación, se establecen relaciones de colaboración entre los proveedores, fabricantes y el distribuidor, y la ganancia promedio esperada para todo el sistema que maximiza los beneficios de los miembros individuales dependen de las estrategias óptimas en común.

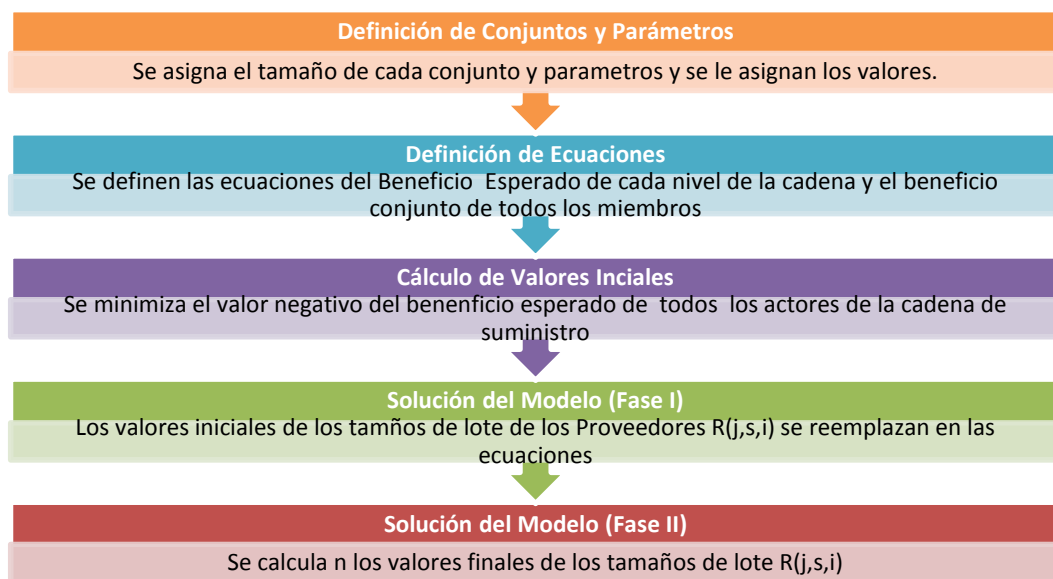


Figura 20. Metodología de Programación del Modelo Matemático Bajo el Enfoque de Colaboración (3 niveles).

Fuente: Elaboración Propia.

A continuación se presentan los valores de los Tamaños de los Lotes de los Proveedores (1 y 2) para las materias primas (1, 2, 3) requeridas para fabricar los productos (1, 2) bajo el enfoque de Colaboración.

Tabla 38. Resultados tamaño de lote de proveedores bajo enfoque colaborativo (3 niveles)

R(j,s,i)				
j	s	i		
		1	2	3
1	1	4942,51	7413,77	
1	2	4700,00	5875,00	
2	1	6080,25	7600,00	30401,20
2	2	5502,40	5502,40	22009,60

El Modelo Matemático de Gestión de Inventarios Colaborativos en una cadena de suministro bajo escenarios de incertidumbre proporciona los valores de los beneficios totales esperados para cada nivel de la cadena de suministro EAPS (Beneficio esperado por los proveedores), EPM (Beneficio esperado por los fabricantes) y EPR (Beneficio esperado del distribuidor), así como el valor del beneficio total para la cadena de suministro EAPC.

Tabla 39. Resultados beneficio esperado bajo enfoque colaborativo (3 niveles)

ENFOQUE COLABORACIÓN (3 Niveles)	
EAPS	\$ 689.991.000
EPM	\$ 1.680.210.000
EPR	\$ 1.775.720.000
EAPC	\$ 4.145.921.000

- ✓ **Enfoque de Colaboración (2 niveles):** En un sistema colaborativo todos los miembros de la cadena toman las decisiones en torno a precios de compra negociables, contrato de abastecimiento continuo en cada etapa (nivel de la cadena), estimación de la demanda del cliente final con un alto nivel de confiabilidad para evitar los faltantes e incumplimiento al mismo y productos con calidad conforme, debido a que en los dos niveles anteriores (proveedores y fabricantes) se presentan devoluciones de productos defectuosos. En esta situación, se establecen relaciones de colaboración entre los fabricantes y el distribuidor, y la ganancia promedio esperada para todo el sistema que maximiza los beneficios de los miembros individuales dependen de las estrategias óptimas en común.

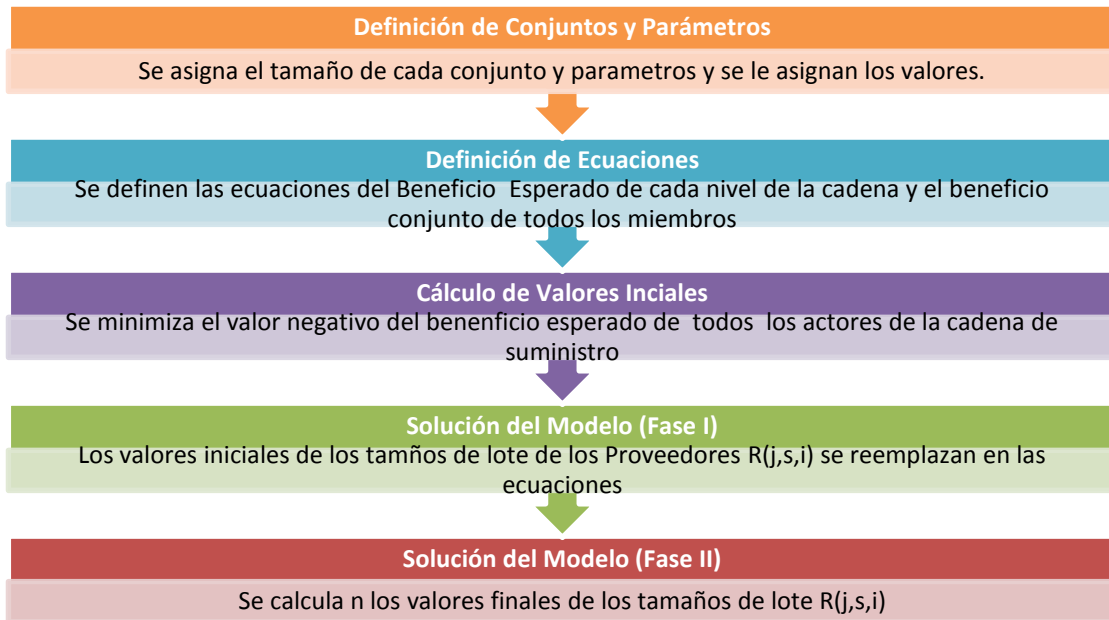


Figura 21 Metodología de Programación del Modelo Matemático Bajo el Enfoque de Colaboración (2 niveles).
Fuente: Elaboración Propia.

A continuación se presentan los valores de los Tamaños de los Lotes de los Proveedores (1 y 2) para las materias primas (1, 2, 3) requeridas para fabricar los productos (1, 2) bajo el enfoque de Colaboración.

Tabla 40. Resultados tamaño de lote de proveedores bajo enfoque colaborativo (2 niveles)

		$R(j,s,i)$		
j	s	i		
		1	2	3
1	1	12028	18042	
1	2	4700,00	5875,00	
2	1	26608,3	36260,4	133042
2	2	4593,11	4593,11	18372,4

El Modelo Matemático de Gestión de Inventarios Colaborativos en una cadena de suministro bajo escenarios de incertidumbre proporciona los valores de los beneficios totales esperados para cada nivel de la cadena de suministro EAPS (Beneficio esperado por los proveedores), EPM (Beneficio esperado por los fabricantes) y EPR (Beneficio esperado del distribuidor), así como el valor del beneficio total para la cadena de suministro EAPC.

Tabla 41. Resultados beneficio esperado bajo enfoque colaborativo (2 niveles)

ENFOQUE COLABORACIÓN (2 Niveles)	
EAPS	\$ 690.962.000
EPM	\$ 1.695.660.000
EPR	\$ 1.775.750.000
EAPC	\$ 4.162.370.000

4.6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El Modelo Matemático de Gestión de Inventarios Colaborativos en una cadena de suministro multinivel bajo escenarios de incertidumbre fue validado a través de los datos de empresas pertenecientes al Sector Madera y Muebles de la ciudad de Barranquilla, considerando dos proveedores de materia prima (madera aserrada y semielaborada), dos fabricantes de muebles de madera y un distribuidor minorista de muebles de madera para el hogar. En la cadena cada proveedor suministra dos o tres materias primas (de acuerdo al producto) a los fabricantes, quien a su vez, produce dos tipos de productos terminados por la combinación de los materiales y son entregados al distribuidor minorista de acuerdo a la demanda del mercado.

Con respecto a los resultados de los tamaños de los lotes de los proveedores para cada materia prima para cada producto, se puede afirmar, que bajo el enfoque de Stackelberg (sin colaboración) se requiere enviar lotes más grandes a los fabricantes, debido a que no existe una planificación colaborativa de las operaciones entre los actores de cada nivel y no se comparte la información de las ventas, por lo que cada empresa requiere de grandes volúmenes de inventarios para poder atender una demanda incierta.

Los tamaños de los lotes para los proveedores para cada materia prima para cada producto bajo el Enfoque de colaboración es mucho menor, debido a que al existir integración de procesos y el desarrollo de una planificación colaborativa entre empresas de cada nivel de la cadena, se pueden reducir los tamaños de los pedidos, pues se tiene un conocimiento más certero de la demanda del mercado en cada actor de la cadena, lo cual le permite a las empresas prepararse para atender los requerimientos de los clientes finales.

En cuanto a los beneficios esperados para toda la cadena de suministro, se observa una diferencia de \$18.651.000, entre el enfoque de Stackelberg y Colaboración (3 niveles), y \$35.102.000 de diferencia entre enfoque de Stackelberg y Colaboración (2 niveles), lo que indica que el modelo sin

colaboración no es el más recomendable ya que en ambos esquemas de colaboración se obtiene un mayor beneficio.

De igual forma se observa que el esquema de colaboración en 3 niveles no es recomendable para todos los actores del sector, debido a que los proveedores sufren una disminución de sus beneficios totales bajo esta configuración.

Entre los esquemas de colaboración, para el caso del Sector Madera y Muebles se observa que la configuración más apropiada es la de colaboración en dos niveles, es decir, entre el fabricante de muebles y el distribuidor minorista, debido a que el beneficio esperado para toda la cadena en el esquema colaborativo de 3 niveles es \$ 4.145.921.000 y en el de dos niveles es \$ 4.162.372.000, lo cual arroja una diferencia de \$16.451.000.

Tabla 42. Comparación de los resultados de los tamaños de Lote de los proveedores. Fuente: Elaboración propia.

R(j,s,i) Enfoque Stackelberg					R(j,s,i) Enfoque Colaboración (3 Niveles)					R(j,s,i) Enfoque Colaboración (2 Niveles)				
j	s	i			j	s	i			j	s	i		
		1	2	3			1	2	3			1	2	3
1	1	4942,51	7413,77		1	1	16736,40	25104,60		1	1	12028	18042	
1	2	4700,00	5875,00		1	2	5201,60	6502,00		1	2	4700,00	5875,00	
2	1	6080,25	7600,00	30401,20	2	1	5847,65	7309,56	29238,30	2	1	26608,3	36260,4	133042
2	2	5502,40	5502,40	22009,60	2	2	5397,65	5397,65	21590,60	2	1	4593,11	4593,11	18372,4

Tabla 43. Comparación de Beneficios Esperados para los niveles de la Cadena de Suministro. Fuente: Elaboración propia.

ENFOQUE STACKELBERG		ENFOQUE DE COLABORACIÓN (3 Niveles)		ENFOQUE DE COLABORACIÓN (2 Niveles)		DIFERENCIA Stackelberg y Colaboración en 3 niveles	DIFERENCIA Stackelberg y Colaboración en 2 niveles	DIFERENCIA Colaboración en 3 y 2 niveles
EAPS	\$ 690.600.000	EAPS	\$ 689.991.000	EAPS	\$ 690.962.000	-\$ 609.000	\$ 362.000	\$ 971.000
EPM	\$ 1.669.550.000	EPM	\$ 1.680.210.000	EPM	\$ 1.695.660.000	\$10.660.000	\$26.110.000	\$15.450.000
EPR	\$ 1.767.120.000	EPR	\$ 1.775.720.000	EPR	\$ 1.775.750.000	\$ 8.600.000	\$ 8.630.000	\$ 30.000
EAPC	\$ 4.127.270.000	EAPC	\$ 4.145.921.000	EAPC	\$ 4.162.372.000	\$18.651.000	\$35.102.000	\$16.451.000

En el Gráfico 4. Se muestra el comportamiento de los beneficios esperado en los niveles de la cadena de suministro bajo los enfoques no colaborativo y colaborativo en dos y tres niveles, evidenciando lo más recomendable para el Sector Madera y Muebles es el desarrollo de una estrategia de colaboración entre los fabricantes de muebles de madera y el distribuidor minorista que permita el intercambio de información, establecimiento de precios, descuentos por cantidad, contratos con operadores logísticos que se encarguen de la distribución de productos terminado.

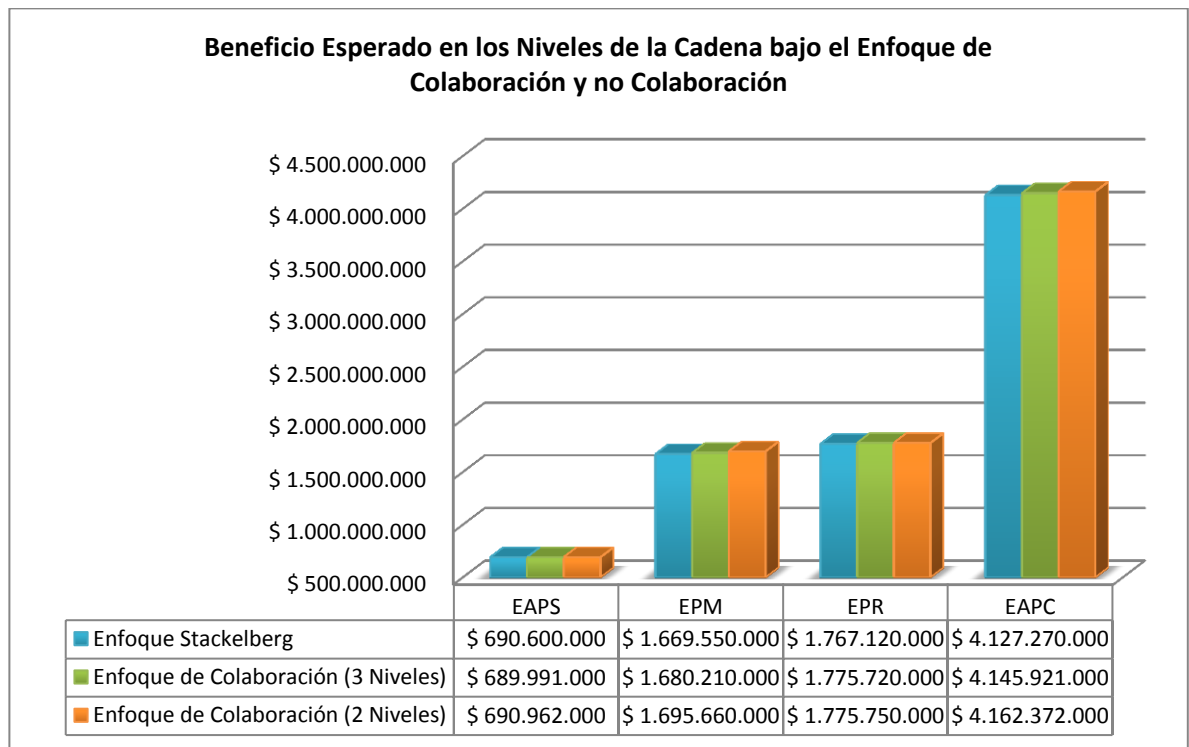


Gráfico 4. Beneficio Esperado en los Niveles de la Cadena bajo el Enfoque Colaborativo y no colaborativo.
Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIONES

El diseño de una Estrategia de Gestión de Inventarios Colaborativo para escenarios de incertidumbre en una cadena de suministro multinivel es una apuesta innovadora para fortalecer las capacidades, optimización de recursos y maximización de utilidades en los actores de una cadena de suministro, a través de una adecuada planificación colaborativa de la demanda, materiales e insumos, producción y distribución entre los actores de los niveles y la integración de procesos automatizados, intercambio de información y diseño de almacenamiento conjunto.

La construcción del estado del arte del problema y el análisis de las investigaciones, proyectos y publicaciones permitió identificar que se han desarrollado modelos de inventarios para dos niveles de la cadena con demanda incierta y modelos de inventarios en tres niveles con demanda determinística, lo cual permitió abordar el problema de modelos de inventarios para tres niveles de la cadena de suministro con parámetros inciertos, incluyendo el enfoque de colaboración-integración en los procesos de abastecimiento, fabricación, distribución.

El modelo matemático de gestión de inventarios colaborativo para escenarios de incertidumbre para una cadena de suministro multinivel es una extensión del modelo de producción-inventario para productos defectuosos en una cadena de suministro de tres niveles (Sana, 2011). Considerando múltiples proveedores múltiples fabricantes, múltiples distribuidores, múltiples materiales y productos, tasa de producción de los proveedores y tasa de demanda incierta que siguen funciones de densidad de probabilidad.

La mayor contribución del modelo propuesto al estado del arte es la consideración de múltiples miembros de la cadena de suministro, lo cual ha sido propuesto por múltiples investigaciones en sus futuras investigaciones. Se espera que este modelo contribuya a las empresas a determinar una estrategia óptima que permita maximizar las utilidades de los miembros de la cadena. De acuerdo a la revisión del estado del arte, este tipo de modelo aún no se ha discutido en la literatura de la cadena de suministro.

El Caso de Aplicación de la Estrategia de Gestión de Inventarios Colaborativo es una oportunidad para fortalecer la gestión de las operaciones en cuanto al manejo de inventarios en las empresas del Sector Madera y Muebles, que en la actualidad presentan deficiencias en las áreas de almacenamiento, compras y abastecimiento de materia prima, asociados a la falta de planificación en conjunta entre actores de los eslabones de la cadena y a establecimiento esquemas de colaboración e integración de sus procesos para atender las fluctuaciones de la demanda de manera oportuna y competir en el mercado con un mayor beneficio económico.

De acuerdo a la validación del modelo matemático con los datos de empresas del sector madera y muebles se confirma que el enfoque de colaboración genera mayores beneficios económicos para los actores de cada eslabón de la cadena de suministro que el enfoque de Stackelberg donde un líder es quien toma las decisiones estratégicas que son replicadas en sus seguidores (demás miembros de la cadena). En cambio, en un sistema colaborativo todos los miembros de la cadena toman las decisiones en torno a precios de compra negociables, contrato de abastecimiento continuo en cada etapa (nivel de la cadena), estimación de la demanda del cliente final con un alto nivel de confiabilidad para evitar los faltantes e incumplimiento al mismo y productos con calidad conforme, debido a que en los dos niveles anteriores (proveedores y fabricantes) se presentan devoluciones de productos defectuosos.

Para el caso del Sector Madera y Muebles la configuración más apropiada es la de colaboración en dos niveles, es decir, entre el fabricante de muebles y el distribuidor minorista, debido a que el beneficio esperado para toda la cadena en el esquema colaborativo de 3 niveles es \$ 4.145.921.000 y en el de dos niveles es \$ 4.162.372.000, lo cual arroja una diferencia de \$16.451.000.

Finalmente, se ha cumplido con el objetivo principal de esta investigación, donde el diseño de una estrategia de gestión de inventarios colaborativo contribuye a disminuir los costos asociados a los inventarios de manera eficaz, sin que los miembros de la cadena sufran de excedentes, ni faltantes; mejorando la planificación de la producción, de compras y ventas, enmarcado en políticas de contratación y esquemas de integración; y optimizando los flujos de productos y disminución de los inventarios en los actores, lo cual se ve reflejado en aumento de las utilidades de las empresas.

TRABAJOS FUTUROS

El modelo matemático de gestión de inventarios colaborativos se diseñó para tres niveles de la cadena de suministro: proveedores, fabricantes y distribuidores, pero se hace necesario incluir un eslabón adicional para estudiar más fondo el comportamiento de los mercados y de los clientes finales, de tal forma que se puedan optimizar las cantidades de productos en inventario a lo largo de toda la cadena. De igual forma, se pueden incluir restricciones de capacidad, capital, costos de transporte en el modelo para que sea más integral.

Se pueden incluir en el modelo matemático variables como el lead time y conceptos de aprovisionamiento periódico, promociones, retrasos en los pagos, entre otras. Podría ser interesante tener en cuenta la incertidumbre de la demanda del minorista, múltiples tiendas, varios puntos de producción y oferta de varios artículos de la cadena.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

- Aglomerado Masisa. (s.f.). <http://www.masisa.com/>. (Masisa Colombia) Recuperado el Julio de 2011, de Aglomerado Masisa: <http://www.masisa.com/col/esp/productos/tableros/aglomerado/423/157>
- Angerhofer, B., & Angelides, M. (2006). A model and a performance measurement system for collaborative supply chains. *Decision Support Systems*, 42, 283-301.
- Ballou, R. H. (2004). *Logística Administración de la Cadena de Suministro*. México, Méxicio: Pearson Educación.
- Ballou, R., Gilbert, S., & Mukherjee, A. (2000). New Managerial Challenges from Supply Chain Opportunities. *Industrial Marketing Management*, 29, 7-18.
- Barratt, M. (2004). Understanding the meaning of Collaboration in the Supply Chain. *Supply Chain Management: An International Journal*, 9(1), 30-42.
- Bazaraa, M., Sherali, H., & Shetty, C. (2006). *Nonlinear Programming*. New Jersey: Wiley-Interscience.
- Beale, E. (1955). On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities. *Journal of the Royal Statical Society*, 17b, 173-184.
- Beltran , A. A., & Burbano, C. A. (2002). Modelo de Benchmarking de la cadena de abastecimiento para pymes manufactureras. *Estudios Gerenciales*, 13-30.
- Ben Abdelaziz, F. (1992). *L 'efficacité en Progranunation Multi-objectifs Stochastique*. Ph. D. Thesis, Université de Laval, Québec.
- Ben-Daya, M., & Hariaga, M. (2004). Integrated single vendor single buyer model with stochastic demand and variable lead time. *International Journal of Production Economics*(92), 75-80.
- Bowersox, D. (1991). The Strategic benefits of logisctis alliances. *Harvard Business Review*, 68(4), 36-43.
- Bowersox, D. J., Closs, D. J., & Cooper, M. B. (2007). *Administración y Logística en la Cadena de Suministros*. Mexico: Mc Graw Hill.
- Bowersox, D., & Closs, D. (1996). *Logistical management: The integrated supply chain process*. New York: McGraw-Hill.
- Boyaci, T., & Gallego, G. (2002). Coordinating pricing and inventory replenishment policies for one wholesaler and one or more geographically dispersed retailers. *International Journal of Production Economics*, 77, 95-11.
- Bustos, C., & Chacón, G. (2007). El MRP en la gestión de inventarios. *Visión Gerencial*, 6(1), 5-17.
- Bylka, S. (2012). Non-cooperative consignment stock strategies for management in supply chain. *International Journal of Production Economics*.
- Calderón Lara, J. L., & Lario, E. F.-C. (2005). Análisis del Modelo SCOR para la Gestión de la Cadena de Suministro . *Análisis del Modelo SCOR para la Gestión de la Cadena de Suministro* , (págs. 1-10). Gijón.
- Cámara de Comercio de Barranquilla. (2011). Listado de Empresas pertenecientes al Sector Madera y Muebles. Barranquilla.
- Cámara de Comercio de Cartagena. (2011). Listado de Empresas pertenecientes al Sector Madera y Muebles . Cartagena de Indias.
- Cámara de Comercio de Santa Marta. (2011). Listado de Empresas pertenecientes al Sector Madera y Muebles. Santa Marta.
- Camp, R. C. (1993). *Benchmarking*. Panorama Editorial, S.A.
- Cao, M., & Zhang, Q. (2011). Supply chain collaboration: Impact on collaborative advantage and firm. *Journal of Operations Management*, 29, 163-180.
- Cárdenas-Barrón, L. (2007). Optimizing Inventory Decisions in a Multi-Stage Multi-Customer Supply Chain: A note. *Transportation Reserach Parte E*, 43, 647-654.
- Castillo, E., Conejo, A., Pedregal, P., García, R., & Alguacil, N. (2002). *Formulación y resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia*. Madrid.

- Charnes, A., & Cooper, W. (1959). Chance-Constrained Programming. *Management Science*, 73-79.
- Chen, X., & Zhang, J. (2009). A Stochastic Programming Duality Approach to Inventory Centralization Games. *Operation Research*, 57(4), 840-851.
- Chopra, S., & Meindl, P. (2001). *Supply chain management: Strategy, planning and operation*. Pearson Education Asia.
- Chopra, S., & Meindl, P. (2008). *Administración de la Cadena de Suministro: Estrategia, Planeación y Operación* (Tercera ed.). Mexico: Pearson Education.
- Christopher, M. (1998). *Logistics and Supply Chain Management – Strategies for reducing cost and improving service*. Londres: Financial Times/Pitman.
- Collier, D. A., & Evans, J. R. (2009). *Administración de Operaciones: Bienes, servicios y cadenas de valor*. Mexico: Cengage Learning.
- CONIF. (1998). *Guía para plantaciones forestales Córdoba*. Santa Fé de Bogotá: CONIF.
- CONIF. (1998). *Guía para plantaciones forestales Córdoba*. Santa Fé de Bogotá.
- Cooper, M., & Ellram, L. (1993). Characteristics of Supply Chain Management and the Implications for Purchasing and Logistics Strategy. *The International Journal of Logistics Management*, 4(2), 13-24.
- Cooper, M., Lambert, D., & Pagh, J. (1997). Supply Chain Management: More than a new name for logistics. *The International Journal of Logistics Management*, 8(1), 1-13.
- Copacino, W. C. (1997). *Supply Chain Management. The Basics and Beyond*. St. Lucie Press.
- Creelman, D. (3 de Noviembre de 2001). *www.hr.com*. Recuperado el 8 de Abril de 2011, de Human Resources: http://www.hr.com/en/communities/human_resources_management/an-alternative-to-competition_eacxkme1.html
- Daniel, J., & Rajendran, C. (2006). Heuristic approaches to determine base-stock levels in a serial supply chain with a single objective and with multiple objectives. *European Journal of Operational Research*, 175, 566-592.
- Dantzing, G. (1955). Linear Programming Under Uncertainty. *management Science*, 1(3-4), 197-206.
- Darwish, M., & Odah, O. (2010). Vendor managed inventory model for single-vendor multi-retailer supply chains. *European Journal of Operational Research*, 204, 473-484.
- Departamento Nacional de Planeación. (2007). *Agenda Interna para la Productividad y Competitividad. Documento Sectorial: Cadena Forestal, Madera y Muebles*. Departamento Nacional de Planeación, Bogotá, D.C.
- Departamento Nacional de Planeación. (2007). *Agenda Interna para la Productividad y la Competitividad. Documento Sectorial. Cadena Forestal, Madera y Muebles*. Bogotá, D.C.
- DNP. (2007). *Agenda Interna para la Productividad y Competitividad. Documento Sectorial: Cadena Forestal, Madera y Muebles*. Departamento Nacional de Planeación, Bogotá, D.C.
- Enciclopedia Multimedia de la Universidad de Málaga*. (s.f.).
- FAO. (2001). *Situación de los Bosques en el mundo*. Departamento de Montes de la FAO.
- Flores-Velásquez, R., Serrano-Gálvez, E., Palacio Muñoz, V. H., & Chapeta, G. (2007). Análisis de la industria de la madera aserrada en México. *Madera y Bosques*, 47-57.
- Flynn, B., Huo, B., & Zhao, X. (2010). The impact of supply chain integration on performance: a contingency and configuration approach. *Journal of Operations Mnagement*, 28(1), 58-71.
- Forrester, J. (1961). *Industrial Dynamics*. Portland (OR): Productivity Press.
- Frazelle, E. (2002). *Supply Chain Strategy. The Logistics of Supply Chain Management*. New York: McGraw Hill.
- Frohlich, M., & Westbrook, R. (2001). Arcs of integration: an international study of supply chain strategies. *Journal of Operations Management*, 185-200.
- Funaki, K. (2012). Strategic safety stock placement in supply chain design with due-date based demand. *International Journal Production Economics*, 135, 4-13.
- Ganeshan, R., Tyworth, J., & Guo, Y. (1999). Dual sourced supply chains: the discount supplier option. *Transportation Research Part E*, 35, 11-23.

- Gao, Y., Niu, Z., & Wang, X. (2011). Analysis on the Effects of Stock Sharing on Supply Chain. *Computers & Industrial Engineering*, 60, 433-437.
- Garay, L. J. (1998). *Programa de Estudio "La industria de América Latina ante la Globalización Económica"*. Santa Fé de Bogotá, Colombia: Bogotá.
- Gimenez, C., & Ventura, E. (2005). Logistics-production, logistics-marketing and external integration: Their impact on performance. *International Journal of Operations & Production Management*, 25(1), 20-38.
- Glock, C. (2012). Lead time reduction strategies in a single-vendor–single-buyer integrated inventory model with lot size-dependent lead times and stochastic demand. *International Journal of Production Economics*(136), 37-44.
- Goyal, S., & Gunasekharan, A. (2007). 1995.An integrated production-inventory-marketing model for deteriorating item. *Computers & Industrial Engineering*, 106, 544-549.
- Gutierrez, V., & Vidal, C. (Marzo de 2008). Modelos de Gestión de Inventarios en Cadenas de Abastecimiento: Revisión de la literatura. *Revista Facultad de Ingeniería*(43), 134-149.
- Hammer, M. (2001). The superefficient company. *Harvard Business Review*(79), 82-91.
- Hernandez, J., Mula, J., Poler, R., & Ferriols, F. (2010). Un modelo conceptual para el aprovisionamiento colaborativo descentralizado en cadenas de suministro. *4th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management*, 1939-1848.
- Hollier, R., & Mak, K. (1983). Inventory replenishment policies for deteriorating items in a declining market. *International Journal of Production Research*, 21, 813-826.
- Holweg, M., Disney, S., Holmström, J., & Smaros, J. (2005). Supply Chain Collaboration: Making sense of the strategy continuum. *European Management Journal*, 23(2), 170-181.
- Ivancevich, J., Lorenzi, P., Skinner, S., & Crosby, P. (1996). *Gestión: Calidad y Competitividad*. Madrid.
- Jeong, I.-J., & Leon, V. (2012). A serial supply chain of newsvendor problem with safety stock under complete and partial information sharing. *International Journal Production Economics*, 135, 412-419.
- Jimenez, J. (2005). *Estado del arte de los modelos matemáticos para la coordinación de inventarios en la cadena de suministro*. Sanfadila: Secretaria de Comunicaciones y Transportes del Instituto Mexicano del Transporte.
- Jimenez, J. (2005). *Estado del Arte de los Modelos Matemáticos para la Coordinación de Inventarios en la Cadena de Suministro*. Mexico: Instituto Mexicano del Transporte.
- Johnson, G., & Malucci, L. (Octubre de 1999). Shift to supply chain reflects more strategic approach. *APICS-The performance Advantage*, 28-31.
- Kanter, R. (1994). Collaborative Advantage: The Art of Alliance. *Harvard Business Review*, 72(4), 96-108.
- Karlöf, B., & Östblom, S. (1993). *Benchmarking* (Primera Edición ed.). Editorial John Wiley & Sons.
- Konstantaras, I., Goyal, S., & Papachristos, &. (2007). Economic ordering policy for an item with imperfect quality subject to the in-house inspection. *International Journal of Systems Science*, 38(6), 473-482.
- Krajewski, L., & Ritzman, L. (2000). *Administración de Operaciones. Estrategia y Análisis*. México: Pearson Educación.
- Krajewski, L., Ritzman, L., & Malhortra, M. (2008). *Administración de Operaciones. Procesos y Cadenas de Valor* (Octava ed.). México: Pearson Education.
- Lambert, D., & Christopher, M. (2000). From the Editors. *International Journal of Logistics Management*, 11(2), pii-iii.
- Lambert, D., Cooper, M., & Pagh, J. (1998). Supply Chain Management: Implementation Issues and research opportunities. *The International Journal of Logistics Management*.
- Lee, H., & Billington, C. (1993). Material Management in decentralized Supply Chain. *Operational Research*, 41(5).
- Li, H., & Jiang, D. (2012). New model and heuristics for safety stock placement in general acyclic supply chain networks. *Computers & Operations Research*, 39, 1333-1344.
- Lin, H. (2013). Reducing lost-sales rate on the stochastic inventory model with defective goods for the mixtures of distributions. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 3296–3306.

- Lu Lu. (1995). A one vendor multi-buyer integrated inventory model. *European Journal of Operational Research*, 81, 312-323.
- Lyu, J., Ding, J., & Chen, P. (2010). Coordinating replenishment mechanisms in supply chain: From Collaborative Supplier and Store -Level retailer perspective. *International Journal of Production Economics*, 123, 221-234.
- Maiguel, H., Salas, K., & Acevedo, J. (2013). Diseño de una Metodología de Gestión de Inventarios para la Integración y Colaboración en la Cadena de Suministro del Sector Madera y Muebles de la ciudad de Barranquilla. *Trabajo de grado en curso*. Barranquilla.
- Manthou, V., Vlachopoulou, M., & Folinas, D. (2004). Virtual e-Chain (VeC) Model for Supply Chain Collaboration. *International Journal of Production Economics*, 87(3), 241-250.
- Marquez, A., Bianchi, C., & Gupta, J. (2004). Operational and financial effectiveness of e-collaboration tools in Supply Chain Integration. *European Journal of Operational Research*, 159(2), 348-363.
- Mehrjerdi, Y. (2009). The collaborative supply chain. *Assembly Automation*, 29(2), 127-136.
- Mentzer, J. T., DeWitt, W., Keebler, J. S., Min, S., Nix, N. W., Smith, C. D., y otros. (1 de Enero de 2001). Defining Supply Chain Management. 22(2), págs. 1-25.
- Mentzer, J., Foggin, J., & Golicic, S. (2001). Defining supply chain management. *Journal of Business Logistics*, 22(2), 1-25.
- MERCOSUR. (2004). *Diagnóstico del Sector Madera y Muebles del Mercosur*. Asunción.
- Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural Observatorio Agrocadenas Colombia. (Noviembre de 2005). *Características y Estructura del Sector Forestal-Madera y Muebles en Colombia. Una Mirada Global de su estructura y dinámica*. Bogotá.
- Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural. Observatorio Agrocadenas Colombia. (2005). *Características y Estructura del Sector Forestal-Madera-Muebles en Colombia. Una Mirada Global de su estructura y dinámica 1991-2005*. Bogotá, D.C.
- Minner, S. (2003). Multiple-Supplier Inventory Models in Supply Chain Management: A review. *International Journal of Production Economics*, 81-82, 265-279.
- Neale, J., & Willems, S. (2009). Managing Inventory in Supply Chains with Noestacionay Demand. *Interfaces*, 39(5), 388-399.
- Oficina Económica y Comercial de la Embajada de España en Bogotá. (2005). *El Sector Muebles y Decoración en Colombia*. Bogotá.
- Oliver, R., & Webber, M. (1982). Supply Chain Management: Logistics Catches up with strategy.
- Osman, H., & Demirli, K. (2012). Integrated safety stock optimization for multiple sourced stockpoints facing variable demand and lead time. *International Journal of Production Economics*, 135, 299-307.
- Ouyang, L.-Y. (2005). An Inventory Model for deteriorating items with exponential declining demand and partial backlogging. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 15(2), 277-288.
- Pal, B., Sana, S., & Chaudhuri, K. (2012). A three layer multi-item production–inventory model for multiple suppliers and retailers. *Economic Modelling*, 29, 2704–2710.
- Pal, B., Sana, S., & Chaudhuri, K. (2012). Three-layer supply chain – A production-inventory model for reworkable items. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 530–543.
- Pal, B., Sana, S., & Chaudhuri, K. (2013). A mathematical model on EPQ for stochastic demand in an imperfect production system. *Journal of Manufacturing Systems*, 32, 260– 270.
- Pal, B., Sana, S., & Chaudhuri, K. (2013). A stochastic inventory model with product recovery. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 6, 120-127.
- PEEREZ OLIVERA, H., & VILLALOBOS TORO, B. (Octubre de 2010). Análisis Competitivo del Sector Madera y Muebles de la Ciudad de Barranquilla. *Revista Inge-CUC*, 6(6), 195-211.
- Perez Olivera, H. (2009). *Análisis de Productividad y Competitividad del Segmento de Fabricantes de Muebles de Madera de la ciudad de Baranquilla como fase inicial de la conformación del cluster madera y mueble como estrategia de desarrollo competitivo regional*. Barranquilla.
- Porter, M. (1999). *Ventaja Competitiva*. México: Editorial Continental.

- Prekopa, A. (1995). *Stochastics Programming*. Kluwer Academics Publishers.
- Ramos, A., & Cerisola, S. (2010). *Optimización Estocástica*. Universidad Pontificia Comillas. Madrid: Escuela Técnica Superior de Ingeniería.
- Rau, H., Wu, M., & Wee, H. (2003). Integrated inventory model for deteriorating items under a multi-echelon supply chain environment. *International Journal of Production Economics*, 86, 155-168.
- Roy, A., Sana, S., & Chaudhuri, K. (2012). Optimal replenishment order for uncertain demand in three layer supply chain. *Economic Modelling*, 29, 2274–2282.
- Salameh, M., & Jaber, M. (2000). Economic production quantity model for items with imperfect quality. *International Journal of Production Economics*, 64(1-3), 59-64.
- Salas Navarro, K. (2011). Análisis de la Cadena de Abastecimiento del Sector Madera y Muebles de la ciudad de Barranquilla. *Scientia et Technica*, 49, 229-238.
- Salas Navarro, K. (2011). *Diseño de un Modelo de la Cadena de Abastecimiento del Sector Madera y Muebles de la Región Caribe de Colombia*. Barranquilla.
- Sana, S. (2011). A Production-Inventory Model of Imperfect Quality Products in a three-layer Supply Chain. *Decision Support Systems*, 50, 539-547.
- Sana, S. (2011). The stochastic EOQ model with random sales price. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 239-248.
- Sana, S. (2012). A Collaborating Inventory Model in a Supply Chain. *Economic Modelling*.
- Sarkar, B. (2012). An inventory model with reliability in an imperfect production process. *Applied Mathematics and Computation*, 218(9), 4881-4891.
- Sarkar, M., & Sarkar, B. (2013). An economic manufacturing quantity model with probabilistic deterioration in a production system. *Economic Modelling*, 31, 245-252.
- Selim, H., Araz, C., & Ozkarahan, I. (2008). Collaborative production–distribution planning in supply chain: A fuzzy goal programming approach. *Transportation Research Part E*, 44, 396-419.
- Sheu, C., Yen, H., & Chae, B. (2006). Determinants of Supplier-Retailer Collaboration: Evidence. *International Journal of Operations & Production Management*, 26(1), 24-49.
- Simatupang, T., & Sridharan, R. (2003). The Collaborative Supply Chain. *International Journal of Logistics Management*, 13(1), 15-30.
- Singh Yadav, A., & Swami, A. (2013). A Two-Warehouse Inventory Model for Decaying Items with Exponential Demand and Variable Holding Cost. *International Journal of Inventive Engineering and Sciences*, 1(5), 18-22.
- Sobel, M., & Zhang, R. (Febrero de 2001). Inventory Policies for Systems with Stochastic and Deterministic Demand. *Operations Research*, 49(1), 157-162.
- Spendolini, M. J. (1994). *Benchmarking* (Primera Edición ed.). Mexico: Grupo Editorial Norma.
- Stadtler, H., & Kilger, C. (2005). *Supply Chain Management and Advanced Planning. Concepts, Models, Software and Case Studies*. Berlin: Springer.
- Standler, H. (2005). Supply Chain Management and Advanced Planning-Basics Overview and Challenges. *European Journal of Operational Research*, 575-588.
- Stank, T., Keller, S., & Daugherty, P. (2001). Supply Chain Collaboration and Logistical Service Performance. *Journal of Business Logistics*, 22(1), 29-48.
- Stevens, G. (1989). Integrating the supply chain. *International Journal of Physical Distribution and Materials Management*, 19, 3-8.
- Stock, J. R., & Lambert, D. M. (2001). *Strategic Logistics Management*. New York: McGraw Hill.
- Toktaş-Palut, P., & Ülengin, F. (2011). Coordination in a two-stage capacitated Supply Chain with Multiple Suppliers. *European Journal of Operational Research*, 212, 43-53.
- Van der Vaart, T., & Van Donk, D. (2004). Buyer focus: Evaluation of a new concept for supply chain integration. *International Journal of Production Economics*, 92, 21-30.
- Van der Vlist, P., Kuik, R., & Verheijen, B. (2007). Note on supply chain integration in vendor-managed inventory. *Decision Support Systems*, 44, 360-365.

- Wang, W., Wee, H., & Tsao, H. (2010). Revisiting the note on supply chain integration in vendor-managed inventory. *Decision Support Systems*, 48, 419-420.
- Wang, W., Wee, H., & Tsao, H. (2010). Revisiting the note on supply chain integration in vendor-managed inventory. *Decision Support Systems*, 48, 419-420.
- Wisnton, W. (2005). *Investigación de Operaciones: Aplicaciones y Algoritmos* (4ta Edición ed.). México: Thomson.
- Wu, K.-S., & Ouyang, L.-Y. (2003). A integrated single-vendor single-buyer inventory system with shortage derived algebraically. *Production Planning & Control*, 14(6), 555-561.
- Yao, M.-J., & Chiou, C.-C. (2004). On a replenishment coordination model in an integrated supply chain with one vendor and multiple buyers. *European Journal of Operational Research*, 159, 406-419.
- Yao, Y., Evers, P., & Dresner, M. (2007). Supply chain integration in vendor-managed inventory. *Decision Support Systems*, 43(2), 663-674.
- Yu, Y., Huang, G., & Liang, L. (2009). Stackelberg game-theoretic model for optimizing advertising, pricing and inventory policies in vendor managed inventory (VMI) production supply chains. *Computers & Industrial Engineering*, 57, 368-382.
- Zhou, Y., Min, J., & Goyal, S. (2008). Supply chain coordination under an inventory-level dependent demand rate. *International Journal of Production Economics*, 113, 518-527.

ANEXOS

ANEXO 1. ANÁLISIS DE LA DEMANDA DEL MERCADO

A partir de la información de las ventas de los últimos meses del distribuidor se hizo un análisis de las mismas para determinar si su comportamiento tiende a una o varias distribuciones de probabilidad en particular. A continuación se presentan las pruebas estadísticas del análisis.

Análisis de Pareto

Para conocer el grupo de productos más representativos en cuanto a ingresos por parte del distribuidor se hace necesario realizar un análisis de Pareto que nos permita clasificar los productos en tipo A, tipo B y tipo C, de mayor a menor impacto sobre el total de las ventas.

Producto	Demanda Anual	Precio Unitario	Valor total	% de Ventas	% de Ventas Acumulado
Alcobas Contemporáneas	300.000	\$ 1.866.667	\$560.000.000,00	39,68%	39,7%
Salas Contemporáneas	220.000	\$ 1.727.273	\$380.000.000,00	26,93%	66,6%
Comedores Contemporáneas	180.000	\$ 1.244.444	\$224.000.000,00	15,87%	82,5%
Comedores Clásicos	120.000	\$ 650.000	\$78.000.000,00	5,53%	88,0%
Alcobas Juveniles	120.000	\$ 600.000	\$72.000.000,00	5,10%	93,1%
Multimuebles	110.000	\$ 350.000	\$38.500.000,00	2,73%	95,8%
Roperos	140.000	\$ 250.000	\$35.000.000,00	2,48%	98,3%
Alcobas infantiles	56000	\$ 360.000	\$20.160.000,00	1,43%	99,7%
Comedores Modernos	2.000	\$ 1.200.000	\$2.400.000,00	0,17%	99,9%
Colchones	13.000	\$ 90.000	\$1.170.000,00	0,08%	100,0%
Total	1.261.000		\$1.411.230.000,00	100%	

Tabla 44. Demanda Anual de grupos de productos del distribuidor. Fuente: Adaptación datos suministrados por Distribuidor.

De acuerdo a la Tabla 8, los productos más representativos en ventas por parte del distribuidor son: Alcobas, Salas y Comedores Contemporáneos, cuyas ventas representan el 82,5% de las ventas totales y el resto de productos: Comedores clásicos, alcobas juveniles, Multimuebles, roperos, alcobas infantiles, comedores modernos y colchones equivalen al 17,5% de las ventas totales.

Por lo anterior, se puede apreciar que el grupo de alcobas modernas representa el 39,7% de las ventas totales, siendo la principal fuente de los ingresos por ventas, por lo que se seleccionarán productos del grupo de alcobas contemporáneas para analizar el comportamiento de su demanda.

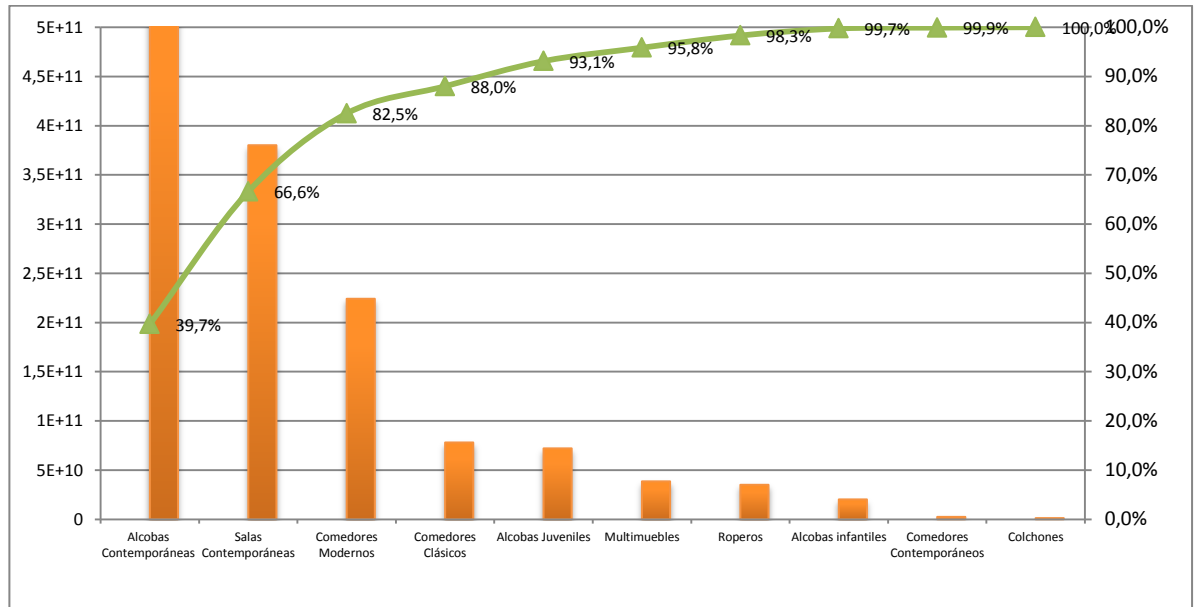


Gráfico 5. Análisis de Pareto para los Grupos de Productos del Distribuidor. Fuente: Adaptación datos Distribuidor.

Para validar el modelo se seleccionaron dos referencias de productos más representativas del grupo de Alcobas Contemporáneas:

- ✓ Producto 1: Juego de Alcoba Contemporánea Volvo
- ✓ Producto 2: Juego de Alcoba Contemporánea Lexure

A continuación se presentan las ventas de los últimos 17 meses de los productos seleccionados.

Ventas de Productos seleccionados		
Meses	Alcoba 1	Alcoba 2
1	1016	1038
2	1093	862
3	1100	1028
4	984	968
5	1100	1048
6	1058	1070
7	1009	969
8	1001	956
9	1004	958

10	1197	955
11	1071	953
12	993	1037
13	996	1049
14	999	1006
15	1080	930
16	925	918
17	1113	785

Tabla 45. Ventas de Productos seleccionados.
Fuente: Datos suministrados por el Distribuidor.

Los análisis estadísticos se desarrollaron en el Software Statgraphics Centurion XVII, versión 161.02 (32 bits), en un equipo marca Dell Inspiron Intel(R) Core(TM) i3 de 32 bits, con memoria RAM de 3GB.

Producto 1

Al analizar los datos de las ventas de alcobas modernas en los últimos 17 meses en el distribuidor por la prueba de Kolmogorov-Smimov, se obtiene que los datos pueden ser modelados por distintas distribuciones de probabilidad continuas, ya que Valores-P menores que 0,05 indican que los datos no provienen de la distribución señalada con un 95% de confianza. Por lo que los datos podrían provenir de una distribución normal o uniforme.

	Exponencial	Valor Extremo Más Grande	Normal	Uniforme
DMAS	0,317546	0,14197	0,191325	0,25
DMENOS	0,58789	0,127187	0,12411	0,158088
DN	0,58789	0,14197	0,191325	0,25
Valor-P	0,0000157645	0,883058	0,562382	0,239069

Tabla 46. Prueba de Kolmogorov-Smimov para Producto 1. Fuente: Elaboración propia.

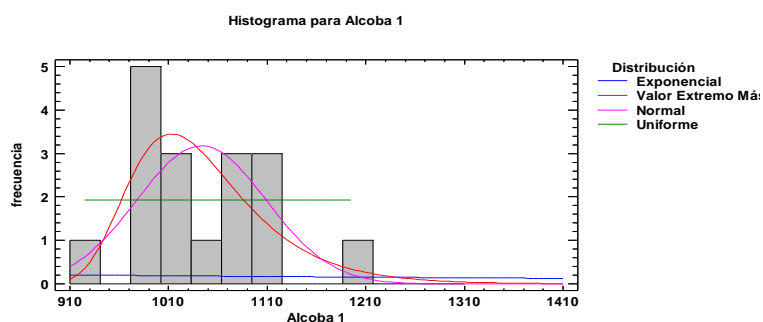


Gráfico 6. Histograma de Frecuencias para la Alcoba 1. Fuente: Elaboración Propia.

De acuerdo a la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk que está basada en la comparación de los cuartiles de la distribución normal ajustada a los datos, se obtiene que el Valor-P es mayor que 0,05, por lo que se puede afirmar que los datos provienen de una distribución normal.

Prueba	Estadístico	Valor-P
Estadístico W de Shapiro-Wilk	0,939265	0,310425

Parámetros para producto 1

Distribución Normal

Tamaño de muestra = 17

Promedio =1043,47

Sigma = 65,76

Producto 2

Al analizar los datos de las ventas de alcobas modernas en los últimos 17 meses en el distribuidor por la prueba de Kolmogorov-Smirnov, se obtiene que los datos pueden ser modelados por distintas distribuciones de probabilidad continuas, ya que Valores-P menores que 0,05 indican que los datos no provienen de la distribución señalada con un 95% de confianza. Por lo que los datos podrían provenir de una distribución normal o uniforme.

	Exponencial	Valor Extremo Más Grande	Normal	Uniforme
DMAS	0,33273	0,106366	0,0588235	DMAS
DMENOS	0,553948	0,161223	0,35418	DMENOS
DN	0,553948	0,161223	0,35418	DN
Valor-P	0,000058878	0,768838	0,0281019	Valor-P

Tabla 47. Prueba de Kolmogorov-Smirnov para Producto 2. Fuente: Elaboración propia.

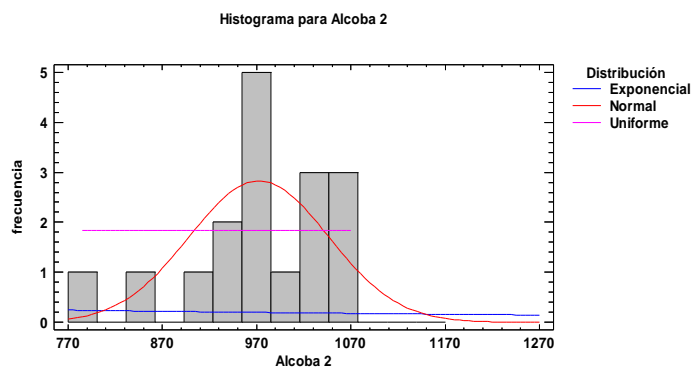


Gráfico 7.Histograma de Frecuencias para la Alcoba 1. Fuente: Elaboración Propia.

De acuerdo a la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk que está basada en la comparación de los cuartiles de la distribución normal ajustada a los datos, se obtiene que el Valor-P es mayor que 0,05, por lo que se puede afirmar que los datos provienen de una distribución normal.

Prueba	Estadístico	Valor-P
Estadístico W de Shapiro-Wilk	0,914632	0,914632

Parámetros para producto 1

Distribución Normal

Tamaño de muestra = 17

Promedio =972,353

Sigma = 73,76

ANEXO 2. PROGRAMACIÓN MODELO MATEMÁTICO GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS SIN COLABORACIÓN (ENFOQUE STACKELBERG)

```
Array[PS, {2, 2, 3}];
Array[R, {2, 2, 3}];
Array[EPS, {2, 2, 3}];
Array[THETA, {2, 2, 3}];
Array[ALPHA, {2, 2, 3}];
Array[RS, {2, 2, 3}];
Array[CS, {2, 2, 3}];
Array[AS, {2, 2, 3}];
Array[HS, {2, 2, 3}];
Array[PC, {2, 2, 3}];
Array[WS, {2, 2, 3}];
Array[BWS, {2, 2, 3}];
Array[PM, {2, 2}];
Array[BETA, {2, 2}];
Array[AM, {2, 2}];
Array[HM, {2, 2}];
Array[LM, {2, 2}];
Array[DELM, {2, 2}];
Array[SPM, {2, 2}];
Array[BSPM, {2, 2}];
Array[RM, {2, 2}];
Array[SM, {2, 2}];
Array[DR, {2, 1}];
Array[DC, {2, 1}];
Array[AR, {2, 1}];
Array[HR, {2, 1}];
Array[WR, {2, 1}];
Array[WR, {2, 1}];
Array[GAMAM, {2, 2}];
Array[APS, {2, 2}];
Array[APM, {2, 2}];
Array[APR, {2, 1}];
EPS[1, 1, 1]=0.30;
EPS[1, 2, 1]=0.25;
EPS[1, 1, 2]=0.20;
EPS[1, 2, 2]=0.20;
EPS[2, 1, 1]=0.25;
EPS[2, 1, 2]=0.20;
EPS[2, 1, 3]=0.05;
EPS[2, 2, 1]=0.20;
EPS[2, 2, 2]=0.20;
EPS[2, 2, 3]=0.05;
PS[1, 1, 1]=4050;
PS[1, 1, 2]=EPS[1, 1, 1]*PS[1, 1, 1]/EPS[1, 1, 2];
PS[1, 2, 1]=4700;
PS[1, 2, 2]=EPS[1, 2, 1]*PS[1, 2, 1]/EPS[1, 2, 2];
PS[2, 1, 1]=4900;
PS[2, 1, 2]=EPS[2, 1, 1]*PS[2, 1, 1]/EPS[2, 1, 2];
PS[2, 1, 3]=EPS[2, 1, 1]*PS[2, 1, 1]/EPS[2, 1, 3];
PS[2, 2, 1]=4450;
```

```

PS[2,2,2]=EPS[2,2,1]*PS[2,2,1]/EPS[2,2,2];
PS[2,2,3]=EPS[2,2,1]*PS[2,2,1]/EPS[2,2,3];
RS[1,1,1]=5200;
RS[1,1,2]=5670;
RS[1,2,1]=5650;
RS[1,2,2]=5020;
RS[2,1,1]=5945;
RS[2,1,2]=5024;
RS[2,1,3]=5355;
RS[2,2,1]=5500;
RS[2,2,2]=5291;
RS[2,2,3]=5355;
CS[1,1,1]=0.2;
CS[1,1,2]=0.1;
CS[1,2,1]=0.25;
CS[1,2,2]=0.15;
CS[2,1,1]=0.2;
CS[2,1,2]=0.1;
CS[2,1,3]=0.1;
CS[2,2,1]=0.25;
CS[2,2,2]=0.15;
CS[2,2,3]=0.10;
R[1,1,2]=EPS[1,1,1]*R[1,1,1]/EPS[1,1,2];
R[1,2,2]=EPS[1,2,1]*R[1,2,1]/EPS[1,2,2];
R[2,1,2]=EPS[2,1,1]*R[2,1,1]/EPS[2,1,2];
R[2,1,3]=EPS[2,1,1]*R[2,1,1]/EPS[2,1,3];
R[2,2,2]=EPS[2,2,1]*R[2,2,1]/EPS[2,2,2];
R[2,2,3]=EPS[2,2,1]*R[2,2,1]/EPS[2,2,3];
AS[1,1,1]=750000;
AS[1,1,2]=280000;
AS[1,2,1]=645000;
AS[1,2,2]=272000;
AS[2,1,1]=635000;
AS[2,1,2]=280000;
AS[2,1,3]=130000;
AS[2,2,1]=650000;
AS[2,2,2]=272000;
AS[2,2,3]=123000;
HS[1,1,1]=0.3;
HS[1,1,2]=0.25;
HS[1,2,1]=0.3;
HS[1,2,2]=0.25;
HS[2,1,1]=0.3;
HS[2,1,2]=0.25;
HS[2,1,3]=0.15;
HS[2,2,1]=0.3;
HS[2,2,2]=0.25;
HS[2,2,3]=0.15;
ALPHA[1,1,1]=0.09;
ALPHA[1,1,2]=0.09;
ALPHA[1,2,1]=0.08;
ALPHA[1,2,2]=0.08;
ALPHA[2,1,1]=0.10;
ALPHA[2,1,2]=0.09;

```

ALPHA[2,1,3]=0.08;
ALPHA[2,2,1]=0.12;
ALPHA[2,2,2]=0.12;
ALPHA[2,2,3]=0.12;
PC[1,1,1]=26000;
PC[1,1,2]=15500;
PC[1,2,1]=26300;
PC[1,2,2]=15950;
PC[2,1,1]=26000;
PC[2,1,2]=15500;
PC[2,1,3]=14250;
PC[2,2,1]=26300;
PC[2,2,2]=15950;
PC[2,2,3]=14500;
THETA[1,1,1]=1/2;
THETA[1,1,2]=1/2;
THETA[2,1,1]=1/2;
THETA[2,1,2]=1/2;
WS[1,1,1]=45500;
WS[1,1,2]=27500;
WS[1,2,1]=45800;
WS[1,2,2]=29000;
WS[2,1,1]=45500;
WS[2,1,2]=27500;
WS[2,1,3]=15450;
WS[2,2,1]=45800;
WS[2,2,2]=29000;
WS[2,2,3]=16200;
BWS[1,1,1]=26000;
BWS[1,1,2]=15500;
BWS[1,2,1]=26300;
BWS[1,2,2]=15950;
BWS[2,1,1]=26000;
BWS[2,1,2]=15500;
BWS[2,1,3]=14250;
BWS[2,2,1]=26300;
BWS[2,2,2]=15950;
BWS[2,2,3]=14500;
BETA[1,1]=0.08;
BETA[1,2]=0.07;
BETA[2,1]=0.06;
BETA[2,2]=0.07;
AM[1,1]=280000;
AM[1,2]=280000;
AM[2,1]=250000;
AM[2,2]=250000;
HM[1,1]=0.05;
HM[1,2]=0.05;
HM[2,1]=0.05;
HM[2,2]=0.05;
DELM[1,1]=0.015;
DELM[1,2]=0.015;
DELM[2,1]=0.01;
DELM[2,2]=0.01;


```

LM[1,1]=2500000;
LM[1,2]=2500000;
LM[2,1]=2800000;
LM[2,2]=2800000;
GAMAM[1,1]=0.003;
GAMAM[1,2]=0.003;
GAMAM[2,1]=0.002;
GAMAM[2,2]=0.002;
SPM[1,1]=650000;
SPM[1,2]=770000;
SPM[2,1]=650000;
SPM[2,2]=785000;
BSPM[1,1]=220000;
BSPM[1,2]=275000;
BSPM[2,1]=225000;
BSPM[2,2]=280000;
SM[1,1]=0.05;
SM[1,2]=0.04;
SM[2,1]=0.04;
SM[2,2]=0.04;
RM[1,1]=950;
RM[1,2]=740;
RM[2,1]=890;
RM[2,2]=640;
DR[1,1]=1300;
DR[1,2]=1250;
DC[1,1]=1150;
DC[1,2]=1095;
AR[1,1]=375000;
AR[1,2]=350000;
HR[1,1]=0.05;
HR[1,2]=0.04;
WR[1,1]=2186700;
WR[1,2]=1967300;

```

```

U=WS[1,k,n]*PS[1,k,n]+BWS[1,k,n]*ALPHA[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-
PC[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-0.5*HS[1,k,n]*((1-
ALPHA[1,k,n])*(EPS[1,k,1])*(R[1,k,1])*(EPS[1,k,n]^(-1))-
EPS[1,k,1]*R[1,k,1]*HS[1,k,n]*ALPHA[1,k,n]*PS[1,k,n]/((1-
ALPHA[1,k,n])RS[1,k,n]*EPS[1,k,n])-CS[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-
AS[1,k,n]*PS[1,k,n]*EPS[1,k,n]/(EPS[1,k,1]*R[1,k,1]*(1-ALPHA[1,k,n]));
V=WS[2,k,n]*PS[2,k,n]+BWS[2,k,n]*ALPHA[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-
PC[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-0.5*HS[2,k,n]*((1-
ALPHA[2,k,n])*(EPS[2,k,1])*(R[2,k,1])*(EPS[2,k,n]^(-1))-
EPS[2,k,1]*R[2,k,1]*HS[2,k,n]*ALPHA[2,k,n]*PS[2,k,n]/((1-
ALPHA[2,k,n])RS[2,k,n]*EPS[2,k,n])-CS[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-
AS[2,k,n]*PS[2,k,n]*EPS[2,k,n]/(EPS[2,k,1]*R[2,k,1]*(1-ALPHA[2,k,n]));
APS[1,k]=Sum[U,{n,2}];
APS[2,k]=Sum[V,{n,3}];
W=APS[1,k]+APS[2,k];
EAPS=Sum[W,{k,2}];
T1=Sum[THETA[m,n,1]*DR[n,1],{n,1}];

```

```

U1=Sum[WS[1,i,n]*(1-ALPHA[1,i,n])*EPS[1,i,1]*R[1,i,1]/EPS[1,i,n],{n,2}];

```

```

U2=Sum[U1,{i,2}];
V1=Sum[2(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,1]*R[1,i,1],{n,2}];
V2=Sum[V1,{i,2}];
W1=Sum[EPS[1,i,n]*PS[1,i,n],{n,2}];
W2=Sum[W1,{i,2}];

APM[m,1]=T1 (SPM[m,1]+BETA[m,1]*BSPM[m,1]/(1-BETA[m,1]))-(T1/(1-
BETA[m,1]))(U2/V2+DELM[m,1]+LM[m,1]/V2+GAMAM[m,1]*V2)-SM[m,1]T1/(1-
BETA[m,1])-0.5(HM[m,1]*V2/(((1-BETA[m,1])*W2)^2))((1-BETA[m,1])*W2-T1)(-
T1+2(1-BETA[m,1])*W2-((1-BETA[m,1])*W2-T1)^2)-HM[m,1]*BETA[m,1]*T1
(V2/(2*W2)+W2/RM[m,1])/(1-BETA[m,1])-AM[m,1]*T1/((1-BETA[m,1])*V2);
T2=Sum[THETA[m,n,2]*DR[n,2],{n,1}];
U11=Sum[WS[2,i,n](1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,1]*R[2,i,1]/EPS[2,i,n],{n,3}];
U22=Sum[U11,{i,2}];
V11=Sum[3(1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,1]*R[2,i,1],{n,3}];
V22=Sum[V11,{i,2}];
W11=Sum[EPS[2,i,n]*PS[2,i,n],{n,3}];
W22=Sum[W11,{i,2}];
P11=Sum[(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,n]*R[1,i,n],{n,2}];
P111=Sum[P11,{i,2}];
P12=Sum[(1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,n]*R[2,i,n],{n,3}];
P22=Sum[P12,{i,2}];
APM[m,2]=T2 (SPM[m,2]+BETA[m,2]*BSPM[m,2]/(1-BETA[m,2]))-(T2/(1-
BETA[m,2]))(U22/V22+DELM[m,2]+LM[m,2]/V22+GAMAM[m,2]*V22)-SM[m,2]*T2/(1-
BETA[m,2])-0.5(HM[m,2]*V22/(((1-BETA[m,2])*W22)^2))((1-BETA[m,2])*W22-
T2)(-T2+2(1-BETA[m,2])*W22-((1-BETA[m,2])*W22-T2)^2)-HM[m,2]*BETA[m,2]*T2
(V22/(2*W22)+W22/RM[m,2])/(1-BETA[m,2])-AM[m,2]*T2/((1-BETA[m,2])*V22);
X=APM[m,1]+APM[m,2];
EPM=Sum[X,{m,2}];
Y1=Sum[(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,1]*R[1,i,1],{n,2}];
Y2=Sum[Y1,{i,2}];
QY=(1-BETA[m,1])THETA[m,k,1]*Y2;
Q1=Sum[QY,{m,2}];
Z1=SPM[m,1]*THETA[m,k,1];
ZZ1=Sum[Z1,{m,2}];

APR[k,1]=(WR[k,1]-ZZ1)DC[k,1]-0.5*HR[k,1](DR[k,1]-DC[k,1])*Q1-
AR[k,1]*DC[k,1]/Q1;
Y=APR[k,1];
EPR=Sum[Y,{k,1}];
FUNC=-EPR;
FindMinimum[{FUNC,R[1,1,1]>PS[1,1,1]&&R[1,2,1]>PS[1,2,1]&&R[2,1,1]>PS[2,1,1]
&&R[2,2,1]>PS[2,2,1]},{R[1,1,1],100},{R[1,2,1],100},{R[2,1,1],100},{R[2,2,1],100}]

```

ANEXO 3. PROGRAMACIÓN MODELO MATEMÁTICO GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS (3 NIVELES)

```
Array[PS, {2, 2, 3}];
Array[R, {2, 2, 3}];
Array[EPS, {2, 2, 3}];
Array[THETA, {2, 2, 3}];
Array[ALPHA, {2, 2, 3}];
Array[RS, {2, 2, 3}];
Array[CS, {2, 2, 3}];
Array[AS, {2, 2, 3}];
Array[HS, {2, 2, 3}];
Array[PC, {2, 2, 3}];
Array[WS, {2, 2, 3}];
Array[BWS, {2, 2, 3}];
Array[PM, {2, 2}];
Array[BETA, {2, 2}];
Array[AM, {2, 2}];
Array[HM, {2, 2}];
Array[LM, {2, 2}];
Array[DELM, {2, 2}];
Array[SPM, {2, 2}];
Array[BSPM, {2, 2}];
Array[RM, {2, 2}];
Array[SM, {2, 2}];
Array[DR, {2, 1}];
Array[DC, {2, 1}];
Array[AR, {2, 1}];
Array[HR, {2, 1}];
Array[WR, {2, 1}];
Array[WR, {2, 1}];
Array[GAMAM, {2, 2}];
Array[APS, {2, 2}];
Array[APM, {2, 2}];
Array[APR, {2, 1}];
EPS[1, 1, 1]=0.30;
EPS[1, 2, 1]=0.25;
EPS[1, 1, 2]=0.20;
EPS[1, 2, 2]=0.20;
EPS[2, 1, 1]=0.25;
EPS[2, 1, 2]=0.20;
EPS[2, 1, 3]=0.05;
EPS[2, 2, 1]=0.20;
EPS[2, 2, 2]=0.20;
EPS[2, 2, 3]=0.05;
PS[1, 1, 1]=4050;
PS[1, 1, 2]=EPS[1, 1, 1]*PS[1, 1, 1]/EPS[1, 1, 2];
PS[1, 2, 1]=4700;
PS[1, 2, 2]=EPS[1, 2, 1]*PS[1, 2, 1]/EPS[1, 2, 2];
PS[2, 1, 1]=4900;
PS[2, 1, 2]=EPS[2, 1, 1]*PS[2, 1, 1]/EPS[2, 1, 2];
PS[2, 1, 3]=EPS[2, 1, 1]*PS[2, 1, 1]/EPS[2, 1, 3];
PS[2, 2, 1]=4450;
```

```

PS[2,2,2]=EPS[2,2,1]*PS[2,2,1]/EPS[2,2,2];
PS[2,2,3]=EPS[2,2,1]*PS[2,2,1]/EPS[2,2,3];
RS[1,1,1]=5200;
RS[1,1,2]=5670;
RS[1,2,1]=5650;
RS[1,2,2]=5020;
RS[2,1,1]=5945;
RS[2,1,2]=5024;
RS[2,1,3]=5355;
RS[2,2,1]=5500;
RS[2,2,2]=5291;
RS[2,2,3]=5355;
CS[1,1,1]=0.2;
CS[1,1,2]=0.1;
CS[1,2,1]=0.25;
CS[1,2,2]=0.15;
CS[2,1,1]=0.2;
CS[2,1,2]=0.1;
CS[2,1,3]=0.1;
CS[2,2,1]=0.25;
CS[2,2,2]=0.15;
CS[2,2,3]=0.10;
R[1,1,2]=EPS[1,1,1]*R[1,1,1]/EPS[1,1,2];
R[1,2,2]=EPS[1,2,1]*R[1,2,1]/EPS[1,2,2];
R[2,1,2]=EPS[2,1,1]*R[2,1,1]/EPS[2,1,2];
R[2,1,3]=EPS[2,1,1]*R[2,1,1]/EPS[2,1,3];
R[2,2,2]=EPS[2,2,1]*R[2,2,1]/EPS[2,2,2];
R[2,2,3]=EPS[2,2,1]*R[2,2,1]/EPS[2,2,3];
AS[1,1,1]=750000;
AS[1,1,2]=280000;
AS[1,2,1]=645000;
AS[1,2,2]=272000;
AS[2,1,1]=635000;
AS[2,1,2]=280000;
AS[2,1,3]=130000;
AS[2,2,1]=650000;
AS[2,2,2]=272000;
AS[2,2,3]=123000;
HS[1,1,1]=0.3;
HS[1,1,2]=0.25;
HS[1,2,1]=0.3;
HS[1,2,2]=0.25;
HS[2,1,1]=0.3;
HS[2,1,2]=0.25;
HS[2,1,3]=0.15;
HS[2,2,1]=0.3;
HS[2,2,2]=0.25;
HS[2,2,3]=0.15;
ALPHA[1,1,1]=0.09;
ALPHA[1,1,2]=0.09;
ALPHA[1,2,1]=0.08;
ALPHA[1,2,2]=0.08;
ALPHA[2,1,1]=0.10;
ALPHA[2,1,2]=0.09;

```

ALPHA[2,1,3]=0.08;
ALPHA[2,2,1]=0.12;
ALPHA[2,2,2]=0.12;
ALPHA[2,2,3]=0.12;
PC[1,1,1]=26000;
PC[1,1,2]=15500;
PC[1,2,1]=26300;
PC[1,2,2]=15950;
PC[2,1,1]=26000;
PC[2,1,2]=15500;
PC[2,1,3]=14250;
PC[2,2,1]=26300;
PC[2,2,2]=15950;
PC[2,2,3]=14500;
THETA[1,1,1]=1/2;
THETA[1,1,2]=1/2;
THETA[2,1,1]=1/2;
THETA[2,1,2]=1/2;
WS[1,1,1]=45500;
WS[1,1,2]=27500;
WS[1,2,1]=45800;
WS[1,2,2]=29000;
WS[2,1,1]=45500;
WS[2,1,2]=27500;
WS[2,1,3]=15450;
WS[2,2,1]=45800;
WS[2,2,2]=29000;
WS[2,2,3]=16200;
BWS[1,1,1]=26000;
BWS[1,1,2]=15500;
BWS[1,2,1]=26300;
BWS[1,2,2]=15950;
BWS[2,1,1]=26000;
BWS[2,1,2]=15500;
BWS[2,1,3]=14250;
BWS[2,2,1]=26300;
BWS[2,2,2]=15950;
BWS[2,2,3]=14500;
BETA[1,1]=0.08;
BETA[1,2]=0.07;
BETA[2,1]=0.06;
BETA[2,2]=0.07;
AM[1,1]=280000;
AM[1,2]=280000;
AM[2,1]=250000;
AM[2,2]=250000;
HM[1,1]=0.05;
HM[1,2]=0.05;
HM[2,1]=0.05;
HM[2,2]=0.05;
DELM[1,1]=0.015;
DELM[1,2]=0.015;
DELM[2,1]=0.01;
DELM[2,2]=0.01;

```

LM[1,1]=2500000;
LM[1,2]=2500000;
LM[2,1]=2800000;
LM[2,2]=2800000;
GAMAM[1,1]=0.003;
GAMAM[1,2]=0.003;
GAMAM[2,1]=0.002;
GAMAM[2,2]=0.002;
SPM[1,1]=655000;
SPM[1,2]=780000;
SPM[2,1]=650000;
SPM[2,2]=795000;
BSPM[1,1]=220000;
BSPM[1,2]=275000;
BSPM[2,1]=225000;
BSPM[2,2]=280000;
SM[1,1]=0.05;
SM[1,2]=0.04;
SM[2,1]=0.04;
SM[2,2]=0.04;
RM[1,1]=950;
RM[1,2]=740;
RM[2,1]=890;
RM[2,2]=640;
DR[1,1]=1300;
DR[1,2]=1250;
DC[1,1]=1150;
DC[1,2]=1095;
AR[1,1]=375000;
AR[1,2]=350000;
HR[1,1]=0.05;
HR[1,2]=0.04;
WR[1,1]=2196700;
WR[1,2]=1987300;

```

```

U=WS[1,k,n]*PS[1,k,n]+BWS[1,k,n]*ALPHA[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-
PC[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-0.5*HS[1,k,n]*((1-
ALPHA[1,k,n])*(EPS[1,k,1])*(R[1,k,1])*(EPS[1,k,n]^(-1))-
EPS[1,k,1]*R[1,k,1]*HS[1,k,n]*ALPHA[1,k,n]*PS[1,k,n]/((1-
ALPHA[1,k,n])RS[1,k,n]*EPS[1,k,n])-CS[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-
AS[1,k,n]*PS[1,k,n]*EPS[1,k,n]/(EPS[1,k,1]*R[1,k,1]*(1-ALPHA[1,k,n]));
V=WS[2,k,n]*PS[2,k,n]+BWS[2,k,n]*ALPHA[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-
PC[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-0.5*HS[2,k,n]*((1-
ALPHA[2,k,n])*(EPS[2,k,1])*(R[2,k,1])*(EPS[2,k,n]^(-1))-
EPS[2,k,1]*R[2,k,1]*HS[2,k,n]*ALPHA[2,k,n]*PS[2,k,n]/((1-
ALPHA[2,k,n])RS[2,k,n]*EPS[2,k,n])-CS[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-
AS[2,k,n]*PS[2,k,n]*EPS[2,k,n]/(EPS[2,k,1]*R[2,k,1]*(1-ALPHA[2,k,n]));
APS[1,k]=Sum[U,{n,2}];
APS[2,k]=Sum[V,{n,3}];
W=APS[1,k]+APS[2,k];
EAPS=Sum[W,{k,2}];
T1=Sum[THETA[m,n,1]*DR[n,1],{n,1}];

```

```

U1=Sum[WS[1,i,n]*(1-ALPHA[1,i,n])*EPS[1,i,1]*R[1,i,1]/EPS[1,i,n],{n,2}];

```

```

U2=Sum[U1,{i,2}];
V1=Sum[2(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,1]*R[1,i,1],{n,2}];
V2=Sum[V1,{i,2}];
W1=Sum[EPS[1,i,n]*PS[1,i,n],{n,2}];
W2=Sum[W1,{i,2}];

APM[m,1]=T1 (SPM[m,1]+BETA[m,1]*BSPM[m,1]/(1-BETA[m,1]))-(T1/(1-
BETA[m,1]))(U2/V2+DELM[m,1]+LM[m,1]/V2+GAMAM[m,1]*V2)-SM[m,1]T1/(1-
BETA[m,1])-0.5(HM[m,1]*V2/(((1-BETA[m,1])*W2)^2))((1-BETA[m,1])*W2-T1)(-
T1+2(1-BETA[m,1])*W2-((1-BETA[m,1])*W2-T1)^2)-HM[m,1]*BETA[m,1]*T1
(V2/(2*W2)+W2/RM[m,1])/(1-BETA[m,1])-AM[m,1]*T1/((1-BETA[m,1])*V2);
T2=Sum[THETA[m,n,2]*DR[n,2],{n,1}];
U11=Sum[WS[2,i,n](1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,1]*R[2,i,1]/EPS[2,i,n],{n,3}];
U22=Sum[U11,{i,2}];
V11=Sum[3(1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,1]*R[2,i,1],{n,3}];
V22=Sum[V11,{i,2}];
W11=Sum[EPS[2,i,n]*PS[2,i,n],{n,3}];
W22=Sum[W11,{i,2}];
P11=Sum[(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,n]*R[1,i,n],{n,2}];
P111=Sum[P11,{i,2}];
P12=Sum[(1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,n]*R[2,i,n],{n,3}];
P22=Sum[P12,{i,2}];
APM[m,2]=T2 (SPM[m,2]+BETA[m,2]*BSPM[m,2]/(1-BETA[m,2]))-(T2/(1-
BETA[m,2]))(U22/V22+DELM[m,2]+LM[m,2]/V22+GAMAM[m,2]*V22)-SM[m,2]*T2/(1-
BETA[m,2])-0.5(HM[m,2]*V22/(((1-BETA[m,2])*W22)^2))((1-BETA[m,2])*W22-
T2)(-T2+2(1-BETA[m,2])*W22-((1-BETA[m,2])*W22-T2)^2)-HM[m,2]*BETA[m,2]*T2
(V22/(2*W22)+W22/RM[m,2])/(1-BETA[m,2])-AM[m,2]*T2/((1-BETA[m,2])*V22);
X=APM[m,1]+APM[m,2];
EPM=Sum[X,{m,2}];
Y1=Sum[(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,1]*R[1,i,1],{n,2}];
Y2=Sum[Y1,{i,2}];
QY=(1-BETA[m,1])THETA[m,k,1]*Y2;
Q1=Sum[QY,{m,2}];
Z1=SPM[m,1]*THETA[m,k,1];
ZZ1=Sum[Z1,{m,2}];

APR[k,1]=(WR[k,1]-ZZ1)DC[k,1]-0.5*HR[k,1](DR[k,1]-DC[k,1])*Q1-
AR[k,1]*DC[k,1]/Q1;

Y=APR[k,1];
EPR=Sum[Y,{k,1}];
FUNC=-(EAPS+EPM+EPR);
FindMinimum[{FUNC,R[1,1,1]>PS[1,1,1]&&R[1,2,1]>PS[1,2,1]&&R[2,1,1]>PS[2,1,1]
&&R[2,2,1]>PS[2,2,1]},{R[1,1,1],100},{R[1,2,1],100},{R[2,1,1],100},{R[2,2,1],100}]

```

ANEXO 4. PROGRAMACIÓN MODELO MATEMÁTICO GESTIÓN DE INVENTARIOS COLABORATIVOS (2 NIVELES)

```
Array[PS, {2, 2, 3}];
Array[R, {2, 2, 3}];
Array[EPS, {2, 2, 3}];
Array[THETA, {2, 2, 3}];
Array[ALPHA, {2, 2, 3}];
Array[RS, {2, 2, 3}];
Array[CS, {2, 2, 3}];
Array[AS, {2, 2, 3}];
Array[HS, {2, 2, 3}];
Array[PC, {2, 2, 3}];
Array[WS, {2, 2, 3}];
Array[BWS, {2, 2, 3}];
Array[PM, {2, 2}];
Array[BETA, {2, 2}];
Array[AM, {2, 2}];
Array[HM, {2, 2}];
Array[LM, {2, 2}];
Array[DELM, {2, 2}];
Array[SPM, {2, 2}];
Array[BSPM, {2, 2}];
Array[RM, {2, 2}];
Array[SM, {2, 2}];
Array[DR, {2, 1}];
Array[DC, {2, 1}];
Array[AR, {2, 1}];
Array[HR, {2, 1}];
Array[WR, {2, 1}];
Array[WR, {2, 1}];
Array[GAMAM, {2, 2}];
Array[APS, {2, 2}];
Array[APM, {2, 2}];
Array[APR, {2, 1}];
EPS[1, 1, 1]=0.30;
EPS[1, 2, 1]=0.25;
EPS[1, 1, 2]=0.20;
EPS[1, 2, 2]=0.20;
EPS[2, 1, 1]=0.25;
EPS[2, 1, 2]=0.20;
EPS[2, 1, 3]=0.05;
EPS[2, 2, 1]=0.20;
EPS[2, 2, 2]=0.20;
EPS[2, 2, 3]=0.05;
PS[1, 1, 1]=4050;
PS[1, 1, 2]=EPS[1, 1, 1]*PS[1, 1, 1]/EPS[1, 1, 2];
PS[1, 2, 1]=4700;
PS[1, 2, 2]=EPS[1, 2, 1]*PS[1, 2, 1]/EPS[1, 2, 2];
PS[2, 1, 1]=4900;
PS[2, 1, 2]=EPS[2, 1, 1]*PS[2, 1, 1]/EPS[2, 1, 2];
PS[2, 1, 3]=EPS[2, 1, 1]*PS[2, 1, 1]/EPS[2, 1, 3];
PS[2, 2, 1]=4450;
```



```

PS[2,2,2]=EPS[2,2,1]*PS[2,2,1]/EPS[2,2,2];
PS[2,2,3]=EPS[2,2,1]*PS[2,2,1]/EPS[2,2,3];
RS[1,1,1]=5200;
RS[1,1,2]=5670;
RS[1,2,1]=5650;
RS[1,2,2]=5020;
RS[2,1,1]=5945;
RS[2,1,2]=5024;
RS[2,1,3]=5355;
RS[2,2,1]=5500;
RS[2,2,2]=5291;
RS[2,2,3]=5355;
CS[1,1,1]=0.2;
CS[1,1,2]=0.1;
CS[1,2,1]=0.25;
CS[1,2,2]=0.15;
CS[2,1,1]=0.2;
CS[2,1,2]=0.1;
CS[2,1,3]=0.1;
CS[2,2,1]=0.25;
CS[2,2,2]=0.15;
CS[2,2,3]=0.10;
R[1,1,2]=EPS[1,1,1]*R[1,1,1]/EPS[1,1,2];
R[1,2,2]=EPS[1,2,1]*R[1,2,1]/EPS[1,2,2];
R[2,1,2]=EPS[2,1,1]*R[2,1,1]/EPS[2,1,2];
R[2,1,3]=EPS[2,1,1]*R[2,1,1]/EPS[2,1,3];
R[2,2,2]=EPS[2,2,1]*R[2,2,1]/EPS[2,2,2];
R[2,2,3]=EPS[2,2,1]*R[2,2,1]/EPS[2,2,3];
AS[1,1,1]=750000;
AS[1,1,2]=280000;
AS[1,2,1]=645000;
AS[1,2,2]=272000;
AS[2,1,1]=635000;
AS[2,1,2]=280000;
AS[2,1,3]=130000;
AS[2,2,1]=650000;
AS[2,2,2]=272000;
AS[2,2,3]=123000;
HS[1,1,1]=0.3;
HS[1,1,2]=0.25;
HS[1,2,1]=0.3;
HS[1,2,2]=0.25;
HS[2,1,1]=0.3;
HS[2,1,2]=0.25;
HS[2,1,3]=0.15;
HS[2,2,1]=0.3;
HS[2,2,2]=0.25;
HS[2,2,3]=0.15;
ALPHA[1,1,1]=0.09;
ALPHA[1,1,2]=0.09;
ALPHA[1,2,1]=0.08;
ALPHA[1,2,2]=0.08;
ALPHA[2,1,1]=0.10;
ALPHA[2,1,2]=0.09;

```

ALPHA[2,1,3]=0.08;
ALPHA[2,2,1]=0.12;
ALPHA[2,2,2]=0.12;
ALPHA[2,2,3]=0.12;
PC[1,1,1]=26000;
PC[1,1,2]=15500;
PC[1,2,1]=26300;
PC[1,2,2]=15950;
PC[2,1,1]=26000;
PC[2,1,2]=15500;
PC[2,1,3]=14250;
PC[2,2,1]=26300;
PC[2,2,2]=15950;
PC[2,2,3]=14500;
THETA[1,1,1]=1/2;
THETA[1,1,2]=1/2;
THETA[2,1,1]=1/2;
THETA[2,1,2]=1/2;
WS[1,1,1]=45500;
WS[1,1,2]=27500;
WS[1,2,1]=45800;
WS[1,2,2]=29000;
WS[2,1,1]=45500;
WS[2,1,2]=27500;
WS[2,1,3]=15450;
WS[2,2,1]=45800;
WS[2,2,2]=29000;
WS[2,2,3]=16200;
BWS[1,1,1]=26000;
BWS[1,1,2]=15500;
BWS[1,2,1]=26300;
BWS[1,2,2]=15950;
BWS[2,1,1]=26000;
BWS[2,1,2]=15500;
BWS[2,1,3]=14250;
BWS[2,2,1]=26300;
BWS[2,2,2]=15950;
BWS[2,2,3]=14500;
BETA[1,1]=0.08;
BETA[1,2]=0.07;
BETA[2,1]=0.06;
BETA[2,2]=0.07;
AM[1,1]=280000;
AM[1,2]=280000;
AM[2,1]=250000;
AM[2,2]=250000;
HM[1,1]=0.05;
HM[1,2]=0.05;
HM[2,1]=0.05;
HM[2,2]=0.05;
DELM[1,1]=0.015;
DELM[1,2]=0.015;
DELM[2,1]=0.01;
DELM[2,2]=0.01;

```

LM[1,1]=2500000;
LM[1,2]=2500000;
LM[2,1]=2800000;
LM[2,2]=2800000;
GAMAM[1,1]=0.003;
GAMAM[1,2]=0.003;
GAMAM[2,1]=0.002;
GAMAM[2,2]=0.002;
SPM[1,1]=655000;
SPM[1,2]=780000;
SPM[2,1]=650000;
SPM[2,2]=795000;
BSPM[1,1]=220000;
BSPM[1,2]=275000;
BSPM[2,1]=225000;
BSPM[2,2]=280000;
SM[1,1]=0.05;
SM[1,2]=0.04;
SM[2,1]=0.04;
SM[2,2]=0.04;
RM[1,1]=950;
RM[1,2]=740;
RM[2,1]=890;
RM[2,2]=640;
DR[1,1]=1300;
DR[1,2]=1250;
DC[1,1]=1150;
DC[1,2]=1095;
AR[1,1]=375000;
AR[1,2]=350000;
HR[1,1]=0.05;
HR[1,2]=0.04;
WR[1,1]=2196700;
WR[1,2]=1987300;

```

```

U=WS[1,k,n]*PS[1,k,n]+BWS[1,k,n]*ALPHA[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-
PC[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-0.5*HS[1,k,n]*((1-
ALPHA[1,k,n])*(EPS[1,k,1])*(R[1,k,1])*(EPS[1,k,n]^(-1))-
EPS[1,k,1]*R[1,k,1]*HS[1,k,n]*ALPHA[1,k,n]*PS[1,k,n]/((1-
ALPHA[1,k,n])RS[1,k,n]*EPS[1,k,n])-CS[1,k,n]*PS[1,k,n]/(1-ALPHA[1,k,n])-
AS[1,k,n]*PS[1,k,n]*EPS[1,k,n]/(EPS[1,k,1]*R[1,k,1]*(1-ALPHA[1,k,n]));
V=WS[2,k,n]*PS[2,k,n]+BWS[2,k,n]*ALPHA[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-
PC[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-0.5*HS[2,k,n]*((1-
ALPHA[2,k,n])*(EPS[2,k,1])*(R[2,k,1])*(EPS[2,k,n]^(-1))-
EPS[2,k,1]*R[2,k,1]*HS[2,k,n]*ALPHA[2,k,n]*PS[2,k,n]/((1-
ALPHA[2,k,n])RS[2,k,n]*EPS[2,k,n])-CS[2,k,n]*PS[2,k,n]/(1-ALPHA[2,k,n])-
AS[2,k,n]*PS[2,k,n]*EPS[2,k,n]/(EPS[2,k,1]*R[2,k,1]*(1-ALPHA[2,k,n]));
APS[1,k]=Sum[U,{n,2}];
APS[2,k]=Sum[V,{n,3}];
W=APS[1,k]+APS[2,k];
EAPS=Sum[W,{k,2}];
T1=Sum[THETA[m,n,1]*DR[n,1],{n,1}];

```

```

U1=Sum[WS[1,i,n]*(1-ALPHA[1,i,n])*EPS[1,i,1]*R[1,i,1]/EPS[1,i,n],{n,2}];

```

```

U2=Sum[U1,{i,2}];
V1=Sum[2(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,1]*R[1,i,1],{n,2}];
V2=Sum[V1,{i,2}];
W1=Sum[EPS[1,i,n]*PS[1,i,n],{n,2}];
W2=Sum[W1,{i,2}];

APM[m,1]=T1 (SPM[m,1]+BETA[m,1]*BSPM[m,1]/(1-BETA[m,1]))-(T1/(1-
BETA[m,1]))(U2/V2+DELM[m,1]+LM[m,1]/V2+GAMAM[m,1]*V2)-SM[m,1]T1/(1-
BETA[m,1])-0.5(HM[m,1]*V2/(((1-BETA[m,1])*W2)^2))((1-BETA[m,1])*W2-T1)(-
T1+2(1-BETA[m,1])*W2-((1-BETA[m,1])*W2-T1)^2)-HM[m,1]*BETA[m,1]*T1
(V2/(2*W2)+W2/RM[m,1])/(1-BETA[m,1])-AM[m,1]*T1/((1-BETA[m,1])*V2);
T2=Sum[THETA[m,n,2]*DR[n,2],{n,1}];
U11=Sum[WS[2,i,n](1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,1]*R[2,i,1]/EPS[2,i,n],{n,3}];
U22=Sum[U11,{i,2}];
V11=Sum[3(1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,1]*R[2,i,1],{n,3}];
V22=Sum[V11,{i,2}];
W11=Sum[EPS[2,i,n]*PS[2,i,n],{n,3}];
W22=Sum[W11,{i,2}];
P11=Sum[(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,n]*R[1,i,n],{n,2}];
P111=Sum[P11,{i,2}];
P12=Sum[(1-ALPHA[2,i,n])EPS[2,i,n]*R[2,i,n],{n,3}];
P22=Sum[P12,{i,2}];
APM[m,2]=T2 (SPM[m,2]+BETA[m,2]*BSPM[m,2]/(1-BETA[m,2]))-(T2/(1-
BETA[m,2]))(U22/V22+DELM[m,2]+LM[m,2]/V22+GAMAM[m,2]*V22)-SM[m,2]*T2/(1-
BETA[m,2])-0.5(HM[m,2]*V22/(((1-BETA[m,2])*W22)^2))((1-BETA[m,2])*W22-
T2)(-T2+2(1-BETA[m,2])*W22-((1-BETA[m,2])*W22-T2)^2)-HM[m,2]*BETA[m,2]*T2
(V22/(2*W22)+W22/RM[m,2])/(1-BETA[m,2])-AM[m,2]*T2/((1-BETA[m,2])*V22);
X=APM[m,1]+APM[m,2];
EPM=Sum[X,{m,2}];
Y1=Sum[(1-ALPHA[1,i,n])EPS[1,i,1]*R[1,i,1],{n,2}];
Y2=Sum[Y1,{i,2}];
QY=(1-BETA[m,1])THETA[m,k,1]*Y2;
Q1=Sum[QY,{m,2}];
Z1=SPM[m,1]*THETA[m,k,1];
ZZ1=Sum[Z1,{m,2}];

APR[k,1]=(WR[k,1]-ZZ1)DC[k,1]-0.5*HR[k,1](DR[k,1]-DC[k,1])*Q1-
AR[k,1]*DC[k,1]/Q1;

Y=APR[k,1];
EPR=Sum[Y,{k,1}];
FUNC=-(EPM+EPR);
FindMinimum[{FUNC,R[1,1,1]>PS[1,1,1]&&R[1,2,1]>PS[1,2,1]&&R[2,1,1]>PS[2,1
,1]&&R[2,2,1]>PS[2,2,1]},{R[1,1,1],100},{R[1,2,1],100},{R[2,1,1],100},{R[
2,2,1],100}]

```