

ESTIMACIÓN DE ESFUERZOS INDUCIDOS DURANTE EL LLENADO Y  
VACIADO DE SILOS METÁLICOS PARA ALMACENAMIENTO DE CEMENTO

WILMER NEVARDO BAYONA CARVAJAL

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR

FACULTAD DE INGENIERÍA

MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA

CARTAGENA DE INDIAS - BOLÍVAR

2015

ESTIMACIÓN DE ESFUERZOS INDUCIDOS DURANTE EL LLENADO Y  
VACIADO DE SILOS METÁLICOS PARA ALMACENAMIENTO DE CEMENTO

WILMER NEVARDO BAYONA CARVAJAL

Proyecto de grado para optar el título de  
Magíster en Ingeniería Mecánica

DIRECTOR

JAIRO FRANCISCO USECHE VIVERO  
M.Sc., Ph.D. INGENIERIA MECANICA

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE BOLIVAR

FACULTAD DE INGENIERIA  
MAESTRIA EN INGENIERIA MECANICA  
CARTAGENA DE INDIAS – BOLIVAR

2015

## TABLA DE CONTENIDO

<b>RESUMEN.....</b>	<b>11</b>
<b>CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>12</b>
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	14
1.2 REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE.....	15
1.3 OBJETIVOS.....	20
1.3.1 Objetivo General:.....	20
1.3.2 Objetivos Específicos:.....	20
<b>CAPITULO 2. CÁLCULO DE PRESIONES USANDO NORMATIVAS ESTÁNDAR.....</b>	<b>21</b>
2.1 FLUJO EN SILOS, COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL Y TIPOS DE FALLAS [16] [17]. ....	21
2.2 PROPIEDADES FÍSICAS Y COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES A GRANEL. ....	23
2.2.1 Esfuerzos sobre sólidos [18]: .....	23
2.2.2 Yield locus (zona de fluencia) [18]:.....	25
2.2.3 Propiedades de las partículas cohesivas [7] [19]:.....	26
2.3 MODELOS EXPERIMENTALES DESARROLLADOS PARA CALCULAR PRESIONES EN LOS SILOS [11] [20]. ....	31
2.3.1 Experimentos desarrollados por Ravenet:.....	31
2.3.2 Experimentos desarrollados por Kim:.....	33
2.3.3 Ensayos experimentales realizados por Laforge y Boruff:.....	34
2.3.4. Otros experimentos realizados:.....	34
2.4 TEORÍAS CLÁSICAS Y NORMATIVAS PARA EL CÁLCULO DE ESFUERZOS DURANTE EL LLENADO Y VACIADO [1].....	35
2.4.1. Teoría planteada por Janssen:.....	35
2.4.2. Teoría de los hermanos Reimbert: .....	38
2.4.3. Normativa Eurocodigo ENV 1991-4: .....	40
2.4.4. Normativa alemana DIN 1055-6:.....	42
2.4.5. Normativa americana ACI 313-97: .....	42
2.4.6. Normativa International standard ISO-11697: .....	42
2.4.7. Normativa inglesa BMHB: .....	44
2.4.8. Normativa australiana: .....	44
2.5. CALCULO DE PRESIONES CON BASE EN LA NORMATIVA DEL EUROCODIGO ENV 1991-4 [4] [16].....	45
2.5.1 Especificaciones geométricas del silo: .....	45

2.5.2 Propiedades de los materiales granulares involucradas en el cálculo del silo: ....	46
2.5.3 Cálculo de presiones de llenado en el cilindro:.....	48
2.5.4 Cálculo de presiones de llenado en la tolva: .....	50
2.5.5 Cálculo de presiones de vaciado en el cilindro:.....	52
2.5.6 Cálculo de presiones de vaciado en la tolva: .....	54

### **CAPITULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DE FLUJO DE POLVOS ..... 56**

3.1 MODELOS CONSTITUTIVOS BASADOS EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS NO-NEWTONIANOS [3]. .....	56
3.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA FLUJO VISCO-PLÁSTICO INCOMPRESIBLE DE MATERIALES CON FICCIÓN Y COMPRESIÓN [3]. .....	58
3.3 MODELOS PARA DESCARGA DE SILOS MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS (DEM) [22]. .....	62
3.4 MODELO DE SCHAEFFER PARA DESCARGA DE SILOS [22]......	62
3.5 MODELO DE PRINCETON PARA DESCARGA DE SILOS [22]. .....	63
3.6 MODELO DE CSS (CHIALVO–SUN–SUNDARESAN) PARA DESCARGA DE SILOS [22]. ....	64

### **CAPITULO 4. MODELOS FEM DE CASCARAS APLICADOS PARA EL ANÁLISIS DE SILOS [21]. ..... 66**

4.1. GEOMETRÍA Y COMPORTAMIENTO DE LOS ELEMENTOS TIPO SHELL. ....	66
4.2. ELEMENTOS SHELL ISOPARAMÉTRICOS GENERALES. ....	68
4.2.1 Geometría:.....	69
4.2.2 Desplazamientos y deformaciones:.....	71
4.2.3 Matriz de rigidez [K]: .....	72

### **CAPITULO 5. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL SILO ..... 74**

5.1 EXPLICACIÓN GENERAL DEL SOFTWARE A UTILIZAR. ....	74
5.2 PROCEDIMIENTO PARA GENERAR EL MALLADO DEL SILO.....	76
5.3 PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR LOS ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL SILO. .	81
5.3.1 Determinación de esfuerzos en el vaciado:.....	83
5.3.2 Determinación de esfuerzos en el llenado:.....	87
5.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS OBTENIDOS Y DETERMINACIÓN DE FACTORES DE SEGURIDAD DEL SILO. ....	88
5.5 ANÁLISIS DE UN ESFUERZO EN UN SILO CON TOLVAS DE DIFERENTE INCLINACIÓN .....	90
5.5.1 Análisis del silo con tolva de 70 grados de inclinación: .....	91
5.5.2 Análisis del silo con tolva de 50 grados de inclinación: .....	92
5.6 ANÁLISIS DEL UN SILO CON ESTRUCTURA.....	93
5.7 ANÁLISIS MODAL DEL SILO. ....	95

5.8 COMPARACIÓN DE ESFUERZOS CON METODOLOGÍA TEÓRICA [16]. .....	98
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>102</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....</b>	<b>105</b>
<b>ANEXO 1 .....</b>	<b>107</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Tipos de flujos que se pueden presentar en un silo: a. Flujo másico b. Flujo interno c. Flujo canal.....	22
Figura 2.2. Elemento solido de un recipiente. ....	24
Figura 2.3. Elemento triangular, Círculo de Mohr. ....	24
Figura 2.4. Rotula de un sólido tras su compactación. ....	25
Figura 2.5. Representación de círculos de Mohr correspondientes a distintos procesos de compresión. ....	26
Figura 2.6. Densidad de “solidos y unconfined yield” stress en función de la tensión normal aplicada. ....	26
Figura 2.7. Flujo característico instantáneo, estacionario y con tiempo yield locus como una combinación local. Tomado de [7].....	28
Figura 2.8. Separación en el punto de contacto de dos esferas. Tomada de [19] .....	30
Figura 2.9. Función de instantánea y de tiempo de consolidación para el oxido de titanio. Tomado de [7]. ....	30
Figura 2.10. Flujo de vaciado centrado según Ravenet. Tomado de [11]. ....	32
Figura 2.11. Flujo de vaciado centrado según Ravenet. Tolva con 40°. Tomado de [11]. .....	32
Figura 2.12. Flujo de vaciado centrado según Ravenet. Tolva perfil hiperbólico. Tomado de [11]. ....	33
Figura 2.13. Flujo de vaciado centrado según Ravenet. Tolva con 70°. Tomado de [11]. .....	33
Figura 2.14. Comportamiento del material dentro de maqueta. Tomado de [20]. ....	35
Figura 2.15. Presiones presentes en un silo. Tomado de [1].....	36
Figura 2.16. Presiones del material en función de la altura del silo. Tomado de [1]. ....	38
Figura 2.17. Variación de 1/k con respecto a la profundidad del silo. Tomado de [1]. ...	39
Figura 2.18. Dimensiones generales para el silo de los hermanos Reimbert. Tomado de [1]. ....	39
Figura 2.19. Variación de la fuerza de rozamiento respecto a la altura. Tomado de [1]. .....	40

Figura 2.20. Cálculo de presiones sobre una tolva según ISO-11967. Tomado de [1].	43
Figura 2.21. Relación entre $C_t$ (Coeficientes de sobrepresión) con $\alpha$ ( inclinación de la tolva ) y $\phi$ ( coeficiente de fricción del material )	44
Figura 2.22. Geometría del silo a diseñar.	45
Figura 2.23. Presión de llenado sobre el cilindro.	48
Figura 2.24. Presiones de llenado sobre la tolva.	51
Figura 2.25. Presiones de vaciado del silo en el cilindro	53
Figura 2.26. Presiones de descarga en la tolva	54
Figura 4.1. Elementos shells de revolución con sus diferentes radios de curvatura.	66
Figura 4.2. Modelado de una intersección de tubería mediante elementos shell.	68
Figura 4.3. Elemento shell con diferente configuración de nodos.	69
Figura 4.4. (a) Nodo típico $i$ con espesor en la dirección del vector $V_{3i}$ (b) Vector ortogonal del nodo $i$ y sus grados de libertad (c) Desplazamiento de un punto $P$ sobre $V_{3i}$	69
Figura 5.1. Variables de entrada del silo.	76
Figura 5.2. Generación keypoint para generar la geometría del silo.	77
Figura 5.3. Generación de línea con base en keypoint.	77
Figura 5.4. Generación de áreas del cilindro y de la tolva.	78
Figura 5.5. Generación de áreas del cinturón y de sus refuerzos.	78
Figura 5.6. Generación de áreas del techo.	79
Figura 5.7. Generación de malla.	79
Figura 5.8. Detalle malla cono.	80
Figura 5.9. Detalle malla techo.	80
Figura 5.10. Detalle malla cinturón.	80
Figura 5.11. Comparativo de una malla con un tamaño de elemento 100mm y 200mm.	80
Figura 5.12. Valores de entrada de hoja de cálculo de presiones sobre el silo.	81
Figura 5.13. Cálculo de presiones sobre la superficie del cilindro y de la tolva del silo.	82
Figura 5.14. Curvas de presiones del llenado y vaciado en el cilindro y cono del silo.	82
Figura 5.15. Fuerzas equivalentes a la presión sobre la sección cilíndrica del silo.	83
Figura 5.16. Fuerzas equivalentes a la presión sobre la sección cónica del silo.	84
Figura 5.17. Condiciones de contorno del silo.	84

Figura 5.18. Esfuerzo de von Mises para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos ubicados en los refuerzos del cinturón. Valor máximo 0.166GPa.....	85
Figura 5.19. 1er y 2do Esfuerzos principal para el vaciado, 0.160GPa y 0.078GPa respectivamente. El 3er esfuerzo se puede despreciar ya que es 6Pa. ....	85
Figura 5.20. Esfuerzos cortantes en XY y XZ para el vaciado con valores de 0.081GPa y 0.052GPa respectivamente. El esfuerzo YZ no tiene el mismo valor de XY.....	85
Figura 5.21. Suma de desplazamientos para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cilíndricas.....	86
Figura 5.22. Desplazamientos en el eje X para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cartesianas.....	86
Figura 5.23. Desplazamientos en el eje Y para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cartesianas.....	86
Figura 5.24. Desplazamientos en el eje Z para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cartesianas.....	87
Figura 5.25. Sumatoria de las componentes de rotación para el vaciado en cada uno de los ejes cartesianos. ....	87
Figura 5.26. Esfuerzo de von Mises para llenado - vista general y detalle de de sus puntos críticos ubicados en los refuerzos del cinturón. Valor máximo 0.183GPa.....	88
Figura 5.27. Suma de desplazamientos para el llenado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cilíndricas.....	88
Figura 5.28. Resultados de varios modelos de un silo de 1020Ton. ....	89
Figura 5.29. Esfuerzo de von Mises del modelo 5 - Izquierda llenado y derecha vaciado.....	90
Figura 5.30. Suma de desplazamientos del modelo 5 - Izquierda llenado y derecha vaciado.....	90
Figura 5.31. Curva de presiones de silo con tolva de 70 grados de inclinación.....	91
Figura 5.32. Esfuerzo de Von Mises del modelo 5 con tolva de 70 grados - Izquierda llenado con 0.100GPa y derecha vaciado con 0.145GPa. ....	91
Figura 5.33. Suma de desplazamientos del modelo 5 con tolva de 70 grados - Izquierda llenado con 4mm como máximo y derecha vaciado con 7.8mm máximo.....	92
Figura 5.34. Curva de presiones de silo con tolva de 50 grados de inclinación.....	92



Figura 5.35. Esfuerzo de Von Mises del modelo 5 con tolva de 50 grados - Izquierda llenado con 0.213GPa y derecha vaciado con 0.197GPa. ....	93
Figura 5.36. Suma de desplazamientos del modelo 5 con tolva de 50 grados - Izquierda llenado con 6.9mm como máximo y derecha vaciado con 7.1mm máximo... ..	93
Figura 5.37. Esfuerzo de Von Mises del modelo 5 con estructura - Izquierda llenado con 0.124GPa y derecha vaciado con 0.137GPa.....	94
Figura 5.38. Suma de desplazamientos del modelo 5 con estructura - Izquierda llenado con 9.7mm como máximo y derecha vaciado con 9.4mm máximo. ....	94
Figura 5.39. Modo de vibración uno (1) silo sin estructura con valor de $9.27 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.014mm. ....	95
Figura 5.40. Modo de vibración dos (2) silo sin estructura con valor de $9.27 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.014mm. ....	95
Figura 5.41. Modo de vibración tres (3) silo sin estructura con valor de $9.41 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.013mm. ....	96
Figura 5.42. Modo de vibración cuatro (4) silo sin estructura con valor de $9.5 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.013mm. ....	96
Figura 5.43. Modo de vibración cinco (5) silo sin estructura con valor de $10 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.014mm. ....	96
Figura 5.44. Modo de vibración uno (1) silo con estructura con valor de $6.58 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.005mm. ....	97
Figura 5.45. Modo de vibración dos (2) silo con estructura con valor de $6.58 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.005mm. ....	97
Figura 5.46. Modo de vibración tres (3) silo con estructura con valor de $9.46 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.014mm. ....	97
Figura 5.47. Modo de vibración cuatro (4) silo con estructura con valor de $9.46 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.014mm. ....	98
Figura 5.48. Modo de vibración cinco (5) silo con estructura con valor de $9.73 \times 10^{-3}$ Hz y una deformación máxima de 0.013mm. ....	98
Figura 5.49 Tensiones sobre una cascara cilíndrica. ....	99
Figura 5.50. Tensiones sobre una cascara cónica. ....	99
Figura 5.51 Curvas de esfuerzo presentado en el cilindro: resultados analíticos comparados con resultados de ANSYS, tanto en el llenado como en la descarga.....	100

## LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1. Clases de confiabilidad en silos de acuerdo a capacidades y excentricidades de carga o llenado.....	41
Tabla 2.2. Relación de aspecto y clase de silo según su esbeltez.....	41
Tabla 2.3. Categorización de la superficie de la pared.....	47
Tabla 2.4. Clasificación de máximo o mínimo valor de las variables del material según el caso.....	47

## RESUMEN.

La presente investigación se enfoca en el estudio y desarrollo de las diferentes áreas que están involucradas en el cálculo de un silo de cemento para poder estimar los esfuerzos inducidos durante su llenado y vaciado.

Inicialmente se estudian las diferentes normativas desarrolladas en años anteriores para el cálculo de presiones de los silos, en esta parte se encuentra los diferentes procedimientos tanto teóricos como experimentarles que se desarrollan para calcular las presiones. Allí también se puede encontrar el análisis de las todas las variables que rigen el comportamiento de los materiales granulados y pulverizados que son almacenados en silos metálicos.

Seguidamente se expone una resumen de los diferentes modelos matemáticos desarrollados con fluodinámica computacional (CFD) los cuales son capaces de describir el comportamiento del material pulverizado dentro del silo, para poder determinar las presiones que el material ejerce sobre los silos.

Dentro del presente trabajo se estudia brevemente los modelos de elementos finitos tipo cascaras los cuales son los más adecuados para representar a la geometría del silo y de esta manera poder realizar su análisis estructural que permita determinar esfuerzos y deformaciones ocasionadas por las presiones previamente calculadas.

Finalmente se determinan los esfuerzos inducidos durante el llenado y vaciado del silo mediante un análisis por elementos finitos con soporte del programa ANSYS-APDL. En esta parte del trabajo es explica cada una de las fases involucradas en el desarrollo del modelo y se hace un análisis detallado de los resultados arrojados por el software, de igual forma se realizan comparaciones de resultados cuando se analizan silos con tolvas de diferente grado de inclinación, se analiza el comportamiento del silo con y sin estructura y se hace un análisis modal para encontrar los modos de vibración del silo con y sin estructura.

## CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN

Con el crecimiento del sector de la construcción llega una alternativa de mini-plantas de cemento que suplen mercados regionales; debido al menor tamaño de estas plantas los silos metálicos se convierten en la mejor opción para suplir las necesidades de almacenaje, su costo accesible, fácil fabricación y montaje los hace más eficientes que los silos de concreto. En diferentes etapas del proceso de fabricación del cemento son utilizados estos silos para almacenaje y manipulación del material, especialmente antes de ser empacado.

Para realizar el diseño de un silo metálico de manera eficiente, se deben tener en cuenta diferentes variables que afectan el comportamiento del material dentro del silo y lo cual es fundamental para determinar las cargas que determinaran el comportamiento estructural del silo.

Inicialmente hay que tener claro que el material almacenado en el silo juega un papel crítico en el resultado del análisis estructural que se va a realizar, diferentes características físicas del material influyen sobre la resultante de las fuerzas que generan la presión sobre las caras del silo. Por lo anterior se debe realizar un estudio del comportamiento del material y de sus propiedades físicas ya que el cemento como material pulverizado que es, tienen un comportamiento específico, entre fluido y sólido.

Los métodos tradicionales y soportados en normativas estándar con las que se diseñan y calculan actualmente los silos, no son capaces de describir de forma satisfactoria el complejo comportamiento del material almacenado de una manera cualitativa y cuantitativa. Las diferentes normas para cálculo de silos que se han publicado presentan variaciones en las presiones de hasta tres veces, lo que conlleva a tener modelos muy conservadores y por ende muy costosos, o en su defecto realizar un diseño muy justo con alta incertidumbre de su capacidad real.

Existen sin embargo bibliografías especializadas basadas en normativas estándar que permiten realizar el cálculo de silos metálicos de una manera eficiente, además son la parte teórica para desarrollar un modelo matemático que permita determinar las presiones al momento del llenado y vaciado del silo, permitiendo visualizar el comportamiento de las presiones sobre las paredes. Con un modelo que pueda variar las propiedades del material almacenado y ajustar las características geométricas del silo, el diseñador estará en la capacidad de evaluar la mejor condición para determinado escenario, teniendo como resultado un diseño adecuado que se ajuste a las necesidades específicas de un caso.

Es importante conocer que hay otra alternativa para estudiar y calcular los silos, en este caso visualizado desde la fluidodinámica computacional que permite analizar el material dentro del silo como un fluido. Se han desarrollado varios modelos que representan este comportamiento y que son la base para desarrollar modelos fluidodinámicos en plataformas CFD. Para entender estos modelos se justifica una exhausta investigación acerca de los modelos constitutivos del cemento, las fuentes son limitadas y se hace necesario indagar en otros campos de la ingeniería tales como la reología; área de la física que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación en los materiales que son capaces de fluir; con el objetivo de encontrar ecuaciones para modelar este comportamiento, ecuaciones que son en general de carácter tensorial. Este trabajo se limita a nombrar y describir dichos modelos constitutivos y no a la aplicación de estos en los modelos computacionales que se desarrollan.

Una vez se tengan determinadas las diferentes presiones tanto en el llenado como en el vaciado del silo, se puede hacer su análisis estructural. Para lo anterior se requiere desarrollar un modelo con elementos finitos, no sin antes buscar el elemento más adecuado para representar la geometría metálica del silo. Los elementos tipos cáscara o más comúnmente conocidos como elementos tipo shell se describen en el desarrollo de este trabajo ya que son estos los elementos con los que se modela el silo.

Durante el proceso de llenado y vaciado del silo, se determinan las presiones que están sobre las paredes tanto del cilindro como de la tolva, este procedimiento se desarrolla mediante una hoja de cálculo que involucra cada una de las variables que están presentes en el cálculo de las presiones y desarrolladas con las normativas estándar estudiadas. Para determinar algunas variables del silo es necesario que se defina la geometría del mismo, por lo que la hoja de cálculo debe tener como entradas las dimensiones del silo además de las características del material a almacenar. Con estos valores y con la información contenida en ella, se obtienen como resultado del cálculo las presiones tanto de llenado como de vaciado en la parte cilíndrica y en la tolva del silo.

El análisis estructural del silo se realiza por medio de un modelo computacional con elementos finitos para determinar el espesor de pared óptimo que debe tener el silo. La primera parte se desarrolla en un archivo de texto donde se genera un código con comandos del software ANSYS-APDL, que permite definir la geometría del silo. Este archivo tiene como entrada todas las variables del silo que permiten parametrizar cualquier tipo de geometría que se desee. Adicionalmente en este archivo se pueden modificar las características de la malla al seleccionar el tipo, la cantidad y el tamaño de elementos que esta debe tener. También allí se aplican las cargas determinadas de forma analítica y las cuales representan a la presión ejercida por el material sobre las paredes del silo. Esta geometría es llevada a ANSYS-APDL donde se corre el

programa y son evaluados y analizados los resultados para obtener el diseño adecuado del silo. También se analiza la variación de sus esfuerzos cuando cambia el ángulo de inclinación de la tolva y cuando se analiza en conjunto con la estructura que lo soporta. Finalmente mediante un análisis modal se determinan los modos de vibración que el silo va a tener, con y sin estructura.

### 1.1 Planteamiento del problema.

En la industria cementera se tienen múltiples etapas de fabricación de producto y se requiere almacenaje bien sea de materias primas, material de proceso o producto terminado, tal necesidad la suplen silos de diferentes capacidades y tamaños que requieren ser calculados en la etapa de diseño de la planta o cuando se realiza la ampliación o modificación de esta. Uno de los principales silos del proceso de fabricación de cemento, es el que almacena el cemento que está listo para pasar al proceso de empaque, este silo está en línea y constantemente se llena y se vacía, dependiendo de las necesidades de despacho del producto.

Debido al elevado crecimiento del sector de la construcción y el manejo de diferentes necesidades comerciales de los constructores, los cuales buscan independizarse de las fluctuaciones del costo del cemento fijadas por las grandes cementeras mundiales, hoy en día se fabrican mini-plantas de cemento que suplen mercados regionales y las cuales han resultado ser bastante eficientes, para este tipo de plantas resulta óptimo usar silos de chapa metálica debido a su mediano tamaño y no fabricarlo en concreto como comúnmente se hace en las grandes plantas.

El adecuado análisis y cálculo de las cargas que son ejercidas por el material sobre el silo durante el llenado y vaciado, y su aplicación a un modelo de elementos finitos que describa los esfuerzos y deformaciones en el llenado y vaciado del silo, permite escoger los espesores de las laminas mas adecuados para realizar un mejor diseño y así reducir los costos de fabricación y montaje de un silo.

A la fecha en Colombia no se ha realizado un estudio que reúna las diferentes teorías para determinar las presiones sobre el silo, bien sea por normativas estándar o por modelos constitutivos desarrollados con CFD, tampoco se han desarrollado modelos computacionales que realicen el análisis estructural de las paredes del silo mediante elementos tipo shell. Quien tenga acceso a la información desarrollada en este proyecto puede aplicar los modelos realizados ajustándolos a las necesidades que requiera, teniendo como producto final un diseño económico que sea competitivo con otras empresas de diseño de silos.

## 1.2 Revisión del estado del arte.

Un gran avance en la investigación del diseño de silos se lleva a cabo con la aparición de los ordenadores, los cuales permitieron la aplicación del método de los elementos finitos al análisis estructural de las paredes del silos, así Mahmoud et al., (1975) y Joffriet et al., (1977) con sus modelos realizados, dieron origen a la etapa de investigación de las presiones sobre los silos mediante modelos computacionales, estos estudios arrojaron como resultados avances del comportamiento del grano con la pared del silo, el pandeo, los efectos térmicos y la influencia del espesor de las paredes en la presión del silo.

El trabajo Haussler et al., (1984) presenta un método numérico para simular el proceso de descarga en silos con flujo másico, como punto principal se tiene la formulación apropiada de una ley constitutiva para materiales granulares a granel, la cual cubre todo tipo de sólidos y el comportamiento de todo tipo de fluidos durante la descarga. Para lo anterior es escogida una ley elástico-plástica la cual se complementa con una simple primera aproximación del comportamiento del tipo de fluido. Como puede ocurrir una grande y rápida deformación, las linealidades geometrías y propiedades de masa del material a granel son considerados con respecto a un marco de referencia Euleriano. El conjunto completo de ecuaciones de campo son numéricamente resueltas por el método de elementos finitos para espacio y por el método de diferencias finitas para tiempo; debido a la naturaleza del método de elementos finitos una amplia variedad de condiciones de frontera pueden ser estudiadas. El método entrega velocidades transitorias y campos de esfuerzo dentro del material a granel para el periodo de descarga y son calculadas las redistribuciones de esfuerzos con el aumento de presiones sobre las paredes [2].

Elaskar et al., (1996) presenta en su trabajo el flujo de materiales granulares y polvos sujeto a la fuerza gravitacional en silos es simulado por medio de una formulación viscoplástica, se presentan dos modelos constitutivos deducidos de la expresión de Perzyna para viscoplasticidad; el material es modelado como un fluido no-Newtoniano, en el cual viscosidad aparente depende de parámetros constitutivos (fricción interna, cohesión y fluidez), y dinámicos (presión y segundo tensor velocidad de deformación). Resuelve el fenómeno por medio de elementos finitos, usando funciones de penalización, en casos planos y con simetría axial; mediante un proceso iterativo utilizado se llega a en la solución del problema no lineal, el principal objetivo es encontrar las cargas sobre las paredes del silo [3].

Aguado et al., (1997) en este trabajo se ha desarrollado modelos en elementos finitos de descarga de silos axilsimétricos con tolva y de silos de pared ondulada. Para su utilización fue necesario determinar experimentalmente varios parámetros del material

ya que apenas existían datos en la bibliografía, revelándose algunos de ellos como de gran influencia en las presiones sobre las paredes del silo durante el vaciado. Los modelos han sido desarrollados con el programa ANSYS, que cuenta con una gran difusión, por lo que estos modelos pueden ser fácilmente usados por otros ingenieros.

Los modelos propuestos se basan en la consideración de la onda de sobrepresiones propuesta por pioneros en el análisis de silos como Jenike et al., (1964), pero determinada mediante elementos finitos y teniendo en cuenta unas líneas de deslizamiento con contacto y expansión por ángulo de dilatación. Se simula el vaciado forzando el movimiento del grano en los primeros momentos, dado que experimentalmente ha sido probado que es, en esta fase, en la que se producen mayores sobrepresiones, se hace un análisis de la influencia de los distintos parámetros y se comparan los resultados con los obtenidos mediante el Eurocódigo 1, parte 4 et al., (1995) [4]. En esta investigación se encuentra la comparación de un modelo por elementos finitos y las teorías clásicas usadas en el cálculo de silos. Sin embargo el estudio se limita únicamente al caso de silos agrícolas [5].

Rotter et al., (1998) realizan un estudio explorando las predicciones de diferentes modelos de silos, con varios grupos de investigación con problemas donde no existen resultados experimentales, este trabajo presenta brevemente un estudio para predecir la capacidad con los elementos discretos y los elementos finitos para calcular el comportamiento de los sólidos granulares en silos. Se establece el mismo ejercicio para realizar el análisis por los dos métodos y encontrar sus fortalezas; los hallazgos más importantes describen tres problemas típicos de silos, llenado de un silo, descarga de sólidos granulares con silos de fondo plano y descargas con una tolva cónica, ambos métodos computacionales muestran deficiencias para los ejercicios con una dificultad alta sin embargo se puede encontrar acá una base para estudios comparativos entre los métodos nombrados [6].

En el trabajo de Tomas et al., (2001) son explicados los fundamentos de las partículas sólidas cohesivas y las propiedades de su flujo usando una combinación de mecánica de partícula y mecánica de medios continuos, mediante micro-macro transición "contacto característico de la partícula". Este modelo de adhesión se usa para derivar tiempo estacionario, instantáneo, esfuerzo de fluencia y consolidación de fluencia; seguidamente el esfuerzo de compresión uniáxica, el ángulo efectivo de fricción interna y la densidad bulk, son obtenidos como funciones constitutivas del polvo. El enfoque dado a la investigación ha demostrado ser eficaz para la evaluación de los datos de propiedades de flujo del polvo cohesivas, por último, estos modelos en combinación con los resultados de pruebas de corte sobre probetas son utilizados como funciones constitutivas para el diseño confiable de un silo con un modelo asistido por ordenador [7].



Yanes et al., (2001) en este artículo se encuentra un análisis de la distribución de presiones estáticas en silos cilíndricos con tolva excéntrica usando el programa ANSYS 5.5. Basado en el Método de los Elementos Finitos. Según los resultados obtenidos con el empleo de anterior método, los empujes normales máximos en la pared del silo se sitúan en la unión del cilindro con tolva, del lado contrario al del desplazamiento de la boca de salida, para cualquier excentricidad aumentando en este punto, a medida que aumenta la excentricidad de la tolva. Comparando con el Eurocódigo, mientras que éste propone unos empujes estáticos para tolva centrada, y los considera válidos hasta una excentricidad límite de 0,25 veces el diámetro del círculo inscrito en la sección transversal del silo, mediante el M.E.F podemos observar la redistribución de los mismos en la pared de la tolva cuando ésta es excéntrica, aumentando del lado opuesto al desplazamiento de la boca de salida y disminuyendo del lado contrario. Lo anterior lleva a concluir que se podría utilizar un método de cálculo menos conservador, en el Eurocódigo para los empujes normales a la pared de la tolva, cuando ésta se encuentra centrada y elaborar unos coeficientes que recogiesen las variaciones que se producen en estado estático cuando se descentra la misma.

Específicamente se estudia las presiones debidas al material cuando se encuentra en reposo, excluyendo en su análisis el comportamiento dinámico del material en el momento que se está descargando. Por otra parte el análisis se hace únicamente a silos agrícolas [8].

El trabajo realizado por Ercoli et al., (2004) tiene por objetivo fundamental efectuar el estudio de un proyecto correspondiente a un silo de Clinker, tipología estructural de gran aplicación en las industrias de proceso continuo, como es el caso de la operatoria de las industrias cementeras. El problema tratado abarca varios aspectos: estudio teórico del problema, implementación del modelo computacional, interpretación de resultados; contando con la documentación correspondiente al proyecto del mismo. Para el diseño se tuvieron en cuenta las disposiciones del Código ACI 313 y el Reglamento CIRSOC, dada la exigencia de cumplimentar algunos requisitos para el silo en cuestión, de manera de permitir que la planta del mismo sea tal que permita que el material ensilado pierda temperatura y debe también cumplir la condición de estanqueidad, a los fines de que el material ensilado no entre en contacto con la humedad. Los resultados alcanzados a través de la implementación del modelo computacional, se encuentran en una satisfactoria aproximación con los resultados implementados con la teoría clásica. Asimismo del análisis computacional efectuado se visualiza la importancia relevante que guardan consigo las condiciones de borde, las cuales deben representar lo más fielmente a las diseñadas para la estructura en cuestión [9].

Ayuga et al., (2005) Debido a las dificultades encontradas en la aplicación de modelos con elementos finitos donde se requiere un alto conocimiento de parámetros de la mecánica de los materiales a granel, se desarrolla una investigación que contiene pruebas que incluyen la determinación de parámetros del material a granel relacionados con el análisis de explosiones, los cuales son necesarios para un diseño adecuado, la protección y prevención de daños en las instalaciones. La investigación se centra en tres prototipos de silos experimentales, diseñados con tres tolvas con diferentes excentricidades de vaciado. El muro se ha hecho del acero suave, suficiente espesor y refuerzos que deben considerarse rígido. Sensores especialmente diseñados se han ubicado en estos silos con el fin de medir la presión horizontal y la fuerza de fricción entre la pared y el material a granel. La presión es medida por celdas horizontales las cuales detectan la deflexión de una placa delgada circular por medio de cuatro medidores de deformación y el sensor de fuerzas de fricción se mide por la deformación de una pequeña viga en voladizo [10].

Ercoli et al., (2007) hace una evaluación de las principales causas de falla en silos para granos esto asociado a las presiones excesivas ejercidas sobre la pared del silo durante la descarga de los mismos. Dentro de las teorías tradicionales, se han realizado muchos intentos para obtener expresiones matemáticas que reflejen la sobrepresión producida debido a la descarga del material ensilado. Una nueva posibilidad de investigación aparece en estos tiempos con la aplicación de la simulación numérica computacional de estas tipologías estructurales. En la modelización se aplican conceptos de análisis no lineal, y una ley elasto-plástica constitutiva es aplicada a silos cilíndricos con tolvas y paredes rígidas, según el criterio de Drucker-Prager.

Para efectuar el análisis se generan modelos de silos para condiciones estáticas y dinámicas, procesos de carga y descarga, capaces de simular el comportamiento de material granular almacenado en silos, la influencia del tipo de pared y las características geométricas del silo, como asimismo los parámetros relacionados con el material granular almacenado. Los modelos numérico-computacionales constituyen un medio eficaz para determinar la distribución de presiones en ambos procesos. En este trabajo se analiza la influencia de la interacción grano-pared durante la descarga centrada sobre el comportamiento de silos para materiales granulares con y sin tolva, modelando dicha interacción mediante la introducción de elementos de contacto y planos de deslizamientos, a través de un análisis dinámico. En el estudio la aplicación se limita a silos agrícolas, de pared no delgada y el análisis se centra en la influencia de la interacción grano-pared durante la descarga y no se realiza un modelado del flujo del material. Por otra parte en los resultados se observan algunas diferencias bastante notorias si se comparan con los métodos manuales tradicionales encontrados por Janssen y Ravent [11] .

Halsey et al., (2009), teniendo en cuenta que la fricción juega un papel clave en la reología de los flujos granulares tanto en estado crítico como en flujos granulares densos, propuso que la fricción y la inelasticidad en estos flujos pueden estar directamente relacionados con dichas reologías, particularmente resumido en la "regla flujo Pouliquen." Construyeron un ejemplo explícito de un estado tal que  $D = 2$ , y demostraron que esfuerzo cortante organizado puede existir sólo en este estado de las escalas de  $l < d / I$ , donde  $d$  es el tamaño de grano e  $I$  es el número de inercia, que caracteriza el equilibrio entre las fuerzas de inercia y la presión en el flujo. Por encima de esta escala material almacenado se desestabiliza por las fuerzas centrífugas, similares conclusiones se pueden extraer en envases que contienen desordenados los granos; se comenta sobre la posible relación entre esta escala de longitud y lo que ha planteado la hipótesis del control de la reología [12].

Ripp et al., (2010) describe en su trabajo como analizar la influencia de la temperatura sobre el comportamiento del flujo de sólidos a granel. Una prueba de anillo cortante desarrollado recientemente muestra que el comportamiento del flujo de algunos sólidos a granel específicos depende de la temperatura. Consideraciones de pandeo surgen en el diseño de los silos y tanques de acero debido a la pared del depósito delgado que se somete a esfuerzos de compresión, más comúnmente de la acción del viento sobre la estructura vacía causando tensiones circunferenciales y combinaciones de las fuerzas de fricción de la pared, las cargas de techo, llenado y vaciado no uniformes, y la solución de la fundación provocando tensiones meridionales no uniformes, sin embargo no se realiza un análisis flujométrico del material para determinar las presiones sobre las paredes del silo [13].

González et al., (2011) Describe el desarrollo de modelos 3D de elementos discretos capaces de simular el flujo durante su descarga de un modelo de silo cuadrado pequeño. Representados como una combinación de esferas los granos de maíz dentro del silo. Un modelo preliminar para cada material se calculó basándose en los valores de variables medidas en el laboratorio y tomado en literatura del tema. La capacidad de los modelos para predecir el flujo de estos materiales se obtuvo, mediante la comparación de sus resultados con las corrientes de descarga observadas; tres variables se registraron para este: la densidad aparente media al final de la fase de llenado, la velocidad de descarga y el patrón de flujo. La comparación de los resultados para la última de estas variables requiere el proceso de descarga ser filmado usando una cámara de alta velocidad con el fin de reconocer más fácilmente los detalles del flujo. El modelo preliminar hizo predicciones muy razonables, pero para los granos de maíz requiere de calibración. Esto implicaba la modificación de los valores de las propiedades de fricción del material hasta un modelo capaz de hacer predicciones aceptables. Los resultados obtenidos revelaron la influencia de las propiedades de fricción sobre las características del flujo de descarga. Finalmente, algunos de los

resultados numéricos proporcionados por los modelos se analizaron con el fin de describir las características de flujo y el comportamiento de la velocidad de descarga con más detalle, en este estudio no se tiene en cuenta el comportamiento de las presiones sobre las paredes del silo y se limita a la geometría cuadrada sobre la que se hicieron los análisis [14].

Ding et al., (2011), adoptó un nuevo enfoque de llenado progresivo para representar el proceso de llenado. Se utiliza la pared de una tolva cónica simétrica al eje vertical para explorar el desarrollo de la distribución de la presión en durante el proceso de llenado. Las cargas se interpretan como normales debidas a la presión y de tracción por fricción y los resultados se compararon con los obtenidos en un análisis convencional de llenado 'conmutación-en la gravedad'. Los resultados de ambos análisis se comparan entonces con los cálculos basados en las teorías clásicas para determinar las presiones que actúan sobre la pared de una tolva inclinada. El análisis encontrado entre los diferentes tratamientos indica que la estrategia numérica de llenado progresivo elegido es útil para aplicaciones en las soluciones analíticas [13].

### 1.3 Objetivos.

#### 1.3.1 *Objetivo General:*

Estimar los esfuerzos inducidos durante el llenado y vaciado de silos metálicos para almacenamiento de cemento con el software de elementos finitos ANSYS-APDL, determinando las presiones sobre las paredes con normativas existentes.

#### 1.3.2 *Objetivos Específicos:*

- Mediante normativas existentes determinar las presiones sobre sus paredes durante el llenado y vaciado del material.
- Desarrollar un modelo paramétrico en ANSYS-APDL que permita determinar los esfuerzos y deformaciones del silo cuando es sometido a las presiones de llenado y vaciado.
- Determinar los espesores de lámina adecuados que debe tener el silo en las diferentes secciones del cilindro y la tolva con el fin de reducir el peso del mismo, analizar la variación de sus esfuerzos cuando cambia el ángulo de inclinación de la tolva y cuando se analiza en conjunto con la estructura que lo soporta.

## CAPITULO 2. CÁLCULO DE PRESIONES USANDO NORMATIVAS ESTÁNDAR

### 2.1 Flujo en silos, comportamiento estructural y tipos de fallas [16] [17].

El principal problema en la mayoría de los sistemas de almacenamiento a granel es establecer un modo racional de extraer los productos para su transporte. Además de las dificultades del diseño de equipos adecuados y de la gran variedad de ellos que existe para los distintos materiales, se generan sobre la estructura del silo esfuerzos adicionales por el vaciado. En el transcurso de la historia se han desarrollado diferentes investigaciones las cuales han llevado a admitir que la aparición de sobre esfuerzos y su magnitud está relacionada con los tipos de flujo de vaciado que se producen. Los tipos de flujo se pueden clasificar en:

**Flujo másico:** Es en el cual toda la masa ensilada se pone en movimiento simultáneamente; alrededor de la salida aumenta la velocidad del material. Las sobrepresiones en las paredes son grandes. Figura 2.1.a

**Flujo interno.** Es un tipo de flujo de canal en el que el centro interno no corta a la pared del silo, sino que asciende hasta la superficie. Es propio de materiales cohesivos como las harinas o las cenizas. Figura 2.1.b

**Flujo de canal:** En este tipo se forma un canal o cono en el centro de la masa que se desplaza hacia la salida, mientras el resto del material permanece inmóvil junto a la pared. Este flujo produce sobrepresiones menores, pero es muy peligroso porque se pueden formar bóvedas junto a la tolva, que interrumpen el flujo de vaciado y que, al desprenderse de las paredes, pueden aumentar enormemente los esfuerzos verticales y horizontales. Figura 2.1.c

La obtención de uno u otro tipo de flujo depende de la inclinación máxima de la tolva de vaciado y del ángulo de rozamiento del material con las paredes de la tolva. También parece cada vez más evidente que la aparición de sobrepresiones de vaciado está asociada a un cambio de estado del material. Este cambio no sería instantáneo y uniforme, sino que se realizaría de forma progresiva, dando lugar a una fuerza de equilibrio, que actuaría en forma de carga localizada y que se propagaría por la pared como una onda.

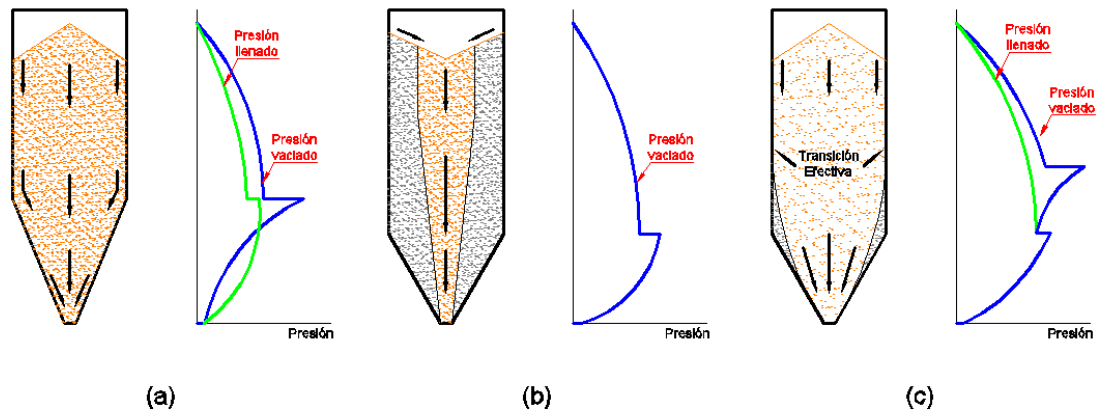


Figura 2.1. Tipos de flujos que se pueden presentar en un silo: a. Flujo másico b. Flujo interno c. Flujo canal.

Al enfrentarse al diseño de un silo tres factores principales hacen que la complejidad de este sea considerable. La complejidad que rodea el diseño del silo se debe principalmente a tres factores:

1. El comportamiento mecánico del material almacenado es complejo y poco entendido. Este material puede ser muy diferente, por ejemplo, podría ser el grano seco, grano con una cierta cantidad de humedad, material muy polvoriento, etc. Dado que estos son materiales desagregados, las leyes de la mecánica de sólidos no se aplican directamente. Además, su naturaleza móvil hace difícil la aplicación de las teorías clásicas de la mecánica de suelos, que se enfoca en materiales desagregados pero estáticos.
2. Las estructuras de contención por lo general tiene una diferentes formas compleja, lo que hace difícil tomar un punto de vista que lo abarca todo, incluso en la mayoría de los silos simples (Cilindros) suelen estar conectados a una tolva cónica, o se agrupan en varias celdas.
3. La interacción entre la pared del silo y el grano es un factor importante; siempre ha sido conocido como el principal factor diferenciador para el correcto diseño del silo, esta interacción es bastante complicada especialmente en las zonas donde hay un cambio de dirección o donde las paredes del silo no son lisas.

Las fallas de los silos están generalmente asociadas al mal diseño y cálculo errado del mismo, los principales focos donde que pueden arrojar fallas para un silo son:

Sobrepresiones en la descarga: Estas ocurren cuando el silo se está vaciando y alcanzan a ser 2.5 a 3 veces la presión que ejerce el material cuando se encuentra

almacenado, si no se tiene el conocimiento y el procedimiento para la determinación de estas presiones, en el momento que el silo sea descargado se presentaran una sobrepresión que incrementará los esfuerzos sobre el silo y llevándolo a que colapse y se destruya su estructura.

Las bases civiles: Un típico caso es el deficiente estudio de suelos realizado para diseñar las bases civiles de los silos. Solo un correcto estudio de la zona específica donde se va a montar el silo, puede garantizar unos resultados de diseño que satisfagan las necesidades de carga del silo.

Excentricidades en la descarga: Las presiones sobre el este tipo de silos se vean afectadas notoriamente y si no se realiza en la determinación adecuada de las mismas el silo presentara un comportamiento estructural atípico al diseñado, teniendo como consecuencia la falla inmediata y el colapso del silo.

Almacenaje de productos en polvo: Para este tipo de materiales se debe prestar principal atención al determinar que tan cohesivo es el material y cuál es su relación con el ángulo de la tolva para permitir que este deslice por esta sin que se presenten aglomeraciones de material en las paredes y por ende taponamientos. El no escoger los valores correctos conlleva a que el comportamiento del silo no se aproxime a lo diseñado y se tengan esfuerzos mayores y el silo colapse.

## 2.2 Propiedades físicas y comportamiento de los materiales a granel.

Los materiales a granel están formados por partículas sólidas sueltas, aisladas entre sí a separaciones más o menos uniformes. Entre los materiales a granel se pueden distinguir los polvos, que consisten en partículas de hasta 0.1 mm, sólidos granulares, con partículas entre 0.1 y 3 mm y sólidos rotos con partículas de tamaño superior a 3 mm. Los polvos a su vez pueden ser subdivididos en ultra-finos (0.1-1 micras) y superfinos (1-10 micras) y clasificados como “free flowing” o cohesivos.

### 2.2.1 Esfuerzos sobre sólidos [18]:

Un estudio de las propiedades de los sistemas de partículas sólidas y su respuesta a esfuerzos externos ponen de manifiesto que éstos son una mezcla de propiedades de sólidos y líquidos. Como los líquidos tienden a tomar la forma del recipiente que los contiene, ejercer presión sobre él y fluir por orificios abiertos en él. Sin embargo, al igual que los sólidos, son capaces de soportar esfuerzos cortantes por esta razón es

que se pueden apilar, también tienen resistencia de cohesión y una distribución no isotrópica de distribución de esfuerzos bajo una carga direccional aplicada.

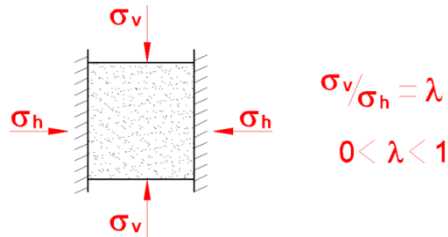


Figura 2.2. Elemento sólido de un recipiente.

En la en la figura 2.2 se muestra un elemento de sólido en un recipiente. El esfuerzo  $\sigma_v$  actúa en dirección vertical, mientras que  $\sigma_h$  en la dirección horizontal como resultado de aplicar la fuerza vertical. La relación entre ambos esfuerzos es denominado como el parámetro  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{\sigma_h}{\sigma_v}$$

En el caso de los líquidos, ambos esfuerzos son idénticos y directamente relacionados con la presión hidrostática, por lo cual  $\lambda$  tiene el valor de la unidad. Sin embargo para el caso de sólidos, éste alcanza valores comprendidos entre 0.3 y 0.6 dependiendo el tipo de material que se esté considerando.

Si se toma un elemento de sólido de la figura 2.2, es posible considerar un elemento triangular de forma que su cara inferior tenga un ángulo alfa ( $\alpha$ ) con la horizontal, es posible calcular el esfuerzo cortante ( $\tau$ ) y el esfuerzo normal ( $\sigma$ ) que actúan sobre dicha cara con ayuda de un círculo de Mohr, la figura 2.3 representa este fenómeno.

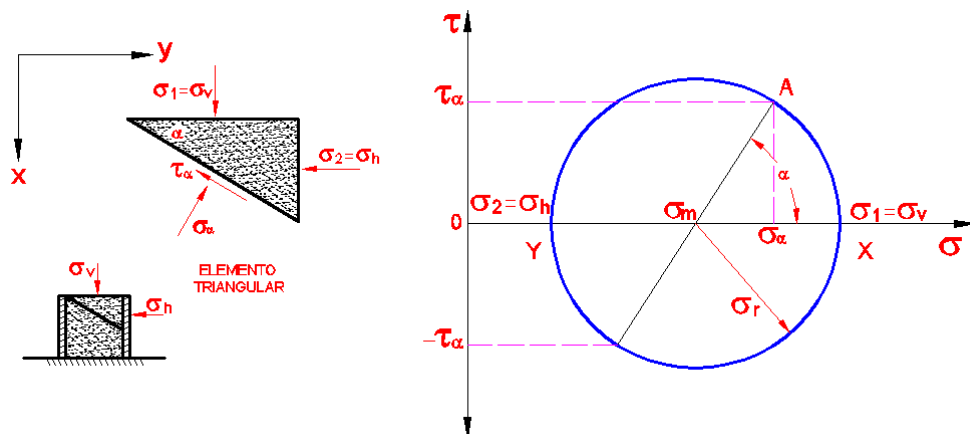


Figura 2.3. Elemento triangular, Círculo de Mohr.



El círculo de Mohr representa los esfuerzos en distintos planos inclinados para todos los ángulos  $\alpha$  posibles.

### 2.2.2 Yield locus (zona de fluencia) [18]:

En la mayoría de aplicaciones técnicas, una masa que inicialmente esta en reposo se hace fluir, por ejemplo cuando se vacía un silo, para lo cual es imprescindible superar el “yield point” de la masa sólida. Así, a diferencia de los líquidos, los esfuerzos de cizalla son proporcionales a las cargas normales más que a la velocidad de deformación y a diferencia de los sólidos, la magnitud del esfuerzo de cizalla es generalmente indeterminado, sin embargo cumple la siguiente desigualdad:

$$\tau \leq f' \sigma$$

Donde  $f'$  es el coeficiente de fricción entre partículas y  $\sigma$  representa el intervalo de fuerzas normales (presiones) que puede aplicarse sobre la muestra antes de alcanzar un esfuerzo de cizalla  $\tau$ , lo suficientemente alto como para que el sistema de partículas comience a fluir. De este modo, para hacer que el sistema comience a fluir es necesario superar un cierto valor umbral que convierta la desigualdad anterior en igualdad.

En la Figura 2.4 muestra un cilindro con polvo que se le aplica una fuerza vertical  $\sigma_1$ , de forma que el polvo es consolidado y comprimido. El esfuerzo y el cilindro son entonces retirados, manteniendo la forma cilíndrica. La carga vertical necesaria para que dicho sistema se rompa, se define como el “unconfined yield stress” ( $\sigma_c$  ó  $f_c$ ).

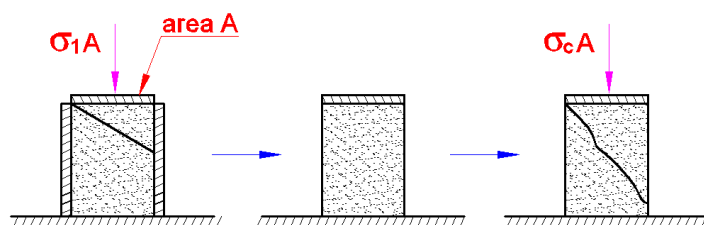


Figura 2.4. Rotura de un sólido tras su compactación.

La figura 2.5 representa diferentes experimentos representados mediante un diagrama  $\sigma$  vs  $\tau$ . Inicialmente se podría dibujar un círculo de Mohr con esfuerzos normales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  lo que nos da como resultado el círculo A, una la segunda parte del experimento, en un ensayo de compresión, se aplican progresivamente esfuerzos mayores originándose los círculos B1, B2 y B3, de forma que éste último círculo llega a ser tangente a la recta que define el “yield locus”, por lo que en este punto se consigue que la estructura se rompa. Si el sólido hubiera sido sometido adicionalmente a un esfuerzo horizontal, se hubiera obtenido un círculo como el C.

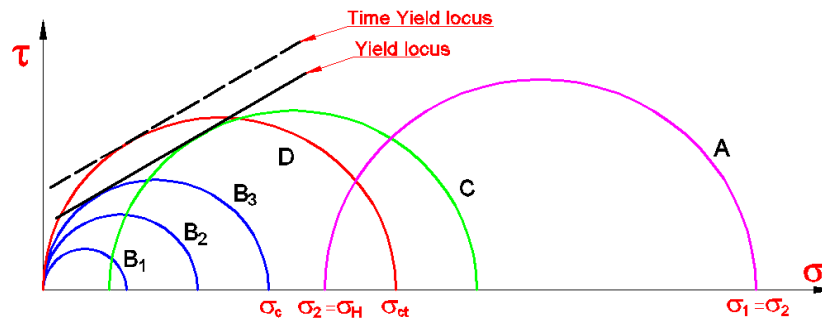


Figura 2.5. Representación de círculos de Mohr correspondientes a distintos procesos de compresión.

La tendencia del "yield locus" depende de la densidad de consolidación de la masa del sólido; cuanto más consolidado esté, mayor será su densidad de masa y mayor su "unconfined yield strength". En la Figura 2.6 se muestra los comportamientos generalizados de la densidad de la masa y del "unconfined yield strength" con la tensión de consolidación.

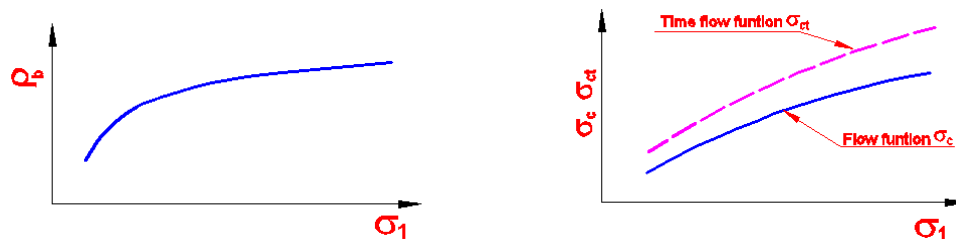


Figura 2.6. Densidad de "sólidos y unconfined yield" stress en función de la tensión normal aplicada.

Algunos sólidos se consolidan con el tiempo de almacenamiento en reposo, como consecuencia de los esfuerzos presentes en silos, lo cual supondría una modificación de las curvas de "yield locus" con el tiempo. Para caracterizar la facilidad de flujo de este tipo de sistemas se emplea el parámetro *ffc*, el cociente entre una presión de consolidación y el "unconfined yield stress":

$$ffc = \frac{\sigma_1}{\sigma_c}$$

Cada sistema sólido tiene su propia función de flujo ( $\sigma_c = f(\sigma_1)$ ) y su tiempo de flujo.

### 2.2.3 Propiedades de las partículas cohesivas [7] [19]:

Los fundamentos de la consolidación de las partículas solidas cohesivas y las propiedades de los flujos con una combinación de mecánica de la partícula y mecánica

continua, se pueden explicar mediante la micro-macro transición de las características de las partículas en contacto.

A continuación se presenta un enfoque para modelos constitutivos de las características de contacto de partículas teniendo en cuenta:

- Las áreas de contacto son pequeñas en comparación con el tamaño  $d$  de la partícula, de esta manera se puede tomar como un punto de contacto.
- Como resultado de una simetría esférica los puntos de contacto están distribuidos uniformemente sobre la superficie de la partícula con la misma probabilidad.
- El material almacenado se supone que es isotrópico y aleatorio con porosidad uniforme  $\varepsilon$  en cualquier sección del área de la sección transversal.
- Existe una correlación entre tensiones isostáticas y fuerzas de contacto como una superposición de tres tensiones normales uniaxiales que están orientados ortogonales entre sí.
- La relación entre el esfuerzo y las fuerzas de contacto para las partículas monodispersas se define como:

$$\sigma, \tau = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} * \frac{F_N, F_S}{d^2}$$

Donde :

$$F_N = F_M + F_R * \cos 2\alpha$$

$$F_S \leq F_R * \sin 2\alpha$$

En la figura 2.7 se pueden apreciar las diferentes zonas de fluencia del material, son cuatro rectas que esquematizan cada uno de los comportamientos; zona de fluencia instantánea, estacionaria, con tiempo de consolidación y la zona de consolidación del material.

El esfuerzo cortante del material se puede determinar mediante la siguiente ecuación.:

$$\tau = \tan \varphi_i * \left[ \sigma + \frac{\sigma_{R,st}}{\sin \varphi_i} - \sigma_{M,st} \right]$$

El esfuerzo  $\sigma$  se puede determinar mediante:

$$\sigma, \tau = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} * \frac{F_N, F_S}{d^2}$$

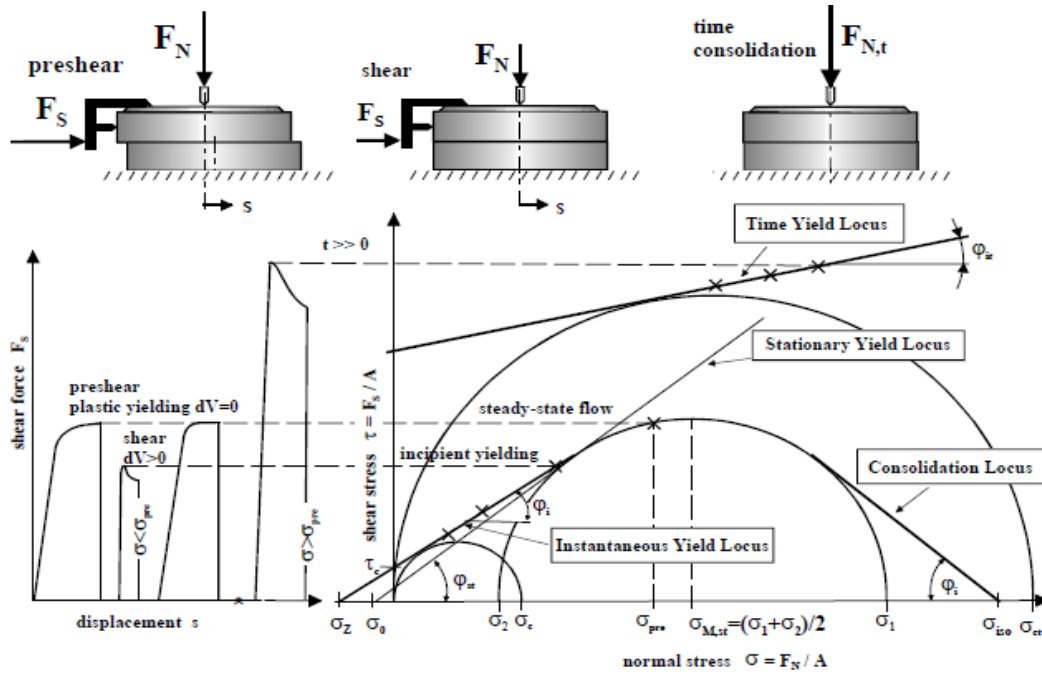


Figura 2.7. Flujo característico instantáneo, estacionario y con tiempo yield locus como una combinación local. Tomado de [7]

Donde:

$\phi_i$  = Ángulo de fricción interna (fricción entre las partículas en contacto)

$\varepsilon$  = Porosidad.

$d$  = Tamaño de la partícula.

$F$  = Fuerza normal ejercida sobre la partícula.

Por otra parte, el esfuerzo del círculo de Mohr para estado estacionario ( $\sigma$ ) en el centro (M)  $\sigma_{M,st}$  y en el radio (R)  $\sigma_{R,st}$  responde a las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{M,st} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}$$

$$\sigma_{R,st} = \sin\phi_{st} * (\sigma_{M,st} + \sigma_0)$$

Donde:

$\phi_{st}$  = Ángulo de fricción en estado estacionario.

Y teniendo en cuenta que el esfuerzo inicial  $\sigma_0$  es regido por:

$$\sigma_0 = \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} * \frac{F_{H0}}{d^2}$$

Donde:

$\varepsilon_0$  = Porosidad inicial

Y la fuerza de adhesión sin ninguna consolidación  $F_{H0}$  se determina mediante:

$$F_{H0} = \frac{C_{H,sls} * (2 * h_r)}{24 * a_{F-0}^2} * \left[ 1 + \frac{\frac{d}{h_r}}{2 * \left(1 + \frac{h_r}{a_{F-0}}\right)^2} \right] \approx \frac{C_{H,sls} * h_r}{12 * a_{F-0}^2}$$

Teniendo como variables:

$a_{F-0}$  = Separación en el punto de contacto de  $F_0$  que puede tener valores entre 0.3 y 0.4 (mn). Sin embargo como se aprecia en la figura 2.8, el valor se puede tomar como 0.336, teniendo en cuenta que el contacto se aproxima al contacto que tienen dos esferas.

$h_r$  = Separación caracterizada por la rugosidad de la superficie.

$C_{H,sls}$  = Contante de Hamaker (sólido-liquido-sólido).

Si el esfuerzo máximo principal  $\sigma_1$  alcanza el valor de la resistencia a la compresión uniaxial estacionaria, se tiene que:

$$\sigma_1 = \sigma_{c,st} = \frac{2 * \sin\varphi_{st} * \sigma_0}{1 - \sin\varphi_{st}}$$

La relación entre el ángulo de fricción interno  $\phi_i$  (pendiente de la zona de fluencia instantánea) y el ángulo estacionario de fricción interna  $\phi_{st}$  se puede representar mediante la ecuación:

$$\tan\varphi_{st} = (1 + \kappa) * \tan\varphi_i$$

Donde  $\kappa$  es el coeficiente de consolidación por contacto y se determina mediante:

$$\kappa = \frac{\kappa_p}{\kappa_A - \kappa_p} = \frac{\frac{P_{vdW}}{P_f}}{\frac{2}{3} + \frac{A_{pl}}{(3 * A_K)} - \frac{P_{vdW}}{P_f}}$$

Donde:

$p_{vdW}$  = Presión Van der Waals.

$p_f$  = Esfuerzo de fluencia plástico de la partícula en contacto.

$A_k$  = Área de la partícula en contacto.

$A_{pl}$  = Área plástica.

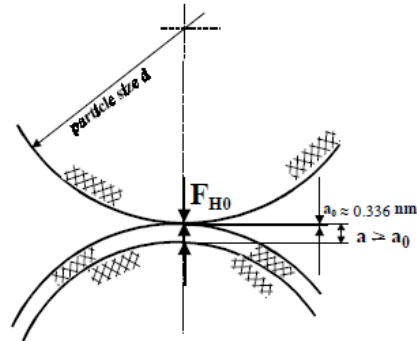


Figura 2.8. Separación en el punto de contacto de dos esferas. Tomada de [19]

El esfuerzo de compresión uniaxial (esfuerzo de fluencia no-confinado)  $\sigma_c$  se puede presentar en función del esfuerzo principal  $\sigma_1$  comprobable con un modelo constitutivo de un material bulk lineal.

$$\sigma_c = a_1 * \sigma_1 + \sigma_{c,0}$$

$$\sigma_c = \frac{2 * (\sin\varphi_{st} - \sin\varphi_i)}{(1 + \sin\varphi_{st}) * (1 - \sin\varphi_i)} * \sigma_1 + \frac{2 * \sin\varphi_{st} * (1 + \sin\varphi_i)}{(1 + \sin\varphi_{st}) * (1 - \sin\varphi_i)} * \sigma_0$$

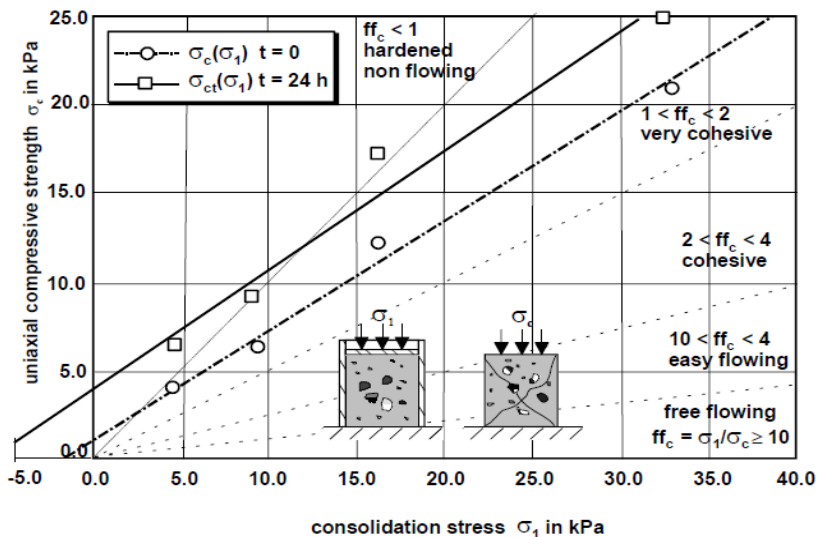


Figura 2.9. Función de instantánea y de tiempo de consolidación para el óxido de titanio. Tomado de [7].

La figura 2.9 muestra el comportamiento del esfuerzo de compresión uniaxial  $\sigma_c$

relacionado por el esfuerzo de consolidación principal  $\sigma_1$  para un material con una función de flujo de de Jenike (ffc) de 0.99 y con tamaño de partícula de 0.61  $\mu\text{m}$ .

### 2.3 Modelos experimentales desarrollados para calcular presiones en los silos [11] [20].

Para comprender el comportamiento del material dentro de un silo es fundamental realizar experimentos mediante prototipos en laboratorios que representen a escala los tamaños reales que tienen los silos en la industria. También se han realizado pruebas en silos de operación y con silos a escala real. Sin embargo el efecto de escala provoca que sean inapropiados para la investigación de las presiones, es por ello que las mediciones en los silos industriales son la mejor herramienta para determinar la presión en las paredes.

En lo que respecta a la experimentación existen dos grandes líneas de trabajo, la primera enfocada hacia el comportamiento estructural y la segunda relacionada con el comportamiento del material almacenado.

Los parámetros que se tienen en cuenta en el análisis del comportamiento estructural, son la presión durante el llenado y vaciado, detallando la segunda que es la más crítica. También se analiza cómo es la variación de ciertos aspectos como el coeficiente de rozamiento con la pared y el coeficiente de presiones horizontales y verticales.

En lo que tiene que ver con el estudio relacionado con el material, la comprensión de los fenómenos que tiene lugar durante las distintas etapas de operación que tiene un silo es la eje de la investigación. Es así como se analiza el tipo de flujo que presentara el material, su posible evolución y la repercusión que poseerá en las presiones ejercidas sobre la estructura de los silos.

A continuación se describen los experimentos más reconocidos y de mayor trascendencia en el desarrollo de análisis experimentales realizados para entender el comportamiento del material cuando se encuentra saliendo de un silo.

#### *2.3.1 Experimentos desarrollados por Ravenet:*

J. Ravenet en 1978 determinó la forma de flujo durante el vaciado en diversas maquetas de diferentes características. Los ensayos efectuados permitieron determinar el flujo en función de la relación altura-lado y de la inclinación de la tolva.

De los mismos se destacó el buen cumplimiento de la teoría desarrollada por Jenike y

Johanson, (1968) en relación al ángulo del plano de corte originado durante el vaciado en función del ángulo de fricción interna y acentuó la importancia de esta última propiedad física de los materiales granulares no cohesivos.

Los resultados de los principales ensayos realizados con maquetas de silos con relación de altura de 2 son descritos a continuación:

Caso 1; Experimento con fondo plano: Al formarse el embudo las presiones sobre la pared se transmiten de forma uniforme con un coeficiente de sobrepresión de 1,30.

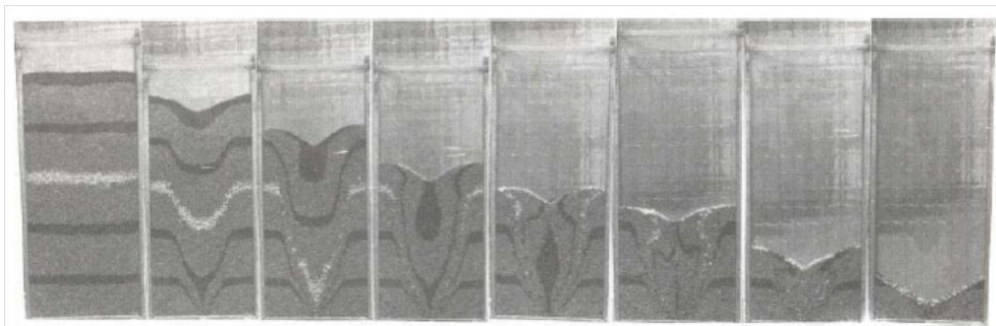


Figura 2.10. Flujo de vaciado centrado según Ravenet. Tomado de [11].

Caso 2; Experimento con tolva de 40° inclinación: se observó que para una tolva con inclinación igual a 40° se produce un cono de depresión mayor al de fondo plano.

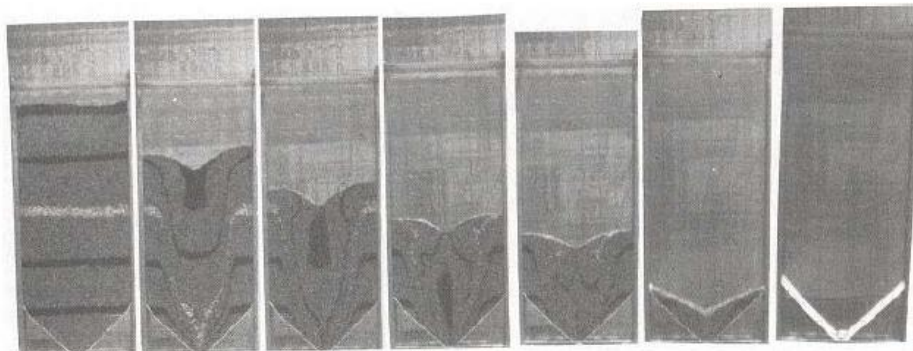


Figura 2.11. Flujo de vaciado centrado según Ravenet. Tolva con 40°. Tomado de [11].

Caso 3; Experimento con tolva de parabólica: se observó que para la tolva de forma de hipérbola el cono se vuelve más agudo y se advierte un leve desfasaje del flujo.

Caso 4; Experimento con tolva de 70° inclinación: en este caso el flujo observado es un flujo másico ya que toda la masa se mueve a velocidad constante.



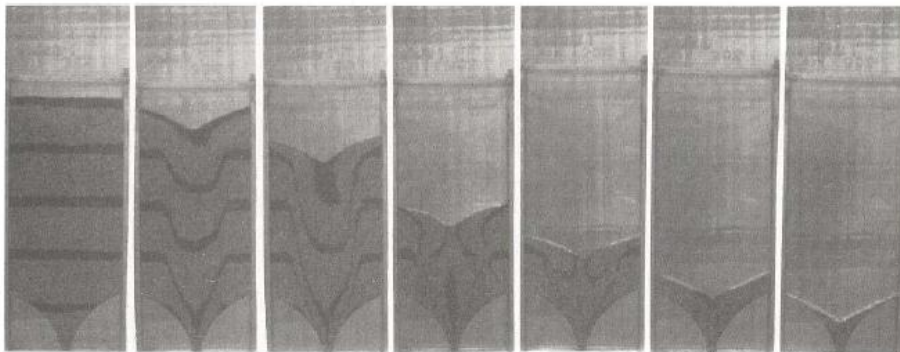


Figura 2.12. Flujo de vaciado centrado según Ravenet. Tolva perfil hiperbólico. Tomado de [11].

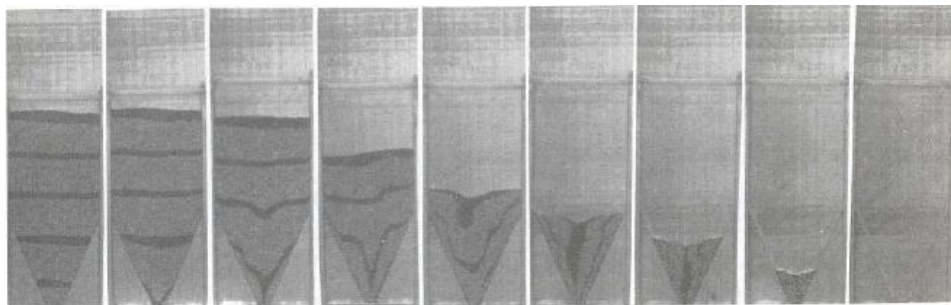


Figura 2.13. Flujo de vaciado centrado según Ravenet. Tolva con 70°. Tomado de [11].

### 2.3.2 Experimentos desarrollados por Kim:

En los resultados de los experimentos que consolida la teoría de Kim, se observa que sobrepresiones de vaciado aparecen solamente en el flujo másico; interesa conseguir un flujo de conducto para evitar sobrepresiones de vaciado.

En el desarrollo de su experimento realizó el análisis del flujo mediante la colocación de tubos antidinámicos, diseñando los silos con una relación altura-lado inferior a 1,5.

Para el caso de vaciado, según flujo másico, el incremento de presiones dinámicas en la parte baja llegó a ser de 1,90 veces mayor que los valores obtenidos aplicando la teoría de Janssen. En el mismo silo se efectuaron ensayos de vaciado dotando a la celda de columnas de vaciado anti-dinámicas y anillos concéntricos. Los valores obtenidos de las presiones de vaciado fueron menores que los obtenidos aplicando la teoría de Janssen.

Los ensayos estudiados por Kim entregaron información adicional como: la velocidad de llenado y sus interrupciones no afectan materialmente a la densidad de la masa ensilada y por tanto a las presiones sobre el fondo de la tolva, para la misma altura de grano en la celda la presión sobre la tolva durante el llenado es mayor que durante el vaciado, la densidad del producto granular puede afectar al tipo de flujo sea másico o

de conducto y la carga por rozamiento sobre las paredes es mayor durante el vaciado que durante el llenado de la silo.

### *2.3.3 Ensayos experimentales realizados por Laforge y Boruff:*

Este ensayo hace referencia a la determinación del flujo de vaciado en celdas y tolvas, mirando el flujo de una partícula individual, como camino para incrementar el caudal de vaciado.

Para determinar el flujo de vaciado se ha efectuado la superposición de las secuencias de filmación en una maqueta de caras transparentes. Este estudio se ha realizado en celdas de fondo plano y celdas con tolvas de pendientes 20° y 60°.

En las velocidades de las partículas dentro de la corriente de flujo se puede apreciar las altas velocidades en el centro de la corriente de flujo y su aceleración a medida que se acerca a la boca de salida. En las zonas próximas al límite del material en reposo, las velocidades han disminuido de forma ostensible, aunque la aceleración hacia la boca de salida prácticamente se mantiene.

En el caso de la maqueta con tolva de 20° de pendiente (Figura 2.14 -a), la zona de material almacenado que permanece en reposo durante el vaciado es sustancialmente más pequeña y tiene una forma diferente para el caso de maqueta con el fondo plano.

### *2.3.4. Otros experimentos realizados:*

Alexander Turitzin en sus ensayos encuentra que al momento de abrir la boca de salida se inicia el movimiento del producto granular, que puede clasificarse en dos grupos: flujo de tipo dinámico y no dinámico. En el primero al abrirse la boca de salida, toda la masa se pone en movimiento, esto trae como consecuencia la aparición de grandes incrementos en las presiones laterales durante el vaciado. En el segundo, solamente se pone en movimiento la zona central de la masa ensilada y en sentido vertical; a éste flujo también se le llama de conducto o tubo. Se caracteriza por la ausencia de sobrepresiones de vaciado.

Ketchum describe los resultados de las experiencias realizadas por algunos ingenieros entre 1882 y 1909 y manifiesta que para silos con boca de salida centrada, la presión de vaciado se incrementa en un 10% con respecto a la de llenado. Sin embargo, en el caso de vaciado excéntrico, el incremento de presiones medido durante el vaciado, puede llegar a ser de hasta cuatro veces mayor que la presión de llenado.

Takhtamishev efectúa ensayos en maquetas alcanzando valores de presiones de vaciado de 2 a 3 veces mayores que las obtenidas por Janssen. En silos reales, las

presiones de vaciado fueron de 1,65 y 1,35 mayores que las de llenado para arena y trigo, respectivamente.

D. Lenczner desarrolla su teoría a partir de ensayos experimentales, donde se evidencia que el vaciado inicial produce una disminución de densidad en la masa ensilada próxima a la boca de salida, apareciendo un vaciado central en forma de tubo con un diámetro aproximado de 5 cm.

El vaciado en forma de tubo progresa hacia arriba, y hasta que no alcanza la superficie superior del grano no empieza éste a moverse. El siguiente paso es un incremento en el diámetro del conducto de vaciado hasta que toca a las paredes, y salvo el cono inferior toda la masa está en movimiento; el vaciado está muy avanzado y este estado coincide con la posición (d) de la figura 2.14.

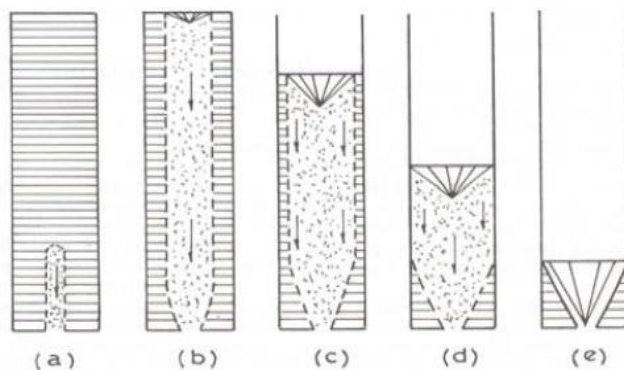


Figura 2.14. Comportamiento del material dentro de maqueta. Tomado de [20].

2.4 Teorías clásicas y normativas para el cálculo de esfuerzos durante el llenado y vaciado [1].

#### 2.4.1. Teoría planteada por Janssen:

Establece por primera vez una ecuación para el cálculo de presiones en un silo, considerando el equilibrio de fuerzas en una parte elemental de material ensilado.

Las hipótesis en que se basa la teoría de Janssen son:

- Las presiones horizontales son constantes en un mismo plano horizontal.
- El valor de ( $\delta$ ) (ángulo de rozamiento material-pared) es constante.
- El peso específico del producto es uniforme.

- Las paredes del silo son totalmente rígidas.
- La relación entre las presiones horizontales y verticales,  $K$ , es constante en toda la altura del silo siendo:

$$K = \frac{P_h}{P_v}$$

Posteriormente diversos investigadores establecieron que en este caso, el coeficiente  $k$  variará en función de la rugosidad de las paredes tendiendo los siguientes casos:

$$K = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}$$

Para paredes absolutamente lisas en las que  $\delta = 0$  y para paredes muy rugosas en las que  $\phi = \delta$

$$K = \frac{1 - \sin^2\phi}{1 + \sin^2\phi}$$

En los casos intermedios se tiene:

$$k = \frac{1 - m \cdot \sin\phi}{1 + m \cdot \sin\phi} \cdot \cos^2\delta$$

$$m = \sqrt{1 - \mu^2}$$

$$\mu = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\phi}$$

Ninguna de estas hipótesis es cierta, pero el resultado de hacerlas es suficientemente correcto para silos altos en estado estático y de materiales poco compresibles, como los granos.

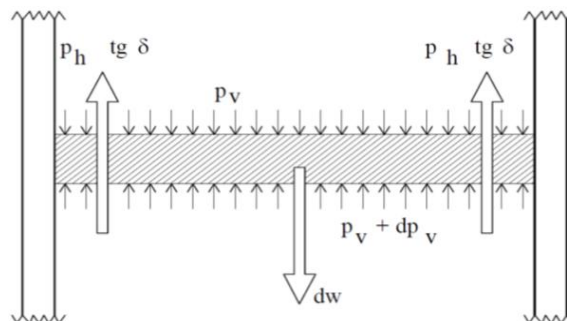


Figura 2.15. Presiones presentes en un silo. Tomado de [1].

El equilibrio del elemento de altura  $\delta z$  del material de peso específico aparente y queda establecido entre las presiones verticales  $p_v$  y  $p_v + dp_v$  debidas al rozamiento producido por el empuje  $p_h$  sobre las paredes, como lo muestra la figura 2.15.

Si  $A$  es el área de la sección isóbara del silo,  $U$  el perímetro y  $tg\delta$  el coeficiente de rozamiento, queda:

$$p_h * tg\delta * dz * U + (p_v + dp_v - p_v) * A - dw = 0$$

$$dw = \gamma * A * dz$$

$$k * dp_v = dp_h$$

Teniendo en cuenta que la presión en la parte del silo es nula con lo cual  $z=0$  entonces se deduce que  $dp_h=0$ . Con estas condiciones se resuelven las dos anteriores ecuaciones y se obtiene la expresión general de la formula de Janssen.

$$P_h = \frac{\gamma}{tg\delta} * \frac{A}{U} * \left(1 - e^{-\left(\frac{U}{A} * k * tg\delta\right) * z}\right)$$

Esta curva exponencial tiene un valor asintótico cuando  $z$  tiende a infinito, estado que representa el valor máximo de  $p_h$ .

$$p_{max} = \frac{\gamma * r}{\mu}$$

Donde  $r$  es el radio hidráulico ( $A/U$ ) de la sección del silo y  $\mu$  el coeficiente con la pared ( $tg\delta$ ). Teniendo en cuenta el punto de corte de la tangente con el origen ( $z=0$ ) se obtiene el valor  $z_0$ :

$$Z_0 = \frac{r}{k * \mu}$$

Con estas últimas dos ecuaciones sustituidas en la expresión general de Janssen, se obtiene su fórmula general para determinar las presiones en los silos:

$$P_h = P_{max} * \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right)$$

La figura 2.16 muestra como el comportamiento de la formula general de Janssen.

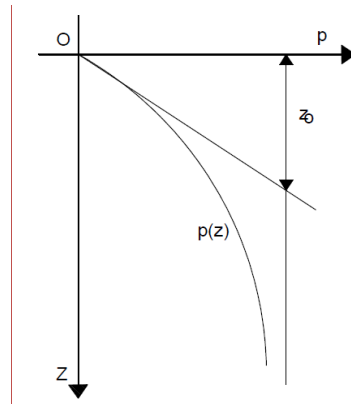


Figura 2.16. Presiones del material en función de la altura del silo. Tomado de [1].

Esta teoría fue extensamente discutida y aplicada, con algunas modificaciones constituye la base de la mayoría de las normas de cálculo de silos existentes. En los años cuarenta fue muy criticada al estudiarse y demostrarse que durante el vaciado de los silos se producían presiones horizontales mucho mayores que las obtenidas mediante esta teoría. Se llegaron a medir valores de 2,25 veces los obtenidos por la curva de Janssen y esto hizo proliferar otros métodos de cálculo, entre los que llegó a ser muy popular el de los hermanos Reimbert. Sin embargo, ningún método explicaba adecuadamente el fenómeno del vaciado, por lo que finalmente la ecuación de Janssen sigue siendo básica.

#### 2.4.2. Teoría de los hermanos Reimbert:

En 1940 se demostró que durante el vaciado podían llegar a registrarse presiones horizontales hasta de cuatro veces las presiones determinadas en el llenado y las cuales determinaban la teoría de Janssen.

Un detalle a tener en cuenta es que la ecuación de Janssen la relación entre presiones verticales y horizontales ( $k$ ) tiene un valor constante y es independientemente de la profundidad de silo, su geometría o su radio hidráulico. Es acá donde los resultado de los hermanos Reimbert, visualizados en maquetas y silos reales, demuestran que el coeficiente  $k$  no sería constante en un silo. Con esto el valor de  $k$  varia no solo con la forma geométrica del silo o su radio hidráulico, sino que también lo hace para cada tipo de silo en función de la profundidad considerada,  $z$ , en la figura 2.17 se puede apreciar este comportamiento.

En cuanto a la presión y la carga sobre el fondo, estas se equilibran con la fuerza de rozamiento generada en la fricción del grano con la pared  $F_z$ , la cual depende a su vez de la profundidad considerada.

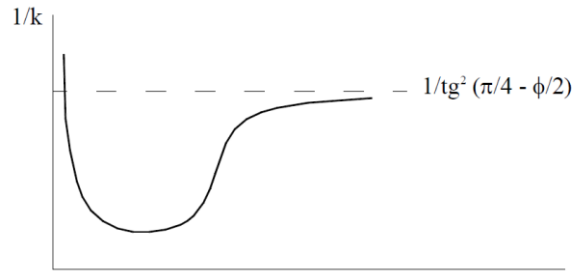


Figura 2.17. Variación de  $1/k$  con respecto a la profundidad del silo. Tomado de [1].

En la figura 2.18 se observan las principales dimensiones de un silo cilíndrico, este tiene profundidad inicial igual a cero, la carga inicial  $Q_0$  corresponde con la superficie cónica superior:

$$Q_0 = \left(\frac{1}{3}\right) * \gamma * S * h$$

Siendo  $\gamma$  el peso específico del material ensilado,  $S$  es la sección del silo analizado y  $h$  es la altura de la pila que puede expresarse como  $h = r \cdot \text{tg}\phi$ , siendo  $r$  el radio del silo.

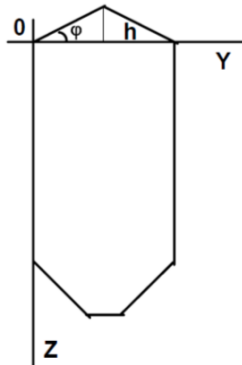


Figura 2.18. Dimensiones generales para el silo de los hermanos Reimbert. Tomado de [1].

Estableciendo un equilibrio de fuerzas en una sección diferencial del silo  $d_z$  se determinan las expresiones para las presiones horizontales y verticales  $p_h$  y  $p_v$  respectivamente, en una determinada profundidad:

$$P_h = \frac{(dF_z)}{U * \text{tg}\delta} \quad \text{y} \quad P_v = \gamma * \left(z + \frac{h}{3}\right) - \frac{F_z}{S}$$

Donde  $U$  es el perímetro del silo a la profundidad  $z$ ,  $\delta$  es el ángulo de rozamiento del material de la con la pared y  $S$  la sección del silo en la profundidad  $z$ .

Otro aporte fue la comprobación experimental que arrojó que la fuerza de rozamiento  $F_z$  podía expresarse en función de la profundidad  $z$  como se aprecia en la figura 2.19.

La fuerza de rozamiento puede determinarse como:

$$F(z) = \frac{\gamma * S * z^2}{z + a}$$

con:

$$a = \frac{Q_{max} - Q_0}{\gamma * S}$$

El límite de la asíntota será:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F_z}{z} = \gamma * S$$

De esta manera la presión en el fondo del silo es:

$$Q_{max} = \frac{\gamma * S * r}{tg\delta * tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}$$

Presión coincidente con los la presión determinada por Janssen.

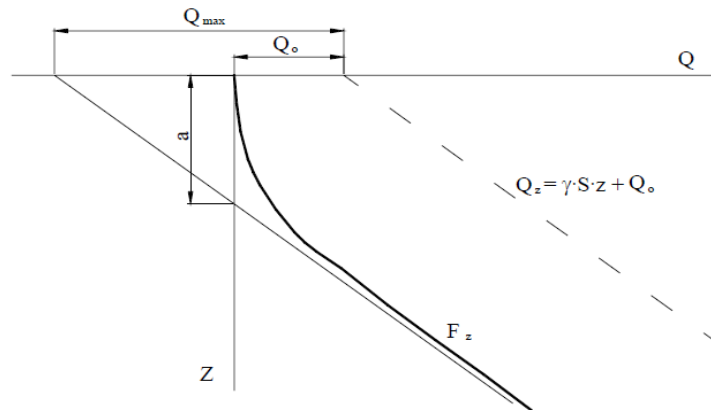


Figura 2.19. Variación de la fuerza de rozamiento respecto a la altura. Tomado de [1].

#### 2.4.3. Normativa Eurocodigo ENV 1991-4:

Esta reglamentación pretende unificar los criterios para el cálculo de silos en toda la unión europea. Esta normativa solo considera las acciones que se llevan a cabo por el material ensilado y no incluye ningún aspecto requerido para cálculo o diseño del silo. En su aplicación se hacen necesarios conocimientos básicos preliminares tales como:

- Característica geométrica del silo, tales como diámetro, altura, espesor de pared, detalles de la descarga, etc.



- Clasificación del silo de acuerdo a la confiabilidad del mismo, esto directamente relacionado con las capacidades del silo. La tabla 2.1 la resume.

- Clasificación según su relación de aspecto  $h_c/d_c$  donde el numerador es el segmento vertical del silo y el denominador es el diámetro interior. La tabla 2.2 muestra los diferentes valores.

- Clasificación del silo según la aspereza de la pared.

- Propiedades del material ensilado tales como, peso específico, ángulo de reposo, cohesión, etc.

<b>Clase de confiabilidad</b>	<b>Descripción</b>
Confiabilidad clase 3	- Silos con capacidades por encima de 10000 Toneladas - Silos con capacidades por encima de 1000 Toneladas y en los cuales pueden ocurrir alguna de las siguientes condiciones a) Descargas excéntricas $>0.25$ b) Silos cuadrados con superficie superior excéntrica $>0.25$
Confiabilidad clase 2	Todos los silos por este estándar y que no clasifican en las otras clases
Confiabilidad clase 1	Silos con capacidades menores a 100 toneladas

*Tabla 2.1. Clases de confiabilidad en silos de acuerdo a capacidades y excentricidades de carga o llenado.*

<b>Relación de aspecto del silo <math>h_c/d_c</math></b>	<b>Clase de silo</b>
$h_c/d_c \geq 2$	Esbelto
$1 < h_c/d_c < 2$	Esbeltez intermedia
$0.4 < h_c/d_c \leq 1$	Achaparrado
$h_c/d_c \leq 0.4$	Granero con entrada de aire

*Tabla 2.2. Relación de aspecto y clase de silo según su esbeltez.*

La presión en el silo se determina con base en la teoría de Janssen y se hace hincapié en los silos clase 3 los cuales deben tener en cuenta consideraciones especiales. En cuanto a los silos de fondo plano la norma expone el caso con grandes excentricidades. Por último propone el cálculo de las presiones sobre las tolvas teniendo en cuenta las características del silo y el material almacenado.

#### 2.4.4. Normativa alemana DIN 1055-6:

Es una norma expuesta en 2003 la cual es una transposición literal del último borrador aprobado del Eurocodigo.

#### 2.4.5. Normativa americana ACI 313-97:

Esta normativa con su última actualización en 1997, en donde se desprende de las teorías de los hermanos Reimbert y pasa a basarse únicamente en la teoría de Janssen y donde usa la relación de presiones  $k$  planteada por Pieper y Wenzel en 1963.

$$k = 1 - \sin\phi$$

La normativa americana considera el coeficiente de sobrepresión en la descarga como 1.5, reduciéndolo en algunos casos de silos concéntricos hasta 1.35. Con descargas excéntricas se deben considerar las cargas de sobrepresiones inducidas pero no se expone con hacer su cálculo, limitándose únicamente a referenciar a diferentes autores.

#### 2.4.6. Normativa International standard ISO-11697:

Al igual que otras normativas es la ecuación de Janssen quien rige el cálculo de las presiones en el silo, sin embargo se ajusta la presión de descarga mediante un coeficiente de sobrepresión que depende del aspecto del silo.

El valor de la carga local debe aumentarse cuando se produzca una descarga excéntrica en el silo mediante el coeficiente  $\beta$ :

$$\beta = 1.0 + 4.0 * \left(\frac{e}{d}\right)$$

Siendo  $e$  la excentricidad de la boca y  $d$  el diámetro interior del silo. Este caso aplica siempre que la excentricidad de la boca este por encima del 25%.

Por último se determina la presión sobre la tolva mediante la sumatoria de las presiones que se encuentran sobre esta. La figura 2.20 representa este fenómeno.

A continuación se describen las ecuaciones que rigen el cálculo de estas presiones.

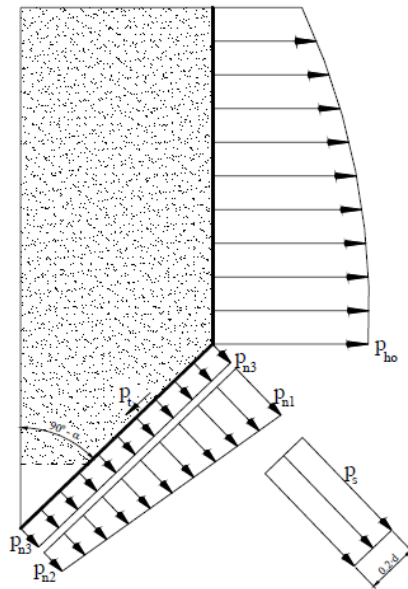


Figura 2.20. Cálculo de presiones sobre una tolva según ISO-11967. Tomado de [1].

$$p_{n1} = 1.5 * p_{ho} * \left( \frac{1}{k} * \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right)$$

$$p_{n2} = \frac{1.5}{k} * p_{ho} * \cos^2 \alpha$$

$$p_{n3} = 3.0 * \frac{A}{U} * \frac{\gamma * k}{\sqrt{\mu}} * \sin^2 \alpha$$

$$p_s = 2.0 * p_{ho}$$

$P_{ho}$  = Presión horizontal en la parte vertical del silo en la transición.

$\alpha$  = Angulo de inclinación de la tolva con respecto a la horizontal.

$K$  = Relación entre las presiones horizontales y verticales producidas a partir del ángulo de rozamiento interno  $\phi$ .

$$k = 1.1 * (1 - \sin \phi)$$

$A$  = Área de la sección horizontal del silo

$U$  = Perímetro de la sección horizontal del silo

$\gamma$  = Peso específico del material almacenado

$\mu$  = Coeficiente de rozamiento del grano con la pared del silo

#### 2.4.7. Normativa inglesa BMHB:

Esta normativa contiene especificaciones y recomendaciones sobre aspectos muy diversos en el diseño, propiedades de los materiales almacenados, criterios para el diseño seguro frente a explosiones, etc.

Para su cálculo se deben tener determinadas inicialmente ciertos parámetros tales como tamaño y forma del silo, estudio de condiciones atmosféricas, clase de flujo que se espera, posible aireación del silo etc. Se emplea el modelo de Janssen de forma general con la salvedad que para relaciones de altura diámetro menores a 1.5 se emplea el procedimiento de los hermanos Reimbert.

#### 2.4.8. Normativa australiana:

La ecuación de Janssen es nuevamente usada en esta normativa adicionándose a este análisis la propuesta de clasificación de las posibles acciones existentes en un silo, asimismo contempla una sección para el análisis de cargas debidas a viento y el comportamiento de cargas sísmicas.

A diferencia de casi todas las otras normativas el coeficiente de sobrepresión no es constante, sino que varía dependiendo del tipo de flujo (másico o canal), forma de la tolva (truncocónica o piramidal), la relación altura / diámetro de la parte vertical del silo y el tipo de carga considerada.

Con estas variaciones se tiene que el coeficiente de sobrepresión se puede encontrar entre 1.2 y 3 en las paredes verticales y mucho mayor en las tolvas, hasta 15 en la transición. La figura 2.21 muestra una representación de lo mencionado.

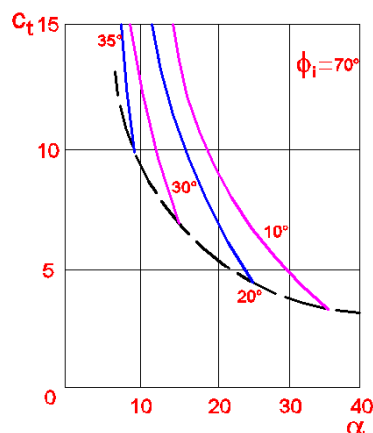


Figura 2.21. Relación entre  $C_t$  (Coeficientes de sobrepresión) con  $\alpha$  ( inclinación de la tolva ) y  $\phi$  ( coeficiente de fricción del material )

2.5. Cálculo de presiones con base en la normativa del Eurocódigo ENV 1991-4 [4] [16].

### 2.5.1 Especificaciones geométricas del silo:

El primer paso que se debe tener en cuenta al desarrollar el cálculo de un silo es determinar su geometría, en muchas ocasiones en la práctica se cuenta con determinado espacio o altura para acomodar el silo. Sin embargo se debe conocer que muchas bibliografías tienen estandarizadas las geometrías de los silos y mientras se pueda se debe hacer uso de ella, ya que permite que el silo quede bien equilibrado entre la parte cilíndrica y la tolva, conlleva a un mejor almacenamiento de material al igual que reduce problemas asociados a la descarga, optimiza la cantidad de lamina con la que se va a fabricar el silo, etc.

La normativa del Eurocódigo ENV 1991-4 tiene limitantes en cuanto a las geometrías que pueda aplicar: la relación entre altura y diámetro del silo no debe ser mayor a 10 metros, la altura del silo a calcular no debe sobrepasar los 100 metros y el diámetro del silo no puede superar los 50 metros.

Se distinguen principalmente dos tipos de silos: silos esbeltos (relación altura/diámetro  $> 1.5$ ), silos cortos (relación altura/diámetro  $< 1.5$ )

Para el caso específico que trata este trabajo, se considera un silo tipo esbelto, con llenado y descarga concéntrica. La figura 2.22 muestra la geometría del silo.

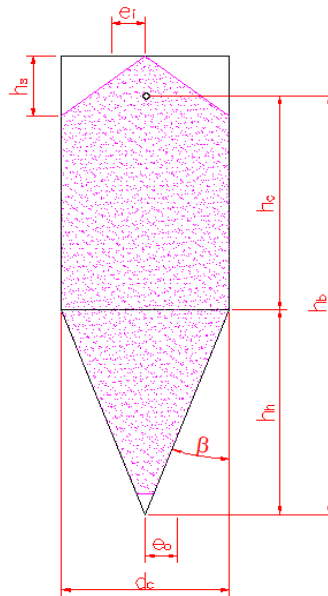


Figura 2.22. Geometría del silo a diseñar.

Principalmente las variables afectan la curva de presiones y las cuales debemos suministrar para el cálculo del silo son:

$d_c$  = Diámetro del silo

$h_b$  = Es la altura que tiene el material; se mide desde la proyección de la boca de la descarga hasta el centroide del cono superior que forma el material.

$h_c$  = Altura del material en la parte cilíndrica; se mide desde la unión de la tolva con el cilindro hasta el centroide del cono superior que forma el material.

$h_h$  = Es la altura que tiene la tolva, se debe medir hasta la proyección de la descarga.

$h_s$  = Altura del cono superior que forma el material

$\beta$  = Ángulo entre la pared de la tolva y el eje vertical del silo.

$e_i$  = Excentricidad del llenado, para este caso no aplica ya que el llenado del silo se realiza de forma concéntrica.

$e_o$  = Excentricidad del vaciado, para este caso no aplica ya que el vaciado del silo se realiza de forma concéntrica.

### *2.5.2 Propiedades de los materiales granulares involucradas en el cálculo del silo:*

Las propiedades de los materiales granulados, independientemente del tamaño de su partícula, bien sea en polvo o en roca, tienen la particularidad que varían dependiendo de donde son extraídos, la forma en la que se hizo y hasta las condiciones ambientales que había en ese momento, por lo anterior se debe tener conocimiento de los valores mínimos y máximos en las diferentes propiedades que intervienen en el cálculo del silo, esto con el fin de no tener un comportamiento inesperado y que el silo falle.

Las propiedades del material que está contenido en el silo y que son necesarias para el calcular de las presiones sobre las paredes de este son:

- a) Peso específico del material  $\gamma$
- b) Angulo de reposo con la horizontal  $\phi_p$
- c) Angulo efectivo de fricción interno  $\phi_i$
- d) Relación de presión lateral  $\lambda$
- e) Angulo de fricción con la pared  $\phi_w$

En el anexo 1 aparece una tabla donde se puede seleccionar fácilmente el valor mínimo y máximo para cada una de las variables anteriormente nombradas para los materiales granulares más comunes. Se aclara que para la selección del ángulo de

fricción se debe tener en cuenta el tipo de pared que tiene el silo, esta clasificación se aprecia en la tabla 2.3 donde se especifican cuatro categorías D1, D2, D3 Y D4 de las cuales se debe seleccionar la que aplique al caso que se desee estudiar, una vez hecha esta selección se determina el ángulo de fricción interna.

<b>Categoría</b>	<b>Título</b>	<b>Material típico</b>	<b>Rugosidad</b>
D1	Pulido	Acero inoxidable pulido Acero al carbón galvanizado Aluminio	0 a 0.01
D2	Lisa	Superficie con oxido a la luz Acero al carbón pintado Acero inoxidable decapado Baldosas cerámicas lisas Acero con acabado de concreto	0.01 a 0.1
D3	Áspera	Concreto fuera de forma Gruesa superficie de baldosas cerámicas	0.1 a 10
D4	Corrugado	Paredes corrugadas horizontalmente Láminas de perfilado con nervios horizontales	>10

Tabla 2.3. Categorización de la superficie de la pared.

Un factor importante a tener en cuenta es el coeficiente de fricción con la pared ya que esta gobierna la presión en los silos, relaciona el régimen de flujo, arqueado, auto limpieza y otros aspectos.

El coeficiente de fricción con la pared está directamente relacionado con el ángulo de fricción de pared mediante la ecuación;

$$\mu = \tan \phi_w$$

Se debe tener en cuenta el valor mínimo y máximo de este coeficiente, esto se realiza con el valor mínimo y máximo del ángulo de fricción de pared.

Caso	Propósito	Valor máximo o mínimo que se debe tomar		
		Coeficiente de fricción con la pared $\mu$	Relación de presión lateral $\lambda$	Angulo efectivo de fricción int $\phi_i$
BN	Máxima presión normal sobre la pared del cilindro	Mínimo	Máximo	Mínimo
BF	Máximo esfuerzo vertical sobre la pared del cilindro	Máximo	Máximo	Mínimo
HF	Máxima carga vertical sobre la tolva	Mínimo	Mínimo	Máximo

Tabla 2.4. Clasificación de máximo o mínimo valor de las variables del material según el caso.

Existen diferentes tipos de casos que involucran el mínimo o máximo valor de las variables anteriormente mencionadas, estos se deben tener en cuenta para el cálculo del silo y están descritos en la tabla 2.4.

### 2.5.3 Cálculo de presiones de llenado en el cilindro:

Las características de la presión normal sobre las paredes del silo en su parte cilíndrica durante se llenado se determinan analizando su comportamiento del material desde el centróide del cono superior de material hasta la parte que une se une con la tolva.

El cálculo de las presiones de llenado se aplica según la teoría del eurocódigo donde se encuentra que hay tanto cargas fijas como cargas libres, las primeras cargas corresponden a las presiones de llenado y calculadas por Janssen y las segundas son todas aquellas cargas adicionales al proceso de almacenaje y que se encuentran aplicadas en determinados puntos de la pared, estas son mayores que las fijas y deben maximizarse de acuerdo con algunos factores que se verán adelante.

En la figura 2.23 se aprecia la trayectoria z y las presiones que se ven involucradas en el llenado del silo en su parte cilíndrica.

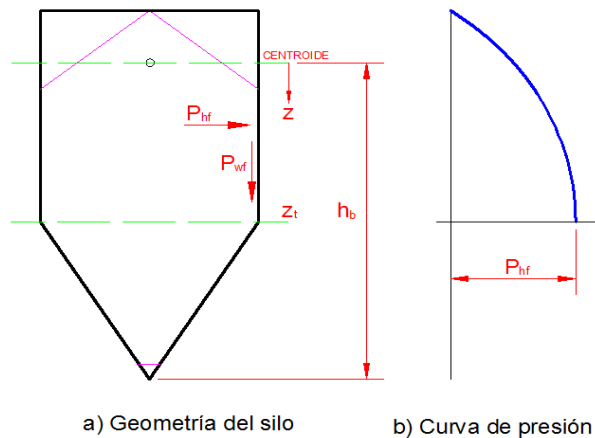


Figura 2.23. Presión de llenado sobre el cilindro

Presión horizontal de llenado en el eje Z hacia el fondo:

$$P_{hf} = P_{ho} \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right)$$

Esfuerzo vertical del material sobre la pared en el eje Z hacia el fondo:

$$P_{wf} = \mu P_{hf} = \mu P_{ho} \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right)$$



Presión vertical del material a través del eje Z hasta el fondo.

$$P_{vf} = P_{vo} (1 - e^{-\frac{z}{z_0}})$$

Para las anteriores ecuaciones los valores iniciales vienen dados por:

Presión sobre la pared en el fondo:

$$P_{ho} = \frac{\gamma}{\mu} \frac{A}{U} = \frac{\gamma}{\mu} \frac{r}{2}$$

Esfuerzo vertical del material sobre la pared en el fondo:

$$P_{vo} = \frac{\gamma}{\lambda \mu} \frac{A}{U} = \frac{\gamma}{\lambda \mu} \frac{r}{2}$$

La profundidad según Janssen viene dada por:

$$z_0 = \frac{1}{\lambda \mu} \frac{A}{U} = \frac{1}{\lambda \mu} \frac{r}{2}$$

Con:

A = Área de la sección transversal del silo.

U = Perímetro de la sección circular del silo.

r = Radio del silo.

z = Distancia desde el centroide del cono superior del material en dirección al fondo de la parte circular.

$\gamma$  = Peso específico del material.

$\lambda$  = Relación de presión lateral.

$\mu$  = Coeficiente de fricción con la pared.

El cálculo de la presión libre se realiza mediante el aumento de la presión horizontal mediante la siguiente relación:

$$P_{pf} = 0.2 \beta P_{hf}$$

Donde:

$$\beta = 1 + \frac{e_i}{2r}$$

Con:

$e_i$  = excentricidad del llenado.

La presión total horizontal es la suma de las dos presiones horizontales determinadas anteriormente, la presión fija y la presión libre.

$$P'_{hf} = P_{hf} + P_{pf}$$

Cuando se diseñan silos pequeños considerados hasta los 5 metros de diámetro, las ecuaciones que se usan para el cálculo de las presiones cambian un poco.

La presión horizontal de llenado viene dada por:

$$P_{hf,s} = P_{hf} (1 + 0.1 \beta)$$

Esfuerzo vertical del material sobre la pared se determina mediante;

$$P_{wf,s} = P_{wf} (1 + 0.2 \beta)$$

#### 2.5.4 Cálculo de presiones de llenado en la tolva:

Para determinar las presiones de llenado de la tolva no se tiene en cuenta el eurocódigo ya que este presenta inconsistencias en esta parte del cálculo, lo anterior debido a que esta sobredimensionando la presión sobre la tolva y por ende cuando se hace un balance de cargas se encierran diferencias. A continuación se presenta un método menos conservador pero seguro. Vale la pena resaltar que es conveniente usar lo planteado en el eurocódigo para silos muy altos con paredes rugosas.

Existen dos tipos de tolvas que involucran diferentes ecuaciones para el cálculo de las presiones, estas son las tolvas empinadas y las tolvas poco profundas.

Se define que una tolva es poco profunda sí;

$$\tan \beta > \frac{(1 - \lambda)}{2 \mu_h}$$

Donde:

$\mu_h$  = Coeficiente de fricción con la pared de la tolva (h).

Las presiones que están presentes sobre la tolva se representan en la figura 2.24, allí también se puede apreciar el sentido X desde la punta de la tolva hasta la unión de esta última con la parte cilíndrica del silo.

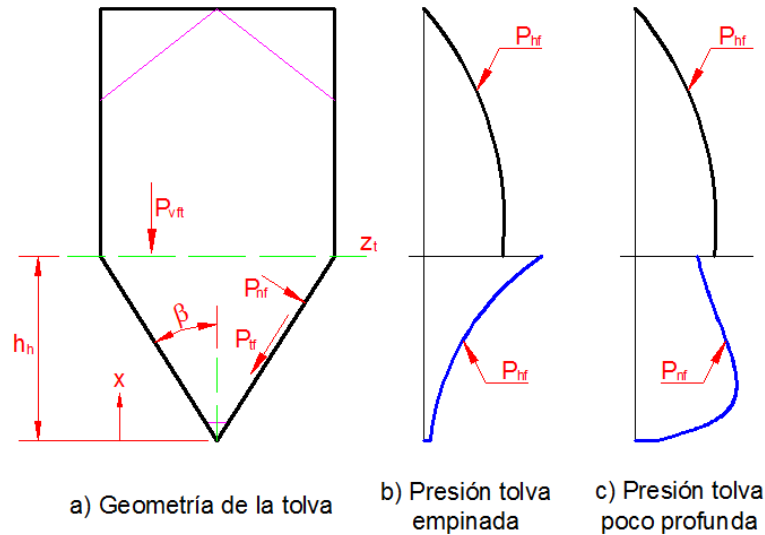


Figura 2.24. Presiones de llenado sobre la tolva

A continuación se describen las presiones para las tolvas empinadas.

La presión vertical de la sección cilíndrica se determina por medio de la siguiente ecuación:

$$P_{vft} = P_{v0} \left(1 - e^{-\frac{z_t}{z_0}}\right)$$

Donde  $z_0$  es el valor de  $z$  en la unión de la parte cilíndrica con la tolva.

La presión normal que actúa sobre la cara de la tolva se determina como:

$$P_{nf} = F_f P_{vf}$$

Esfuerzo vertical del material sobre la lámina de tolva:

$$P_{tf} = \mu_h P_{nf}$$

El esfuerzo vertical a lo largo del eje  $x$  desde la punta de la tolva hasta la unión de esta con el cilindro se determina mediante la siguiente ecuación:

$$P_{vf} = \frac{\gamma h_n}{n-1} \left\{ \left(\frac{x}{h_n}\right) - \left(\frac{x}{h_n}\right)^n \right\} + P_{vft} \left(\frac{x}{h_n}\right)^n$$

Con:

$$n = 2(F_f \mu_h \cot\beta + F_f - 1)$$

Donde:

$\gamma$  = Peso específico del material.

$h_h$  = Altura de la tolva, desde la punta del cono hasta la unión con el cilindro.

$x$  = Distancia partiendo de la punta del cono de la tolva hasta la unión de esta con el cilindro.

$\mu_h$  = Coeficiente de fricción con la pared de la tolva.

$\beta$  = Ángulo de la tolva.

$P_{vt}$  = presión vertical de la sección cilíndrica.

El valor de  $F_f$  puede ser tomado de ensayos experimentales como:

$$F_f = \frac{1 + a \mu \cot\beta}{1 + \mu \cot\beta}$$

$a$  es una constante empírica con valores entre 0 y 1, para este estudio se toma  $a = 0.8$  para presiones de llenado.

En cuanto a las presiones en las tolvas poco profundas se hace necesario la presencia del coeficiente de fricción efectiva el cual se determina mediante;

$$\mu_{eff} = \frac{(1 - \lambda)}{2 \tan\beta}$$

Y se involucra en el cálculo del esfuerzo vertical del material sobre la lamina de tolva como:

$$P_{tf} = \mu_{eff} P_{nf}$$

En cuanto a la presión vertical y al esfuerzo vertical a lo largo del eje  $x$  se mantiene igual que para la tolva empinada.

En este tipo de tolva si se trabajan silos altos con paredes rígidas  $n$  varía según la ecuación:

$$n = 2 a \mu_{eff} \cot\beta$$

### 2.5.5 Cálculo de presiones de vaciado en el cilindro:

Al igual que las presiones de llenado el cálculo de las presiones de descarga se aplica la teoría que ofrece el eurocodigo donde se encuentra que hay tanto cargas fijas como cargas libres, las primeras cargas corresponden a las presiones de llenado y calculadas por Janssen aumentadas por un factor multiplicador de carga  $C$ . En cuanto a las presiones libres son todas aquellas cargas adicionales al proceso de almacenaje y que se encuentran aplicadas en determinados puntos de la pared, estas son mayores que las fijas y deben maximizarse de acuerdo con algunos factores que se verán adelante. La figura 2.25 muestra las presiones involucradas en el vaciado del silo.

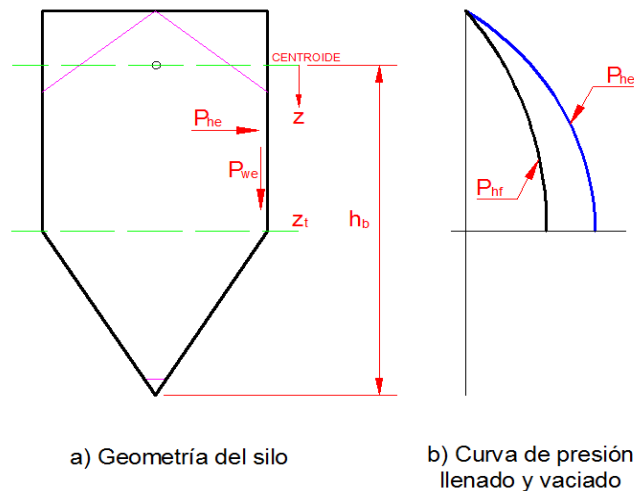


Figura 2.25. Presiones de vaciado del silo en el cilindro

La presión normal que actual sobre la pared del silo es la misma presión de llenado pero maximizado con el factor multiplicador de carga  $C_h$  así:

$$P_{he} = C_h P_{hf}$$

El esfuerzo en la pared por efectos de fricción del material viene dado por:

$$P_{we} = C_w P_{wf}$$

Los valores de  $C_h$  y  $C_w$  son obtenidos según:

$$C_h = C_o$$

$$C_w = 1.1$$

$C_o$  se toma de la tabla de propiedades de los materiales la cual se muestra en el anexo 1. Para materiales que no se encuentren en la mencionada tabla  $C_o$  se puede determinar mediante la siguiente ecuación:

$$C_o = 1.35 + 0.02 (\varphi_i - 30^\circ)$$

Las presiones libres horizontales de vaciado se determinan como muy silimar a las presiones libres determinadas en el llenado del silo:

$$P_{pe} = 0.2 \beta P_{he}$$

Donde:

$$\beta = 1 + \frac{e_i}{2r}$$

Con:

$e_i$  = excentricidad del llenado.

La presión total horizontal es la suma de las dos presiones horizontales determinadas anteriormente, la presión fija y la presión libre.

$$P'_{he} = P_{he} + P_{pe}$$

#### 2.5.6 Cálculo de presiones de vaciado en la tolva:

Las presiones de descarga en la tolva son bastante altas debido al comportamiento que el material tiene en el momento de ser descargado. En la figura 2.26 se pueden apreciar las diferentes presiones que tiene la tolva cuando es descargada.

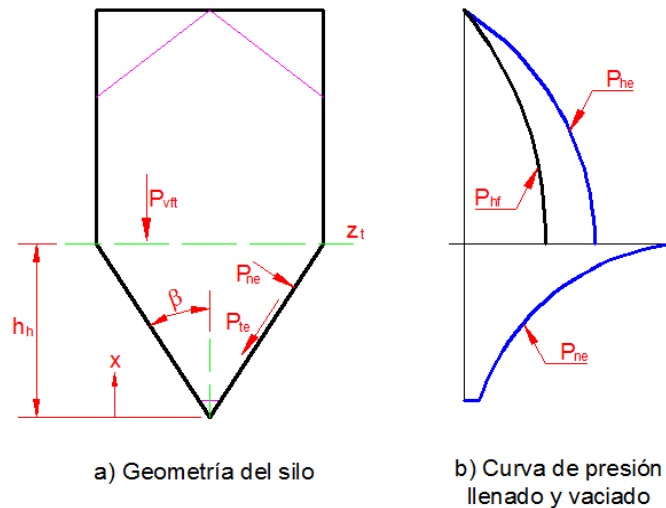


Figura 2.26. Presiones de descarga en la tolva

Inicialmente se realiza el análisis de la presión sobre una tolva con flujo masico y con flujo funnel presentados en una tolva empinada.

La presión normal actuando sobre la pared de la tolva se determina mediante la siguiente ecuación.

$$P_{ne} = F_e P_{ve}$$

El esfuerzo de fricción sobre la pared de la tolva se determina mediante;

$$P_{te} = \mu_h P_{ne}$$

El esfuerzo a través del eje x y ahasta la union de la tolva con la parte cilindrica es:

$$P_{ve} = \frac{\gamma h_h}{n-1} \left\{ \left( \frac{x}{h_h} \right) - \left( \frac{x}{h_h} \right)^n \right\} + P_{vft} \left( \frac{x}{h_h} \right)^n$$

en donde:

$$n = 2(F_f \mu_h \cot \beta + F_e - 1)$$

El valor de  $P_{vt}$  es el mismo calculado anteriormente y  $F_e$  se calcula como:

$$F_e = \frac{1 + \sin \varphi_i + \cos \varepsilon}{1 + \sin \varphi_i \cos(2\beta + \varepsilon)}$$

con:

$$\varepsilon = \tan^{-1}(\mu_h) + \sin^{-1} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi_i} \sqrt{\frac{\mu_h^2}{1 + \mu_h^2}} \right\}$$

o también se determina como:

$$\varepsilon = \varphi_{wh} + \sin^{-1} \left\{ \frac{\sin \varphi_{wh}}{\sin \varphi_i} \right\}$$

Donde;

$\mu_s$  = es el coeficiente de fricción de pared de la tolva

$\varphi_{wh}$  = ángulo de fricción de la pared de la tolva

$\varphi_i$  = ángulo efectivo de fricción interna del material sólido

En cuanto a las presiones sobre los otros tipos de tolvas, las poco inclinadas, los valores pueden ser tomados de las presiones de llenado.

## CAPITULO 3. MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DE FLUJO DE POLVOS

El estudio del flujo de materiales granulares y polvos tiene especial importancia en muchas aplicaciones industriales, en diferentes procesos tales como metalúrgicos, minería, químicos, alimenticios, agropecuarios, etc, se requiere en sus diferentes etapas predecir el comportamiento de un material en su estado de reposo o en su movimiento, caso específico el almacenaje en silo. Por lo anterior se debe realizar una investigación que esté centrada en la descarga por acción gravitatoria de silos en los que se ha almacenado productos agropecuarios, cementos, etc.

### 3.1 Modelos constitutivos basados en la mecánica de fluidos no-newtonianos [3].

A continuación se describe dos modelos planteados por Elaskar y Godoy en el trabajo desarrollado analizando la descarga estacionaria de silos con modelos constitutivos basados en la mecánica de fluidos no newtonianos.

Para un material rígido visco-plástico, la ecuación constitutiva general presentada por Perzyna se expresa de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{ij} = \gamma \langle A(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$$

Donde:

$$\langle A \rangle = A \text{ si } F > 0$$

$$\langle A \rangle = 0 \text{ si } F \leq 0$$

Siendo  $F$  la función de discontinuidad plástica, y  $Q$  el potencial plástico.

Para el primer modelo:

$$A = \beta F^n$$

En el segundo modelo:

$$A = a(e^{bF^n} - 1)$$



Si se utiliza la función de discontinuidad de Drucker-Prager, la cual considera la cohesión y la fricción interna como parámetros del modelo, adoptando la forma dada por Zienkiewicz y Taylor se tiene:

$$F = (3J_2)^{\frac{1}{2}} - k - \alpha'p$$

Donde:

$J_2$  es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones,  $p$  es la presión,  $k$  y  $\alpha'$  están dadas por:

$$k = c \frac{6\cos\phi}{(3 - \sin\phi)}$$

$$\alpha' = \frac{6\sin\phi}{(3 - \sin\phi)}$$

Donde  $c$  es la cohesión y  $\phi$  el ángulo de fricción interno del material.

Para la consideración del potencial plástico, se usa una regla no asociada, en función del criterio de Von Mises:

$$(3J_2)^{\frac{1}{2}} - k = 0$$

La ecuación constitutiva de un fluido viscoso e incompresible puede ser expresada por una relación entre tensiones y velocidades:

$$S_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$$

Donde  $\mu \geq 0$ , es una viscosidad aparente del fluido isótropico.

Relacionando las anteriores ecuaciones se tiene la viscosidad aparente del primer modelo constitutivo propuesto que lleva el nombre de modelo con ley de potencia:

$$\mu = \left[ \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\beta\gamma} \right)^{\frac{1}{n}} + k + \alpha'p \right] \frac{1}{3\dot{\varepsilon}}$$

Donde  $\dot{\varepsilon}$  es el segundo invariante del tensor velocidad de deformación.

Si se realiza otra combinación se tiene el segundo modelo deducido en este trabajo el cual se denomina modelo con ley logarítmico.

$$\mu = \left\{ \left[ \frac{1}{b} \ln \left( 1 + \frac{\dot{\epsilon}}{a\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{n}} + k + \alpha' p \right\} \frac{1}{3\dot{\epsilon}}$$

Se incluyen dos constantes  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en la ecuación constitutiva de la siguiente manera:

$$k = (c + \omega_2) \frac{6 \cos \phi}{(3 - \sin \phi)}$$

$$\alpha' = \omega_1 \frac{6 \sin \phi}{(3 - \sin \phi)}$$

Donde:

$\omega_1$  indica la cantidad de la fricción interno que influye en el comportamiento visco-plástico.

$$0 \leq \omega_1 \leq 1$$

$\omega_2$ : Su principal objetivo es impedir que la viscosidad alcance valores muy pequeños esto se ve en el caso plástico con cohesión nula.

3.2 Modelo constitutivo para flujo visco-plástico incompresible de materiales con fricción y compresión [3].

La mayoría de estudios realizados anteriormente tienen en común el empleo de técnicas analíticas o perturbaciones, en cuyo caso se trata de soluciones para dominios y condiciones de contorno determinadas. Debido a las limitaciones impuestas por las técnicas de solución, los modelos de material sólo incorporan un parámetro de fricción, dejando de lado las posibilidades de investigar el flujo de sólidos con cohesión y fricción. Un modelo general de flujo para materiales con cohesión y fricción utilizando el criterio de Drucker y Prager para representar la superficie de fluencia plástica del material granular es presentado por Diez y Godoy.

Si se tiene un flujo estacionario lento, se puede concluir que las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un fluido viscoso compresible en un dominio son:

$$\text{Momentum} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0$$

$$\text{Continuidad} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Donde:

$\sigma_{ij}$  y  $b_j$  representan el tensor de tensiones internas y el vector de fuerzas másicas por unidad de volumen;  $u_i$  el vector velocidad y los índices  $i, j = 1, 3$ .

El tensor tasa de deformación viene definido por:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Para el caso de los fluidos incompresibles la ecuación de continuidad se puede escribir como:

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii} = 0$$

La presión se define como:

$$p = \sigma_m = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Para el caso particular de fluidos lineales, la relación entre el tensor de tensiones y la tasa de deformación será:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

Donde:

$D_{ijkl}$  es el tensor constitutivo, el cual se puede descomponer en las componentes desviadoras y volumétricas de la forma:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - p \delta_{ij}$$

Donde:

$\delta_{ij}$  representan el delta de Kronecker y  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad lineal del material.

De forma integral equivalente:

$$\int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i t_i dS$$

$\omega$  representa un dominio de flujo en el cual se pueden incluir determinadas condiciones de contorno de presión  $S_p$  o de velocidad  $S_v$ .

Para forzar la condición de incompresibilidad se adiciona:

$$\int_{\Omega} \delta p \epsilon_{ii} d\Omega = 0$$

Para materiales granulares, la viscosidad equivalente viene determinada por  $\mu = \mu(\epsilon, \sigma_{\mu})$ , si se tiene en cuenta que hay grandes velocidades de deformación y el material sigue un comportamiento elasto-visco-plástico, entonces la relación general constitutiva en términos de tensiones desviadoras  $S_{ij}$  es:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} S_{ij}$$

Con:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$$

Los materiales visco-plásticos no-Newtonianos presentan un comportamiento rígido inicial y comienzan a fluir cuando las tensiones superan el límite de fluencia  $F(\sigma) = 0$ . Si se relacionan las componentes de tensiones con la tasa de deformaciones se puede obtener una descripción general del flujo de tales materiales:

$$\epsilon_{ij}^{vp} = \gamma \langle F \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$$

Donde:

$\gamma$  = Parámetro de fluidez.

$F$  = Superficie de fluencia.

$Q$  = Potencial plástico del material.

$\beta$  = Es una función para ajustar el modelo a los resultados experimentales.

$$\langle F \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } F < 0 \\ F & \text{si } F \geq 0 \end{cases}$$

Usando la ley de fluencia plástica de Drucker y Prager para materiales granulares, se permite representar en forma adecuada la ley de Mohr-Coulomb teniendo:

$$F = \alpha' \sigma_m + \sqrt{3}(J_2)^{1/2} - k$$

Con:

$$k = c \frac{6 \cos \phi}{(3 - \sin \phi)}$$

$$\alpha' = \frac{6 \sin \phi}{(3 - \sin \phi)}$$

Donde:

c como la constante de cohesión y  $\phi$  el ángulo de fricción interno del material.

$\sigma_m$  = Tensión media =  $-1/3 \sigma_{ii}$

$J_2$  = Segundo invariante del tensor desviador.

$$J_2' = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$$

Si se considera un flujo de tipo no asociativo donde  $F \neq Q$ :

$$\frac{\delta Q}{\delta \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(J_2')^{1/2}} S_{ij}$$

Si se remplazan las ecuaciones anteriormente deducidas en la ecuación constitutiva general de Perzyna y si aplica al caso particular que  $F \geq 0$ , se tiene la ecuación:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma (\alpha' \sigma_m + \sqrt{3} (J_2')^{1/2} - k) \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(J_2')^{1/2}} S_{ij}$$

La cual es relacionada con la ecuación de términos desviadora y se tiene:

$$\frac{1}{\mu} = \gamma \left( 3 + \frac{\sqrt{3} \alpha' \sigma_m}{(J_2')^{1/2}} - \frac{\sqrt{3} k}{(J_2')^{1/2}} \right)$$

con términos de desviador con segundo invariante del tensor desviador :

$$J_2' = 2\mu^2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Si se introduce el invariante del vector de velocidad en esta última ecuación,  $\epsilon^2$  es definido por:

$$\epsilon^2 = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Y la raíz del segundo invariante del tensor desviador queda:

$$(J_2')^{1/2} = \sqrt{3} \mu \epsilon$$

Ecuación que se puede introducir en la expresión que suministra el coeficiente de viscosidad  $\mu$ , llegando a la expresión final:

$$\mu = \frac{1}{3\gamma} + \frac{k}{3\epsilon} - \frac{\alpha' \sigma_m}{3\epsilon}$$

### 3.3 Modelos para descarga de silos mediante el método de elementos discretos (DEM) [22].

Para el caso particular del análisis por medio de DEM para un silo de fondo plano, se toma un elemento transversal de espesor delgado de  $2dp$ , (en dirección  $y$ ) el cual es localizado en el centro del silo, en el eje  $x$  y  $z$  (a lo ancho del silo) se genera un mallado de tamaño  $2dp$ , representando fracción de volumen sólido y velocidad de deformación promedio.

Es calculada la velocidad de deformación promedio mediante el tensor de velocidad en 3D:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\gamma}_{zz} \end{bmatrix}$$

Para calcular la velocidad de deformación promedio del segundo invariante del tensor velocidad de deformación  $I_{2D}$  se usa:

$$I_{2D} = \frac{1}{2} [[tr(\dot{\gamma})]^2 - tr(\dot{\gamma}^2)]$$

Y al relacionar la definición del tensor de velocidad de deformación se tiene que:

$$I_{2D} = [(\dot{\gamma}_{xx}\dot{\gamma}_{yy} + \dot{\gamma}_{yy}\dot{\gamma}_{zz} + \dot{\gamma}_{xx}\dot{\gamma}_{zz}) - (\dot{\gamma}_{xy}\dot{\gamma}_{yx} + \dot{\gamma}_{xz}\dot{\gamma}_{zx} + \dot{\gamma}_{yz}\dot{\gamma}_{zy})]$$

### 3.4 Modelo de Schaeffer para descarga de silos [22].

Este modelo tradicionalmente se ha usado en el código MFIX, el cual es un modelo Euleriano flujo dinámico computacional, en el cual sólidos granulares son modelados de manera continua. En este modelo  $I_{2D}$  representa el segundo invariante del tensor de velocidad de deformación, el cual está relacionado con la norma del cuadrado tensor de velocidad de deformación mediante:

$$\sqrt{I_{2D}} = \frac{\sqrt{(S_S : S_S)}}{2}$$

Este modelo expresa los esfuerzos friccionales mediante la ecuación:

$$P_f = P_c \begin{cases} 10^{25}(v - v^{max})^{10} & \text{if } v > v^{max} \\ 0 & \text{if } v \leq v^{max} \end{cases}$$

$$\mu_f = \begin{cases} \frac{P_c \sin(\phi)}{2\sqrt{I_{2D}}} & \text{if } v > v^{max} \\ 0 & \text{if } v \leq v^{max} \end{cases}$$

Donde:

$P_c$  es la presión en estado crítico  $S_s$  es el tensor de velocidad de deformación,  $v$  es fracciones de volumen sólido, y  $v^{max}$  es el valor límite máximo de embalaje.

### 3.5 Modelo de Princeton para descarga de silos [22].

Este modelo friccional es proporcionado por Srivastava and Sundaresan, quien obtuvo una expresión de esfuerzo friccional para arreglo granular compresible. Este modelo es una modificación del modelo de Savage con el adicional que tiene en cuenta las fluctuaciones de los tipos de esfuerzos, incluso en el régimen de flujo granular denso. Los esfuerzos de fricción comienzan a influir en el flujo granular en una mínima fracción del volumen sólido ( $v^{min}$ ) el cual está por debajo del embalaje máximo ( $v^{max}$ ). El modelo de Pinceton se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

$$P_c = \begin{cases} 10^{25}(v - v^{max})^{10} & \text{if } v > v^{max} \\ F_r \frac{(v - v^{min})^r}{(v^{max} - v)^s} & \text{if } v^{max} \geq v > v^{min} \\ 0 & \text{if } v \leq v^{min} \end{cases}$$

Donde:  $F_r$ ,  $r$  y  $s$  son constantes para este modelo y tienen valores de:

$$F_r = 0.5 \text{ dinas/cm}^2$$

$$r = 2$$

$$s = 5$$

La presión de rozamiento está relacionada con la presión estado crítico de la siguiente manera:

$$\frac{P_f}{P_c} = \left( 1 - \frac{\nabla * V_s}{n\sqrt{2}\sin(\phi)\sqrt{S_s:S_s + \theta_s/d_p^2}} \right)^{n-1}$$

$$\mu_f = \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{2}} \frac{P_f}{\sqrt{S_s: S_s + \theta_s/d_p^2}} \left( n - (n-1) \left( \frac{P_f}{P_c} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right)$$

El coeficiente  $n$  tiene diferentes valores dependiendo si el arreglo granular está experimentando una dilatación o compactación.

$$n = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\phi) & \text{if } \nabla * V_s \geq 0 \\ 1.03 & \text{if } \nabla * V_s < 0 \end{cases}$$

$n$  es un parámetro que determina la forma de la superficie de fluencia.

### 3.6 Modelo de CSS (Chialvo–Sun–Sundaresan) para descarga de silos [22].

La forma general de este modelo reúne los tres regímenes en los cuales se puede presentar el material y se representa mediante:

$$p = \begin{cases} p_{QS} + p_{Int} & \text{for } v \geq v_c \\ (p_{Inter}^{-1} + p_{Int}^{-1})^{-1} & \text{for } v < v_c \end{cases}$$

$$\tau = \begin{cases} \tau_{QS} + \tau_{Int} & \text{for } v \geq v_c \\ (\tau_{Inter}^{-1} + \tau_{Int}^{-1})^{-1} & \text{for } v < v_c \end{cases}$$

Para este arreglo QS (régimen cuasiestático), Int (régimen intermedio) e Inter (régimen inercial),  $v$  es fracción de volumen sólido  $v_c$  es la fracción de volumen sólido crítica.

Las contribuciones de régimen individual se pueden definir como:

$$p_{QS} = \alpha_{QS} |v - v_c|$$

$$p_{Int} = \alpha_{Int} \hat{\gamma}^{\frac{2}{3}}$$

$$p_{Inter} = \frac{\alpha_{Inter} \hat{\gamma}^2}{|v - v_c|^2}$$

$$\tau_{QS} = \beta_{QS} |v - v_c|$$



$$\tau_{Int} = \beta_{Int} \hat{\gamma}^5$$

$$\tau_{Inter} = \frac{\beta_{Inter} \hat{\gamma}^2}{|v - v_c|^{\frac{9}{5}}}$$

Con:

$$\hat{\gamma} = \frac{\dot{\gamma} d_p}{\sqrt{\frac{k_n}{(\rho_s d_p)}}} = \sqrt{\frac{1}{k^*}}$$

y

$$k^* = \frac{k_n}{(\rho_s d_p^3 \dot{\gamma}^2)}$$

Y donde  $\dot{\gamma}$  es velocidad de cizalladura aplicada,  $k_n$  es la constante de amortiguamiento,  $d_p$  es el diámetro de la partícula y  $\rho_s$  es la densidad de la partícula.

## CAPITULO 4. MODELOS FEM DE CASCARAS APLICADOS PARA EL ANÁLISIS DE SILOS [21].

Los elementos tipos cáscara o más comúnmente llamados tipo shell son elementos desarrollados para describir el comportamiento de superficies que están curvadas, por lo anterior este tipo de elemento es el más adecuado para modelar la superficie del silo que se quiere analizar. Se aclara que no es el objetivo de este capítulo realizar una explicación detallada del tema, sin embargo se presenta una descripción general de este tipo de elementos y se enfoca el estudio en la explicación de los elementos shell isoparamétricos.

### 4.1. Geometría y comportamiento de los elementos tipo Shell.

Un shell o cáscara es una superficie en el espacio formando una curva, usualmente un shell tiene un espesor muy delgado comparado con su tamaño, un shell se describe geoméricamente mediante su espesor y su forma, cada shell tiene un radio que define su curvatura y es descrita por los diferentes arcos que forma el elemento. En la figura 4.1 se aprecian geometrías de elementos shell de revolución los cuales se forman al hacer girar una línea sobre un eje de revolución, tanto el cilindro como el cono se pueden desenrollar, situación opuesta ocurre con la esfera y el hiperboloide. Por otra parte se aprecia que el cilindro y la esfera tienen una distancia constante de revolución sin embargo el hiperboloide y el cono esta distancia es variable.

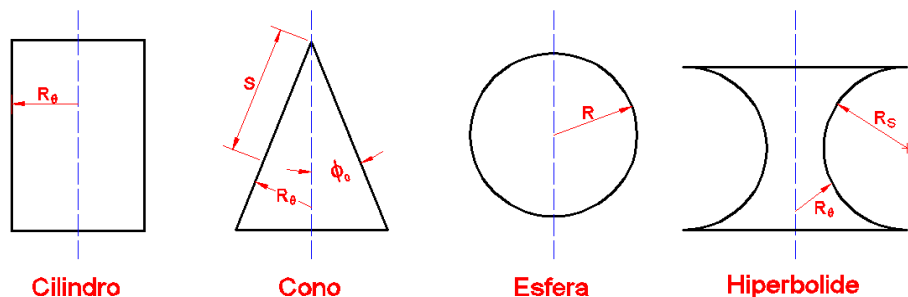


Figura 4.1. Elementos shells de revolución con sus diferentes radios de curvatura.

Un shell simultáneamente muestra esfuerzos de flexión y tensiones de membrana, los primeros corresponden a los esfuerzos de flexión de una placa produciendo momentos de flexión y momentos de torsión y los segundos corresponden a los esfuerzos en un problema de tensión plana, los cuales actúan tangente a la superficie media y

producen fuerzas tangentes en la membrana y de valores  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$ , las cuales se determinan así:

$$N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz \quad N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} dz$$

Donde X y Y son coordenadas ortogonales en la superficie media y Z es la dirección normal a dicha superficie. Los esfuerzos en el shell son conformados por las componentes de la membrana  $\sigma_m$  y las de la flexiones por  $\sigma_b$ .

El esfuerzo normal en la dirección x se escribe;

$$\sigma_x = \sigma_{mx} + \sigma_{bx} = \frac{N_x}{t} + \frac{M_x Z}{\frac{t^3}{12}}$$

Por lo tanto se asume que el esfuerzo varía linealmente a través del espesor. El esfuerzo sobre la superficie media,  $Z = 0$  es cero si  $N_x = N_y = N_{xy} = 0$

Una membrana puede soportar una alta carga de tensión cuando ésta es muy alta comparada con la carga de deflexión, caso similar a un alambre que puede soportar cargas altas de tensión pero cargas bajas de deflexión.

La teoría clásica de los shell produce ecuaciones que son muy difíciles de resolver ya que las ecuaciones están en función de los desplazamientos y se llega a resultados solo cuando se hacen muchas aproximaciones. Expertos en el tema no ven estas aproximaciones con buenos ojos, así que se han formulado diferentes teorías como la de Donnell, Flugge, Sanders, Vlasov, etc. Al igual que la teoría de placa de Kirchhoff la teoría de los shell es limitada para pequeñas deformaciones, al menos que sean agregados términos de alto orden a los esfuerzos de membrana relacionados con la rotación de la superficie media del shell. La teoría clásica de los shell es aplicada a shells delgados en los cuales el esfuerzo de deformación es insignificante.

Los elementos finitos tipo shell han sido de los más difíciles de desarrollar, por lo que se necesario tener tres enfoques del problema:

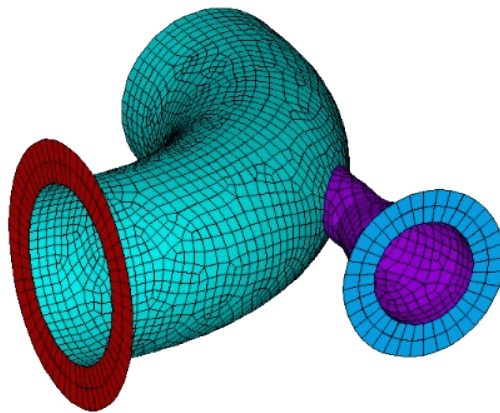
1. Elemento plano formado por la combinación de elemento de membrana plano y elemento de deformación plana.
2. Elementos curvados formulados con base en la teoría clásica de los shell.
3. Elementos tipo línea intermedia, similares a elementos planos de línea intermedia, los cuales pueden ser considerados como formas especiales de elementos sólidos que son delgados en una dirección.

Elementos triangulares planos se pueden modelar como shell como una superficie mapeada, los elementos planos son fáciles de formular. Un elemento curvado es más complicado que un elemento plano, ya que su geometría es considerablemente mayor.

Independientemente de cuál teoría clásica de shell es usada, las complejidades y aproximaciones deben estar incorporadas en los elementos. Algunos elementos curvados no pueden mostrar movimientos de cuerpos rígidos sin tensión, ya sea por defectos de la teoría o por deficiencia en el campo de desplazamiento del elemento.

Normalmente el usuario de un elemento curvado debe suministrar datos adicionales a las coordenadas nodales para describir la geometría del elemento. Algunos elementos shell curvados incluyen derivadas de esfuerzos de membrana y curvaturas entre sus grados de libertad nodales.

Los elementos plano mindlin o elementos sólidos degradados pueden generar curvas y aparecer en un punto intermedio entre un elemento plano y un elemento curvo formulado por una teoría shell, tanto en la precisión como en la facilidad del uso. Cualquiera de los anteriores tres enfoques podrían utilizarse para proporcionar elementos para un shell en particular, como se muestra en la figura 4.2



*Figura 4.2. Modelado de una intersección de tubería mediante elementos shell.*

#### 4.2. Elementos shell isoparamétricos generales.

Un elemento shell se puede modelar de forma general como un elemento sólido de tres dimensiones que tenga una dimensión de espesor mucho menor que en las otras dos dimensiones como lo representado en la figura 4.3-a, sin embargo como el espesor debe ser menor los nodos intermedios que hay en este pueden ser eliminados y de

esta forma se disminuyen los grados de libertad, en la figura 4.3-b se pueden apreciar el mismo elemento pero con un menor número de nodos. Este elemento no necesita tener ocho nodos así que una popular forma es llevarlo a cuatro nodos, asegurando que sean elementos tipo mindlin y teniendo en cuenta la deformación por cizallamiento transversal, figura 4.3-c representa este tipo de elemento.

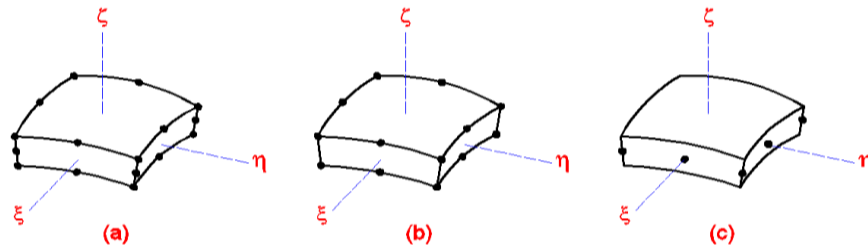


Figura 4.3. Elemento shell con diferente configuración de nodos.

#### 4.2.1 Geometría:

Un nodo típico de la configuración mostrada en la figura 4.3-c se puede escribir como un vector de dirección de espesor  $V_{3i}$ :

$$V_{3i} = t_i \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{t_i} \begin{Bmatrix} x_j - x_k \\ y_j - y_k \\ z_j - z_k \end{Bmatrix}$$

En el cual  $l_{3i}$ ,  $m_{3i}$  y  $n_{3i}$  son los cosenos directores de la línea  $kij$ . Las coordenadas cartesianas de un punto cualquiera dentro del elemento son:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum N_i \zeta \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix}$$

Donde  $x_i = (x_f + x_k)/2$  etc, y la funciones de forma  $N_i$  son funciones de  $\zeta$  y  $\eta$  pero independientes de  $\zeta$ .

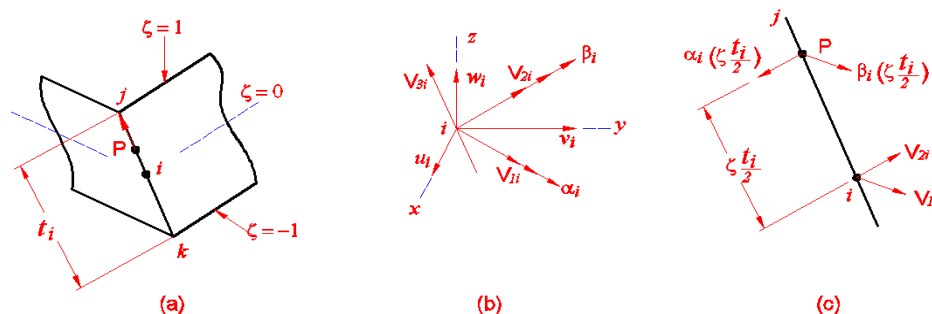


Figura 4.4. (a) Nodo típico  $i$  con espesor en la dirección del vector  $V_{3i}$  (b) Vector ortogonal del nodo  $i$  y sus grados de libertad (c) Desplazamiento de un punto  $P$  sobre  $V_{3i}$

En la figura 4.4 los vectores  $V_{1i}$ ,  $V_{2i}$  Y  $V_{3i}$  son perpendiculares entres si, igualmente  $V_{1i}$  y  $V_{2i}$  son tangentes a la superficie media pero no requieren tener una relación a las direcciones de las coordenadas cartesianas.  $V_{1i}$  y  $V_{2i}$  son usados para definir las direcciones de rotación de los grados de libertad nodales  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  los cuales son compartidos por todos los elementos del nodo  $i$ .

Se puede definir  $V_{1i}$  como la dirección principal del material si este es ortotrópico y se puede definir con el vector tangente a la superficie media  $e_{1i}$  cuyas componentes son:

$$\bar{\Delta}x = \sum N_{i\xi} x_i \Delta\xi \quad \bar{\Delta}y = \sum N_{i\xi} y_i \Delta\xi \quad \bar{\Delta}z = \sum N_{i\xi} z_i \Delta\xi$$

De igual manera se puede obtener el vector  $e_{2i}$  usando un incremento  $\Delta\eta$  donde:

$$e_{3i} = e_{1i} \times e_{2i}$$

y

$$V_{2i} = t_i e_{3i} / e_{3j}$$

Finalmente  $V_{1i} = e_{1i}$  y  $V_{2i} = V_{3i} \times V_{1i}$ . Los cosenos directores de  $V_{1i}$  y  $V_{2i}$  se obtienen al dividir cada vector en su magnitud.

La matriz de cosenos directores se puede definir como:

$$[\mu_i] = \begin{bmatrix} -\frac{V_{2i}}{V_{2i}} & \frac{V_{1i}}{V_{1i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{2i} & l_{1i} \\ -m_{2i} & m_{1i} \\ -n_{2i} & n_{1i} \end{bmatrix}$$

Donde  $V_{1i}$  y  $V_{2i}$  son las magnitudes de  $V_{1i}$  y  $V_{2i}$ .

Para este análisis se debe contar con la matriz Jacobiana 3x3 que contiene términos como:

$$X_{,\xi} = \sum N_{i\xi} (X_i + \zeta t_i l_{3i}/2)$$

$$X_{,\eta} = \sum N_{i\eta} (X_i + \zeta t_i l_{3i}/2)$$

$$X_{,\zeta} = \sum N_i (t_i l_{3i}/2)$$

#### 4.2.2 Desplazamientos y deformaciones:

El desplazamiento de un punto P sobre el vector  $V_{3i}$  mostrado en la figura 4.4, consiste en el movimiento del nodo i mas el desplazamiento relativo al nodo i creado por la rotación de  $V_{3i}$ . Las componentes de desplazamiento relativo mostradas deben ser resueltas para x, y, y z antes de adicionarse al desplazamiento del nodo i. Por ejemplo el punto P ha tenido un desplazamiento en dirección x de:

$$u_p = u_i - \alpha_i \left( \zeta \frac{t_i}{2} \right) l_{2i} + \beta_i \left( \zeta \frac{t_i}{2} \right) l_{1i}$$

En el cual la rotación nodal  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son asumidos como valores pequeños. Los desplazamientos de un punto arbitrario en un elemento son:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum N_i \zeta \frac{t_i}{2} [\mu_i] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}$$

Con el siguiente procedimiento isoparamétricos, se expresan los esfuerzos en términos de desplazamientos derivativos:

$$[\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T = [\mathbf{H}] [u_x \ u_y \ u_z \ v_x \ \dots \ w_z]^T$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ v_x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \\ v_\xi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_\zeta \end{Bmatrix}$$

Todas las seis deformaciones están incluidas la anterior ecuación porque la superficie media del shell no tiene una orientación particular con respecto a las coordenadas cartesianas x y z. La condición de  $\sigma_3 = 0$  es introducida posteriormente a través de la relación esfuerzo-deformación y se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \\ v_\xi \\ \vdots \\ w_\zeta \end{Bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & 0 & -\zeta t_i N_{i,\xi} l_{2i}/2 & -\zeta t_i N_{i,\xi} l_{1i}/2 \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 & -\zeta t_i N_{i,\eta} l_{2i}/2 & -\zeta t_i N_{i,\eta} l_{1i}/2 \\ 0 & 0 & 0 & -t_i N_{i,\eta} l_{2i}/2 & -t_i N_{i,\eta} l_{1i}/2 \\ 0 & N_{i,\xi} & 0 & -\zeta t_i N_{i,\xi} m_{2i}/2 & -\zeta t_i N_{i,\xi} m_{1i}/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -t_i N_{i,\eta} n_{2i}/2 & -t_i N_{i,\eta} n_{1i}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}$$

La combinación de estas últimas tres ecuaciones conlleva a:

$$[\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T = \sum [\mathbf{B}_i] [u_i \ v_i \ w_i \ \alpha_i \ \beta_i]^T$$

La matriz completa de esfuerzo-deformación  $[\mathbf{B}]$  es construida con 6x5 bloques.

#### 4.2.3 Matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ :

La relación esfuerzo deformación puede ser definida como:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{E}]\{\epsilon\} \quad \text{or as} \quad \{\sigma'\} = [\mathbf{E}']\{\epsilon'\}$$

Donde  $\{\sigma\}$  contiene esfuerzos en las direcciones cartesianas x y z y  $\{\sigma'\}$  contiene esfuerzos en la dirección normal y tangente a la superficie medie del shell. Esta última relación es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5G_{23}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5G_{31}}{6} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{E}']} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}$$

Donde la dirección 1 y 2 son tangentes a la superficie media y la dirección 3 es normal a esta. Estas instrucciones se supone que son las direcciones principales del material si el material este es ortotrópico. El 5/6 es por la variación parabólica del esfuerzo cortante transversal atreves del espesor.  $[\mathbf{E}]$  es obtenido desde  $[\mathbf{E}']$  por la transformación de coordenadas de la siguiente manera:

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{T}_\epsilon]^T [\mathbf{E}'] [\mathbf{T}_\epsilon]$$

Esta transformación debe llevarse a cabo para cada punto de Gauss usado en la generación de  $[\mathbf{K}]$  por la integración numérica.

Los cosenos direccionales necesarios en  $[\mathbf{T}_\epsilon]$  son los cosenos direccionales de los vectores  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$  de los puntos de Gauss. Estos vectores se pueden determinar por la interpolación de la función de forma de los valores nodales.

$$\mathbf{V}_1 = \sum N_i \mathbf{V}_{1i} \quad \mathbf{V}_2 = \sum N_i \mathbf{V}_{2i} \quad \mathbf{V}_3 = \sum N_i \mathbf{V}_{3i}$$



En el cual  $N_i$  es evaluado en los puntos de Gauss. La matriz de rigidez debe ser:

$$[K]_{5N \times 5N} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{matrix} [B]^T & [E] & [B] \\ 5N \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 5N \end{matrix} \det[J] d\xi d\eta d\zeta$$

Donde N es el número de nodos por elemento.

Si las propiedades del material son independientes de  $\zeta$  y si hay errores pequeños aceptables entonces la integración dirección-espesor se puede hacer explícitamente. A continuación se divide  $[B]$  en dos partes, una que es independiente de  $\zeta$  y otra que es lineal a  $\zeta$ , de esta manera se tiene que:

$$[B] = [B_0] + \zeta[B_1]$$

Por lo tanto el término lineal en  $\zeta$  integra a cero y se obtiene;

$$[k] = \int_{-1}^t \int_{-1}^t \left( 2[B_0]^T [E] [B_0] + \frac{2}{3} [B_1]^T [E] [B_1] \right) \det[J] d\xi d\eta$$

En el cual  $[J]$  permanece  $3 \times 3$  pero es evaluado sobre la superficie media donde  $\zeta = 0$ .

Como un elemento se vuelve delgado, la variación de la matriz asociada con los esfuerzos transversales no debe ser permitida en el resto de la matriz de rigidez. Los elementos de cargas nodales provienen de las fuentes habituales asociados con los esfuerzos iniciales desde  $\{\epsilon'_0\} = [T_\epsilon]\{\epsilon_0\}$ .

$$\int_{V_\epsilon} [B]^T [E] \{\epsilon_0\} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [T_\epsilon]^T [E'] \{\epsilon'_0\} \det[J] d\xi d\eta d\zeta$$

Finalmente los elementos de esfuerzos referidos a las direcciones locales 1-2-3 son:

$$\{\sigma'\} = \{E'\}([T_c][B]\{d\} - \{\epsilon'_0\})$$

Los esfuerzos de los puntos de Gauss pueden ser más precisos que los esfuerzos computados en otra parte. Usualmente los elementos comparten un plano tangente común en cada inter-elemento de frontera, así que los grados de libertad  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  están en la superficie media tangente de los vectores en todos los elementos que comparten el nodo i. Esta circunstancia ideal desaparecerá si los elementos para formar la línea de cresta se encuentran como en una placa plegada. Entonces  $V_{3i}$  puede ser definido como un promedio del vector normal de la placa con  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  normales a  $V_{3i}$  pero se esperará una pérdida de precisión.

## CAPITULO 5. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL SILO

### 5.1 Explicación general del software a utilizar.

Para el análisis estructural del silo el software de análisis por elemento finitos (FEA) ANSYS, el cual es un programa que está en el mercado desde los años 70 y que está desarrollado para funcionar bajo la teoría de elementos finitos para estructuras y volúmenes finitos para fluidos.

ANSYS está dividido en tres herramientas principales llamados módulos: pre-procesador, procesador y post-procesador. Tanto el pre-procesador como el post-procesador están provistos de una interfaz gráfica. Este procesador de elemento finito para la solución de problemas mecánicos incluye: análisis de estructuras dinámicas y estáticas (ambas para problemas lineales y no lineales), análisis de transferencia de calor y fluidodinámica, y también problemas de acústicas y de electromagnetismo. Normalmente el uso de estas herramientas se utiliza simultáneamente logrando mezclar problemas de estructuras junto a problemas de transferencia de calor como un todo. Este software es usado también en ingeniería civil y eléctrica, física y química.

El proceso típico de un análisis está dividido en:

*Pre-proceso:* Establecimiento del modelo, se construye la geometría del problema, creando líneas, áreas o volúmenes. Sobre este modelo se establecerá la malla de elementos. Esta parte del pre-proceso es opcional, dado que la ubicación de los elementos de la maya puede provenir de otras aplicaciones de diseño. Se definen los materiales a ser usados en base a sus constantes. Todo elemento debe tener asignado un material particular. Generación de la malla, realizando una aproximación discreta del problema en base a puntos o nodos. Estos nodos se conectan para formar elementos finitos que juntos forman el volumen del material. La maya puede generarse a mano o usando las herramientas de generación automática o controlada de mallas.

*Proceso:* Aplicación de cargas, Se aplican condiciones de borde en los nodos y elementos, se puede manejar valores de fuerza, tracción, desplazamiento, momento o rotación. Obtención de la solución, que se obtiene una vez que todos los valores del problema son ya conocidos.

*Post-proceso:* Visualización de resultados, por ejemplo como dibujo de la geometría deformada del problema. Listado de resultados, igualmente como datos en una tabla.

ANSYS continuamente desarrolla tecnología enfocada en la simulación y a través del tiempo ha adquirido otros software para ofrecer un paquete de aplicaciones que pueden ser unificadas para los problemas más complejos.

Los solucionadores de la parte estructural son: ansys Multiphysics, Mechanical APDL, Structural, Rigid Body Dynamics, nCode DesignLife, entre otros. En cuanto a los del área de dinámica de fluidos cuenta con Fluent, CFX, CFD Professional, Icepak, Polyflow. Ansys también ha desarrollado solucionadores para la parte eléctrica y de campos magnéticos.

Comúnmente se conocen dos plataformas de trabajo, la plataforma ANSYS Workbench que es el marco sobre el que se construye la gama de tecnología de simulación de ingeniería avanzada más amplia y profunda para la industria. Tiene una innovadora visión esquemática de los proyectos que combina el proceso completo de simulación, guiando al usuario con la simplicidad que ofrece picar y arrastrar incluso a través de análisis multifísicos complejos. Gracias a la conectividad CAD bidireccional, tiene un potente mallado altamente automatizado, un mecanismo de actualización a nivel de proyectos, gestión de parámetros generales y herramientas de optimización integradas, la plataforma ANSYS Workbench proporciona una productividad sin precedentes, permitiendo el desarrollo de productos impulsado por la simulación.

Por otra parte y más clásica se encuentra la plataforma del Mechanical APDL (lenguaje de diseño paramétrico ANSYS) el cual proporciona flexibilidad y amplía la capacidad de las aplicaciones mecánicas, sirve como la base para acceder a las funciones sofisticadas del solucionador de la mecánica estructural. Los usuarios pueden aprovechar Mechanical APDL para automatizar tareas comunes, construir sus propios modelos paramétricos, realizar optimizaciones de diseño y la construcción de mallado adaptativo ya que la capacidad ofrece muchas características de conveniencia: parámetros, macros, derivaciones y mallados repetitivos.

Para este proyecto se eligió la plataforma de Mechanical APDL porque permite desarrollar un código de comandos donde se estructuran cada una de las fases del análisis estructural y donde se puede parametrizar las entradas geométricas, características de material, tipo y tamaño del elemento a utilizar, detallado del mallado y características de las cargas sobre el modelo. Lo anterior permite modificar estas variables para obtener diferentes modelos ajustados a distintas necesidades. Otra importante razón para seleccionar esta plataforma es que gracias a su modelo parametrizado permite incluir una curva de presiones sobre el silo, caso que no es posible en Workbench ya que este permite únicamente presiones hidrostáticas.

Las herramientas FEA (análisis por elementos finitos) de ANSYS proporcionan la capacidad de simular todos los aspectos estructurales de un producto, entre estos están; análisis estático lineal que proporciona tensiones o deformaciones, análisis modal que determina las características de vibración y fenómenos no lineales transitorios avanzadas que implican efectos dinámicos y los comportamientos complejos.

La fidelidad de los resultados se logra a través de la amplia variedad de modelos de materiales disponibles, la calidad de la biblioteca de elementos, la robustez de los algoritmos de solución y la capacidad de modelar cada producto a partir de piezas individuales a conjuntos muy complejos con cientos de componentes que interactúan a través de los contactos o movimientos relativos.

## 5.2 Procedimiento para generar el mallado del silo.

Para realizar el mallado del silo se ejecuta una lista de comandos en un editor de texto.

Inicialmente se ingresan las variables geométricas del silo, el tamaño y tipo de elemento y las propiedades del material del silo. En la figura 5.1 se observa el valor y el significado de cada una.

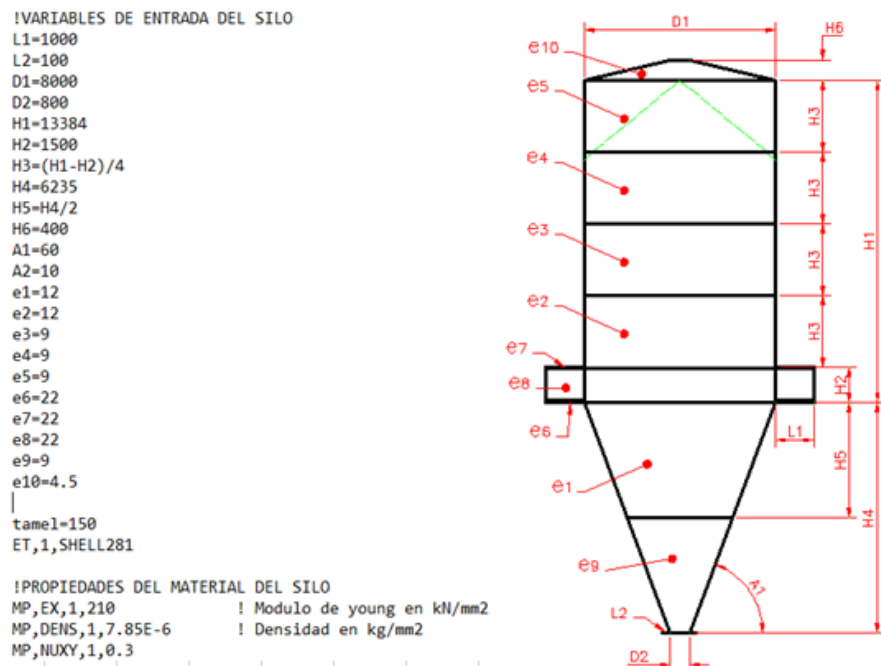


Figura 5.1. Variables de entrada del silo.

Para determinar la geometría del silo se generan diferentes keypoint alimentados con los valores de las variables anteriormente descritas, paso a paso se genera la geometría del silo en diferentes etapas, para el modelo de este proyecto se genera primero los keypoint necesarios para generar una línea luego se hace rotar esta ultima para obtener un área, la figura 5.2 a la figura 5.7 describen este proceso.

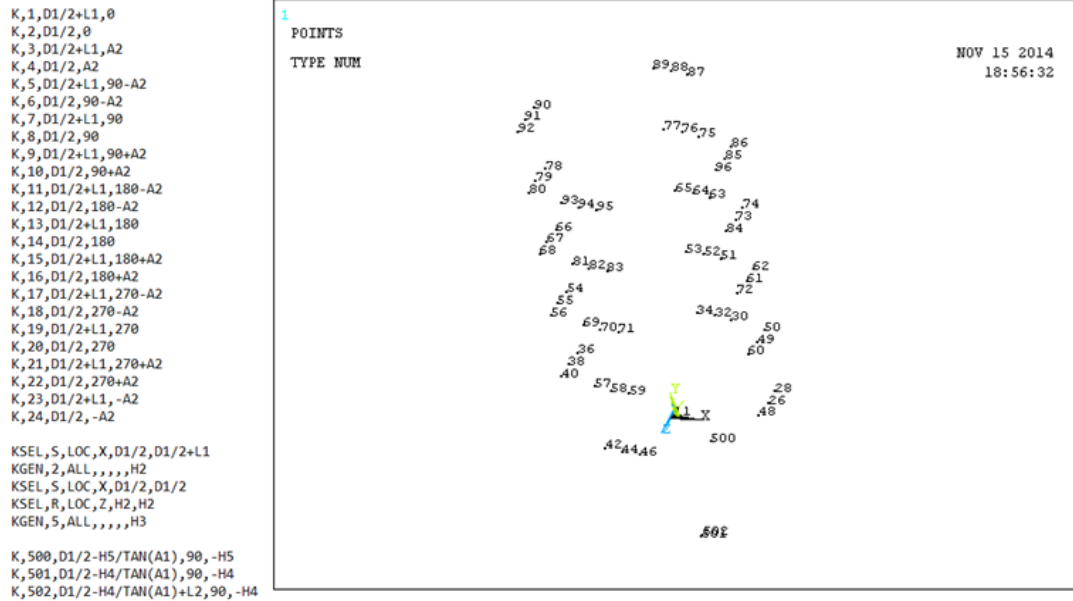


Figura 5.2. Generación keypoint para generar la geometría del silo.

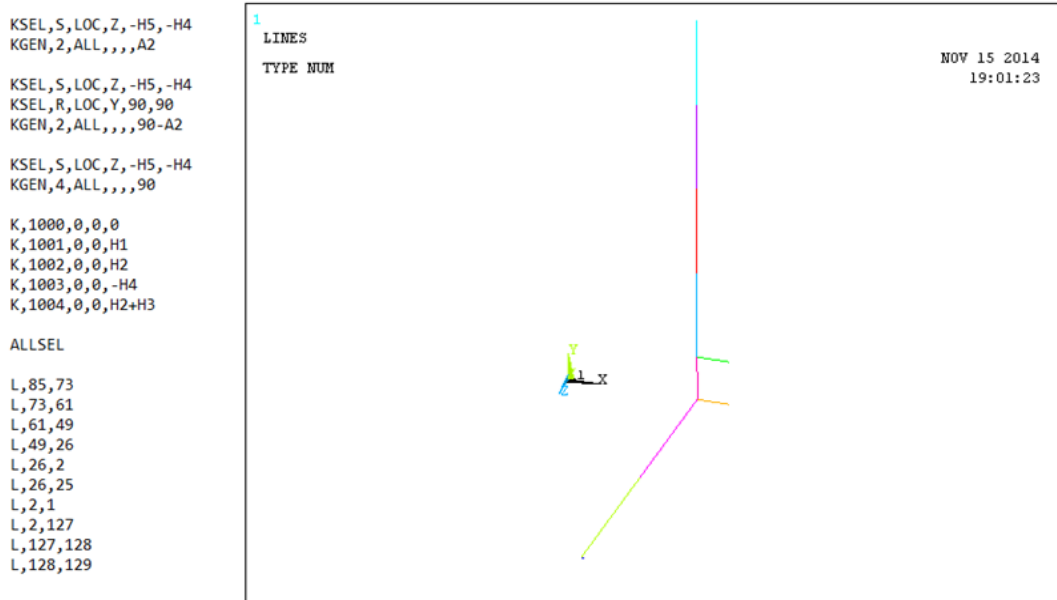


Figura 5.3. Generación de línea con base en keypoint.

```

LSEL,S,LOC,X,0,D1/2
LSEL,U,LOC,Z,-H4,-H4

AROTAT,ALL,,,,,1000,1001,A2

ASEL,ALL
AGEN,2,ALL,,,,-A2,,

ASEL,ALL
AGEN,4,ALL,,,,90,,

ALLSEL

LSEL,S,LOC,X,0,D1/2
LSEL,U,LOC,Z,-H4,-H4
LSEL,R,LOC,Y,-A2,-A2

AROTAT,ALL,,,,,1001,1000,90-2*A2

ASEL,S,LOC,Y,-90+A2,-A2

AREVERSE,ALL

AGEN,4,ALL,,,,90,,

NUMMRG,ALL

ALLSEL

ASEL,ALL

AREVERSE,ALL

ALLSEL

```

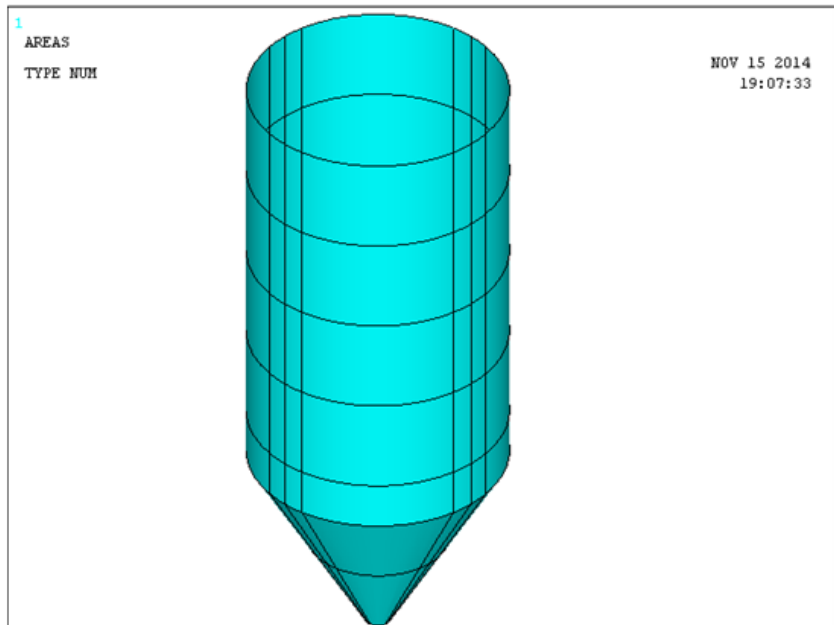


Figura 5.4. Generación de áreas del cilindro y de la tolva.

```

LARC,25,27,1002,D1/2+L1
LARC,1,3,1000,D1/2+L1
LARC,27,29,1002,D1/2+L1
LARC,3,5,1000,D1/2+L1
LARC,5,7,1000,D1/2+L1

A,1,2,4,3
A,25,26,28,27
A,30,29,27,28
A,6,5,3,4
A,8,7,5,6
A,32,31,29,30

ASEL,S,LOC,X,D1/2,D1/2+L1
ASEL,U,LOC,X,D1/2,D1/2
AGEN,4,ALL,,,,90,,

ALLSEL

A,48,47,23,24
A,26,25,1,2
A,28,27,3,4
ASEL,S,LOC,X,D1/2,D1/2+L1
ASEL,U,LOC,X,D1/2,D1/2
ASEL,U,LOC,Z,0,0
ASEL,U,LOC,Z,H2,H2
AGEN,4,ALL,,,,90,,

LARC,129,123,1003,D1/2-H4/TAN(A1)+L2
LARC,123,126,1003,D1/2-H4/TAN(A1)+L2
LARC,126,502,1003,D1/2-H4/TAN(A1)+L2
|
A,122,123,129,128
A,125,126,123,122
A,502,126,125,169

```

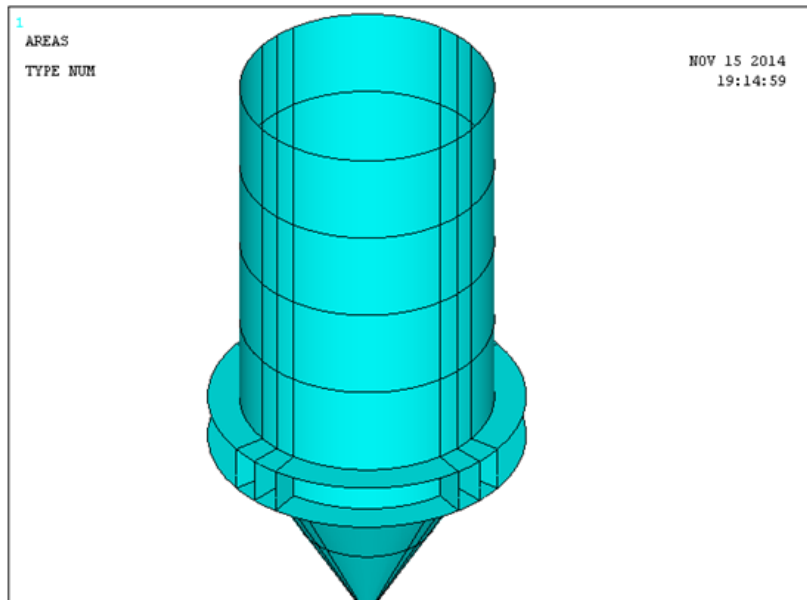


Figura 5.5. Generación de áreas del cinturón y de sus refuerzos.

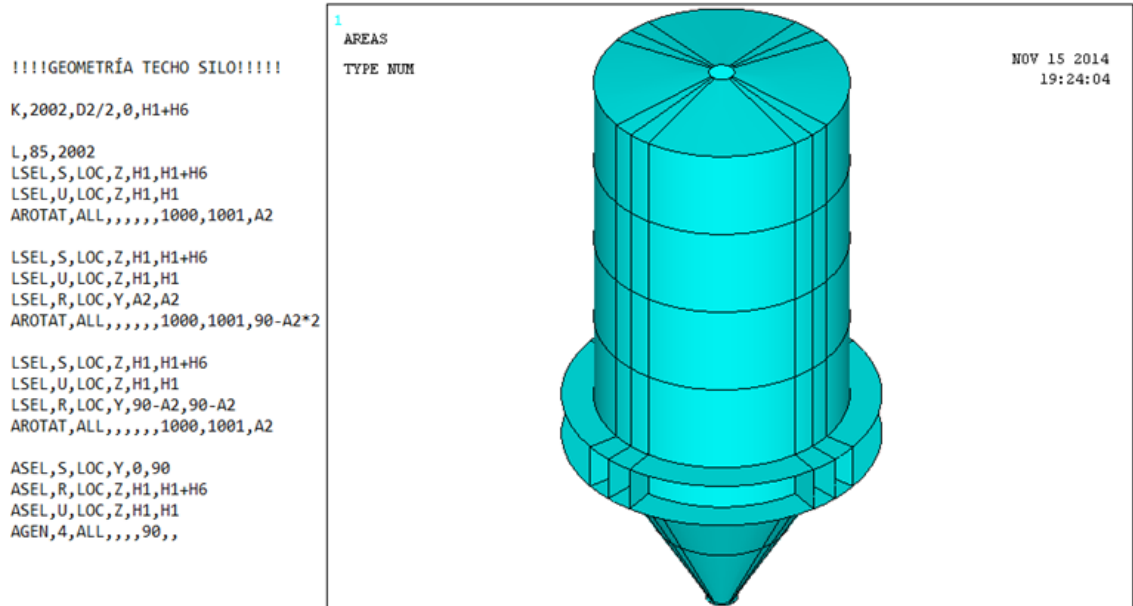


Figura 5.6. Generación de áreas del techo.

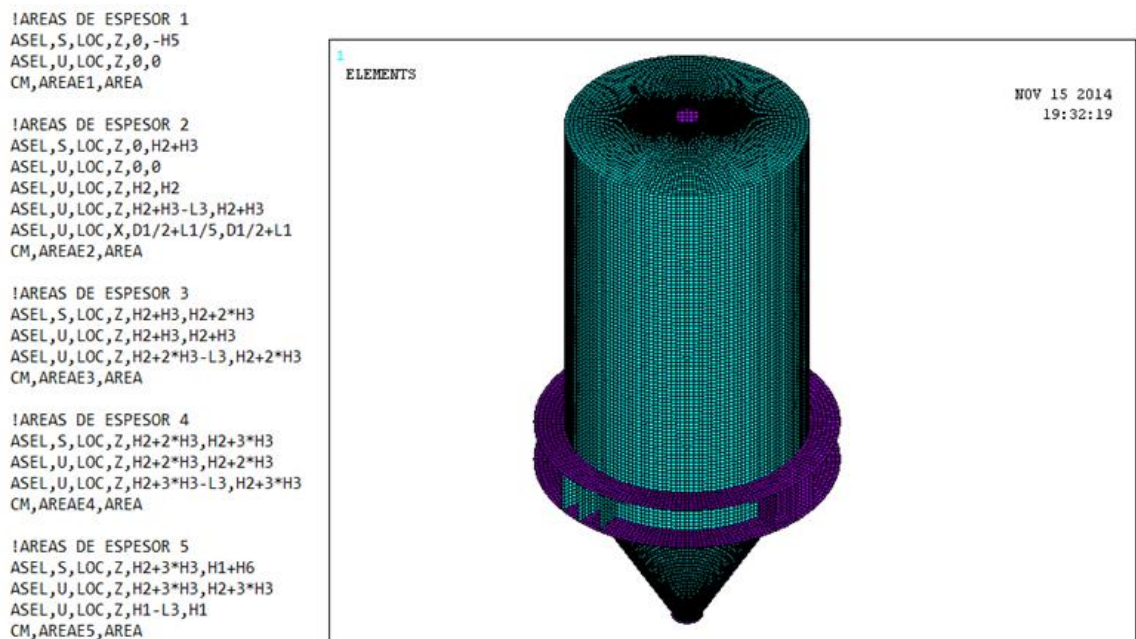


Figura 5.7. Generación de malla.

A continuación de la figura 5.8 a la figura 5.10 se muestra detalles de la malla generada.

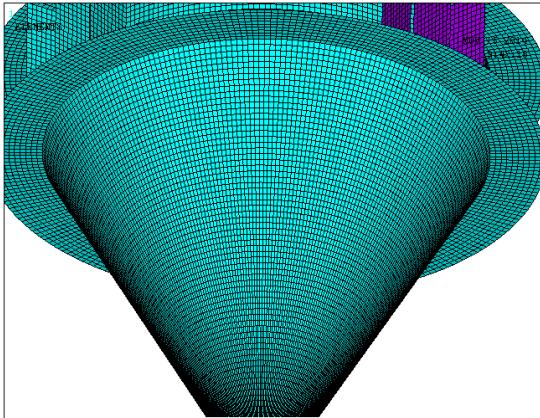


Figura 5.8. Detalle malla cono.

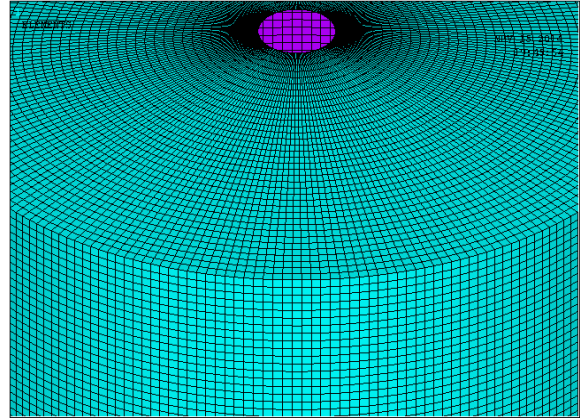


Figura 5.9. Detalle malla techo.

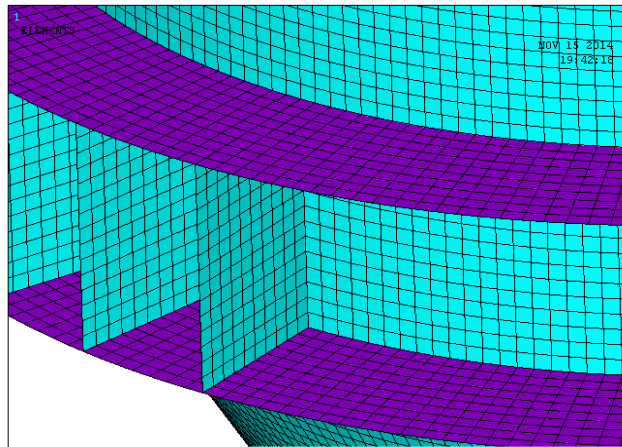


Figura 5.10. Detalle malla cinturón.

También la figura 5.11 muestra un comparativo de una malla con un tamaño de elemento 100mm y 200mm.

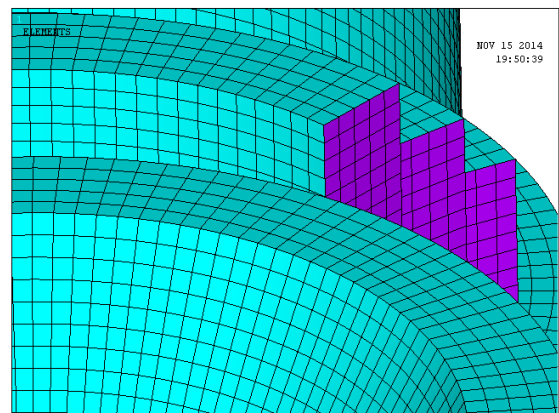
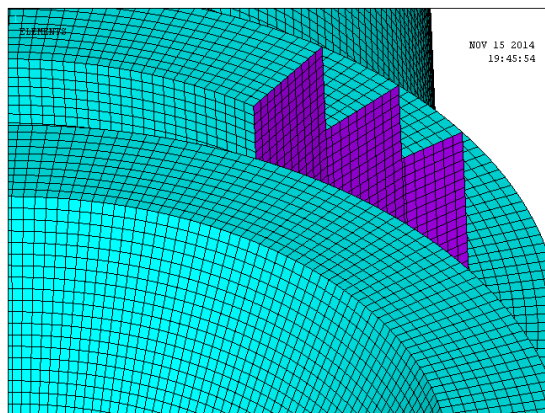


Figura 5.11. Comparativo de una malla con un tamaño de elemento 100mm y 200mm.



### 5.3 Procedimiento para determinar los esfuerzos y deformaciones en el silo.

Una vez enmallado el modelo, en el mismo documento de texto mediante un código se asignan las presiones sobre el cilindro y la tolva del silo. Como la presión a lo largo de estas partes del silo no es lineal, se hace necesario aplicar las presiones como fuerzas equivalentes sobre los nodos que la conforman. Estas fuerzas tienen un valor que varía con la altura tanto de la tolva como la del cilindro y para determinarlas se realiza una hoja de cálculo con base normativa del Eurocodigo y explicada en la sección 2.5.

La hoja de cálculo para determinar la presión sobre el silo se divide en tres partes:

*Parte uno:* Aquí se ingresan las dimensiones geométricas del silo a calcular y las propiedades físicas del material a almacenar. Para el caso de este proyecto se evalúa un silo de 1000 toneladas para almacenamiento de cemento y en la figura 5.12 se muestran sus valores de entrada.

<b>1</b>	ESPECIFICACIONES GEOMETRICAS SILO	DIÁMETRO	$d_c$	8	[ m ]
		ALTURA MATERIAL CON EL CENTROIDE	$h_o$	18,05	[ m ]
		ALTURA MATERIAL CILINDRO	$h_c$	11,3	[ m ]
		ALTURA MATERIAL TOLVA	$h_h$	6,75	[ m ]
		ALTURA FILA	$h_z$	3,125	[ m ]
		ALTURA CENTROIDE PILA	$h_p$	1,041667	[ m ]
		RADIO	$r$	4	[ m ]
		ÁNGULO DE LA TOLVA CON LA VERTICAL	$\beta$	30	
		AREA TRANSVERSAL DEL SILO	$A$	50,26548	[ m <sup>2</sup> ]
		PERIMETRO	$U$	25,13274	[ m ]
		E XENTRISIDAD LLENADO	$e_i$	0	[ m ]
		E XENTRISIDAD VACIADO	$e_v$	0	[ m ]
		FACTOR DE EXENTRISIDAD EN LA PARED	$\beta_f$	1	
		<b>CAPACIDAD</b>		<b>1021,646</b>	<b>[ Ton ]</b>
PROPIEDADES FISICAS DEL MATERIAL Tab 4.1	PESO ESPECIFICO MIN	$\gamma_l$	15	[ KN / m <sup>3</sup> ]	
	PESO ESPECIFICO MAX	$\gamma_s$	18	[ KN / m <sup>3</sup> ]	
	ÁNGULO DE REPOSO CON LA HORIZONTAL	$\phi_r$		[ Grados ]	
	ÁNGULO EFECTIVO DE FRICCIÓN INTERNO MIN	$\phi_{i_l}$	42	[ Grados ]	
	ÁNGULO EFECTIVO DE FRICCIÓN INTERNO MAX	$\phi_{i_s}$	52	[ Grados ]	
	RELACION DE PRESION LATERAL MIN	$\lambda_l$	0,41		
	RELACION DE PRESION LATERAL MAX	$\lambda_s$	0,52		
	ÁNGULO DE FRICCIÓN CON LA PARED MIN	$\phi_{w_l}$	25	[ Grados ]	
	ÁNGULO DE FRICCIÓN CON LA PARED MAX	$\phi_{w_s}$	30	[ Grados ]	
	COEF DE FRICCIÓN EN PARED CILINDRICA MIN	$\mu_l$	0,466308		
COEF DE FRICCIÓN EN PARED CILINDRICA MAX	$\mu_s$	0,57735			

Figura 5.12. Valores de entrada de hoja de cálculo de presiones sobre el silo.

*Parte dos:* En esta parte se encuentran todas las ecuaciones utilizadas para calcular la presión tanto de llenado como de vaciado en el cilindro y en la tolva. Se puede encontrar en esta sección como es la variación de la presión con respecto a la altura del silo. La figura 5.13 muestra esta sección de la hoja de cálculo.

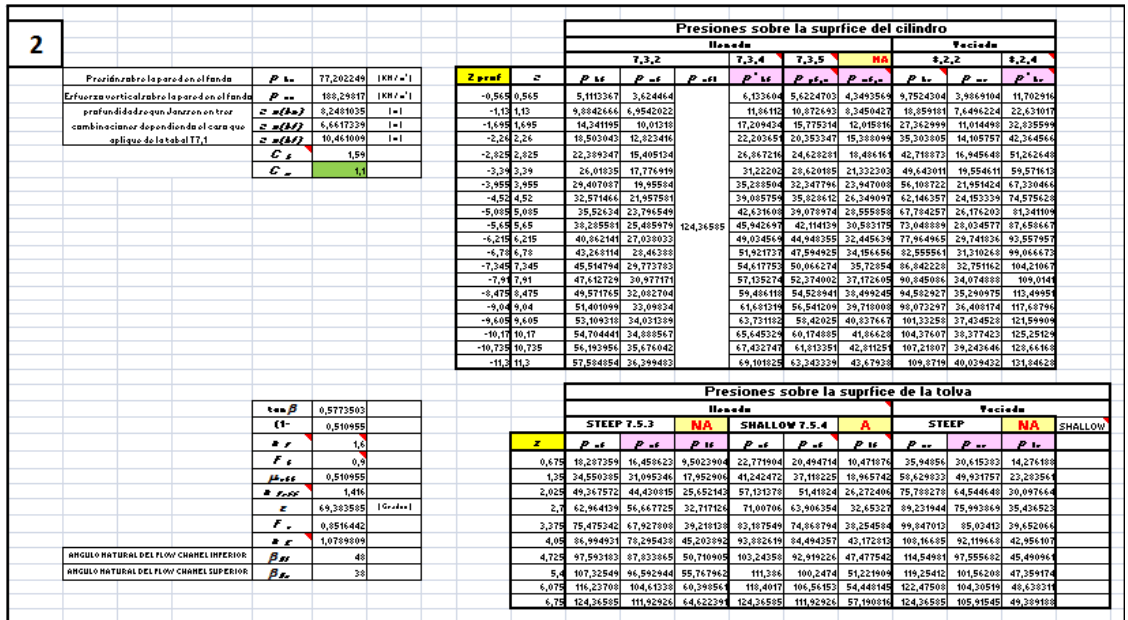


Figura 5.13. Cálculo de presiones sobre la superficie del cilindro y de la tolva del silo.

Parte tres: En esta sección se ajustan los valores anteriormente calculados a las condiciones geométricas del silo que se hizo en ansys y se grafican las presiones en función de la altura. La figura 5.14 muestra que la presión de llenado es menor que la de vaciado en la parte cilíndrica, en cuanto a la tolva las presiones son iguales.

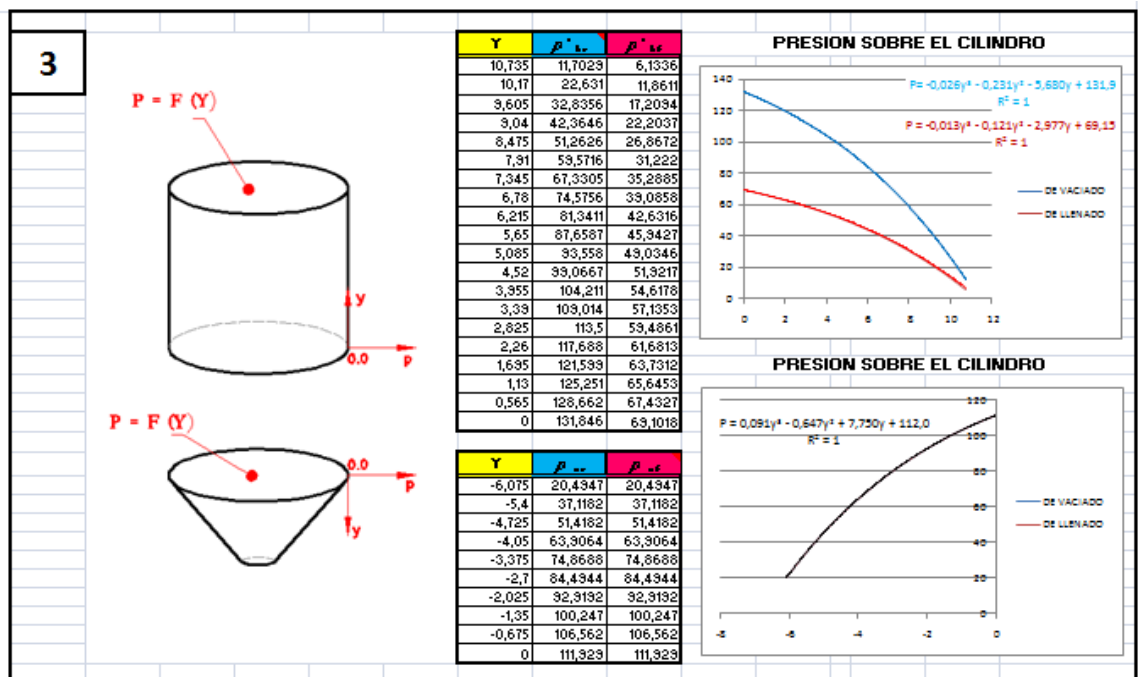


Figura 5.14. Curvas de presiones del llenado y vaciado en el cilindro y cono del silo.

Estas curvas son ingresadas en el documento de texto dejando variables los índices de cada ecuación y así poder modificar fácilmente la condición de carga de cada silo analizado. A continuación se explica detalladamente cómo se ingresó la carga de vaciado, posteriormente se presenta un resultado resumido de la carga de llenado.

### 5.3.1 Determinación de esfuerzos en el vaciado:

La figura 5.15 muestra parte del código utilizado en sección cilíndrica, aquí se puede observar que las componentes aplicadas son todas radiales.

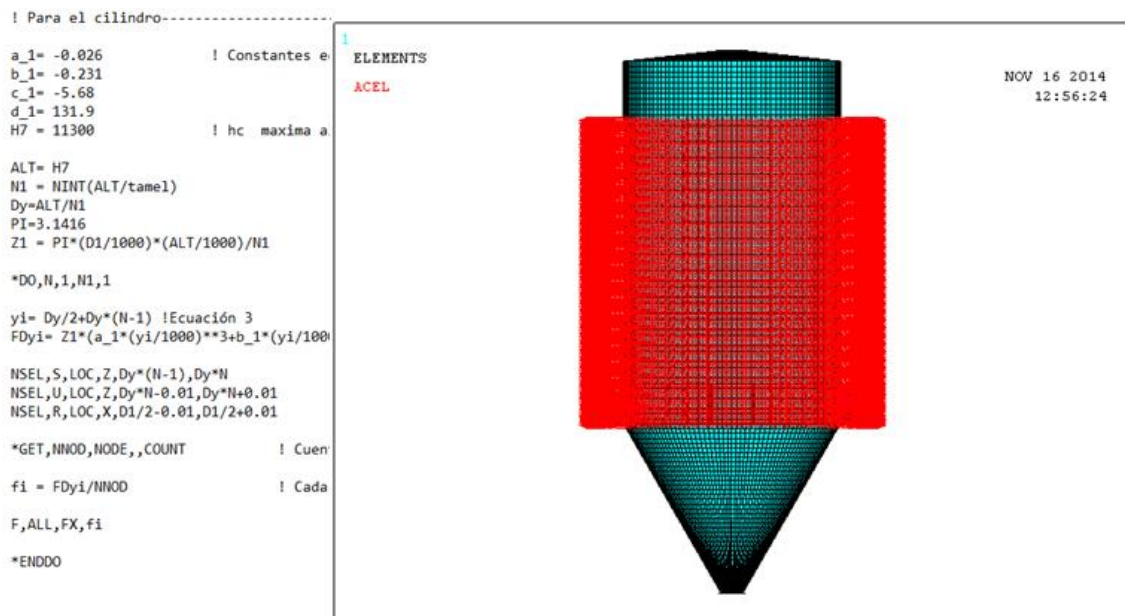


Figura 5.15. Fuerzas equivalentes a la presión sobre la sección cilíndrica del silo.

En cuanto a las presiones sobre la tolva se tiene en cuenta que el equivalente de las fuerzas debe ser perpendicular al área, por ende se descompone en fuerzas equivalentes radiales y fuerzas equivalentes verticales, la figura 5.16 representa el código y las fuerzas en esta parte.

También se asignan las condiciones de frontera del modelo teniendo como referencia que los silos siempre se soportan sobre 4 vigas pertenecientes a una estructura, la figura 5.17 muestra el código y resultado de esta sección.

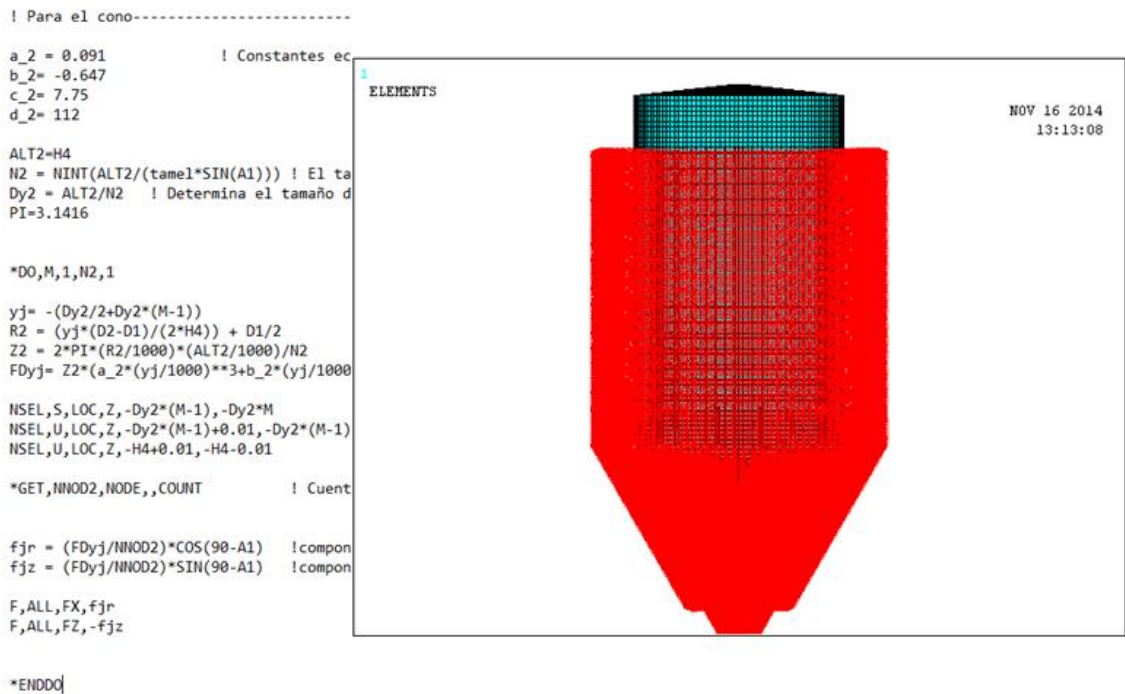


Figura 5.16. Fuerzas equivalentes a la presión sobre la sección cónica del silo.

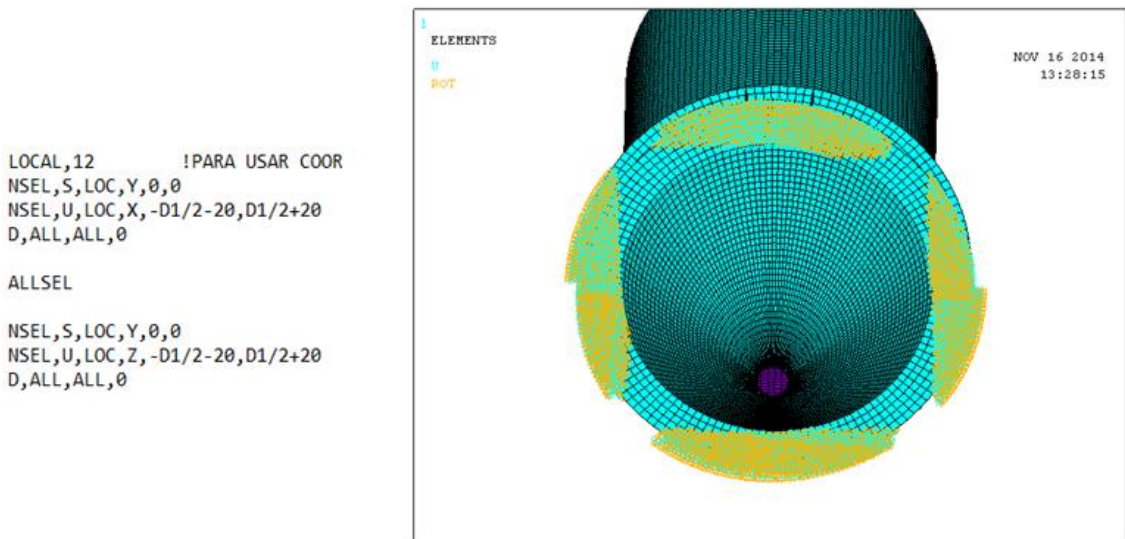


Figura 5.17. Condiciones de contorno del silo.

Es conveniente aclarar que la asignación de la aceleración de la gravedad del modelo se hace mediante el comando "ACEL" y que se debe tener en cuenta que éste toma la aceleración de forma opuesta a lo real. Finalmente se corre el modelo ingresando en el código el comando "SOLVE", de la figura 5.18 a la figura 5.25 se pueden observar los resultados obtenidos en el análisis.

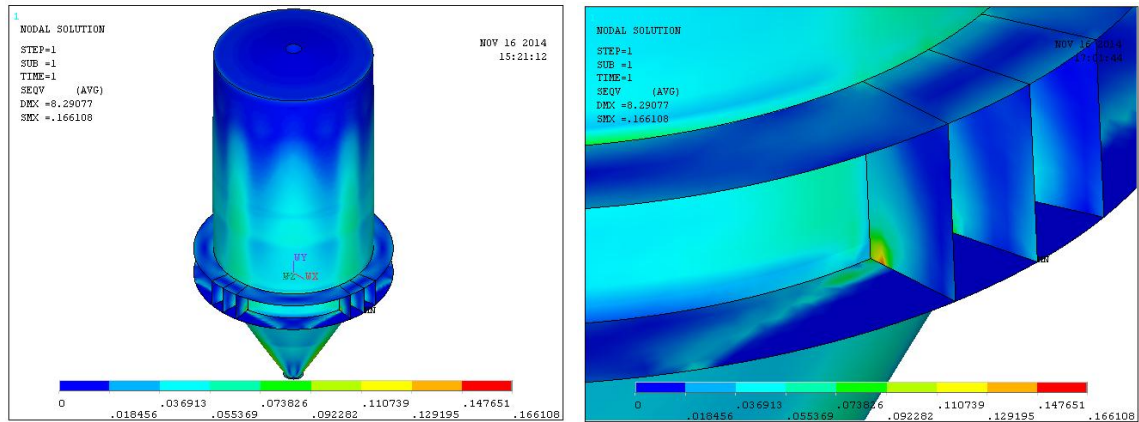


Figura 5.18. Esfuerzo de von Mises para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos ubicados en los refuerzos del cinturón. Valor máximo 0.166GPa

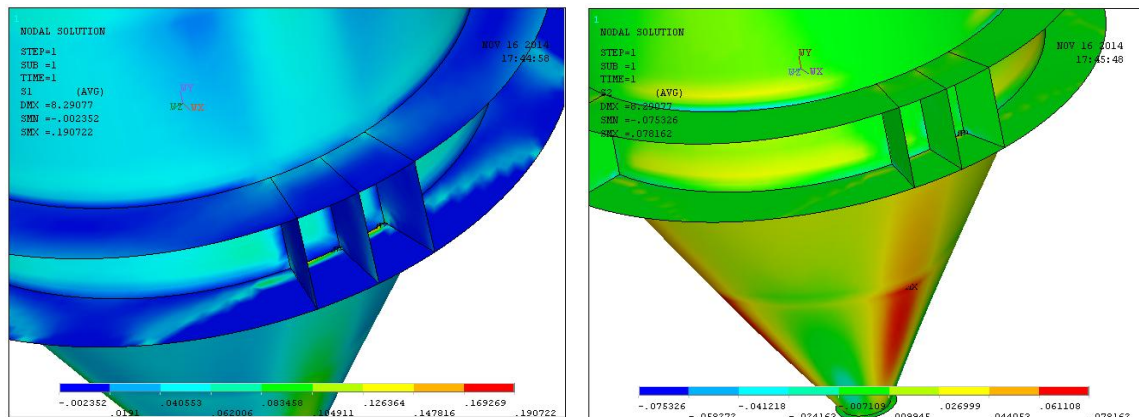


Figura 5.19. 1er y 2do Esfuerzos principal para el vaciado, 0.160GPa y 0.078GPa respectivamente. El 3er esfuerzo se puede despreciar ya que es 6Pa.

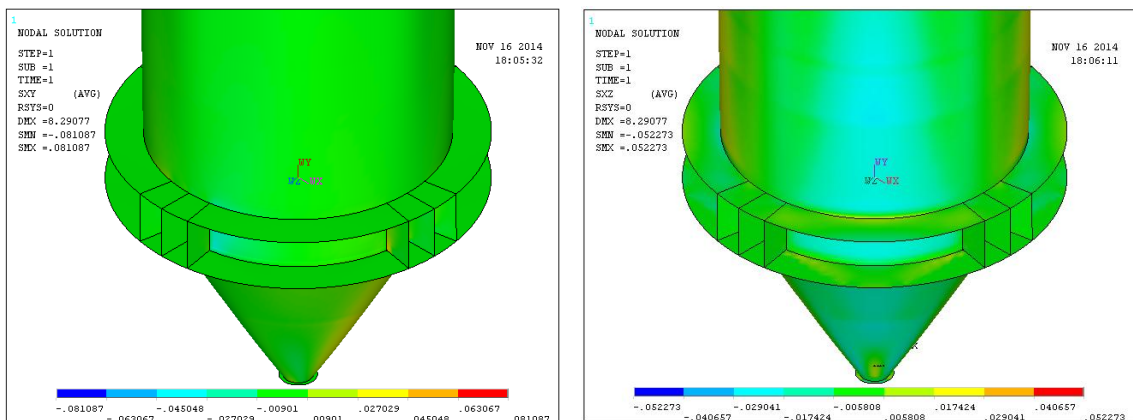


Figura 5.20. Esfuerzos cortantes en XY y XZ para el vaciado con valores de 0.081GPa y 0.052GPa respectivamente. El esfuerzo YZ no tiene el mismo valor de XY.

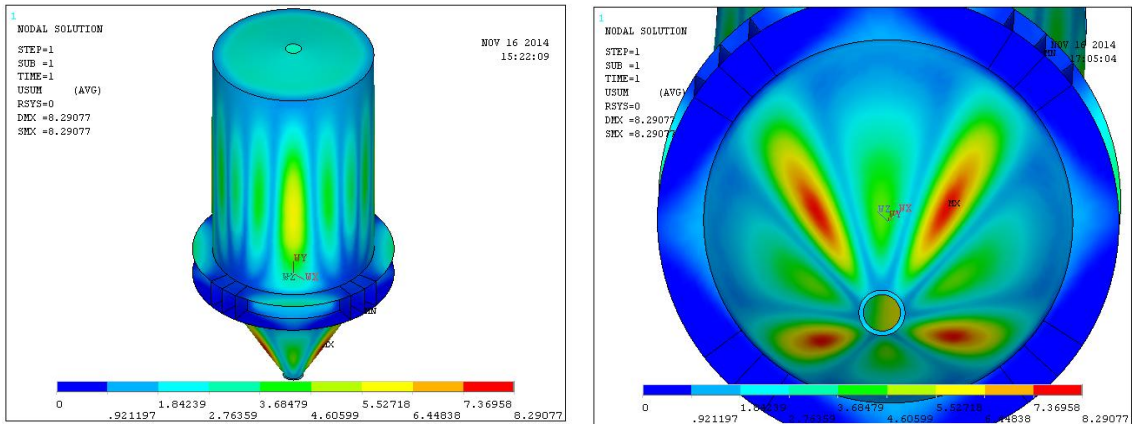


Figura 5.21. Suma de desplazamientos para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cilíndricas.

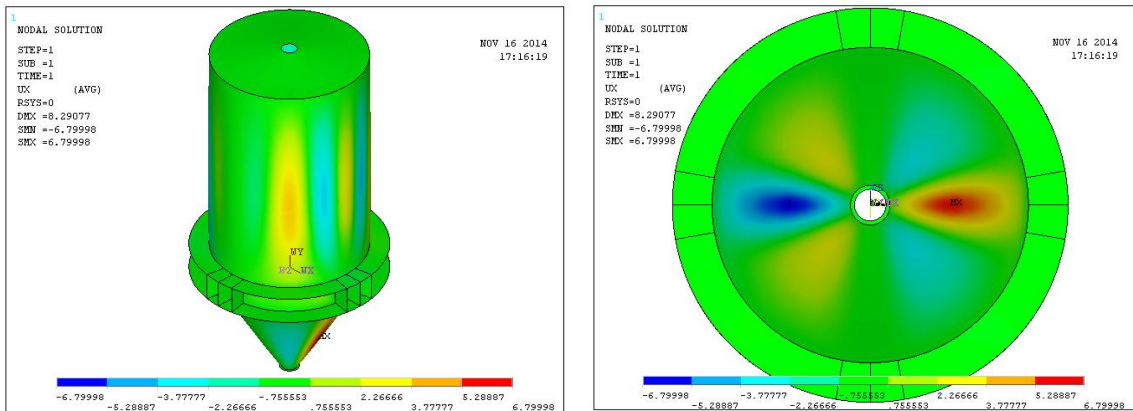


Figura 5.22. Desplazamientos en el eje X para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cartesianas.

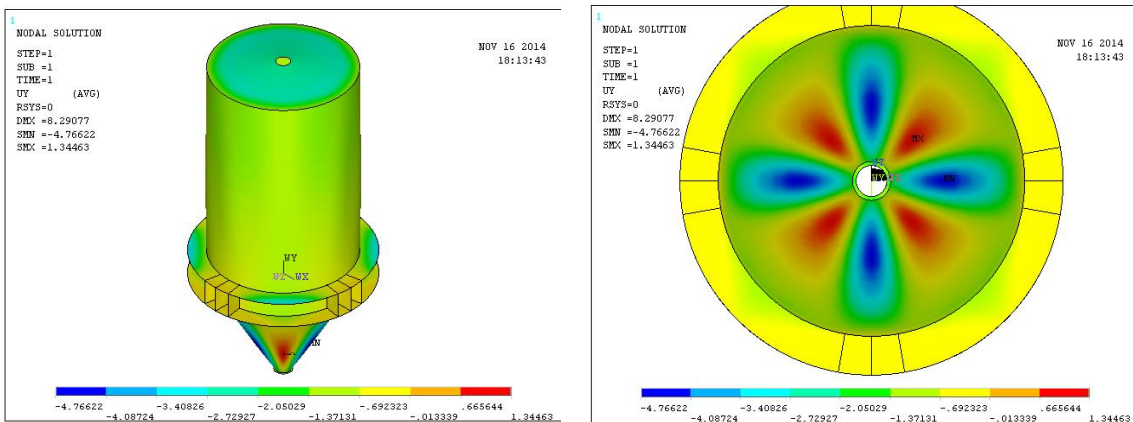


Figura 5.23. Desplazamientos en el eje Y para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cartesianas.

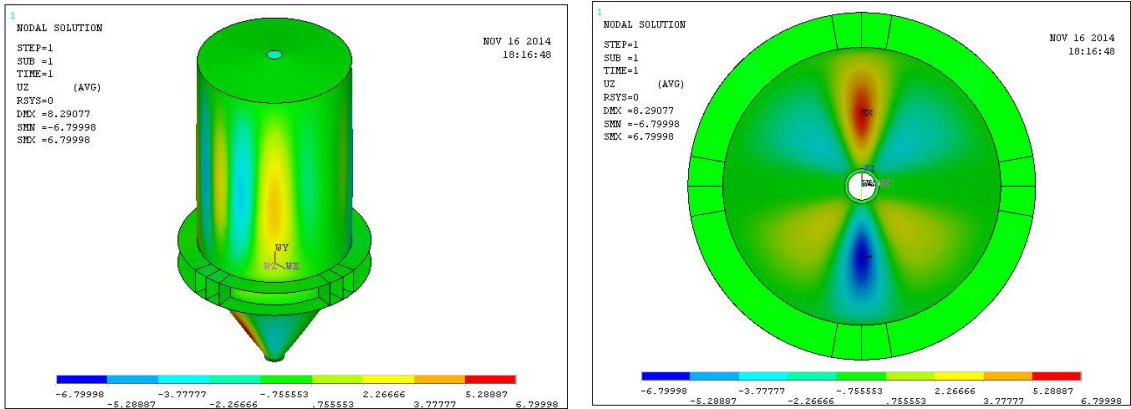


Figura 5.24. Desplazamientos en el eje Z para el vaciado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cartesianas.

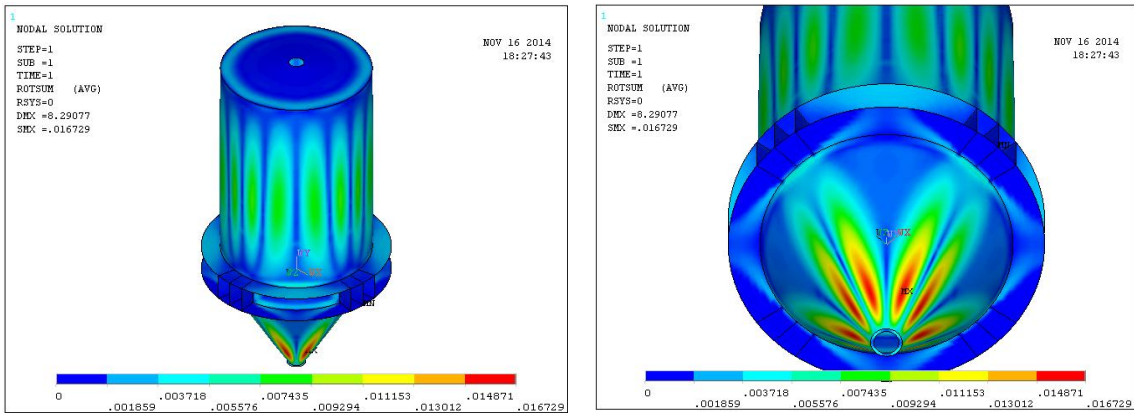


Figura 5.25. Sumatoria de las componentes de rotación para el vaciado en cada uno de los ejes cartesianos.

### 5.3.2 Determinación de esfuerzos en el llenado:

Como se observó en figura 5.14 las presiones de llenado son menores que las presiones de vaciado y por lo tanto se espera que los esfuerzos sean menores, sin embargo después de realizar el análisis se encuentra lo contrario. Este fenómeno es causado porque los esfuerzos máximos se presentan en el cinturón y en este punto la presión del cilindro contrarresta la presión de la tolva, al tener una menor presión la deformación causada por la presión sobre la tolva y que en este caso permanece igual, es mayor y por ende sus esfuerzos se ven incrementados. En la figura 5.26 se evidencia este comportamiento y en la figura 5.27 se aprecian las deformaciones las cuales también se incrementan levemente. Si se comparan los esfuerzos en la parte cilíndrica y cónica se encuentra que para el llenado tanto la presión como las deformaciones son menores, lo cual concuerda con lo expuesto en las bibliografías estudiadas.

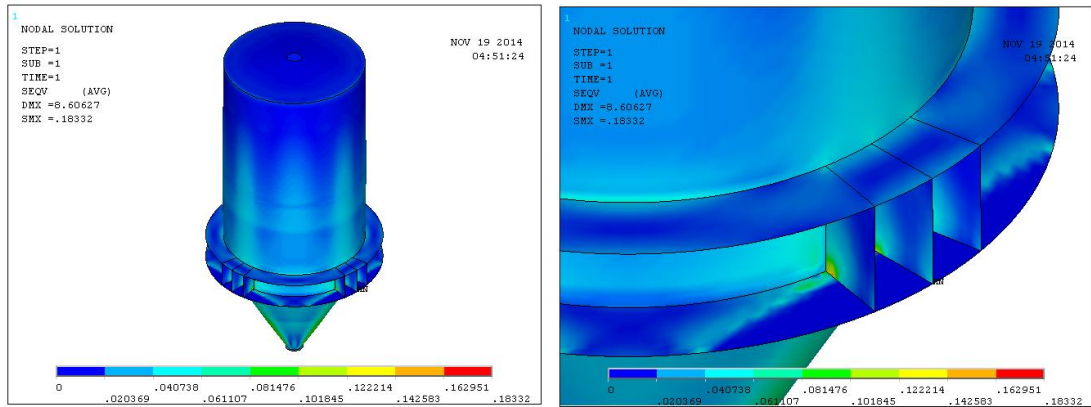


Figura 5.26. Esfuerzo de von Mises para llenado - vista general y detalle de de sus puntos críticos ubicados en los refuerzos del cinturón. Valor máximo 0.183GPa.

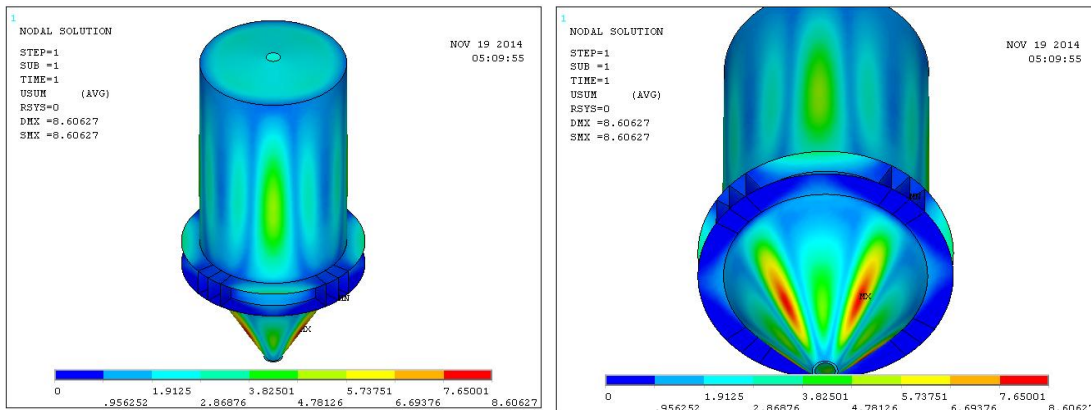


Figura 5.27. Suma de desplazamientos para el llenado - vista general y detalle de sus puntos críticos en coordenadas cilíndricas.

#### 5.4 Análisis de resultados obtenidos y determinación de factores de seguridad del silo.

Como se observó en las graficas anteriores, tanto para el llenado como para el vaciado el modelo presenta unos valores de esfuerzo y deformación lógicos a las cargas aplicadas. Para determinar si el diseño propuesto soporta las cargas de presión a las que es sometido, se determina el factor de seguridad al dividir el esfuerzo máximo de fluencia del material del silo sobre el esfuerzo de Von Mises. Para el acero A-36 que es un material típico usado en los silos se tiene un esfuerzo de fluencia de 250MPa y con los 166Mpa para vaciado y 183Mpa para llenado arrojados del análisis se obtiene un factor de seguridad de 1.5 y de 1.36 respectivamente, estos valores son factibles para aceptar el silo, sin embargo las deformaciones están por encima de 8mm, lo que nos hace buscar una mejor configuración para mantener estos factores de seguridad pero con una menor deformación, para ello se corrieron diferentes modelos de silos



modificando espesores y algunas dimensiones del silo, los modelos que tenían factor de seguridad menores a 1.2 o que tenían deformaciones por arriba de 10mm fueron descartados. En la figura 5.28 se pueden ver las variables de 6 modelos que arrojaron resultados aceptables para el diseño.

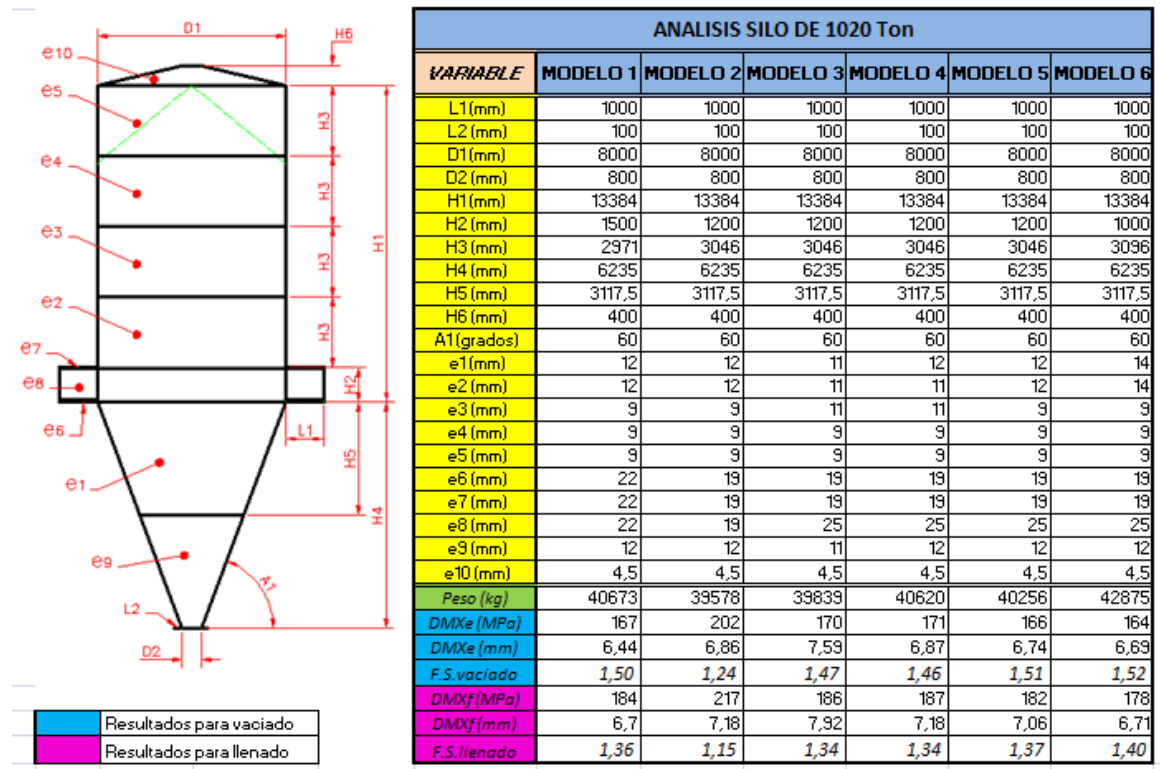


Figura 5.28. Resultados de varios modelos de un silo de 1020Ton.

Se encuentra que el Modelo 5 es el diseño más conveniente ya que sus valores de esfuerzo y deformación son aceptables teniendo un factor de seguridad de 1.5 y un peso de 40256kg, esto lo hace un diseño seguro con un peso liviano y por ende más económico. La figura 5.29 y la figura 5.30 muestran los resultados del esfuerzo de Von Mises y la sumatoria de deformaciones del modelo 5 con los dos tipos de carga, llenado y vaciado, allí se pueden comparar los resultados obtenidos en cada caso y el comportamiento que el cilindro y la tolva tienen cuando se aplica cada carga, se observa a modo general es más crítico cuando el silo se está vaciando.

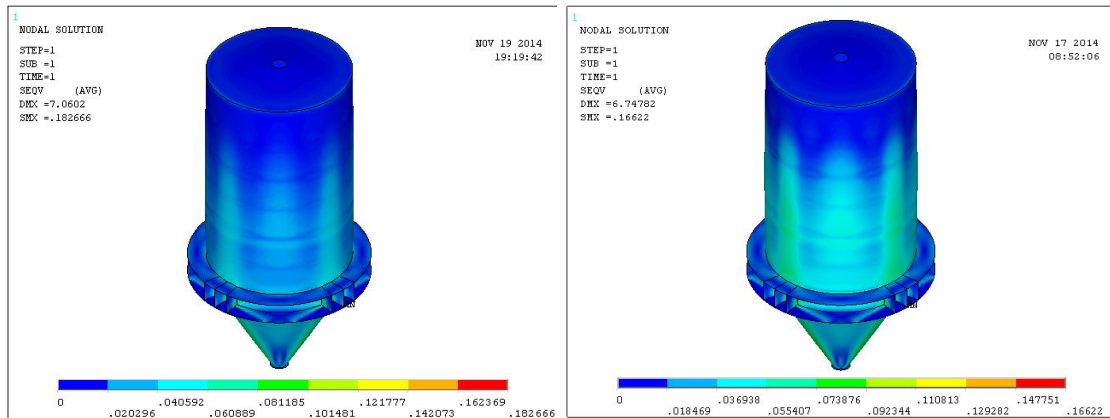


Figura 5.29. Esfuerzo de von Mises del modelo 5 - Izquierda llenado y derecha vaciado.

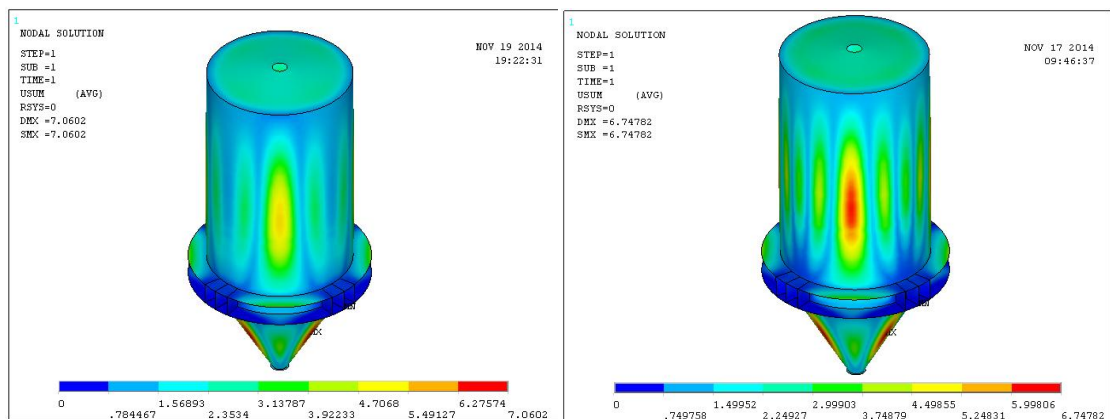


Figura 5.30. Suma de desplazamientos del modelo 5 - Izquierda llenado y derecha vaciado.

### 5.5 Análisis de un esfuerzo en un silo con tolvas de diferente inclinación

En esta parte del proyecto se hace un estudio del comportamiento estructural que tiene un silo cuando su tolva cambia de inclinación. Con las dimensiones y espesores del silo del modelo 5, que fue estudiado en la sección anterior, se realiza una variación en la tolva, un primer análisis se hace aumentando la inclinación de la tolva de 60 grados a 70 grados, el otro caso se reduce a 50 grados.

Se realiza un proceso idéntico al descrito en este libro para determinar las presiones, se aclara que en los cálculos se debe tener en cuenta si la tolva es "steep" o "shallow" ya que la curva de presiones es diferente para cada caso. La hoja de cálculo que se desarrollo incluye esta selección. Es importante conocer que si se tiene una tolva tipo "shallow", como la del modelo 5, la presión de descarga es igual a la de llenado.

### 5.5.1 Análisis del silo con tolva de 70 grados de inclinación:

En la figura 5.31 se pueden apreciar las curvas de presiones del silo a analizar.

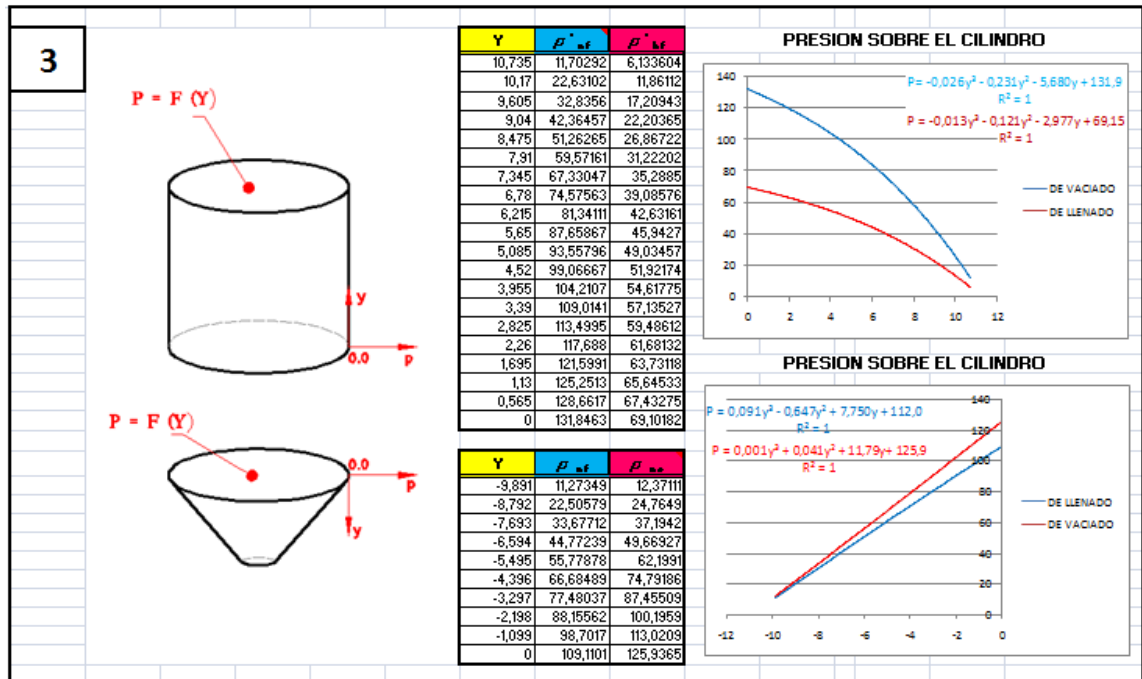


Figura 5.31. Curva de presiones de silo con tolva de 70 grados de inclinación.

La figura 5.32 muestra los esfuerzos de Von Mises son mayores para el vaciado, esto ocurre porque la tolva tiene mayor inclinación y las fuerzas verticales son menores, igual ocurre con las deformaciones mostradas en la figura 5.33. Recordar que para esta inclinación de tolva, su curva de presión del llenado es mayor que la de vaciado.

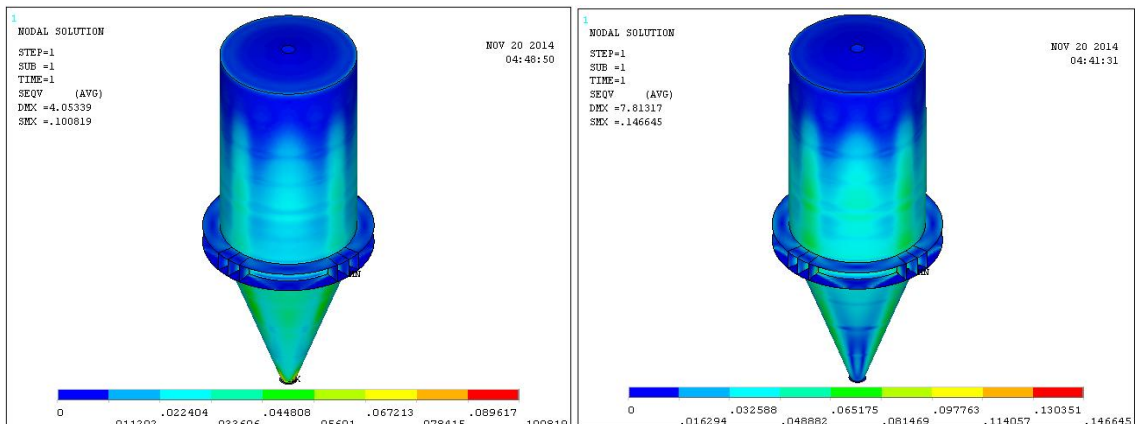


Figura 5.32. Esfuerzo de Von Mises del modelo 5 con tolva de 70 grados de - Izquierda llenado con 0.100GPa y derecha vaciado con 0.145GPa.

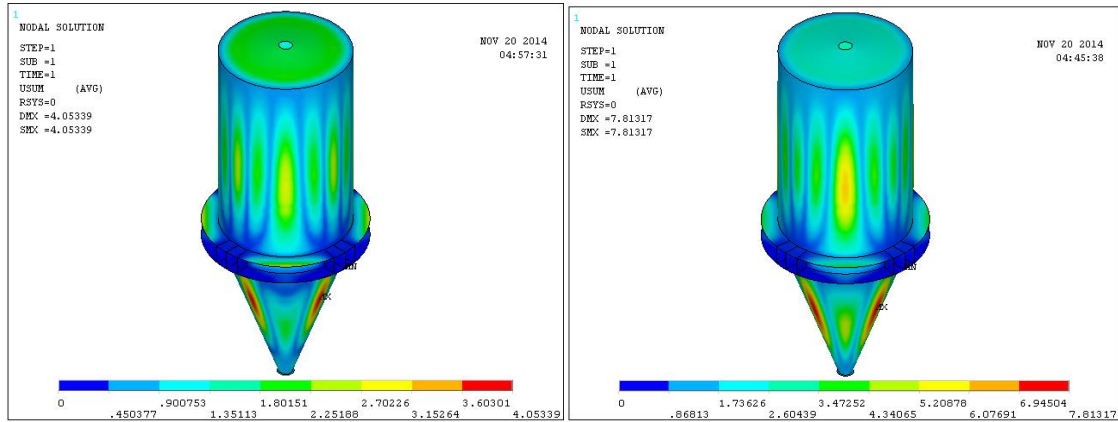


Figura 5.33. Suma de desplazamientos del modelo 5 con tolva de 70 grados - Izquierda llenado con 4mm como máximo y derecha vaciado con 7.8mm máximo.

### 5.5.2 Análisis del silo con tolva de 50 grados de inclinación:

En la figura 5.34 se pueden apreciar las curvas de presiones del silo a analizar.

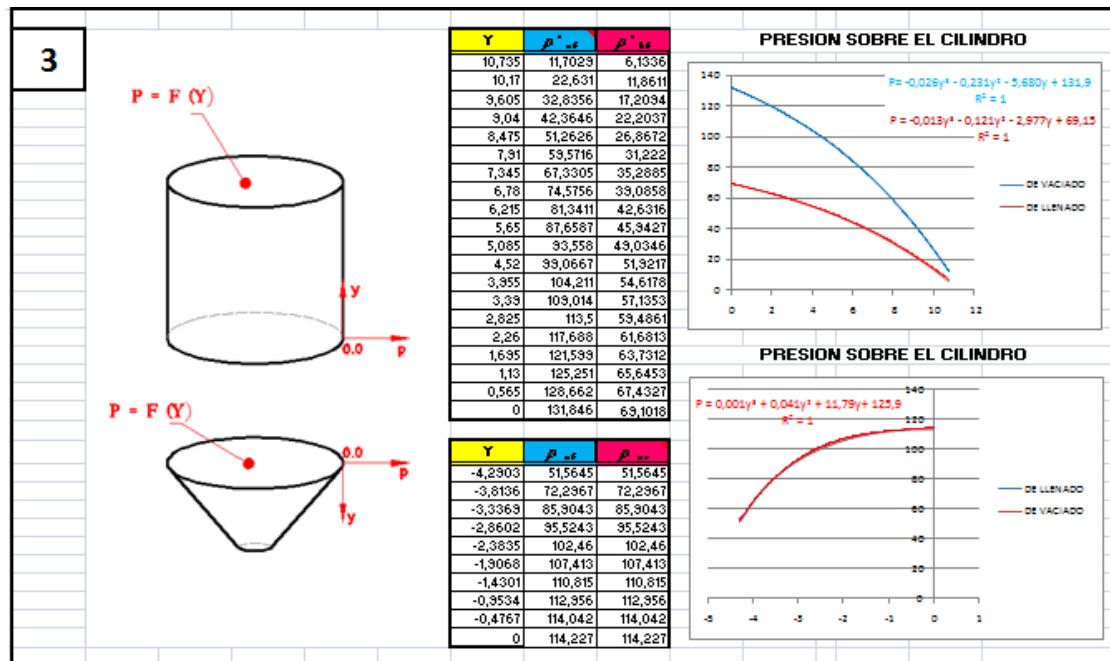


Figura 5.34. Curva de presiones de silo con tolva de 50 grados de inclinación.

La figura 5.35 muestra los esfuerzos de Von Mises son mayores para el llenado, esto ocurre porque la tolva tiene menor inclinación y las fuerzas verticales son mayores. Las deformaciones mostradas en la figura 5.36 se aprecia que es levemente mayor en el caso del vaciado.

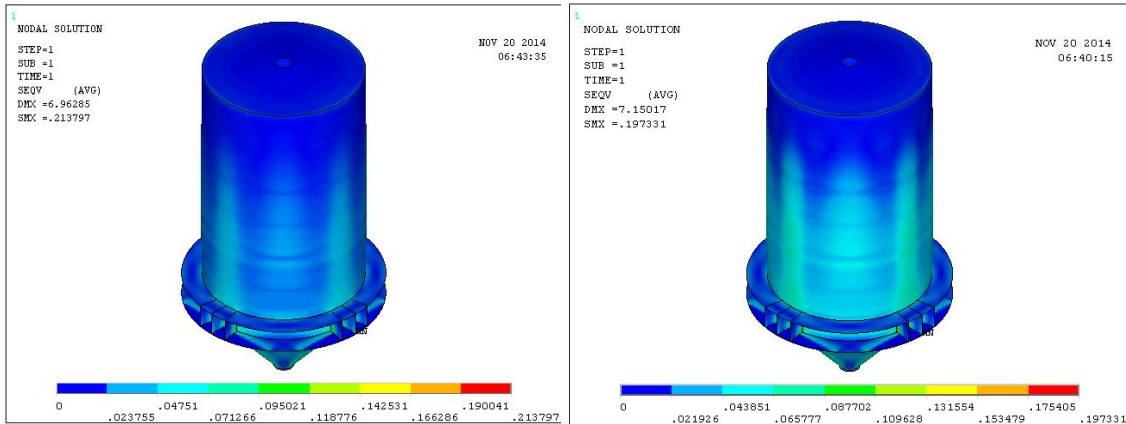


Figura 5.35. Esfuerzo de Von Mises del modelo 5 con tolva de 50 grados - Izquierda llenado con 0.213GPa y derecha vaciado con 0.197GPa.

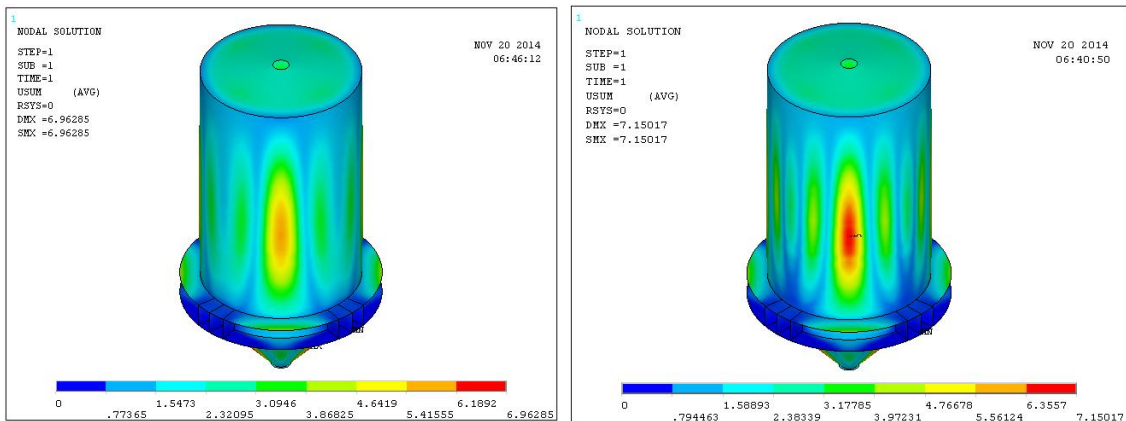


Figura 5.36. Suma de desplazamientos del modelo 5 con tolva de 50 grados - Izquierda llenado con 6.9mm como máximo y derecha vaciado con 7.1mm máximo.

## 5.6 Análisis del un silo con estructura.

Como se pudo apreciar en los análisis anteriores el silo mostró sus esfuerzos máximos en cinturón y las deformaciones máximas en la tolva, por este motivo se realiza un análisis del silo contemplando una estructura de soporte de 10 metros de altura, dimensión comúnmente usada para este tipo de silos en el proceso de empaque del cemento. Se usa como base el código de ansys del modelo 5 adicionándole la geometría de las columnas y vigas de la estructura, se hace necesario modificar la aplicación de las cargas en la tolva ya que se deben seleccionar los nodos de la estructura y se realiza el mismo procedimiento descrito para los modelos anteriores. En la figura 5.37 y en la figura 5.38 se muestran los resultados del análisis realizado tanto

para cargas de llenado como para cargas de vaciado, en cada figura se puede comparar las diferencias.

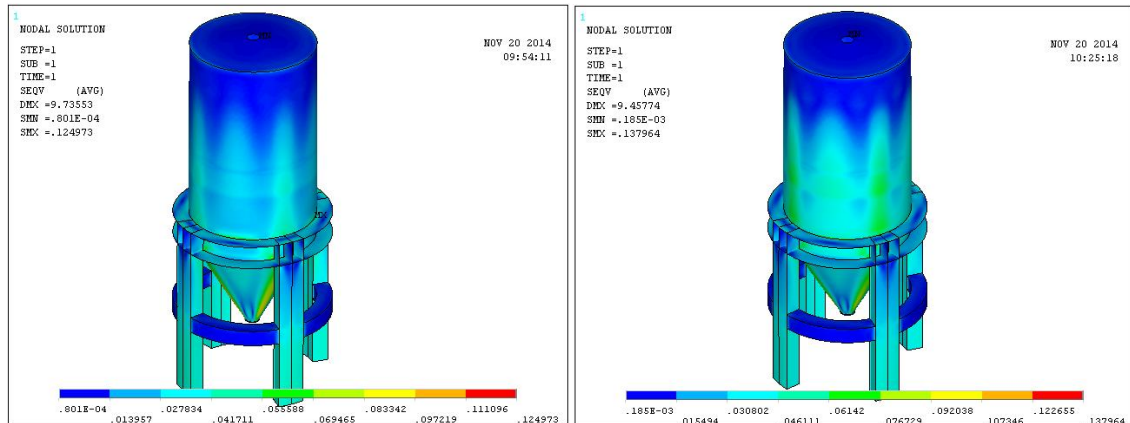


Figura 5.37. Esfuerzo de Von Mises del modelo 5 con estructura - Izquierda llenado con 0.124GPa y derecha vaciado con 0.137GPa.

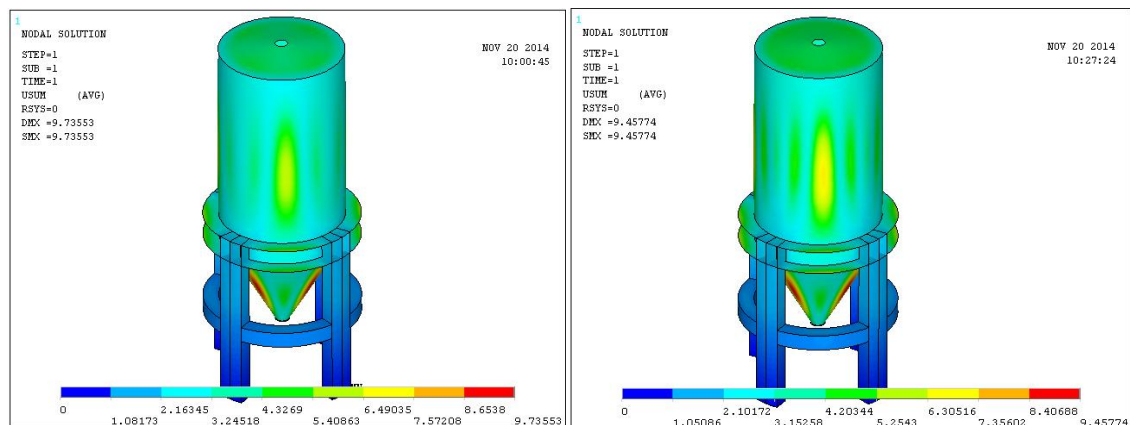


Figura 5.38. Suma de desplazamientos del modelo 5 con estructura - Izquierda llenado con 9.7mm como máximo y derecha vaciado con 9.4mm máximo.

De los resultados obtenidos se puede deducir que los esfuerzos en el silo son menores cuando se analiza un solo modelo silo-estructura que cuando se analiza únicamente el silo, lo anterior se debe al efecto que se induce las dos diferentes condiciones de contorno de cada modelo. Cuando se analiza únicamente el silo sus puntos de apoyo no tienen ningún grado de libertad, mientras que en el caso silo-estructura estos mismo puntos tienen varios grados de libertad y su desplazamiento depende de la rigidez de la estructura. Sin embargo se debe aclarar que las bibliografías hacen referencia del cálculo del silo independiente a la estructura, razón por la cual se mantienen los factores de seguridad encontrados en la sección 5.4. Estos resultados también sirven para confirmar que las deformaciones en el cuerpo del silo son mayores en el vaciado que en el llenado.

## 5.7 Análisis modal del silo.

Es común en las estructuras altas como la que representa un silo que por efectos de viento y por efectos sísmicos la estructura pueda entrar en resonancia presentando daños no esperados. Entre las diferentes funciones que ANSYS tiene el análisis nodal es una de ellas, el proceso se realiza con el código creado para el modelo modificándolo para no incluir las presiones del material almacenado, como cargas solo se toma en cuenta el peso silo, esto lo hace automáticamente el ANSYS ya que el código que se está usando tiene incluida la gravedad.

En las figuras 5.39 a 5.43 se pueden apreciar los primeros 5 modos de vibración arrojados del análisis nodal para un silo sin estructura y en las figuras 5.44 a 5.48 el análisis del silo con estructura.

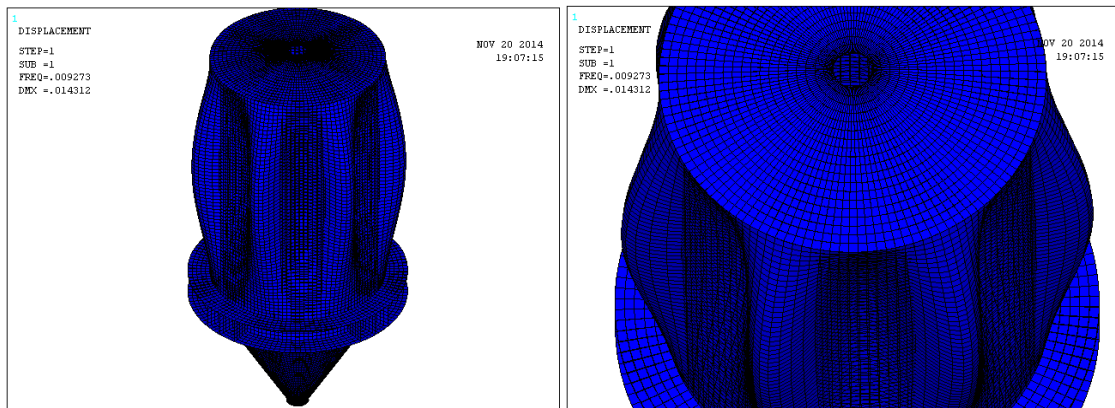


Figura 5.39. Modo de vibración uno (1) silo sin estructura con valor de  $9.27 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.014mm.

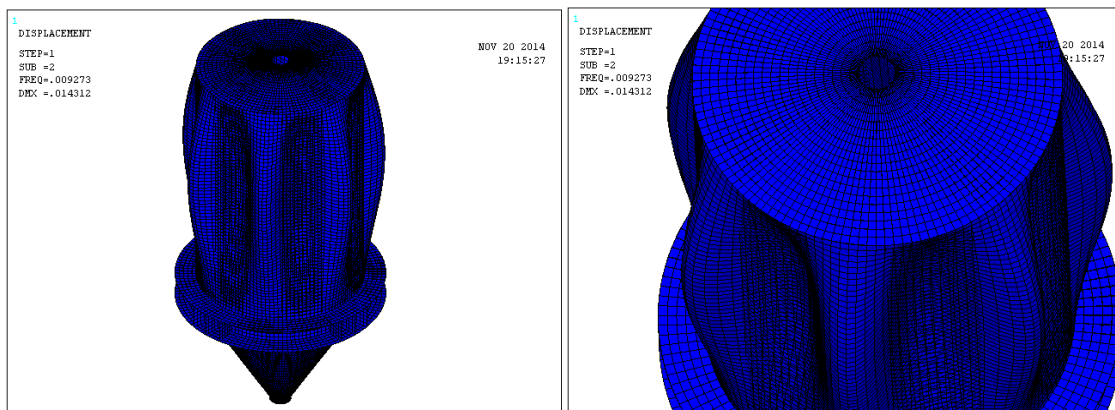


Figura 5.40. Modo de vibración dos (2) silo sin estructura con valor de  $9.27 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.014mm.

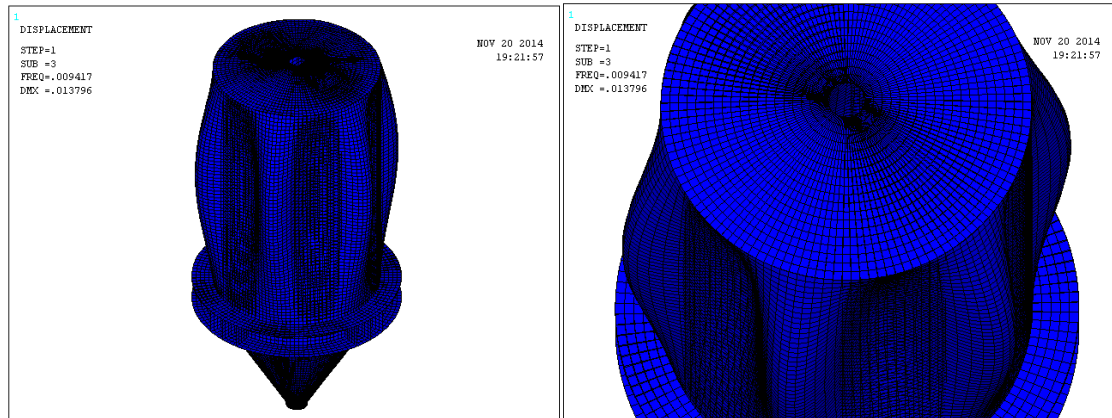


Figura 5.41. Modo de vibración tres (3) silo sin estructura con valor de  $9.41 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.013mm.

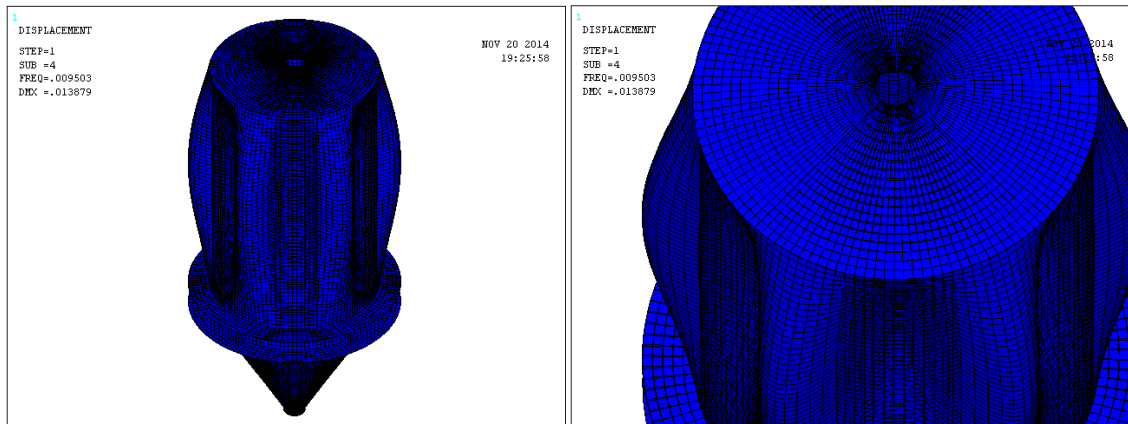


Figura 5.42. Modo de vibración cuatro (4) silo sin estructura con valor de  $9.5 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.013mm.

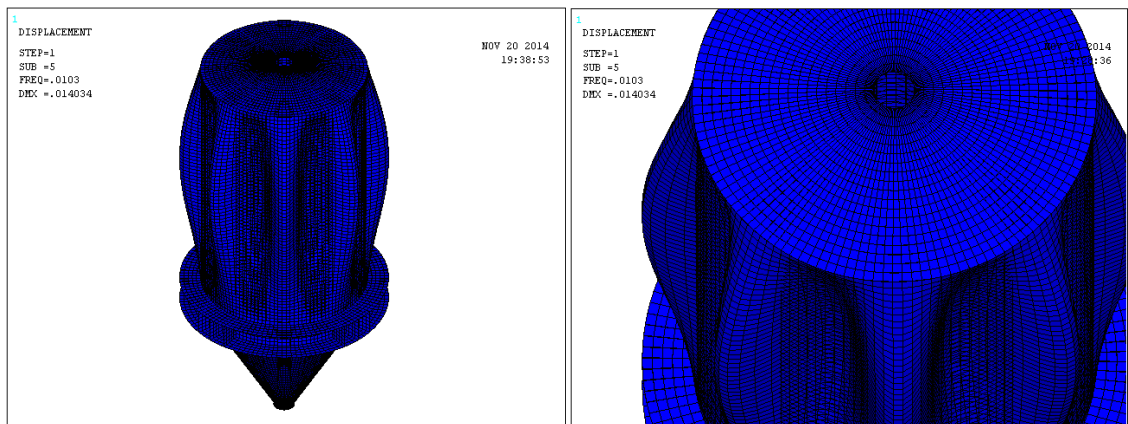


Figura 5.43. Modo de vibración cinco (5) silo sin estructura con valor de  $10 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.014mm.



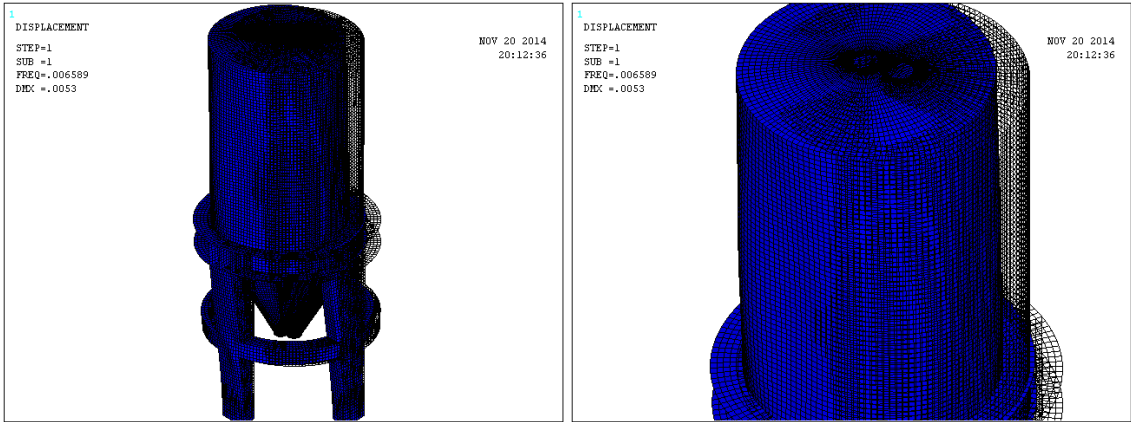


Figura 5.44. Modo de vibración uno (1) silo con estructura con valor de  $6.58 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.005mm.

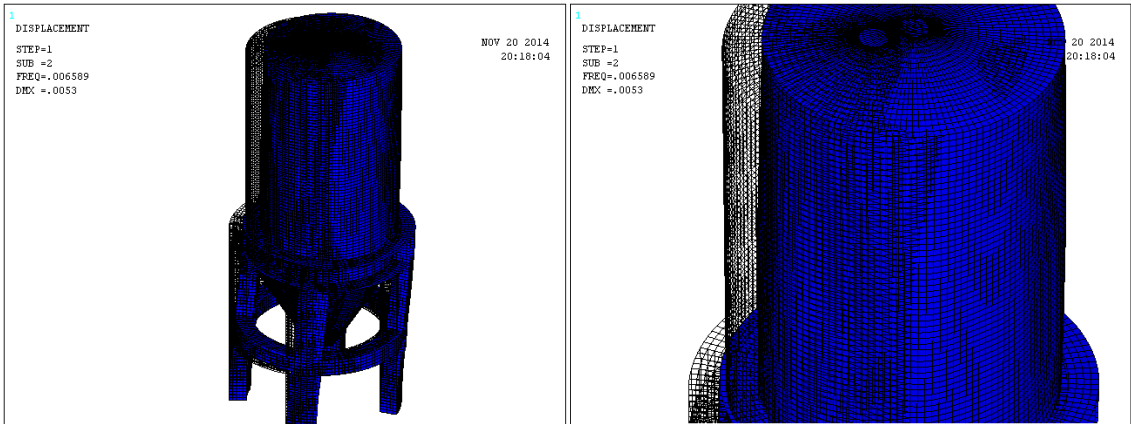


Figura 5.45. Modo de vibración dos (2) silo con estructura con valor de  $6.58 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.005mm.

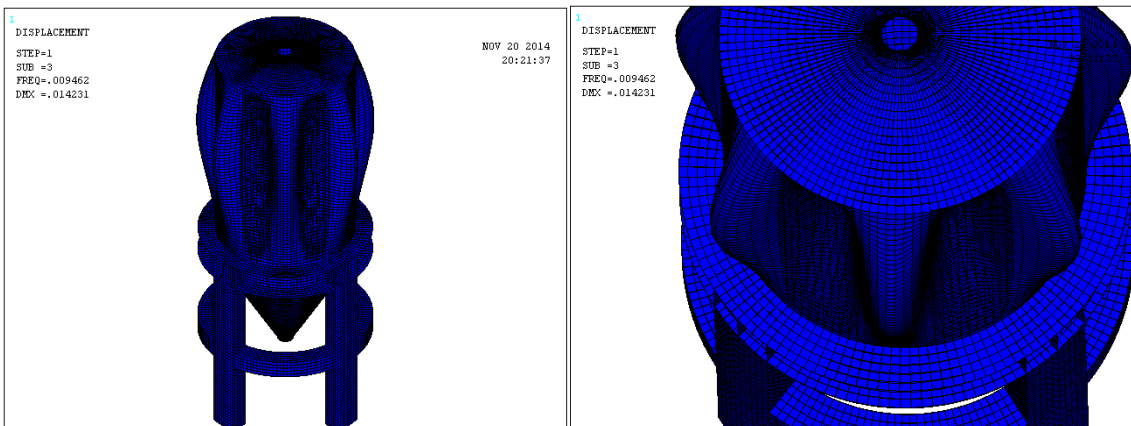


Figura 5.46. Modo de vibración tres (3) silo con estructura con valor de  $9.46 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.014mm.

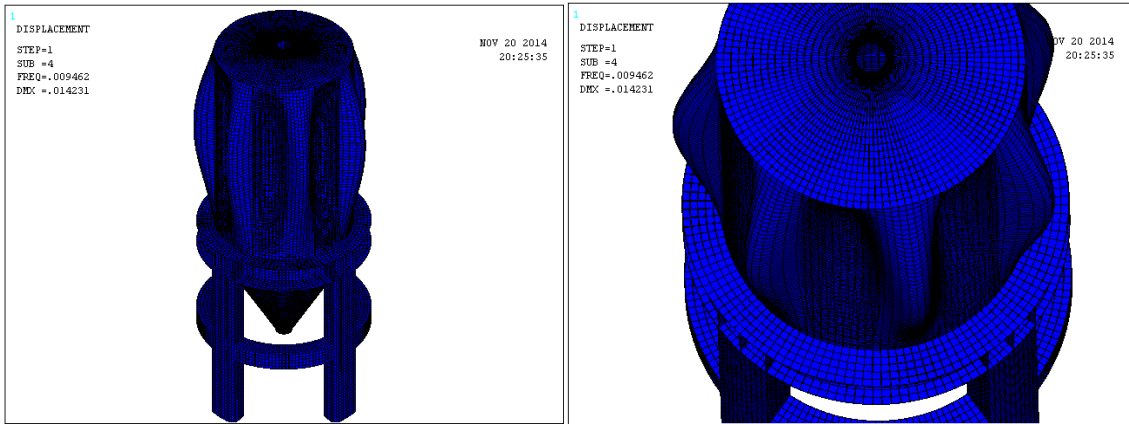


Figura 5.47. Modo de vibración cuatro (4) silo con estructura con valor de  $9.46 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.014mm.

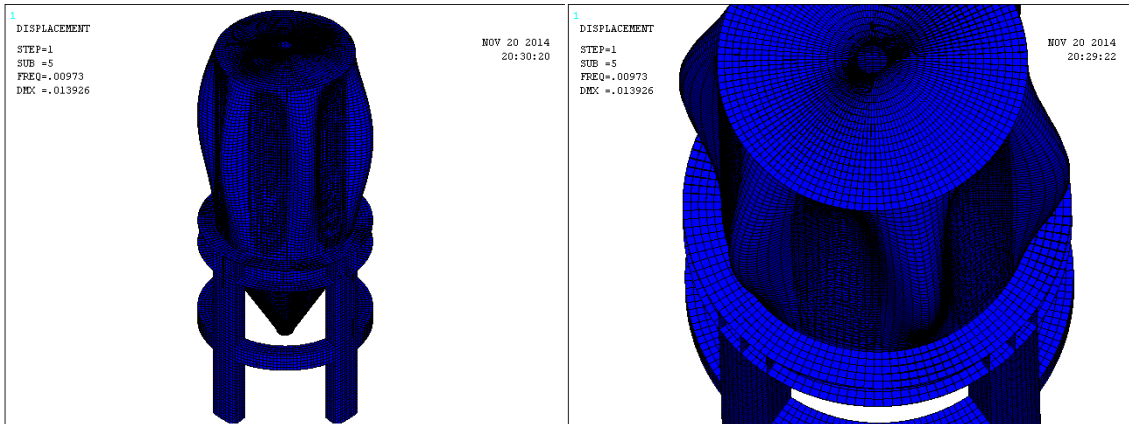


Figura 5.48. Modo de vibración cinco (5) silo con estructura con valor de  $9.73 \times 10^{-3}$  Hz y una deformación máxima de 0.013mm.

Como se puede apreciar en los resultados los modos de vibración de únicamente el silo son mayores que los modos de vibración del conjunto silo-estructura, con estos valores y con las frecuencias que se obtienen de un análisis de cargas por viento o un análisis sísmico, se comparan para verificar que no sean iguales, para que el silo o silo-estructura no entren en resonancia. Los cálculos de frecuencias debidas a cargas de viento o por cargas sísmicas no hacen parte de este trabajo.

### 5.8 Comparación de esfuerzos con metodología teórica [16].

Se realiza el cálculo analítico con base en la teoría de láminas de cascara, la cual plantea que las tensiones sobre una lámina cilíndrica y que aparecen en la figura 5.49 vienen dados por:

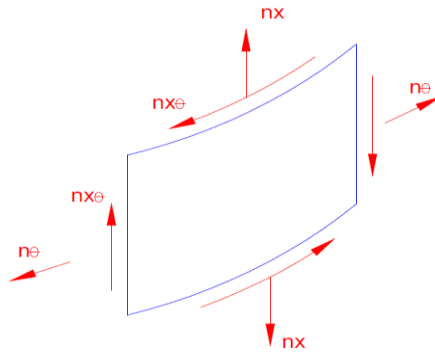


Figura 5.49 Tensiones sobre una cascara cilíndrica.

$$n_{\theta, sd} = \gamma_F C_h p_{ho} r (1 - e^{-z/z_0})$$

$$n_{x, sd} = -\gamma_F C_w \mu p_{ho} Z_0 \left[ \frac{z}{z_0} - 1 + e^{-z/z_0} \right]$$

Para todos los casos de cargas simétricas el valor de diseño de la resultante de tensión efectiva viene dada por:

$$n_{e, sd} = \sqrt{n_{x, sd}^2 - n_{x, sd} n_{\theta, sd} + n_{\theta, sd}^2}$$

Con lo anterior se encuentra el esfuerzo máximo sobre la membrana mediante:

$$\sigma_{m\theta, mx} = 1.25 \frac{n_{e, sd}}{t}$$

Donde t es el espesor y 1.25 un factor para aumentar el esfuerzo.

En cuanto a la parte cónica, la figura 5.50 representa las tensiones que se tienen sobre un elemento de tipo cónico.

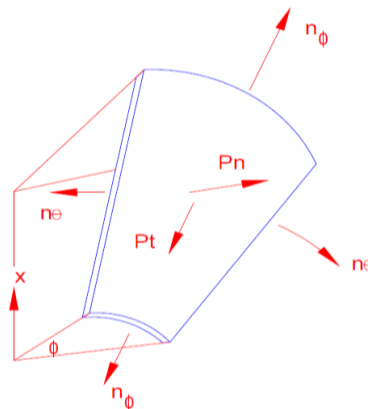


Figura 5.50. Tensiones sobre una cascara cónica.

Las tensiones sobre la sección cónica se expresan mediante;

$$n_{\theta sd} = \gamma_F \left[ \frac{\gamma h_h}{(n-1)} \left( \frac{x}{h_h} \right)^2 + \left( P_{vft} - \frac{\gamma h_h}{(n-1)} \right) \left( \frac{x}{h_h} \right)^{n+1} \right] F h_h \sec \beta \tan \beta$$

$$n_{\phi sd} = \gamma_F \left[ \frac{\gamma h_h}{3(n-1)} \left( \frac{x}{h_h} \right)^2 + \frac{1}{n+2} \left( p_{vft} - \frac{\gamma h_h}{(n-1)} \right) \left( \frac{x}{h_h} \right)^{n+1} \right] F h_h \sec \beta (\tan \beta + \mu_h)$$

Y la combinación de tensiones se calcula similar a la ecuación de la parte cilíndrica:

$$n_{e sd} = \sqrt{n_{\phi sd}^2 - n_{\phi sd} n_{\theta sd} + n_{\theta sd}^2}$$

El esfuerzo combinado se determina de igual forma que la parte cilíndrica:

$$\sigma_{m\theta, mx} = 1.25 \frac{n_{e.Sd}}{t}$$

Tomando como referencia los espesores del modelo 5, se determinan los esfuerzos sobre la lámina mediante las ecuaciones anteriormente expuestas y se comparan con los valores de esfuerzo de Von mises del análisis realizado con ANSYS. En la figura 5.51 se pueden apreciar las curvas con los esfuerzos en la sección cilíndrica y en la figura 5.52 los esfuerzos en la sección cónica.

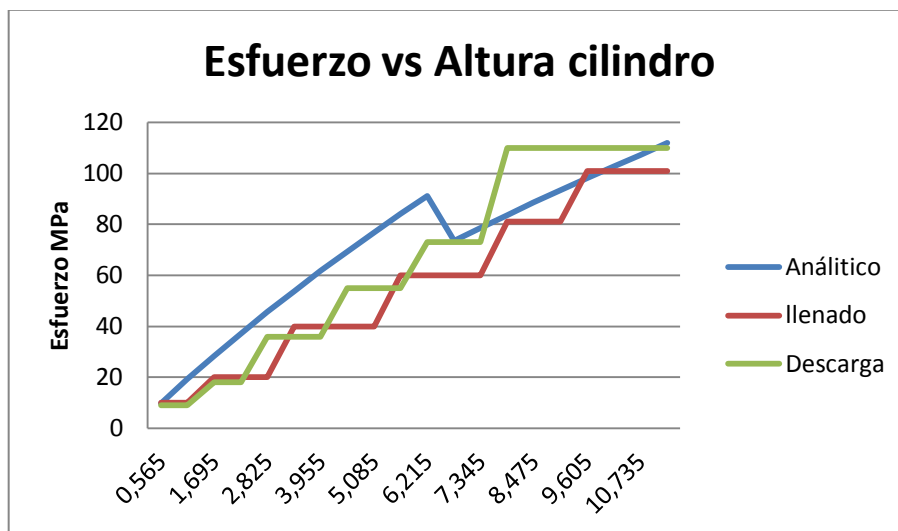


Figura 5.51 Curvas de esfuerzo presentado en el cilindro: resultados analíticos comparados con resultados de ANSYS, tanto en el llenado como en la descarga.

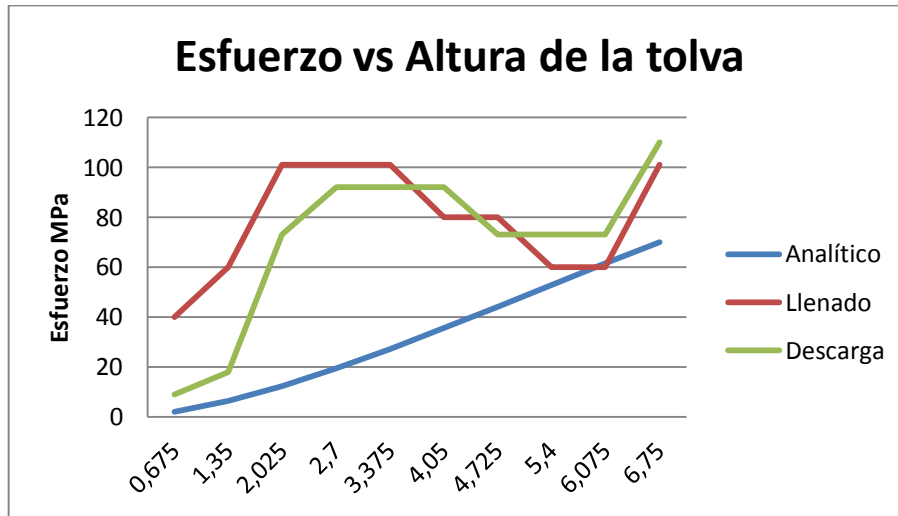


Figura 5.52 Curvas de esfuerzo presentado en la tolva: resultados analíticos comparados con resultados de ANSYS, tanto en el llenado como en la descarga.

## CONCLUSIONES

Este trabajo tiene como producto principal un modelo paramétrico desarrollado con un código y en el software de elementos finitos ANSYS APDL, el cual permite realizar el cálculo de un silo con cualquier geometría, tamaño, espesores de lámina y tipo de material, tamaño y tipo de elemento finito a usar. En este modelo se pueden manipular los espesores de diferentes secciones del silo para realizar un análisis comparativo y evaluar la conveniencia de escoger uno u otro diseño, permitiendo al calculista desarrollar un modelo adecuado y que se ajuste a las condiciones de fabricación y montaje del silo.

Al determinar las presiones ejercidas por el material y que están aplicadas en las paredes del silo, tanto en su parte cilíndrica como en su parte cónica, se encuentra que hay dos tipos de comportamiento en lo referente a las presiones en la parte cónica. En el cálculo de las presiones se tiene en cuenta si la tolva es tipo "steep" o tipo "shallow", dependiendo directamente de ello el valor de las presiones y por ende el comportamiento estructural del silo. De esta manera se encuentra que para tolvas tipo "steep" las presiones de vaciado son notoriamente mayores caso contrario a las tipo "shallow" que son iguales.

Los entornos gráficos, que son bastante amigables pero poco manipulables, de los principales software de elementos finitos no tienen la opción de ingresar al modelo presiones con variación respecto a una altura, lo más cercano que ofrecen es aplicación de presión hidrostática la cual es lineal. Como las curvas de presión determinadas son de orden tres, se hace necesario realizar un código que remplace la presión por una rutina de aplicación de fuerzas equivalentes sobre los nodos de cada área, parte cilíndrica y parte cónica. Lo anterior es otra razón por la cual se escogió ANSYS APDL como software para realizar el análisis por elementos finitos, su plataforma permite cualquier tipo de aplicación de carga.

Realizado el análisis estructural se encontró que no necesariamente las presiones de vaciado pueden ocasionar fallas en un silo, es fácil sesgar esta información ya que las presiones de vaciado siempre son mayores en el silo, pueda que en la tolva se dé la salvedad anteriormente descrita, pero en el total del silo siempre es mayor. El caso específico ocurre en una de las partes importantes del silo y que muchas veces se relega, en el cinturón que se encarga de unir el silo a una estructura. Se encontró que los valores los esfuerzos eran mayores cuando se aplicaba la carga de llenado, esto ocurre porque justo en ese punto hay un equilibrio entre las cargas de la tolva y del cilindro, si se disminuyen las del cilindro las de la tolva empiezas a pandear mas esta

área, haciendo que se incrementen los esfuerzos en este punto. Es importante aclarar que los esfuerzos en el cuerpo del silo si son mayores en el vaciado que en el cargue.

Se encuentra que dependiendo del tipo de tolva que tenga el silo los esfuerzos y deformaciones varían notoriamente, para el caso de una tolva con mayor inclinación, tipo "steep" los esfuerzos y deformaciones son mayores para el vaciado que para el llenado, caso opuesto ocurre cuando se hace el análisis de una tolva con una pequeña inclinación o tipo "shallow". Este punto es importante ya que en muchos diseños la altura de la descarga se define por otros equipos y en ocasiones se tiene que hacer al límite de su inclinación dada por el ángulo de reposo del material almacenado.

Todos los estudios con elementos finitos que se han desarrollado para calcular los esfuerzos y deformaciones que un silo presenta cuando es sometido a llenado y vaciado de un material pulverizado, se han enfocado a utilizar elementos volumétricos ya que estos son los que ofrecen los paquete comerciales fáciles de manejar, sin embargo un elemento de volumen no es adecuado para describir el comportamiento de superficies curvada. Este proyecto se desarrolla con elementos tipo cáscara más conocidos como "shell" ya que estos simultáneamente muestra esfuerzos de flexión y tensiones de membrana, los primeros corresponden a los esfuerzos de flexión de una placa produciendo momentos de flexión y momentos de torsión y los segundos corresponden a los esfuerzos en un problema de tensión plana, los cuales actúan tangentemente a la superficie media y producen fuerzas tangentes en la membrana.

Existen principalmente seis tipos de modelos constitutivos que describen el comportamiento mecánico del material y la influencia de sus propiedades físicas para determinar diferentes variables. Con lo anterior se pueden estudiar las presiones que el material ejerce sobre las paredes del silo, si se involucran en un modelo de fluodinámico que describa el comportamiento del material, sin embargo esta actividad es un poco tediosa ya que al a fecha la información de referencia, tanto de los modelos constitutivos como manipulación y modificación de programas de fluodinámica, es escasa. El estudio generado que se presenta en este libro es un excelente inicio.

Durante décadas se han desarrollado diferentes estudios acerca de como determinar las presiones que ejerce el material que está almacenado en un silo y con estas poder determinar los esfuerzos y deformaciones para conseguir un diseño correcto, sin embargo a la fecha no existe una normativa o bibliografía que aventaje a otras. El cálculo de presiones realizado en este proyecto se basa en uno de los libros más actuales que se han publicado y que involucra el código más usado para calcular silos.

Cuando un material se encuentra pulverizado tiene un comportamiento que no se puede clasificar en ningún estado básico de la materia, ya que tiene propiedades tanto

de sólidos como de líquidos, como líquidos tienden a tomar la forma del recipiente que los contiene, ejercer presión sobre él y fluir por orificios abiertos y como sólidos, son capaces de soportar esfuerzos cortantes por esta razón es que se pueden apilar, también tienen resistencia de cohesión y una distribución no isotrópica de distribución de esfuerzos bajo una carga direccional aplicada.



## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Gallego Eutigio (2006): Simulación de empujes del material almacenado en silos con modelo de comportamiento del material no elástico, Universidad Politécnica de Madrid.
- [2] Ulrich Haussler and Josef Eibl (1984): Numerical investigations on discharging silos. Journal of engineering mechanics, volume 110, pages 957–971.
- [3] Sergio A. Elaskar y Luis A. Godoy. (1996): Descarga estacionaria de silos. Modelos constitutivos basados en la mecánica de los fluidos no newtonianos. Departamento de Estructuras. Universidad Nacional de Córdoba Casilla de Correos 916. (5000) Córdoba.
- [4] Eurocode 1, ENV (1995): Basis of design and actions on structures, Part 4: Action on silos and tanks CEN, Brussels.
- [5] Aguado R. Pedro J.. (1997): Métodos avanzados de cálculo de presiones en silos agrícolas mediante la técnica de los elementos finitos. El vaciado de silos y las paredes de chapa ondulada. Tesis doctoral escuela técnica superior de ingenieros agrónomos UPM.
- [6] By J. M. Rotter, J. M. F. G. Holst, J. Y. Ooi and A. M. Sanad (1998): Silo pressure predictions using discrete-element and finite-element analyses. The royal society.
- [7] Jürgen Tomas (2001): Assessment of mechanical properties of cohesive particulate solids – part 2. Particulate science and technology, volume 19, issue 2, pages 111-129.
- [8] Yanes Ángel, Fernández Manuel y López Pablo (2001): Análisis de la distribución de presiones estáticas en silos cilíndricos con tolva excéntrica mediante el m. e. f. influencia de la excentricidad y comparación con el eurocódigo 1. Informes de la Construcción, Vol. 52 n° 472.
- [9] Norma I. Ercoli, Patricia M. Ciancio, y Carlos M. Berardo. (2004): Análisis para el diseño de un silo de clinker y su implementación computacional. Mecánica Computacional Vol. XXIII. G.Buscaglia, E.Dari, O.Zamonsky (Eds.).
- [10] F. Ayuga, P. Aguado, E. Gallego, and A. Ramírez (2005): New steps towards the knowledge of silos behaviour International Agrophysics, 2005, 19, pages 7-17.

[11] N.L.Ercoli, P. Ciancio y L.M.Massey. (2007): Evaluación de la interacción grano-pared en el comportamiento estructural de silos. *Mecánica Computacional* Vol. XXVII, pp.161-180.

[12] Thomas C. Halsey (2009): Theoretical Considerations for Granular Flow. *Poincaré Seminar 2009* pages 111-135

[13] Ripp, Marcus ; Ripperger, Siegfried. (Año 2010): Influence of temperature on the flow properties of bulk solids. *Chemical Engineering Science*, Volume 65, Issue 13, 1 July 2010, Pages 4007–4013

[14] González-Montellano, C. ; Ramírez, Á. ; Gallego, E. ; Ayuga, F. (2011): Validation and experimental calibration of 3D discrete element models for the simulation of the discharge flow in silos. *Chemical Engineering Science*, Volume 66, Issue 21, 1 November 2011, Pages 5116–5126

[15] S. Ding, M. Rotter, J. Ooi and G. Enstad. (2011): Development of normal pressure and frictional traction along the walls of a steep conical hopper during filling: Thin-Walled Structures Volume 49, Issue 10, October 2011, Pages 1246–1250.

[16] J. Michael Rotter. (2001): *Guide for the Economic Design of Circular Metal Silos*. Editorial: CRC Press.

[17] Zuriguel Iker. (2005): *Flujo y atascos de un medio granular en la descarga de silos* Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra, E-31080 Pamplona, España.

[18] Dietmar Schulze (2007): *Flow Properties of Powders and Bulk Solids*.

[19] Jürgen Tomas (2001): Assessment of mechanical properties of cohesive particulate solids – part 1. *Particulate Contact Constitutive Model*, volume 19, issue 1, pages 95-110.

[20] Diseño de un silo cilíndrico para el almacenamiento de productos granulares, Anexo 1 memoria. <https://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/3180/2/31298-2.pdf>.

[21] Cook, R. Malkus, D. Plesla, M. Witt, R(2001): *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, University of Wisconsin - Madison. Chapter 12.

[22] Vidyapati, Vidyapati, "Constitutive modeling of dense granular flow based on discrete element method simulations" (2012). *Graduate Theses and Dissertations*.

## ANEXO 1

Table 4.1 Physical properties of bulk solids: characteristic values †

Type of bulk solid	Unit weight $\gamma$		Angle of response $\phi_r$		Effective angle of internal friction $\phi$		Lateral pressure ratio $\lambda$ (%)		Wall friction angle <sup>‡</sup> $\phi_w$ ( $\mu = \tan \phi_w$ )						Maximum flow pressure multiplier $C_w$
	$\gamma_1$ Lower kN/m <sup>3</sup>	$\gamma_0$ Upper kN/m <sup>3</sup>	$\phi_r$ degrees	$\phi_1$ Lower degrees	$\phi_0$ Upper degrees	$\lambda_1$ Lower	$\lambda_0$ Upper	Wall type D1		Wall type D2		Wall type D3			
								Lower degrees	Upper degrees	Lower degrees	Upper degrees	Lower degrees	Upper degrees		
Default material *	6.0	20.0	40	25	55	0.35	0.65	10	30	12	35	14	45	1.45	
Alumina	10.0	12.0	27	25	40	0.42	0.53	20	25	25	30	30	35	1.40	
Barley	7.0	8.5	20	26	33	0.50	0.63	15	24	18	27	25	32	1.35	
Cement	13.0	16.0	28	40	50	0.45	0.58	20	25	23	28	28	33	1.40	
Cement clinker	15.0	18.0	33	42	52	0.41	0.52	20	25	25	30	30	35	1.40	
Coal: black	8.5	11.0	35	40	60	0.45	0.58	15	25	25	35	25	40	1.45	
Coal: brown	7.0	9.0	33	45	65	0.35	0.45	18	25	25	35	35	45	1.45	
Coal: powdered	6.0	9.0	38	40	50	0.35	0.45	20	24	24	28	27	32	1.45	
Coke: breeze	7.0	8.0	40	35	45	0.35	0.45	22	27	26	33	28	35	1.45	
Coke: petroleum	6.5	7.5	38	37	47	0.35	0.45	24	29	28	35	30	37	1.45	
Concrete aggregate (to 28 mm, moist)	17.0	19.0	34	30	40	0.35	0.45	15	25	18	30	25	35	1.40	
Flour (wheat)	6.5	7.0	40	23	30	0.36	0.46	15	23	25	28	25	35	1.45	
Fly ash	8.0	14.0	22	30	35	0.50	0.63	18	25	25	35	30	40	1.45	
Iron ore pellets	19.0	22.0	35	35	45	0.35	0.45	20	25	26	33	28	35	1.40	
Lime, hydrated	6.0	8.0	40	35	45	0.35	0.45	18	25	25	33	30	40	1.40	
Limestone powder	11.0	13.0	30	40	60	0.35	0.45	15	25	23	30	28	40	1.45	
Maize	7.0	8.5	30	28	33	0.45	0.58	15	25	20	30	25	32	1.40	
Phosphate rock	16.0	19.0	27	35	55	0.35	0.45	19	25	22	30	25	32	1.40	
Sand: coarse dry	14.0	17.0	30	30	40	0.41	0.52	15	25	22	28	25	35	1.40	
Sand: quartz	15.0	17.0	30	35	40	0.35	0.45	15	22	15	22	20	26	1.40	
Slag: granular, dry	10.5	12.0	40	35	38	0.36	0.47	16	22	20	25	24	28	1.40	
Soya beans	7.0	8.0	23	25	32	0.47	0.60	10	15	12	18	14	20	1.30	
Sugar	8.0	9.5	29	33	38	0.45	0.58	15	25	20	35	25	40	1.40	
Wheat	7.5	9.0	20	26	32	0.36	0.46	15	25	18	30	25	32	1.30	

\*Where this table does not contain the material to be stored, testing should be undertaken. The "default material" is offered as a substitute for situations where the cost implications of using a wide property range for the design are minor, so that it is difficult to justify the cost of testing.  
 †Properties for a "default material" are shown here, for conditions where no data is available. ‡For Wall Type D4 (corrugated wall), see Appendix D4. †Values tabulated are for a polyethylene wall liner.