

**ANÁLISIS ECONÓMICO Y FINANCIERO  
COMO APOYO PARA LA TOMA DE DECISIONES**

MARGARITA FAJARDO CUADRO

BRIGITT OVIEDO NUÑEZ

TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA  
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
CARTAGENA DISTRITO TURÍSTICO Y CULTURAL

2002

**ANÁLISIS ECONÓMICO Y FINANCIERO  
COMO APOYO PARA LA TOMA DE DECISIONES**

MARGARITA FAJARDO CUADRO

BRIGITT OVIEDO NUÑEZ

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el  
título de Ingeniero Industrial

Director  
RAUL JOSÉ PADRÓN  
Ingeniero Industrial

TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

CARTAGENA DISTRITO TURÍSTICO Y CULTURAL

2002

NOTA DE ACEPTACIÓN

---

---

---

---

Presidente del Jurado

---

Jurado

---

Jurado

Cartagena, 26 de Abril del 2002

Cartagena, Abril 26 del 2002

Señores:

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR  
COMITÉ DE EVALUACIÓN DE PROYECTOS  
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
L.C.

Respetados Señores:

La presente es para manifestarles que el proyecto de grado titulado “ANÁLISIS ECONÓMICO Y FINANCIERO COMO APOYO PARA LA TOMA DE DECISIONES”, ha sido desarrollado por la estudiantes BRIGITT OVIEDO NUÑEZ y MARGARITA FAJARDO CUADRO, conforme a los objetivos establecidos en el anteproyecto.

Como director del proyecto, considero que el trabajo es realmente satisfactorio y amerita ser presentado por sus autores como proyecto de grado para optar el título de Ingeniero Industrial.

Por lo anterior expuesto hago entrega formal del proyecto en mención.

Atentamente,

RAUL J. PADRÓN  
Ingeniero Industrial  
Director del Proyecto

Cartagena, Abril 26 del 2002

Señores:  
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR  
COMITÉ DE EVALUACIÓN DE PROYECTOS  
FACULTAD DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
L.C.

Respetados Señores:

Adjunto a la presente hacemos entrega a ustedes el proyecto de grado titulado “ANÁLISIS ECONÓMICO Y FINANCIERO COMO APOYO PARA LA TOMA DE DECISIONES”.

Esperamos que el proyecto sea del completo agrado de ustedes.

Atentamente,

---

BRIGITT OVIEDO NUÑEZ  
Código 9801453

---

MARGARITA FAJARDO CUADRO  
Código 9601020

## ARTÍCULO 107

La Institución se reserva el derecho de propiedad intelectual de todos los trabajos de grado aprobados, los cuales no pueden ser explotados comercialmente sin su autorización. Esta observación debe quedar impresa en parte visible del proyecto.

## **DEDICATORIA**

### **A Dios**

*Fuente de vida e inspiración, por llenarme de fortaleza y optimismo, ya que sin él ninguna meta se alcanzaría.*

### **A mi madre**

*Origen de mi ser, por su amor incondicional y por su ejemplo de mujer creativa y emprendedora.*

### **A mi padre**

*Oasis de Fortaleza, por su ejemplo de hombre honesto y luchador.*

### **A mis hermanos**

*Ejemplos de respeto, por que siempre han estado junto a mí brindándome su cariño y comprensión.*

### **A mi esposo Omar**

*Principio de nuevas ilusiones, por su amor , fortaleza y apoyo en mis momentos difíciles.*

### **A mi Hija Ana Milena**

*Germinación de mis alegrías, por su mundo de inocencia y amor, y para que esto sea ejemplo de superación.*

### **A toda mi familia**

*Ejemplo de unión, por que siempre me han brindado su apoyo a través del tiempo y la distancia.*

### **A Margarita**

*Modelo de amistad desinteresada, por su alegría, comprensión, apoyo y sobre todo por la lucha y esfuerzo para que este proyecto culminara con éxito.*

**Brigitt Oviedo Nuñez**

## **DEDICATORIA**

### ***A Dios***

*La oportunidad de alcanzar este gran sueño.*

### ***A mi madre***

*Por su inmenso amor y gran espíritu de superación y de quien aprendí, que no hay mal que no pueda ser vencido con un granito de fe y una pizca de esperanza.*

### ***A mi padre***

*Por ser un hombre luchador, cuyo espíritu emprendedor ha sido mi modelo a seguir.*

### ***A mis hermanos***

*Quienes con su respaldo impidieron que flaqueara en aquellos momentos donde llegué a pensar que la desesperación triunfaría.*

### ***A Brigitt***

*Quien más que compañera y amiga se convirtió en una hermana que me permitió conocer lo que en realidad significa la palabra amistad.*

***Margarita Fajardo Cuadro***



## **AGRADECIMIENTOS**

Al concluir este proyecto y ver plasmado en éste, el resultado de muchos esfuerzos y desvelos por llevar a los lectores un trabajo que les pueda servir de consulta.

Queremos en primer lugar dar gracias a Dios por la sabiduría y la fortaleza para perseverar y no desfallecer en nuestro propósito.

Agradecemos además a nuestros profesores y en especial al nuestro director de tesis, el Ingeniero Raúl Padrón, el cual nos brindó sin reserva todos sus conocimientos profesionales con los cuales pudimos superar los obstáculos conceptuales presentados a lo largo de desarrollo de este proyecto, al Ingeniero Jairo Pérez Pacheco, quien siempre presentó interés por nuestro trabajo y nos aportó valiosas ideas para la organización y metodología del libro, al ingeniero Luis Majana quien a lo largo de estos dos años de trabajo nos brindó sus consejos y palabras de apoyo para culminar esta etapa universitaria, y al Ingeniero Omar Yepes Romero, quien siempre estuvo cerca de nosotras brindándonos su colaboración y apoyo a lo largo de este proyecto.

Por último agradecemos a todas las personas que de una u otra forma permitieron que este gran proyecto se hiciera realidad.

*Brigitt Oviedo Nuñez*

*Margarita Fajardo Cuadro*

## INTRODUCCIÓN

Debido a la importancia de las asignaturas de Ingeniería Económica y Finanzas, impartidas en la Tecnológica de Bolívar Institución Universitaria, y conectoras de la incidencia de estas en el desarrollo integral de todo ser humano, se ha diseñado esta tesis, pues con ella se pretende llenar en mínima parte el vacío que existe en la institución al carecer de un texto propio y práctico que proporcione al lector una sólida introducción a la creciente complejidad de los proyectos socio-económico, y la necesidad de un desarrollo organizado de ideas y acciones que permitan aumentar la producción y el bienestar nacional a todo nivel.

El desarrollo y organización de los diferentes temas, se ha llevado a cabo siguiendo criterios didácticos y buscando colocar en orden secuencial los diferentes aspectos que debe abarcar estas áreas económicas, haciendo énfasis en sus interrelaciones y en la información que ha de servir como punto de apoyo para el autoaprendizaje.

El propósito básico de esta tesis, es apoyar a la institución en la lucha por transformar la metodología tradicional educativa a una de autoaprendizaje que permita incrementar el cuerpo de conocimientos acumulados, con el fin de que éstos sean utilizados como materia prima con la cual los lectores puedan construir proyectos o sortear situaciones diarias en las que vean comprometido sus intereses o el de la sociedad.

El usuario que ingrese a este proyecto, muy posiblemente podrá extender su capacidad de análisis y creatividad, que se verá reflejada en la fortaleza adicional para enfrentar eventos que el futuro le depara. Por tanto habremos tenido éxito en la medida en que este libro le halla servido de medio para ingresar al excitante mundo de los negocios y termine entusiasmado.

## **CONTENIDO**

### **CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA ECONÓMICA**

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN, A LA INGENIERÍA ECONÓMICA	6
1.1. INGENIERÍA ECONÓMICA, ¿ES REALMENTE IMPORTANTE?	6
1.2. DEFINICIÓN DE INGENIERÍA ECONÓMICA	7
1.3. APLICACIÓN DE LA INGENIERÍA ECONÓMICA	8
1.4. RESUMEN	10

### **CAPÍTULO II MERCADOS FINANCIEROS, UN CAMPO DE APLICACIÓN DE LA INGENIERÍA**

2. MERCADO FINANCIERO	21
2.1. ACTIVOS FIJOS	22
2.1.1. Características principales de un activo financiero	22
2.1.2. Clasificación de los activos financieros	23
2.1.3. Títulos valores	23
2.1.3.1. Títulos de renta fija	23
2.1.3.2. Títulos de renta variable	26
2.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MERCADOS FINANCIEROS	28
2.3. CARACTERÍSTICAS DEL MERCADO FINANCIERO PERFECTO	29
2.4. CLASIFICACIÓN DE LOS MERCADOS FINANCIEROS	30
2.4.1. Mercado de deuda y mercado de acciones	30
2.4.2. Mercados primarios y mercados secundarios	31
2.4.3. Mercados monetario o dinero y mercado de capitales	31
2.4.4. Mercado directo y mercados intermedios	31
2.4.5. Mercados públicos o mercados privados	32
2.5. BOLSA DE VALORES	32
2.5.1. ¿Por qué invertir a través de una bolsa?	33
2.5.2. Características de las bolsas de valores	33
2.6. NUEVAS OPCIONES DE MERCADOS DE CAPITAL EN COLOMBIA	35
2.6.1. Contratos de futuros	35
2.6.2. Warrants	37
2.7. INTERPRETACIÓN BURSÁTIL	39

2.7.1. Indicadores para el mercado de renta fija	41
2.8. INDICADORES ECONÓMICOS	42
2.9. FIDUCIA	46
2.10.RESUMEN	47

### **CAPÍTULO III**

#### **VALOR DEL DINERO A TRAVÉS DEL TIEMPO**

3. VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO	58
3.1. ¿POR QUÉ EXISTE EL INTERÉS?	58
3.2. CONCEPTO DE EQUIVALENCIA	63
3.3. DIAGRAMA DE FLUJO DE CAJA	64
3.4. NOMENCLATURA	68
3.5. RESUMEN	70

### **CAPÍTULO IV**

#### **INTERÉS SIMPLE**

4. INTERÉS SIMPLE	81
4.1. ¿QUÉ ES EL INTERÉS SIMPLE?	81
4.2. SIMBOLOGÍA A EMPLEAR	82
4.3. FÓRMULAS PARA EL INTERÉS SIMPLE	83
4.4. RESUMEN DE FÓRMULAS	84
4.5. EJERCICIOS RESUELTOS	85
4.6. EJERCICIOS PROPUESTOS	88
4.7. RESUMEN	89

### **CAPÍTULO V**

#### **INTERÉS COMPUESTO**

5. INTERÉS COMPUESTO	99
5.1. CLASES DE INTERÉS COMPUESTO	100
5.1.1. Interés compuesto continuo	100
5.1.2. Interés compuesto discreto	100
5.2. MOMENTO DE APLICACIÓN	101
5.2.1. Interés anticipado	101

5.2.2. Interés vencido	102
5.3. FÓRMULAS PARA EL INTERÉS COMPUESTO	102
5.3.1. Relación valor futuro – valor presente	102
5.3.2. Relación valor futuro – valor anual	109
5.3.3. Relación valor presente – valor anual	115
5.4. FACTORES DE EQUIVALENCIA	117
5.5. RESUMEN DE FÓRMULAS	118
5.6. TABLAS DE INTERÉS	119
5.7. INTERPOLACIÓN LINEAL	123
5.8. ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE EQUIVALENCIA	128
5.9. EJERCICIOS RESUELTOS	129
5.10.EJERCICIOS PROPUESTOS	132
5.11.RESUMEN	134

## **CAPÍTULO VI**

### **TASA DE INTERÉS NOMINAL Y EFECTIVA**

6. TASA DE INTERÉS NOMINAL Y EFECTIVA	144
6.1. TASA DE INTERÉS NOMINAL	145
6.2. TASA DE INTERÉS EFECTIVA	146
6.3. COMISIÓN	147
6.4. MOMENTO DE APLICACIÓN	148
6.4.1. Interés anticipado	148
6.4.2. Interés vencido	149
6.5. TASAS EQUIVALENTES	149
6.6. EXPRESIONES MATEMÁTICAS DE EQUIVALENCIA	150
6.6.1. Relación interés nominal e interés efectivo periódico	150
6.6.2. Relación interés nominal e interés efectivo anual	151
6.6.3. Relación interés efectivo anual e interés efectivo periódico	159
6.6.4. Relación interés nominal anticipado e interés periódico anticipado	161
6.6.5. Relación interés anticipado e interés vencido	162
6.6.6. Relación interés periódico anticipado e interés efectivo	164
6.6.7. Relación interés nominal anticipado e interés efectivo	165
6.6.8. Relación comisión e intereses pagados por anticipado	166
6.6.9. Relación comisión por anticipado e interés vencido	168
6.7. RESUMEN DE FÓRMULAS	171
6.8. EJERCICIOS RESUELTOS	173
6.9. EJERCICIOS PROPUESTOS	198
6.10.RESUMEN	200

## **CAPÍTULO VII ANUALIDADES**

7. ANUALIDADES	211
7.1. CLASIFICACIÓN DE LAS ANUALIDADES	211
7.2. ANUALIDADES COMUNES EN EL MERCADO ECONÓMICO	213
7.2.1. Anualidades inmediatas o convencionales	213
7.2.2. Anualidades diferidas	225
7.2.3. Anualidades perpetuas	229
7.2.4. Anualidades perpetuas diferidas	232
7.3. RESUMEN DE FÓRMULAS	233
7.4. EJERCICIOS RESUELTOS	235
7.5. EJERCICIOS PROPUESTOS	249
7.6. RESUMEN	251

## **CAPÍTULO VIII GRADIENTES**

8. GRADIENTES	262
8.1. GRADIENTE ARITMÉTICO	264
8.1.1. Gradiente aritmético creciente	264
8.1.1.1. Gradiente aritmético crecientes uniforme	265
8.1.1.2. Gradiente aritmético creciente escalonado	281
8.1.2. Gradiente aritmético decreciente	293
8.1.2.1. Gradiente aritmético decreciente uniforme	294
8.1.2.2. Gradiente aritmético decreciente escalonado	301
8.2. GRADIENTE GEOMÉTRICO	309
8.2.1. Gradiente geométrico creciente	310
8.2.1.1. Gradiente geométrico creciente uniforme	311
8.2.1.2. Gradiente geométrico creciente escalonado	324
8.2.2. Gradiente geométrico decreciente	335
8.2.2.1. Gradiente geométrico decreciente uniforme	335
8.2.2.2. Gradiente geométrico decreciente escalonado	341
8.3. RESUMEN DE FÓRMULAS	347
8.4. EJERCICIOS RESUELTOS	350

8.5. EJERCICIOS PROPUESTOS	359
8.6. RESUMEN	361

## **CAPÍTULO IX INFLACIÓN Y DEVALUACIÓN**

9. INFLACIÓN Y DEVALUACIÓN	371
9.1. INFLACIÓN	371
9.1.1. Cálculo de la tasa real de interés o tasa deflactada	373
9.2. DEVALUACIÓN	378
9.2.1. Rentabilidad real en presencia de devaluación	378
9.3. CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS	382
9.3.1. Fórmula de la rentabilidad real	382
9.3.2. Fórmula de rentabilidad corriente	382
9.3.3. Fórmula de la tasa de dineros invertidos en el extranjero	383
9.4. REVALUACIÓN	385
9.5. RESUMEN DE FÓRMULAS	387
9.6. EJERCICIOS RESUELTOS	387
9.7. EJERCICIOS PROPUESTOS	404
9.8. RESUMEN	406

## **CAPÍTULO X AMORTIZACIÓN Y CAPITALIZACIÓN**

10. AMORTIZACIÓN Y CAPITALIZACIÓN	416
10.1. AMORTIZACIÓN	416
10.1.1. Sistemas de Amortización	417
10.1.2. Cálculo de las cuotas a pagar	418
10.1.3. Saldos Insolutos	435
10.1.4. Derechos adquiridos	450
10.1.5. Tablas de amortización	450
10.2. CAPITALIZACIÓN O FONDOS DE AMORTIZACIÓN	453
10.3. EJERCICIOS RESUELTOS	455
10.4. EJERCICIOS PROPUESTOS	462
10.5. RESUMEN	465

## **CAPÍTULO XI**

### **SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS**

11. SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS	475
11.1. PERO, ¿QUÉ ES UNA ALTERNATIVA?	475
11.2. CRITERIOS DECISORIOS	477
11.2.1. Criterios decisorios con base en dinero	481
11.2.1.1. Evaluación de costos	482
11.2.1.2. Evaluación de Ingresos y gastos mediante el uso de los valores netos	489
11.2.2. Criterios decisorios con base en rentabilidad	499
11.2.3. Criterios decisorios con base en el tiempo	512
11.2.4. Criterios decisorios adimensional	513
11.3. EJERCICIOS RESUELTOS	516
11.4. EJERCICIOS PROPUESTOS	527
11.5. RESUMEN	529

## **CAPÍTULO XII**

### **SECCIÓN DE RESPUESTAS**

AUTOEVALUACIÓN I	535
AUTOEVALUACIÓN II	535
AUTOEVALUACIÓN III	536
AUTOEVALUACIÓN IV	538
AUTOEVALUACIÓN V	538
AUTOEVALUACIÓN VI	539
AUTOEVALUACIÓN VII	539
AUTOEVALUACIÓN VIII	542
AUTOEVALUACIÓN IX	543
AUTOEVALUACIÓN X	544
AUTOEVALUACIÓN XI	545



## LISTA DE CUADROS

	Pág.
Cuadro 4-1 Deducción de fórmula del interés simple	83
Cuadro 5-1 Comparación entre el interés simple y el compuesto	100
Cuadro 5-2 Deducción fórmula de interés compuesto	103
Cuadro 8-1 Ley de formación del gradiente geométrico	310
Cuadro 10-1 Cuotas a pagar del sistema con pagos crecientes	428
Cuadro 10-2 Cuotas a pagar del sistema con pagos geométrico	432
Cuadro 10-3 Elementos de una tabla de amortización	451
Cuadro 10-4 Tabla de Capitalización	454

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 3-1 Flujo de Caja	64
Figura 3-2 Convención del flujo de caja	65
Figura 3-3 Composición del valor del dinero en el tiempo	66
Figura 5-1 Relación futuro – Anualidad	109
Figura 6-1 Clases de tasas de interés	144
Figura 6-2 Resumen de fórmulas	170
Figura 7-1 Clases de Anualidades	211
Figura 8-1 Gradiente aritmético crecientes	262

Figura 8-2	Gradiente aritmético decrecientes	262
Figura 8-3	Gradiente geométrico crecientes	263
Figura 8-4	Gradiente geométrico decrecientes	263
Figura 8-5	Clasificación de los gradientes	263
Figura 8-6	Estructura de un gradiente aritmético creciente	264
Figura 8-7	Corte vertical de un gradiente aritmético creciente	265
Figura 8-8	Gradiente uniforme finito	266
Figura 8-9	Gradiente uniforme infinito	266
Figura 8-10	Relación valor presente y gradiente creciente finito	267
Figura 8-11	Parte constante del gradiente	267
Figura 8-12	Parte variable del gradiente	267
Figura 8-13	Relación valor futuro y gradiente creciente finito	273
Figura 8-14	Relación valor anual y gradiente creciente finito	276
Figura 8-15	Gradiente aritmético creciente escalonado	281
Figura 8-16	Corte vertical del gradiente aritmético escalonado	281
Figura 8-17	Relación valor presente y gradiente escalonado	283
Figura 8-18	Gradiente escalonado expresado en valores anuales	283
Figura 8-19	Futuro de un subperiodo de un gradiente escalonado	284
Figura 8-20	Relación valor presente y futuro los subperiodos del gradiente	284
Figura 8-21	Relación valor futuro y gradiente escalonado	289
Figura 8-22	Relación valor anual y gradiente escalonado creciente	291
Figura 8-23	Gradiente aritmético decreciente	294
Figura 8-24	Relación valor presente y gradiente aritmético decreciente	295
Figura 8-25	Relación valor futuro y gradiente aritmético decreciente	297
Figura 8-26	Relación valor anual y gradiente aritmético decreciente	299
Figura 8-27	Relación valor presente y gradiente decreciente escalonado	302
Figura 8-28	Corte vertical gradiente decreciente escalonado	302
Figura 8-29	Futuro de cada un los subperiodos del gradiente escalonado	303
Figura 8-30	Relación valor futuro y gradiente escalonado decreciente	305

Figura 8-31	Relación valor anual y gradiente escalonado decreciente	307
Figura 8-32	Estructura de un gradiente geométrico creciente	311
Figura 8-33	Gradiente geométrico finito	312
Figura 8-34	Gradiente geométrico infinito	312
Figura 8-35	Relación valor presente y gradiente geométrico creciente	313
Figura 8-36	Relación valor futuro y gradiente geométrico creciente	317
Figura 8-37	Relación valor anual y gradiente geométrico creciente	320
Figura 8-38	Estructura de un gradiente geométrico creciente infinito	322
Figura 8-39	Estructura de un gradiente geométrico escalonado creciente	324
Figura 8-40	Relación valor presente y gradiente geométrico escalonado	325
Figura 8-41	Gradiente escalonado expresado en anualidades	325
Figura 8-42	Relación valor presente y futuro de los subperiodos del gradiente geo.	326
Figura 8-43	Relación valor futuro y gradiente geométrico escalonado creciente	330
Figura 8-44	Relación valor anual y gradiente geométrico escalonado creciente	333
Figura 8-45	Estructura del gradiente geométrico decreciente	335
Figura 8-46	Relación valor presente y gradiente geométrico decreciente	336
Figura 8-47	Relación valor futura y gradiente geométrico decreciente	338
Figura 8-48	Relación valor anual y gradiente geométrico decreciente	339
Figura 8-49	Estructura de un gradiente geométrico decreciente escalonado	341
Figura 8-50	Relación valor presente y gradiente geométrico decreciente	342
Figura 8-51	Relación valor futura y gradiente geométrico escalonado	344
Figura 8-52	Relación valor anual y futuro de los subperiodos del gradiente	346
Figura 8-53	Resumen de fórmulas de los gradiente aritméticos	348
Figura 8-54	Resumen de fórmulas de los gradiente geométricos	349
Figura 10-1	Amortización constante	419
Figura 10-2	Amortización gradual	426
Figura 10-3	Cuotas del sistema de amortización gradual	438
Figura 11-1	Clasificación de las alternativas	475
Figura 11-2	Criterios decisorios para la selección de alternativas	481

## **LISTA DE ANEXOS**

Anexo 1. Tablas de Interés	Pág. 546
----------------------------	-------------

## RESUMEN

Este proyecto de grado tiene como título: “ANÁLISIS ECONÓMICO Y FINANCIERO COMO APOYO PARA LA TOMA DE DECISIONES”, y contiene un conjunto de información que servirá de soporte en el momento de efectuar un análisis económico y financiero de diferentes alternativas de inversión o financiación a las cuales se verá enfrentado el lector durante todo su periodo de vida, ya que nos encontramos en un mundo cada vez más competitivo y esto le permitirá desenvolverse con mayor seguridad.

Para lograr este fin se ha creado un conjunto de capítulos diseñados estratégicamente y con dedicación para que expresen en un lenguaje sencillo los conceptos básicos de la Ingeniería Económica y que a su vez cumpla con el objetivo de dejar sembrado el entusiasmo sobre estos temas y con ello el estímulo por la investigación para que amplíen o complementen la información aquí suministrada.

Los capítulos expuestos y sus temas básicos son: El capítulo I, que hace referencia a la definición, importancia y campos de aplicación de la Ingeniería Económica. El capítulo II, da una visión general pero básica sobre la importancia del mercado financiero. El capítulo III trata el valor del dinero en el tiempo concepto fundamental en el estudio de la Ingeniería Económica. Los Capítulos IV y V, desarrollan los tipos de intereses básicos que permiten entender el contenido general de la asignatura. El capítulo VI trata los tipos de intereses más utilizados en el mercado, así como el análisis de su composición y momento de aplicación, destacando a su vez la importancia del concepto de equivalencia. Los capítulos VII y VIII, plantean las diferentes formas de pagos uniformes y con variación que se pueden presentar y el tratamiento que se le debe dar a cada uno de ellos. El capítulo IX, es un capítulo especialmente diseñado para aterrizar conceptos como la inflación y devaluación y la incidencia de estos fenómenos económicos en el estudio de las matemáticas financieras. El capítulo X, hace referencia a los diferentes tipos de amortización a los que puede apelar una persona para abonar a sus deudas y las formas de capitalización a la cual pueda recurrir cuando le sea necesario. El capítulo XI, es un capítulo que da opciones para evaluar las diferentes alternativas de inversión presentadas a lo largo de la vida personal o profesional. Adicionalmente se encuentra el capítulo XII, dedicado a dar respuesta a las autoevaluaciones presentadas en cada uno de los capítulos anteriormente expuestos.

## INTRODUCCIÓN

**A**l analizar el papel que ocupa el hombre en el desarrollo empresarial, se demuestra claramente la necesidad de optimizar recursos, con el fin de producir mejores y mayores resultados, para lo cual es necesario contar con ciertas bases que le permitan emitir un juicio y hacerse responsables de ello.

En consecuencia, se busca que el texto sea una herramienta que le permita al lector formarse una infraestructura conceptual para el análisis de todos los problemas en los que se involucra directa e indirectamente el dinero en el tiempo y de esa forma evitar los parámetros tradicionales que basan la solución de problemas sólo en el empleo de fórmulas matemáticas, dejando a un lado la creatividad y análisis que en la actualidad son los cimientos para la solución eficientes de situaciones económicas, y que a su vez aportan a la eficiencia personal.

Sin embargo no se pretende resolver todas las dudas sobre los conceptos, pues este campo es muy extenso y el objetivo del libro es ofrecer un nivel básico de conocimientos y provocar un pensamiento investigativo y crítico que le permita al lector hacerle frente a situaciones cotidianas, con herramientas sencillas y prácticas las cuales podrá afianzar de acuerdo al interés y motivación que este presente sobre los temas expuestos.

Por eso el material comprendido en este texto ha sido dividido en once capítulos, siguiendo siempre la norma de afirmar el concepto, cuyos temas se consideran más relevantes dentro de la formación integral que se ofrece para llevar a cabo una evaluación económica adecuada del proyecto.



# **INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA ECONÓMICA**

La economía consiste en saber  
gastar, y el ahorro  
en saber guardar.

[Orison S. Marden]

C  
A  
P  
I  
T  
U  
L  
O  
I



## OBJETIVOS

### Objetivo General

Comprender qué es la Ingeniería Económica, los campos de aplicación y la importancia en diferentes disciplinas.

### Objetivos Específicos

- Evaluar los conocimientos que posee de la Ingeniería Económica.
- Conocer el significado de Ingeniería Económica.
- Reconocer la importancia de la Ingeniería Económica.
- Conocer los campos de aplicación de la Ingeniería Económica.
- Apoyar el proceso de aprendizaje con la utilización de las actividades de refuerzo.

## CONDUCTA DE ENTRADA

**E**l siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee a cerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.
  - a. La ingeniería económica surge de la necesidad de evaluar económicamente los proyectos técnicos. ( )
  - b. La ingeniería económica es un conjunto de fórmulas matemáticas que se utilizan para obtener valores que permitan conocer la rentabilidad y la liquidez de un proyecto. ( )
  - c. Los proyectos que evalúa la ingeniería económica son sólo aquellos relacionados con la ingeniería y la economía. ( )
  - d. La ingeniería económica se basa en los aspectos contables ya que estudia los flujos de fondos y los estados financieros. ( )
  
2. Marque con una equis (X) las situaciones en las cuales se podría emplear la ingeniería económica.
  - a. Reemplazo de maquinaria obsoleta. ( )
  - b. Adquisición de nueva maquinaria por compra directa o arrendamiento. ( )
  - c. Elección entre dos procesos alternativos. ( )
  - d. Análisis de los estados financieros. ( )
  - e. En la decisión de compra de un carro. ( )

## RESPUESTAS CORRECTAS

1.
  - a. V
  - b. F
  - c. F
  - d. F

2.

Las respuestas que debió seleccionar son a, b, c y e

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

## ACTIVIDADES PREVIAS

1. Buscar en Biblioteca de la CUTB los libros referentes a la Ingeniería Económica para formar una base bibliográfica a la que pueda acceder para ampliar los conceptos y utilizarla como material de investigación.
2. Leer en algún libro de la bibliografía anteriormente buscada, lo concerniente a la historia, aplicación e importancia de la Ingeniería Económica.
3. Afiliarse a una comunidad en internet donde pueda intercambiar opiniones y aclarar inquietudes referentes a la Ingeniería Económica.
4. Leer una vez por semana las páginas económicas de las revistas Dinero y Semana, igualmente el Periódico Portafolio, para realizar un ensayo, en el cual de su punto de vista sobre algún artículo específico.
5. Desarrollar un test de inquietudes relacionadas con la historia, aplicación e importancia de la Ingeniería Económica que se pueda desarrollar y aclarar a medida que se avanza en el estudio de estos temas.

# 1. INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA ECONÓMICA

La ingeniería es la aplicación de la ciencia a los propósitos comunes de la vida, es la técnica y el método que permite organizar, transformar, movilizar y controlar eficazmente los recursos humanos y naturales en beneficio del hombre.

El ingeniero convierte en realidad el valor potencial de la ciencia mediante la utilización de conocimientos científicos e investigativos, el uso de pasadas experiencias y el buen juicio práctico. El ingeniero, por tanto, recoge herramientas y recursos y los interrelaciona para ponerlos al servicio de la humanidad.

## 1.1. INGENIERÍA ECONÓMICA ¿ES REALMENTE IMPORTANTE?

La ingeniería tiene un alcance mayor que la tecnología, ya que además de los aspectos técnicos, tiene en cuenta los vastos principios de la economía de los recursos humanos, físicos y económicos, y de la optimización de los mismos en un momento dado, teniendo como objetivo la sociedad en la cual actúa.

La ingeniería tiene un amplio conocimiento y comprensión de los medios sociales, tecnológicos y económicos, y una habilidad grande para organizar los recursos disponibles, de tal manera que se alcancen con ellos objetivos deseables desde el punto de vista social y económico.

Ingeniería y ciencia en una u otra forma, proveen las bases para la gran mayoría de las adquisiciones o retiros de bienes de capital, y éstas rigen además de los aspectos técnicos y económicos los costos y optimización del uso de los recursos.

Estos aspectos económicos mencionados han ido alcanzando con el transcurrir del tiempo una importancia primordial, debido básicamente, a las siguientes causas: inflación, dinámica de mercados, creatividad, sofisticación, contaminación, crisis energética y de recursos naturales, complejidad de la tecnología moderna, magnitud de las organizaciones productivas, existencia de un gran nivel de competencia, poca disponibilidad de tiempo en el proceso decisorio. Por lo tanto un ingeniero que desee un desarrollo profesional integral,

tiene que desarrollar una gran cantidad de ideas para reducir el costo de los procesos existentes, minimizar los costos y maximizar la rentabilidad de los procesos futuros.

Para lograr lo anterior, los tecnólogos en el gobierno, industria y sociedad, deben conocer completamente las interrelaciones entre factores técnicos y económicos, especialmente entre aquellos que tienen el mayor efecto en la rentabilidad. Para satisfacer esta necesidad de los tecnólogos se creó la ingeniería económica, la cual relaciona muy bien esos factores mencionados, además nació como solución sencilla a aquellos ingenieros y científicos que frecuentemente han concentrado sus esfuerzos en el lado técnico y dejando lo económico-financiero a otros especialistas, por pensar que este es un campo delicado. Aún diseñadores que deben realizar los estimados de los costos de capital y de operación de plantas y equipos, han dejado la evaluación de alternativas técnicas y de los planes de investigación a otros; lo cual no es admisible para personas o entidades que deseen tener éxito en el mundo moderno.

## 1.2. DEFINICIÓN DE INGENIERÍA ECONÓMICA

La ingeniería económica la podemos definir como un conjunto de conceptos y técnicas matemáticas que empleamos para obtener una aproximación racional y significativa para evaluar y comparar aspectos económicos de las alternativas propuestas por diferentes métodos, sabiendo que una alternativa es una solución única para una situación dada. Las alternativas usualmente comprenden detalles como ingresos, inversiones de ventas, costos administración, costo de operación, seguros, la previsión de la vida del activo, los costos de mantenimientos, anticipar el valor de recuperación (valor de salvamento) y la tasa de interés (tasa de retorno). Una vez que la realidad y todos los cálculos pertinentes se colectan, un análisis en ingeniería económica puede conducir a determinar cual es el mejor punto de vista económico entre las alternativas que se tiene en consideración.

### 1.3. APLICACIONES DE LA INGENIERÍA ECONÓMICA


Al estudio del análisis de inversiones, también se le conoce con el nombre de Matemáticas Financieras, Administración de Inversiones ó Ingeniería Económica; y es una herramienta que utiliza como concepto de fondo la tasa de interés, para proporcionar una serie de elementos que permiten a quien la utiliza, hacer infinidad de análisis de tipo financiero y económico, destacándose en los siguientes campos:

Mercado  
Financiero

- Cuando se desea escoger en que títulos valores invertir.
- Cuando se necesita saber cuál es el mercado financiero más adecuado para ubicarse
- Cuando se debe comprar o vender acciones.

Gobierno

- Cuando se desea distribuir el presupuesto entre múltiples necesidades del país.
- Cuando debe decidirse sobre la privatización de una empresa industrial o de servicios del estado.
- Cuando se debe establecer la manera de negociar con empresas internacionales la exploración y explotación de recursos naturales: ¿Explotar solo? ¿Hacer sociedad? ¿Dar contratos de asociación? ¿Dar contratos de riesgo compartido?
- Cuando se debe elegir entre construir edificaciones propias o arrendar oficinas.



Actividades Productivas

- Cuando se debe determinar qué, cómo, cuándo y dónde producir.
- Cuando se decide sobre la forma de financiación de las actividades.
- Cuando se debe elegir entre la creación o expansión de instalaciones.
- Cuando se piensa en el reemplazo de equipos y/o maquinarias.
- Cuando se desea invertir en nuevas actividades.
- Cuando se debe elegir entre aumentar el personal o pagar turnos extras.

Vida Privada

- Cuando se debe decidir entre comprar o arrendar una casa.
- Cuando debes elegir entre estudiar o trabajar.
- En decisiones como: comprar un auto o usar transporte público, etc.
- Decisiones sobre la actividad en la cual se invertirán los ahorros.

Sociedad

- En decisiones sobre el manejo de ciertos servicios por el sector privado o público.
- En decisiones sobre el desarrollo industrial.
- En decisiones sobre el manejo de recursos de la comunidad.



Otras  
Aplicaciones

- Determinar el verdadero costo de una alternativa de financiación, o la verdadera rentabilidad de una inversión.
- Establecer planes de financiamiento a los clientes cuando se vende a crédito.
- Seleccionar el mejor plan para amortizar deudas, según los criterios de liquidez y rentabilidad que tenga el empresario.
- Calcular el costo de capital.
- Escoger las alternativas de inversión a corto o largo plazo que sean mas favorables para el negocio.
- Seleccionar entre alternativas de costos.

La ingeniería económica se puede aplicar en infinidad de casos. La creación de una empresa o un negocio es un caso común en el que las matemáticas financieras juegan un papel importante a la hora de tomar decisiones, por ejemplo cuando se va a elegir la fuente de financiación del proyecto, ya que se debe estudiar las tasa de interés que nos ofrecen y escoger la que más le convenga a la empresa; también nos ayuda a determinar el tiempo en que se amortizará la deuda. Además nos sirve de apoyo para determinar al cabo de cuanto tiempo se recuperará la inversión y cual será el valor de salvamento de la empresa cumplida su vida útil.

## 1.4. RESUMEN

Las actividades de análisis y diseño no son en ingeniería un fin en si mismo, sino un medio para satisfacer los deseos del hombre. La ingeniería contempla entonces, dos aspectos fundamentales. Uno tiene que ver con los materiales y las fuerzas de la naturaleza y el otro con las necesidades de la humanidad. Debido a que se vive en un mundo con recursos limitados, la ingeniería debe estar estrechamente relacionada con la economía. Es hoy en día, absolutamente indispensable que las propuestas de ingeniería sean evaluadas antes de llevarse a cabo en términos de valor y costo. Los conceptos económicos, si se relacionan cuidadosamente con los hechos, pueden ser útiles para sugerir soluciones a los problemas de ingeniería.

La capacidad para adoptar decisiones sólidas por medio del análisis de la ingeniería económica depende conjuntamente de una comprensión conceptual clara de la situación y de la capacidad para manejar los aspectos cuantitativos propios del problema, teniendo en cuenta que la Ingeniería Económica abarca los conceptos y las técnicas de análisis útiles para la evaluación del valor de los sistemas, productos y servicios con relación a su costo.

## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por sí mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a sí mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.



# AUTOEVALUACIÓN I

1. Explique en forma breve la importancia de la Ingeniería Económica.
2. Cómo podría definir la Ingeniería Económica.
3. ¿Qué es una alternativa?
4. ¿A qué lleva o conduce un análisis en Ingeniería Económica?
5. ¿Qué otros nombre recibe la Ingeniería Económica?
6. Explique brevemente las aplicaciones de la Ingeniería Económica.

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO

## ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Sus compañeros de clases no entendieron el concepto de Ingeniería Económica. ¿Cómo lo podría explicar usted?.
2. ¿Con qué objetivos una empresa aplica la Ingeniería Económica?
3. ¿En el transcurso de su vida alguna vez ha recurrido a la utilización de La Ingeniería Económica, aún sin saber que la estaba aplicando?. De ejemplos.
4. ¿Será posible aceptar un proyecto económico que no sea rentable?
5. ¿Qué opinaría si le dijeran que de ahora en adelante la ingeniería económica será una materia básica para todas las carreras?
6. Suponga que usted ha trabajado en una empresa pública durante 40 años y piensa retirarse, pero la Gobernación le ha propuesto las siguientes alternativas:
  - Una cantidad de dinero (de acuerdo a la ley), pero no le otorga una pensión mensual, ni mantiene los servicios médicos.
  - Le otorga una pensión mensual hasta su muerte y le mantiene los servicios médicos por el mismo período.

*¿Cuál alternativa selecciona?, ¿En qué basa su decisión?, ¿Será que en este caso se requiere la Ingeniería Económica?*
7. Realizar un análisis de la aplicación de la Ingeniería Económica, en la Medicina, Ingeniería, Economía, Derecho, Comunicación Social, Administración, etc.
8. Aplicaciones de la Ingeniería Económica en el Sector bancario y en proyectos de evaluación de nuevas empresas.
9. Consultar Páginas en Internet donde pueda obtener información de Ingeniería Económica.

## BIBLIOGRAFÍA

BACA, Gabriel. Fundamentos de Ingeniería Económica. México: McGraw-Hill, 1994.

BACA Guillermo, Ingeniería Económica, Colombia: Fondo Educativo Panamericano, 2000.

INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR, Metodología y Estrategias de la educación Superior Abierta y a Distancia, UIS, Bogotá: ICFES, 1983.

SMITH, Gerald. Ingeniería Económica Análisis de los Gastos de Capital, Limusa, 1987.

THUESEN, H. G., Ingeniería Económica, Colombia: Prentice Hall Internacional, 1981.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones, México: McGraw-Hill, 1997.



# **MERCADOS FINANCIEROS, UN CAMPO DE APLICACIÓN DE LA INGENIERÍA ECONÓMICA**

¿Donde poner los huevos?  
Sea cauteloso, pero no descuide  
las oportunidades. Consulte con muchos,  
evalúe y decida.  
(Revista Dinero)

C

A

P

I

T

U

L

O

II

*OBJETIVOS*

## **Objetivo General**

Conocer las generalidades de uno de los campos en los cuales se aplica constantemente la Ingeniería Económica

## **Objetivos Específicos**

- Saber qué es un mercado financiero.
- Conocer las características de estos mercados.
- Identificar las clases de mercados financieros.
- Conocer qué es una bolsa de valores.
- Aprender la terminología que se emplea en los mercados financieros.
- Conocer los índices e indicadores empleados para la toma de decisiones en dichos mercados.



### CONDUCTA DE ENTRADA

**E**l siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.

- a) Mercado Financiero es el lugar en el cual se compran o venden activos financieros. ( )
- b) El mercado financiero tiene como objetivo principal poner en contacto a oferentes y demandantes de activos financieros. ( )
- c) Los activos financieros son títulos valores representativos de deudas emitidos por las unidades económicas. ( )
- d) Una de las características de los activos financieros es la seguridad que le brinda al comprador de obtener grandes utilidades. ( )
- e) Un mercado financiero se caracteriza por su amplitud, ya que entre más títulos se negocien más amplio será el mercado. ( )
- f) La bolsa de valores es una clase de mercado financiero. ( )
- g) Contratos de futuros son aquellos donde ambas partes se comprometen a entregar o recibir un bien a determinado precio en una fecha establecida. ( )

*RESPUESTAS CORRECTAS*

1.
  - a. V
  - b. V
  - c. V
  - d. F
  - e. V
  - f. V
  - g. V

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

### ACTIVIDADES PREVIAS

1. Investigue el concepto y las características que identifican a un mercado financiero.
2. Busque cuáles son las clases de mercado financiero que existen.
3. Investigue qué títulos valores se negocian en el mercado colombiano.
4. Indague qué ventajas y desventajas acarrear el invertir en la bolsa de valores.
5. Investigue que nuevas opciones de inversión hay en el mercado financieros nacional e internacional.
6. Lea sobre cuáles son los indicadores que actualmente determinan la economía de Colombia.
7. Investigue qué entidades en Colombia negocian acciones en la bolsa de valores.
8. Consulte las siguientes direcciones en internet:  
[www.supervalores.gov.co](http://www.supervalores.gov.co)  
[www.megabolsa.com](http://www.megabolsa.com)

## 2. MERCADO FINANCIERO

**E**l Mercado Financiero es el lugar, mecanismo o sistema en el cual se compran y venden cualquier tipo de activo financiero.

Al referirnos a un lugar no se hace en un sentido físico o geográfico, sino económico, queriendo significar el encuentro de aspirantes a compradores y a vendedores de los diferentes tipos de activos financieros. De hecho, en algunos mercados financieros importantes (el de divisas por ejemplo), las transacciones funcionan sin contacto físico, se acuerdan por teléfono o correo electrónico, estando compradores y vendedores a miles de kilómetros de distancia, claro está que también hay mercados financieros que si tienen contacto físico, como en el correo de bolsa.

La finalidad del mercado financiero es poner en contacto oferentes y demandantes de fondos, y determinar los precios justos de los diferentes activos financieros, para lo cual es esencial el empleo de la Ingeniería Económica y así determinar la conveniencia de la inversión.

Las ventajas que tienen los inversionistas gracias a la existencia de los mercados financieros son la búsqueda rápida de activos financieros que se adecuen a la voluntad de invertir, y además, se asegura que esa inversión tiene un precio justo lo cual impide cualquier inequidad. El precio se determina dependiendo de la oferta y demanda.

Otra finalidad de los mercados financieros es que los costos de transacción sea el menor posible.

Pero la finalidad principal es determinar el precio justo del activo financiero, ello dependerá de las características del mercado financiero. Cuanto más se acerque un mercado financiero al ideal de mercado financiero perfecto, el precio del activo estará más ajustado a su precio real.

## 2.1. ACTIVOS FINANCIEROS

Los activos financieros son títulos valores representativos de deuda emitidos por las unidades económicas o prestatarios que implican un compromiso de pago en fecha o fechas futuras.

El soporte que sustenta a los activos puede ser material (sobre papel o documento) o inmaterial (anotaciones en cuenta) que es la más utilizada.

Los prestatarios emiten activos financieros para poder cubrir un desequilibrio entre sus gastos e ingresos. Todos los agentes económicos (economías domésticas, empresas y sector público) intercambian estos activos creando un sistema financiero.

### 2.1.1. Características principales de un activo financiero

#### *Liquidez*

Se mide por la mayor o menor facilidad de convertir el activo en dinero de forma rápida. En el caso de las acciones hay dos conceptos que pueden ayudarnos a determinar el grado de liquidez; estos son la frecuencia de contratación y el free-float. El primero hace referencia al número de sesiones en un periodo en las que se realizan operaciones con una acción. El segundo se refiere al porcentaje del capital que fluctúa libremente en el mercado, es decir que no corresponde a participaciones estratégicas.

#### *Riesgo*

Es la posibilidad de que las expectativas de rentabilidad sobre un determinado activo no se cumplan. Este incumplimiento de las expectativas, puede venir motivado tanto por las fluctuaciones de sus precios como por la insolvencia del emisor (riesgo intrínseco).

# Rentabilidad

Es la capacidad del activo para producir intereses u otros rendimientos para su poseedor como pago por su cesión temporal de capacidad de compra y su asunción de riesgo. La rentabilidad de un activo viene determinada por la liquidez y el riesgo; aunque en la práctica no siempre se cumple; por lo tanto la rentabilidad está considerada como una recompensa para el tenedor del activo por renunciar a la liquidez y por soportar el riesgo de que el emisor no pueda cumplir con las condiciones de la emisión.

## 2.1.2. Clasificaciones de los activos financieros

- *Según su grado de liquidez*, de mayor a menor tenemos: monedas y billetes, depósitos, pagarés del Tesoro, bonos de caja y tesorería, títulos hipotecarios, pagarés bancarios y de empresa, letras de cambio, deuda pública a largo plazo, obligaciones de carácter privado, acciones, pólizas de seguros y préstamos.
- *Según la naturaleza de la unidad económica emisora*: Estado u otras Administraciones Públicas, Banco Central, intermediarios financieros y empresas no financieras.
- *Según sean realizados en mercados abiertos* (acciones, obligaciones, etc.) o en mercados negociados (depósitos, fondos de inversión, etc.).
- *Según se materialicen en documentos emitidos físicamente* o en anotaciones en cuenta.

## 2.1.3. Títulos valores

Entre los activos financieros encontramos los llamados Títulos valores que son definidos como un documento negociable, representativo de un valor o compromiso económico entre el emisor del documento y el propietario del mismo. Estos títulos valores se pueden clasificar en títulos de renta fija y títulos de renta variable.

aquellos que su rentabilidad está dada por una tasa fija de interés, pactada para todo el periodo de duración de la inversión, por tanto la rentabilidad de estos se puede conocer desde el momento de su emisión o adquisición. A continuación daremos ejemplos de estos títulos:

### **Bonos**

Son activos que obliga al emisor a realizar pagos determinados al tenedor. Un bono certifica que una persona natural o jurídica ha prestado dinero a una corporación o al gobierno y además identifica los términos del préstamo, es decir, el valor nominal, el plazo y la tasa de interés que le será pagada.

*Cupón.* Interés pagado al poseedor del título. Es el porcentaje del valor nominal que le será pagado periódicamente.

*Valor nominal.* Pago realizado al vencimiento del bono. También se le denomina valor a la par o valor al vencimiento. El valor nominal es la suma que se presta al emisor. Es el valor que está escrito o impreso en el bono.

*El plazo.* Indica la fecha en la cual el préstamo le será cancelado.

*Tasa de descuento.* Tipo de interés utilizado para calcular valores actuales de flujos de caja futuros.

De acuerdo con el tipo de respaldo que ofrecen, los bonos pueden clasificarse en tres clases.

- *Bonos hipotecarios.* Son aquellos que están respaldados por una hipoteca sobre un activo específico, tal como finca raíz, maquinaria, vehículos, etc. Como en esta clase de bonos el riesgo es mínimo, son los menos rentables.
- *Bonos sin respaldo.* Son aquellos que no tienen respaldo específico, salvo el buen nombre de la empresa que los emite: casi siempre ofrecen convertirlos en acciones de la misma empresa a su vencimiento. Generalmente, son más rentables que los bonos hipotecarios.
- *Bonos estatales.* Son aquellos emitidos por el estado o por una entidad estatal; usualmente son los menos rentables pero, a fin de asegurar la colocación o compra de ellos los impone como inversión forzosa.

### **Papeles comerciales**

Son pagarés ofrecidos públicamente en el mercado de valores y emitidos por sociedades anónimas, limitadas y entidades públicas, no sujetos a inspección y vigilancia de Superintendencia Bancaria. Su vencimiento no puede ser inferior a 15 días ni superior a 9 meses. La rentabilidad la determina el emisor de acuerdo con las condiciones del mercado.

### **Certificado de depósito.**

Es un documento de libre negociación mediante [endoso](#) nominativo y sin condicionamiento, que lo constituye en una garantía real para las instituciones financieras.

### **CDT (Certificado de Depósito a Término)**

Este certificado corresponde a una modalidad de captación, donde la corporación en la cual se deposita el dinero se compromete a reintegrar al depositante, en un plazo fijo, la suma inicial más los rendimientos generados por la tasa de interés. Esta es una forma de ahorro que permite realizar inversiones a término fijo, obteniendo rentabilidad y seguridad.

## **CDAT (Certificados de Depósito de Ahorro a Término)**

Como su nombre lo indica se trata de ahorro a término, con un plazo no menor a cinco días, y cuyos intereses pueden pactarse libremente con el cliente. Son nominativos y no se pueden negociar en un mercado secundario.

### **Aceptaciones bancarias y financieras**

Son letras de cambio giradas por un comprador de mercancías o bienes muebles a favor del vendedor de los mismos. Estas letras se convierten en aceptaciones bancarias cuando el girador de la letra, comprador o importador, solicita al banco, corporación financiera, corporación de ahorro y vivienda o compañía de financiamiento comercial que acepte la



rentabilidad principal por el pago oportuno de la misma. El plazo máximo de estos títulos es de 360 días.

### **TES (Títulos de Tesorería )**

Los títulos de tesorería creados en la Ley 51 de 1990 son títulos de deuda pública interna emitidos por el Gobierno Nacional.

Existen dos clases de títulos: clase A y clase B. Los primeros fueron emitidos con el objeto de sustituir la deuda contraída en las operaciones de mercado abierto realizadas por el Banco de la República. Los segundos se emiten con el fin de obtener recursos para apropiaciones presupuestales y efectuar operaciones temporales de la Tesorería del Gobierno Nacional. En la actualidad solamente se emiten los títulos clase B.

El plazo se determina de acuerdo con las necesidades de regulación del mercado monetario y de los requerimientos presupuestales o de tesorería, y fluctúan entre 1 y 7 años. El rendimiento de los títulos lo determina el Gobierno Nacional de acuerdo con las tasas del mercado para el día de la colocación de los mismos.

### **Titularización**

Es un proceso en el que diferentes activos tales como: cartera, bienes inmuebles, proyectos de construcción, rentas, flujos futuros de fondos son movilizados constituyéndose en un patrimonio autónomo sobre los cuales se emiten títulos. La rentabilidad de los papeles la fija el emisor de acuerdo con las condiciones del mercado, y el plazo de los mismos está ligado a las características del activo, sin que este sea inferior a un año. Pueden emitirse títulos con características similares a los de renta fija, renta variable o a los de ambos.

#### **2.1.3.2. Títulos de renta variable**

Un título es de renta variable cuando su rentabilidad está ligada a las utilidades obtenidas por la empresa en la que se invirtió, así como a las posibles variaciones en los precios de los títulos, dados por las condiciones existentes en el mercado. Algunos ejemplos de este tipo de papeles son los siguientes.

### **Acciones**

Participar en acciones se adquiere una parte de la propiedad de la compañía, participación en las utilidades y adicionalmente puede obtener beneficios generados por la diferencia entre el precio al cual se compra y el precio al cual se vende la acción y eventualmente por la venta de los derechos de suscripción. Debido a estos tres componentes estos títulos se consideran de renta variable.

También se obtienen las siguientes ventajas: los dividendos recibidos están exentos del impuesto de renta, dado que dicho impuestos ha sido cancelado previamente por la sociedad emisora.

*Acciones ordinarias.* El propietario de este tipo de acciones tiene derecho a percibir dividendos, a participar y a votar en la asamblea de accionistas.

*Acciones preferenciales.* Con estas acciones se tiene derecho a recibir un dividendo mínimo con preferencia sobre los accionistas ordinarios, una vez se haya constituido las reservas legales y estatutarias; y al reembolso preferencial de su inversión en caso de disolución de la sociedad; pero no podrían participar en las decisiones tomadas por la Asamblea de Accionistas, excepto cuando se especifique este derecho o cuando ocurran eventos especiales como la no declaración de dividendos preferenciales.

*Acciones privilegiadas.* Esta clase de acciones otorga a su titular, además de los derechos consagrados para las acciones ordinarias, los siguientes privilegios:

- Un derecho preferencial para su reembolso en caso de liquidación hasta concurrencia de su valor nominal.
- Un derecho a que las utilidades se le destine, en primer término a una cuota determinada. La acumulación no podrá extenderse a un periodo superior a 5 años.

Cualquier otra prerrogativa de carácter exclusivamente económico. En ningún caso podrán otorgarse privilegios que constan en voto múltiple, o que priven de sus derechos de modo permanente a los propietarios de acciones comunes.

Los mercados financieros de los países desarrollados han experimentado desde comienzos de la década de los ochenta, un proceso de cambio muy importante. La intensa innovación financiera, contextualiza un campo de actuación para la gestión financiera radicalmente distinta.

La importancia del sistema financiero excede de las funciones tradicionales de fomentar el ahorro, asignar recursos, lograr una adecuada productividad y adaptarse con flexibilidad a las necesidades y cambios económicos.

Cuando se tiene un grupo diversificado de activos financieros se dice que se ha formado un *Portafolio de Inversión*, el cual tiene como objetivo obtener una alta rentabilidad con un nivel aceptable de riesgo. Esta es la mejor manera de utilizar el dinero con el fin de obtener más dinero, en períodos de tiempo que usted elige, protegiéndose contra la inflación y obteniendo ganancias adicionales.

El portafolio de inversiones se forma con valores como: acciones, bonos o cualquier otro título valor (documento negociable en el cual están incorporados los derechos que usted posee); combinando volúmenes, plazos y rentabilidades, que se ajustan a sus proyectos. El problema de la selección de portafolio surge porque la rentabilidad (básicamente determinada por la diferencia entre el precio de venta y el precio de compra) de las acciones depende de muchos factores que están fuera de control del inversionista. Surgiendo así un problema de decisión bajo riesgo.

La constitución del portafolio la puede efectuar usted mismo o con la ayuda de un comisionista de bolsa o invertir su dinero en portafolios ya conformados y administrados por sociedades fiduciarias o por sociedades comisionistas.

Identificados algunos de los activos financieros, bases de estos tipos de mercado, se hace necesario conocer algunos aspectos relevantes que permitan identificar más claramente este campo de aplicación de la Ingeniería Económica.

## 2.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MERCADOS FINANCIEROS

### Amplitud

Número de títulos financieros que se negocian en un mercado financiero. Cuanto mayor sean los títulos que se negocien más amplio será el mercado financiero.

### Profundidad

Existencia de curvas de oferta y demanda por encima y por debajo del precio de equilibrio que existe en un momento determinado. Es decir si existe gente que sería capaz de comprar

precio superior al precio de equilibrio y si existe alguien que está dispuesto a vender a un precio inferior.

### **Libertad**

Se refiere a la ausencia de limitaciones de acceso para compradores y vendedores en el mercado, la posibilidad de poder negociar plazos y cantidades deseadas, y la inexistencia de trabas para la libre formación de los precios de los activos.

### **Flexibilidad**

Capacidad que tienen los precios de los activos financieros que se negocian en un mercado, a cambiar ante variaciones que se produzca en la economía.

### **Transparencia**

Posibilidad de obtener la información fácilmente.

Un mercado cuanto más se acerque a esas características, más se acerca al ideal de mercado financiero perfecto, aunque no existe ningún mercado financiero que sea perfecto, por consiguiente nunca vamos a estar seguros de que el precio de mercado refleja su valor justo.

El concepto de mercado financiero perfecto aparece como unidad de medida, para comparar los distintos mercados financieros.

## **2.3. CARACTERÍSTICAS DEL MERCADO FINANCIERO PERFECTO**

- Gran cantidad de agentes que intervienen tanto por el lado de la oferta como por el lado de la demanda, de forma que nadie puede influir en la formación del precio del activo financiero.
- Que no existan costos de transacción, ni impuestos, ni variación del tipo de interés, ni inflación.

no existan restricciones ni a la entrada ni a la salida del mercado financiero.

- Que exista perfecta información, que todos sepan lo mismo.
- Los activos sean divisibles e indistinguibles.

## 2.4. CLASIFICACIÓN DE LOS MERCADOS FINANCIEROS

No existe una única clasificación de los mercados financieros ya que estos son susceptibles de ser clasificados con arreglo a distintos criterios, siendo la lista de los mismos tan amplia como se quiera. No obstante, a continuación se proponen un conjunto de clasificaciones.

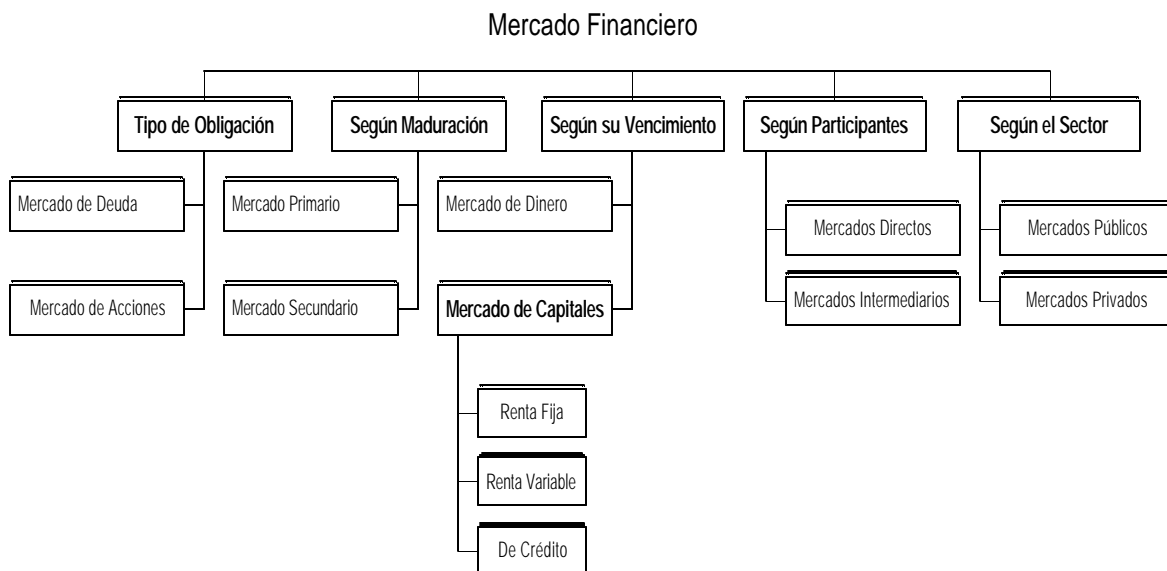


Figura 2-1. Clasificación de los mercados financieros

### 2.4.1. Mercado de deuda y mercado de acciones

Denominados también Mercado crediticio y mercado de valores. La distinción más obvia que puede introducirse en los mercados financieros es la que atiende a los diferentes tipos de activos financieros que en ellos se negocian. Para ello se procede a agrupar las transacciones según la naturaleza jurídica del activo financiero más representativo que

interviene en estas. Se habla así de mercado de acciones, de obligaciones, de letras de cambio, de pagarés de empresa, de deuda pública, de divisas, de eurodólares, etc.

#### **2.4.2. Mercados primarios y mercados secundarios**

Aparte de la ya citada, la clasificación más significativa de los mercados financieros es, posiblemente, la que los agrupa en primarios y secundarios. Son mercados financieros primarios aquellos en los que los activos financieros intercambiados son de nueva creación (se crea una nueva deuda); en cambio, en los secundarios, simplemente cambia el poseedor de un activo financiero ya preexistente. La distinción es fundamental: sólo en los mercados primarios se concede nueva financiación, mientras que en los secundarios se cambia un financiador por otro.

### **2.4.3. Mercado monetario o dinero y mercado de capitales**

Atendiendo al plazo del vencimiento con el que se emiten los activos, puede establecerse otra clasificación de los mercados financieros. Así pese a lo arbitrario de los límites, cuando el plazo de vencimiento de un activo es inferior a un año, su mercado se denomina *a corto plazo, de dinero o monetario*. Los activos con vencimiento superior a un año se negocian en mercados de capitales, y estos, a su vez, suelen subdividirse en *a medio plazo*, si su vencimiento es inferior a tres años, y *a largo plazo* si es superior. En general la principal diferencia entre ambos radica en que los activos del mercado monetario se caracterizan por ser a corto plazo, de reducido riesgo y elevada liquidez (por la existencia de un mercado secundario). Por el contrario, en el mercado de capitales se negocian activos financieros a largo plazo e incluye las operaciones de inversión y financiación. A su vez el mercado de capitales se divide en mercados de valores (de renta fija y renta variable) y mercado de créditos.

#### **2.4.4. Mercados directos y mercados intermediarios**

Los mercados directos son aquellos en los que el intercambio de activos financieros se produce entre demandantes últimos de financiación y oferentes últimos de ahorro. En cambio, en los mercados intermediarios, uno de los dos participantes, el comprador o el vendedor, es un intermediario financiero, es decir, un tipo especial de empresa que demanda financiación para volverla a prestar (bancos, fondos de inversión, etc.).

### 2.4.5. Mercados públicos y mercados privados

Mercados financieros públicos son aquellos en los que se negocian activos financieros emitidos por el sector público: administración central, comunidades autónomas o gobiernos regionales, ayuntamientos, etc. Por tanto los mercados privados son los que negocian con activos financieros del sector privado.

Las posibles clasificaciones no se agotan y cabe aclarar que todas las clasificaciones citadas se superponen, es decir, que al mercado de cualquier activo financiero se le puede aplicar todas las clasificaciones que se han mencionado y que todas ellas son significativas a la hora de determinar el volumen de activos que en ellos se intercambia y su precio.

En todo mercado, lo que se pretende es poner de acuerdo al comprador con el vendedor y fijar el precio de compra o venta.

## 2.5. BOLSA DE VALORES

Dentro de los mercados capitales, el mercado secundario por excelencia es LA BOLSA DE VALORES. Es uno de los mercados más mencionados y a la vez más desconocidos.

Una bolsa de valores, es un mercado en el cual compradores y vendedores de valores concretan negocios a través de sus comisionistas de bolsa, pues a esta acuden los ahorradores con la intención de colocar su dinero a cambio de una determinada rentabilidad, de la posibilidad de una plusvalía, y aquellos otros que, habiendo invertido ya en un periodo anterior, desean desprenderse de los valores adquiridos.

A la vista de todo esto, ¿por qué es tan importante la bolsa en el sistema financiero y económico de un país, si lo que en ella se realiza no es una verdadera inversión productiva (y no lo es porque el dinero ahorrado que se coloca no va a financiar directamente una

empresa productiva, sino que queda en posesión del socio vendedor)?. La bolsa es importante porque, si no existiera, se cerrarían múltiples posibilidades de inversión en el mercado primario. La contratación en bolsa permite que cualquier accionista u obligacionista pueda desprenderse en cualquier momento de la inversión que hizo en el mercado primario, es decir, le anima a colocar sus ahorros, con la seguridad de que en cualquier momento podrá recuperarlos.

En Colombia existen tres bolsas de valores: la de Bogotá, la de Medellín y la de Occidente. Son entidades privadas cuyos accionistas son las firmas comisionistas, pudiendo también serlo asociaciones, o corporaciones sin ánimo de lucro. Están sometidas a inspección, vigilancia y control de la Superintendencia de Valores.

## **2.5.1. ¿Por qué invertir a través de una bolsa?**

Porque se tiene la oportunidad de escoger, con la asesoría de comisionistas de bolsa, profesionales en la materia, entre diversas alternativas de inversión, en condiciones de transparencia, equidad, igualdad, oportunidad y seguridad de cumplimiento, previstas en las normas legales y por cuya estricta aplicación velan las bolsas de valores.

### **2.5.2. Características de las bolsas de valores**

#### **Transparencia**

Debe ser un mercado transparente donde se encontrará la información necesaria, oportuna y clara para tomar las mejores decisiones, conociendo y analizando las diferentes alternativas y propuestas de inversión.

#### **Formación de precios**

Las negociaciones a través de las bolsas conllevan una adecuada y justa formación de precios, dada por la competitividad, la eficiencia y los flujos de información oportunos, suficientes y claros entre oferentes y demandantes que participan en este mercado.



### **La cámara de compensación y liquidación**

Las bolsas de valores cuentan con una Cámara de compensación y liquidación, la cual se encarga de registrar, liquidar y compensar las operaciones de contado o a plazo efectuadas en las bolsas por los comisionistas. Las funciones de liquidar las operaciones de contado o a plazo, de recibir y entregar los valores y dineros correspondientes a las operaciones realizadas y de adelantar los trámites necesarios para atender el traspaso de los títulos nominativos negociados, son una eficiente herramienta con la cual cuentan las bolsas para el seguro cumplimiento de las operaciones.

### **Superintendencia de valores**

Estar afiliada a la Superintendencia de Valores que es una entidad de servicio que tiene como fin especial organizar, regular y promover las actividades realizadas a través del Mercado Público de Valores, así como efectuar el seguimiento y supervisión de los agentes que actúan en dicho mercado, con el fin de proteger los intereses de los inversionistas y velar por la transparencia del mercado. Las entidades que prestan sus servicios en el mercado público de valores, tales como las bolsas de valores, las firmas comisionistas de bolsa, los comisionistas independientes, los depósitos centralizados de valores, las sociedades administradoras de fondos de inversión, los fondos de garantía que se constituyen en el Mercado Público de Valores, las Sociedades Administradoras de los depósitos centralizados de valores y las calificadoras de valores, se encuentran debidamente reglamentadas y vigiladas.

### **Comisionista de bolsa**

El comisionista de Bolsa es un profesional especializado en la compra y venta de títulos valores, quien asesora a los inversionistas sobre la gama de alternativas que brinda el mercado. Por sus servicios cobra una comisión que deberá ser previamente acordada con el inversionista y quedará registrada en el comprobante de liquidación que expide la bolsa.

Hay que tener en cuenta que la tarifa de comisión que cobran las firmas comisionistas no está fijada por la Superintendencia de Valores; sin embargo, ésta ha establecido los principios que rigen su cobro, como son: la no discriminación entre clientes; la suficiencia, es decir, que el valor de la comisión alcance para cubrir los costos de la operación; la libre competencia y el deber de informarla antes y después de realizada una operación. En el caso de renta fija, la comisión deberá ser expresada en términos de rentabilidad efectiva. Por tales razones, los inversionistas se encuentran en capacidad de acordar con el

comisionista el precio que cobrado por los servicios. Exija siempre que el valor de la comisión le sea informado con anticipación.

Así mismo puede efectuar operaciones por cuenta propia adquiriendo en favor y en nombre propio valores inscritos en bolsa con el objeto de imprimirle liquidez y estabilidad al mercado; en este último caso no cobra comisión, sino que su ganancia o pérdida es el resultado de la diferencia entre el precio al que adquirió el título y el precio al que lo vendió. El comisionista debe informarle al inversionista que está actuando en estos casos, en posición propia del título.

El comisionista de bolsa debe asesorar en proyectos de inversión, brindando en forma clara, oportuna y suficiente la información que se requiere. Las sociedades comisionistas son miembros de las bolsas de valores y son los únicos autorizados para actuar en ellas.

## **2.6. NUEVAS OPCIONES DE MERCADOS DE CAPITALS EN COLOMBIA**

### **2.6.1. Contrato de futuros**

Un contrato de futuros es un acuerdo entre dos partes, negociado en una bolsa, por medio del cual los contratantes se comprometen en una fecha futura, a entregar o aceptar un determinado bien a un precio acordado en el contrato.

#### **Objetivo de los futuros**

El fin principal de una negociación a futuro es establecer hoy los términos de una transacción y saldar las cuentas de la misma después. Lo anterior significa que el objetivo de los mercados a futuro es ofrecerle a los inversionistas un mecanismo que les permita protegerse de los movimientos adversos en los precios de un bien determinado, al fijar o asegurar un precio.

### *Características y elementos de los contratos de futuros*

Los contratos de futuros son estandarizados, es decir todos los contratos del mismo tipo tienen las mismas características. Especifican el tipo de mercancía a entregar, la calidad de la misma, las fechas de entrega, el modo de pago y el sistema de fijación de los precios. El precio se establece en el momento de cerrar el contrato.

Los contratos de futuros vencen siempre en determinadas fechas, las cuales dependen de cada producto y mercado. Tanto los compradores como los vendedores deben dar un margen en garantía que normalmente es una pequeña fracción del valor del contrato (no la totalidad del monto del contrato) Las ganancias y las pérdidas en futuros se ajustan día a día.

Las compras y las ventas se compensan entre sí. En la mayoría de los contratos no se da la entrega física, sino que más bien la liquidación se realiza por diferencias de precios. Existe una Cámara de Compensación que garantiza el cumplimiento a las partes.

### *¿Cómo funcionan los mercados de futuros?*

Para poder realizar transacciones en los mercados de futuros, las negociaciones deben efectuarse a través de un agente de bolsa quien en su carácter de representante de un Puesto de Bolsa realizará la operación. Generalmente, las partes de la transacción estarán situadas en lugares apartes y no tendrán relación entre ellos. Esto puede dar lugar al surgimiento de un riesgo de solvencia de la contraparte y el incumplimiento de la misma.

Esta incertidumbre se resuelve incorporando al mercado una Cámara Compensadora o Clearing House. La Cámara de Compensación es una institución establecida que garantiza a ambas partes el cumplimiento de la operación. Tan pronto como la negociación se consuma, la Cámara se interpone a sí misma entre el comprador y el vendedor. Es decir, actúa como compradora para el vendedor, y como vendedora para el comprador, por este motivo tanto el comprador como el vendedor original tienen obligaciones para con la Cámara y no entre ellos.

Las partes tienen entonces que confiar en la Cámara (la cual tiene un buen respaldo económico). Finalmente, después de que se completa la transacción, la Cámara de Compensación habrá entregado a las respectivas partes los fondos ó los bienes según corresponda.

Como la Cámara garantiza a ambas partes el cumplimiento, está expuesta a que las partes no le cumplan a ella. Para protegerse y proteger a la Bolsa, cada inversionista debe entregar garantías a la Cámara por medio del agente de bolsa para poder negociar futuros.

Estas garantías actúan como un depósito de buena fe para la Cámara. Si el inversionista incumple, la Cámara tomará las garantías para cubrir las pérdidas. Esto provee una medida de seguridad para todo el sistema de negociación.

### Garantías

Las garantías suelen ser muy pequeñas con respecto al monto del contrato y vienen determinadas por las variaciones diarias máximas observadas en el precio del activo. Sin embargo, como las pérdidas potenciales pueden ser mucho más elevadas que la garantía, la Cámara necesita otra protección en caso de incumplimiento del inversionista. Para protegerse se ha adoptado un sistema conocido como "marking-to-market" que consiste en ajustar diariamente las pérdidas y ganancias en efectivo con los resultados al final de cada día de negociación.

### Usos de los futuros en Colombia

*Cobertura.* Los inversionistas utilizan los futuros para cubrirse del riesgo, minimizando el efecto de las variaciones en los precios.

*Especulación.* El especulador utiliza los futuros para aprovecharse de los movimientos en los precios y sacar el máximo provecho de dichos movimientos.

*Arbitraje.* Mediante el ejercicio de esta función este tipo de inversionista puede tomar ventaja de las diferencias temporales en los precios entre el mercado tradicional o de contado y el mercado a futuro para realizar operaciones simultáneas de compra y venta que le generen una ganancia segura, sin riesgos, y sin tener que efectuar ningún desembolso.

### **2.6.2. Warrants**

Los warrants o mercado de [opciones](#), son valores que otorgan unos derechos a comprar o vender un determinado activo (activo subyacente) a un precio predeterminado (precio de ejercicio) emitidos por una entidad a medio y largo plazo.

Su rendimiento varía en función de la evolución del precio del activo subyacente sobre el que está emitido. Normalmente se liquidan por diferencias, el titular del warrant tiene el derecho a:

- Recibir la diferencia entre el precio a que esté el activo subyacente en el mercado (precio de liquidación) y el precio de ejercicio para los derechos de compra.
- Recibir la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de liquidación para los derechos de venta.

El emisor del warrant fija el precio de ejercicio y la prima que se ha de pagar por cada warrant en el momento en que se emite.

Una vez emitidos los warrants, son susceptibles de negociación en los mercados hasta su vencimiento.

### Clases de warrants

*Warrants de compra (call).* Dan derecho a su titular a comprar el activo subyacente al precio de ejercicio. La liquidación se produce, si es positiva, entre la diferencia entre el precio de liquidación y precio de ejercicio.

*Warrants de venta (put).* Dan derecho a su titular a vender el activo subyacente al precio de ejercicio. La liquidación se produce, si es positiva, de la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de liquidación.

### Rendimiento de los warrants

El tenedor del warrant solo va a ejercitar sus derechos cuando las diferencias que se produzcan entre el precio de ejercicio y el precio de liquidación (warrant de compra) o entre el precio de liquidación y precio de ejercicio (warrant de venta) sean positivas. En el caso de que las diferencias sean negativas, al tenedor de estos valores no le conviene ejecutar sus derechos, no va a ejercer el derecho que le ha dado el warrant a comprar o vender el activo subyacente al precio de ejercicio cuando los precios a los que puede comprar o vender dicho activo en el mercado sean mejores. En este caso, el tenedor perdería el precio pagado por el warrant, pero no las diferencias en su contra, ya que lo que adquiere al comprar el warrant es un derecho y no una obligación.

Por esta razón, el interés de estos productos reside en la posibilidad de poder comprarlos o venderlos en los mercados, en todo momento a lo largo de toda la vida de los mismos; de esta forma el tenedor puede reaccionar y tomar las decisiones que más le convienen ante las

variaciones del precio del activo subyacente sobre el que están emitidos y que se producen de forma continuada en los mercados.

### *Tipos de warrants*

- *Warrants a la Europea*: el derecho que incorporan solo puede ser ejercido en una fecha determinada que es la fecha de vencimiento del warrant.
- *Warrants a la Americana*: el derecho que incorporan puede ser ejercido durante toda la vida del warrant hasta su vencimiento.
- *Warrants "Bermudas"*: El derecho que incorporan se puede ejercitar en varias fechas determinadas a lo largo de la vida del warrant, incluida la fecha de su vencimiento.

La gran variedad de tipologías de warrants existente requiere al inversor de estos productos tener un conocimiento exacto de las condiciones de emisión del warrant en el que va a realizar su inversión.

### **2.7. INTERPRETACIÓN BURSÁTIL**

**E**n los diversos periódicos y revistas especializadas se encontrará información e indicadores bursátiles, que serán de mucha utilidad para tomar decisiones de inversión. Por tanto se hace necesario para un buen dictamen el conocer el ambiente económico y financiero que rodea las diferentes situaciones presentadas con el fin de tomar la mejor decisión.

Entre los principales indicadores tenemos:

### **IBB, IBOMED E IBO (Índice de las bolsas del país)**

Se define como el indicador bursátil del mercado ordinario de las bolsas de Bogotá, Medellín y Occidente, respectivamente. Refleja las fluctuaciones que por efectos de oferta y demanda o por factores externos del mercado, sufren los precios de las acciones. Es el instrumento más representativo, ágil y oportuno para evaluar la evolución y tendencia del mercado accionario. Cualquier variación de su nivel es el fiel sinónimo del comportamiento de este segmento del mercado, explicando con su aumento las tendencias alcistas en los precios de las acciones y, en forma contraria, con su reducción la tendencia hacia la baja de los mismos.

### **Índice vallejo**

Este indicador tiene en cuenta las transacciones en las bolsas de Bogotá, Medellín y Occidente. Se puede presentar diaria, semanal o mensualmente. Este índice se calcula sobre la muestra de las empresas más representativas en el mercado y de esta forma se puede apreciar las diferentes tendencias del mismo.

### **IBA (Índice de Bursatilidad Accionaria)**

Clasifica una acción como de alta, media, baja o mínima bursatilidad. Mide la comerciabilidad de una acción determinada por la frecuencia, número de operaciones y volúmenes negociados mensualmente en el mercado secundario.

En las páginas económicas de los periódicos también se publican los resúmenes de las operaciones bursátiles realizadas en el mercado primario y secundario, los principales indicadores económicos y aquellos utilizados para las inversiones de renta fija.

### **Mercado primario**

Se habla de mercado primario para referirse a la colocación de títulos que se emiten o salen por primera vez al mercado. A éste recurren las empresas y los inversionistas, para obtener recursos y para realizar sus inversiones, respectivamente.

### **Mercado secundario**

Se refiere a la compra y venta de valores ya emitidos y en circulación. Proporciona liquidez a los propietarios de títulos. Se realiza entre inversionistas.

### **2.7.1. Indicadores para el mercado de renta fija**

Entre los son los principales Indicadores para el mercado de renta fija, tenemos:

#### **DTF**

Es un indicador que recoge el promedio semanal de la tasa de captación de los certificados de depósito a término (CDTs) a 90 días de los bancos, corporaciones financieras, de ahorro y vivienda y compañías de financiamiento comercial y es calculado por el Banco de la República.

#### **TBS**

Es la tasa promedio de captación a través de CDT y CDAT de las entidades financieras, calculada diariamente por la Superintendencia Bancaria para diferentes plazos.

#### **TCC**

Es la tasa promedio de captación de los certificados de depósito a término de las corporaciones financieras y es calculada por el Banco de la República.

#### **IRBB, TRB E IBOR**

Son los indicadores de rentabilidad de las Bolsas de Bogotá, Medellín y Occidente respectivamente; corresponde al promedio de las rentabilidades de las transacciones en instrumentos de renta fija en el mercado secundario en cada una de las bolsas.

#### **UVR (Unidad de Valor de Real)**



Unidad que reemplaza la Unidad de Poder Adquisitivo Constante (UPAC), en todos los contratos, pagarés y garantías de créditos en los que se mencionen.

### **Tasa impositiva**

La tasa especial que se cobra en los impuestos por diversos conceptos, y la cual está definida legalmente.

### **Base gravable**

Son los indicadores básicos que los gobiernos utilizan para aplicar el cobro de los impuestos, se consideran principalmente tres factores: lo que la gente posee, lo que la gente gasta y lo que la gente gana. Sobre la base monetaria escogida se aplica la tarifa para establecer el valor monetario del crédito fiscal o valor cuantitativo del objeto de la obligación tributaria.

## **2.8. INDICADORES ECONÓMICOS**

### **Tasa de inflación**

Mide el crecimiento del nivel general de precios de la economía. La inflación es calculada mensualmente por el DANE sobre los precios de una canasta básica de bienes y servicios de consumo para familias de ingresos medios y bajos. Con base en éstas se calcula un índice denominado Índice de precios al Consumidor (IPC). La inflación corresponde a la variación periódica de ese índice.

### **PIB (Producto Interno Bruto)**

Mide la producción total de bienes y servicios de la economía, generado por empresas que actúan dentro del país.

### **Devaluación y revaluación**

La devaluación se expresa a través de una tasa que nos indica la pérdida de poder adquisitivo del peso frente a otra moneda de referencia, que puede ser el dólar, el yen, el marco, etc.

La revaluación, por su lado, es la apreciación del peso frente a las monedas mencionadas anteriormente.

### **TRM (Tasa Representativa del Mercado )**

Es el valor del dólar y lo calcula diariamente el Banco de la República, tomando el promedio del precio de las operaciones de compra y venta de los dólares, realizadas por entidades financieras en las principales ciudades del país.

### **Tasas de interés**

Las tasas de interés pueden estar expresadas en términos nominales o efectivos. Las nominales son aquellas en que el pago de intereses no se capitaliza, mientras que las efectivas corresponden a las tasas de intereses anuales equivalentes a la capitalización de los intereses periódicos, bien sea anticipadas vencidas.

La tasa de interés efectiva es el instrumento apropiado para medir y comparar el rendimiento de distintas alternativas de inversión.

Su periodicidad puede ser mensual, trimestral, semestral o cualquier otra que se establezca.

### **Prime**

Tasa de interés preferencial, base en que se negocian usualmente los créditos de moneda extranjera. Es la menor tasa de interés que cobra un banco sobre préstamos dados a sus clientes comerciales o industriales de mayor solvencia. El nivel de las tasas de interés se determina de acuerdo con el costo que tiene que pagar los bancos por el suministro de dinero con el que hacen préstamos.

### **Libor**

Es el interés que ofrecen los bancos en el mercado londinense. (London Interbank Offered Rate). Tasa a la que se negocian los eurodólares y a las 12 meridiano de un día dado se

toma un promedio de 4 o 5 bancos que se fijan como referente en los eurocréditos . Esta tipo de interés interbancario unido al margen fijo de los bancos (spread) constituye el costo de un crédito en eurodivisas.

### **Tasa de captación**

Es el costo que paga un intermediario financiero por los recursos recibidos en su pasivo; bien sea por ahorros en diferentes modalidades, esto es, ahorro a la vista y/o ahorro a término.

### **Tasa de colocación**

Es la tasa de interés a la que colocan los créditos los intermediarios financieros.

### **Margen de intermediación**

Es la diferencia entre la tasa de colocación y la tasa de captación que le da la utilidad a las instituciones financieras.

### **Dividendo**

Es el valor pagado a favor de los inversionistas, en dinero o en ocasiones, como retribución por sus inversión, en proporción a la cantidad de acciones poseídas, con recursos originados en las utilidades generadas por la empresa en un determinado período.

### **Indicador beta**

Es un indicador de riesgo que permite establecer cómo ha sido el comportamiento de la rentabilidad de una acción en relación con el comportamiento de la rentabilidad del mercado accionario. Si el valor de BETA para una acción es igual a 1, significan que los rendimientos de ésta varían de manera proporcional a los rendimientos del mercado. De otra parte un BETA mayor que 1 significa que el rendimiento de la acción varía de manera más que proporcional al rendimiento del mercado. Y un BETA menor que 1 significa que la acción tiene menos riesgos en el mercado.

### **Índice gini**

Es un índice de concentración de la propiedad accionaria de una empresa. Cuando la propiedad de las empresas está distribuida igualitariamente entre todos los accionistas, es decir cuando hay total desconcentración, el resultado del GINI es 0. Por el contrario, cuando la desigualdad, o concentración de la propiedad es total, el indicador es 1.

### **Precio de mercado**

Es el precio al cual se cotiza una acción en las bolsas de valores. Está determinado por la oferta y la demanda de dicha acción, así como por el desempeño del emisor.

### **Valor patrimonial de la acción**

Es el que resulta de dividir el patrimonio de la empresa, según aparece registrado en el balance general, por el número de acciones en circulación.

### **Capitalización bursátil del mercado**

Es un indicador que resulta de multiplicar el número total de acciones en circulación de las empresas inscritas en bolsa por su último precio de mercado. Se expresa en dólares para efectuar comparaciones con otros países.

### **Volumen en términos bursátiles**

Es la sumatoria de las operaciones de compra y venta de las diferentes especies tanto de renta fija como de renta variable, realizados en un período de tiempo. Se puede expresar diaria, semanal, mensual o anualmente.

Tenga en cuenta que los títulos valores son expedidos bajo las siguientes modalidades:

- *Títulos nominativos*

El título valor es nominativo cuando en él o en la norma que rige su creación se exija la inscripción del tenedor del título en el registro que lleva su creador. Sólo será reconocido como tenedor legítimo quien figure a la vez en el texto del documento y en el registro del emisor.

La transferencia de un título nominativo por endoso dará derecho al adquiriente a obtener su inscripción en el registro del creador del título.

- *Títulos a la orden*

El título valor es a la orden cuando se expide a favor de determinada persona agregando la cláusula a la orden o expresando que es transferible por endoso o que es negociable. Para la transmisión de la propiedad de estos títulos se requiere su endoso y entrega material.

- *Títulos al portador*

*Esta clase de títulos no se expiden a favor de persona determinada y la transmisión de su propiedad se efectúa mediante la entrega del título.*

## 2.9. FIDUCIA

El vocablo fiducia significa fe, confianza. La sociedad fiduciaria es un ente jurídico cuya función económica es la prestación de servicios de administración de bienes o de dinero por cuenta de terceros. Mediante la fiducia una persona natural o jurídica (fideicomitente), entrega a una sociedad fiduciaria uno o mas bienes concretos, despojándose o no de la propiedad de los mismos, con el objeto de que dicha fiduciaria cumpla una determinada finalidad, en provecho del mismo fideicomitente o de quien éste determine (beneficiario). En la fiducia se presenta una gran confianza de doble vía, y tiene una específica finalidad a cumplir. Las partes que intervienen en la fiducia son:

### *Fideicomitente*

Es aquella persona natural o jurídica, de naturaleza pública o privada, que encomienda a la fiduciaria una gestión denominada para el cumplimiento de una finalidad mediante la entrega de uno o mas bienes. El fideicomitente debe señalar en el contrato que se celebre

con la fiduciaria, las condiciones a las cuales ésta debe sujetarse para el adelantamiento de la gestión encomendada.

### **Fiduciario**

La sociedad que administra los bienes. Hoy en día pueden ser fiduciarios las Sociedades Fiduciarias autorizadas por la Superintendencia Bancaria. Son entidades de servicios financieros, constituidas como sociedades anónimas, sujetas a la inspección y vigilancia de la Superbancaria.

### **Beneficiario**

Puede ser el mismo fideicomitente, o la (s) persona (s) que éste designe. El beneficiario puede ser sustituido por otro bajo ciertas circunstancias, de acuerdo con lo estipulado en el contrato. Puede ser cualquier persona natural o jurídica, de naturaleza pública o privada, nacional o extranjera, en cuyo provecho se desarrolla la fiducia y se cumple la finalidad perseguida.

### **Fideicomiso**

Es el acto en virtud del cual, una persona (natural o jurídica) llamada Constituyente, transfiere a una persona autorizada para el efecto llamada Fiduciario (Filabanco Trust) valores, bienes u otros derechos, para que el Fiduciario cumpla con ellos una finalidad previamente establecida, a través de un contrato (el Fideicomiso de Inversión), y luego los restituya al Beneficiario (clientes).

## **2.10. RESUMEN**

**L**a Ingeniería Económica es una herramienta básica para el desarrollo de las actividades en un mercado financiero; sabiendo que este es el lugar económico donde se compran y venden activos.

Además se debe tener en cuenta que el mejor uso que se le puede dar al dinero es invertirlo en forma productiva y con la información necesaria para obtener más dinero en el período de tiempo que se elija, protegiéndolo así de la inflación para que produzca ganancias adicionales. Esto lo puede efectuar usted mismo o con la ayuda de un comisionista de

bolsa o invirtiendo en portafolios ya conformados y administrados por sociedades fiduciarias o por sociedades comisionistas.

La constitución del portafolio la puede realizar con valores como: acciones, bonos y otros títulos valores; combinando volúmenes, plazos y rentabilidades, que se ajusten a sus proyectos o con alternativas de ahorro e inversión que existen actualmente. He aquí la importancia de saber qué es un bono, un título, un portafolio, una titularización.

Para perder el miedo al mercado de valores, es necesario interpretar términos como: IBB, DTF, TBS, UVR, entre otros, empleados en la página bursátil de un diario, conociendo de esta manera el manejo del mundo económico.

Asimismo se conocieron nuevas alternativas para ampliar el mercado de capitales como son los Contratos de Futuro y los Warrants, los cuales buscan cubrir el riesgo, minimizando el efecto de las variaciones en los precios.

## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por si mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a si mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.



*AUTOEVALUACIÓN II*

1. ¿Qué diferencia existe entre el mercado de valores y la bolsa de valores?
2. A las siguientes proposiciones escriba Falso o Verdadero y justifique su respuesta.
  - a) El mercado financiero es el lugar donde se realizan actividades correspondientes al intercambio monetario. ( )
  - b) El mercado financiero sólo comercializa activos financieros. ( )
  - c) Los Bonos es un tipo de activo financiero de renta variable. ( )
  - d) El mercado financiero nos permite estar seguros de que el precio refleja su valor justo. ( )
  - e) El concepto de mercado financiero perfecto aparece como unidad de medida, para comparar los distintos mercados financieros. ( )

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO

### ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Investiga cuál es el origen de la Bolsa de Valores en Colombia.
2. Indaga sobre los efectos tributarios del leasing.
3. En que consiste el encaje bancario.
4. Lea la página financiera de cualquier periódico o revista e interprete los indicadores económicos y bursátiles que en estas encuentre.
5. Ingrese a la página web de alguna de las bolsas de valores del mundo y analice los datos que estas ofrecen de las acciones que ella negocia.
6. Si usted tuviera la oportunidad de invertir una cuantiosa suma de dinero, ¿Cuál sería el orden de preferencia para su inversión?. Justifique su respuesta.
  - Depositar en un banco Suizo
  - Comprar Bienes Raíces en Colombia
  - Instalar un negocio
  - Comprar acciones en la Bolsa de Valores
7. Establecer una comparación del costo de comprar un bien por el sistema Leasing y por métodos convencionales.

## BIBLIOGRAFÍA

<http://cronos.Eafit.edu.co/finanzas/mercados.htm>

<http://www.bolsamadrid.es/rectora/warrants/w199407.htm>

<http://www.supervalores.gov.co/alternat.htm#Conviertase>

<http://www.megabolsa.com/biblioteca>

<http://www.cnbv.gov.mx/bursatil/mvalores.htm>

<http://www.meffrv.es/>

Manual para el cálculo de Rentabilidades, Corredores Asociados S.A.



# **VALOR DEL DINERO A TRAVÉS DEL TIEMPO**

La magnitud de las cantidades  
de dinero parece variar en modo  
notable según hayan de ser  
pagadas o cobradas.  
(Aldous Huxley)

C

A

P

I

T

U

L

O

III

## *OBJETIVOS*

### **Objetivo General**

Establecer la importancia del concepto de equivalencia del dinero en el tiempo y su manifestación a través del interés.

### **Objetivos Específicos**

- Comprender el concepto de equivalencia del dinero en el tiempo.
- Conocer los factores que influyen en la equivalencia del dinero.
- Comprender el concepto de interés y su importancia en la equivalencia del dinero en el tiempo.
- Diferenciar conceptos tales como tasa de oportunidad, riesgo, inflación, devaluación y su relación con la tasa de interés.
- Graficar los flujos de Caja.
- Conocer la simbología de la Ingeniería Económica.

## CONDUCTA DE ENTRADA

El siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.
  - a. Un millón de pesos hoy es igual a un millón de pesos dentro de cinco años. ( )
  - b. El dinero pierde su valor a través del tiempo. ( )
  - c. El interés es la recompensa por el riesgo que el inversionista corre al permitir que otra persona u organización utilice su capital. ( )
  - d. La tasa de interés siempre se expresa en porcentaje. ( )
  - e. El flujo de caja es una herramienta utilizada para determinar el valor del dinero en el tiempo. ( )
  - f. El valor del dinero depende únicamente del interés a pagar. ( )
  - g. Si la tasa de interés se da en un periodo diferente al anual se presentan inconvenientes. ( )
2. ¿Cuáles son las causas que determinan la magnitud de las tasas de interés?
3. ¿Cuál considera usted que es la base de la Ingeniería Económica?
4. ¿Existe algún modelo gráfico que permita representar los ingresos o egresos de dinero a través de tiempo?

## ***RESPUESTAS CORRECTAS***

1.
  - a. F
  - b. V
  - c. V
  - d. V
  - e. V
  - f. F
  - g. F
  
2. Las principales causas que ocasionan el aumento o disminución de la tasa de interés son: La inflación, el riesgo, la oportunidad, devaluación, oferta y demanda del dinero, crisis económica, tiempo y monto.
  
3. La base de la Ingeniería Económica consiste en poder hallar sumas equivalentes (no iguales) teniendo en cuenta el efecto que tiene el tiempo sobre estas.
  
4. Si existe una representación gráfica de los flujos de caja la cual es denominada Diagrama de Flujos de Caja.

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

*ACTIVIDADES PREVIAS*

1. Investiga las causas por las cuales surge el interés.
2. Realice un ensayo sobre la importancia del interés. Apóyese en la lectura Orígenes del Interés, que aparece en el libro Ingeniería Económica, décima edición. Autor Paul DeGarmo. Página 65. Editorial Prentice Hall.
3. Ingresa en un buscador de internet con el fin de indagar sobre el valor del dinero en el tiempo.
4. Desarrollar un test de inquietudes relacionadas con el Valor del Dinero en el Tiempo que se pueda desarrollar y aclarar a medida que se avanza en el estudio de estos temas.



### 3. VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

A lo largo de la existencia se ha notado que los hombres poseen diferentes respuestas a la pregunta: “¿consumirá su dinero hoy o lo hará mañana?”. Si la respuesta es: “lo guardaré en la caja fuerte hasta cuando lo necesite”, podrá notar que al utilizarlo no adquirirá la misma cantidad de bienes que pudo comprar en el momento en que lo guardo; si la respuesta es: “compraré un CDT”, al final obtendrá el dinero que invirtió más los intereses que ganó; o si la determinación es: “invertiré en dólares”, su dinero invertido se verá incrementado por efecto del interés y la devaluación del peso frente al dólar. Como se puede observar las diferentes alternativas mencionadas reflejan el efecto del tiempo sobre el valor del dinero.

La columna vertebral de las matemáticas financieras es el concepto de valor del dinero en el tiempo, mencionado en el párrafo anterior, ya que el dinero con el tiempo sufre transformaciones positivas y es por esto, que en el argot popular se dice que “el dinero produce dinero”, la prueba más concreta de esta hipótesis es que cierta cantidad de dinero colocada hoy en un banco en uno de sus productos rentable, dentro de cierto periodo de tiempo se convierte en una cantidad mayor.

El conocer este concepto permitirá estar más capacitado para tomar mejores decisiones económicas, que sólo logrará al comparar las cantidades de dinero que se tienen en diferentes periodos de tiempo. Por este motivo la ingeniería económica es también llamada Aritmética Financiera.

#### 3.1. ¿POR QUÉ EXISTE EL INTERÉS?

De lo anterior se deriva el concepto de interés, el cual surge del reconocimiento del valor del dinero a través del tiempo, es decir, es el pago que se hace por el alquiler del dinero, pues este es un recurso escaso que como todo factor de producción tiene un valor o un costo

No se necesita formación académica para entender que al recibir dinero en calidad de préstamo, es "justo" pagar una suma adicional al devolverlo. Esa cantidad diferencial reclamada por el inversionista a causa de no disponer del dinero ahora a cambio de hacerlo dentro de un período determinado, se llama *Interés*, el cual no es más que la evidencia del

valor del dinero en el tiempo, cuyo monto variará de acuerdo con las expectativas y el riesgo que el inversionista considera está asumiendo al comprometer sus fondos. El mercado le brinda al individuo (persona o firma), la posibilidad de invertir o la de recibir en préstamo; el hecho de que existan oportunidades de inversión o de financiación, hace que exista el interés.

Cuando el interés o riqueza obtenida en un período se relaciona con el capital inicialmente (capital propio o préstamo) comprometido para producirla, obtenemos lo que universalmente se denomina Tasa de interés. En otras palabras, la tasa de interés es la relación expresada como porcentaje - % - de la riqueza obtenida en un período y el capital inicialmente comprometido para generar dicha riqueza, es decir el interés, I, recibido o pagado por período sobre el monto inicial, P, esto se resume en la ecuación 3-1.

$$i = \frac{I}{P} \quad \text{Ecuación 3-1}$$

La tasa de interés generalmente, y para efectos comerciales, se expresa en términos anuales, aunque no hay ningún inconveniente en que se exprese para períodos menores: mes, trimestre, semestre, etc.

Se puede considerar que la magnitud de la tasa de interés corriente, o sea la que se encuentra en el mercado (la que usan los bancos o cualquier otra entidad financiera) tiene varios componentes o causas que lo hacen tomar determinado valor:

- *El efecto de la inflación o más precisamente, las expectativas de inflación*, que es un efecto propio de la economía, donde se presenta el problema de decidir entre alternativas de inversión. La inflación es una medida del aumento del nivel general de precios, medido a través de la canasta familiar; su efecto se nota en la pérdida del poder adquisitivo de la moneda. Esto significa que cuando hay inflación, cada vez se puede comprar menos con la misma cantidad de dinero. A mayor inflación, mayor tasa de interés.
- *Efecto del riesgo*, este se da por la posibilidad de que la persona que deba entregarle el dinero ya no esté en condiciones de hacerlo. - Riesgo de crédito. A mayor riesgo mayor tasa de interés.

- *La oportunidad que usted tendría de invertirlos en alguna actividad*, haciendo que no solamente se protejan de la inflación, sino también que generen una utilidad adicional.
- *El efecto de la devaluación*. La devaluación se expresa a través de una tasa que nos indica la pérdida de poder adquisitivo del peso frente a otras monedas de referencia, como pueden ser el dólar, yen, marco, etc., es decir, cuando la moneda del país es devaluada se deberá invertir hoy más pesos para comprar la misma cantidad de moneda extranjera que se pudo comprar en un periodo anterior. Después de la devaluación las mercancías y los servicios provenientes del extranjero aumentarán en costo, y los productos y servicios nacionales serán más baratos para los extranjeros. El poder de compra se reduce frente a lo importado. Todo esto puede causar que se reduzcan las importaciones y aumenten las exportaciones. También la devaluación produce un efecto directo sobre la inversión extranjera ya que los inversionistas pierden la confianza en el país al ver disminuido su rendimiento, por ello deciden retirar su dinero e inversiones en este, y llevarlos a otros lugares donde le garanticen su rendimiento, por tanto se recurre a un aumento en las tasas de interés, con el fin de evitar que estos dineros golondrinas emigren.
- *La oferta y demanda de dinero*; como se sabe el dinero es un recurso que depende de las variaciones del mercado financiero, y el costo de este depende de la cantidad de masa monetaria o dinero circulante que haya en un determinado instante de tiempo, por tanto quien desea invertir, debe tener en cuenta que a menor precio del dinero, mayor será la demanda, y que a mayor precio será mayor la cantidad ofrecida, por tanto son factores que determinan la tasa de interés.
- *Crisis económica*, Situación difícil y complicada por la que pasan los mercados financieros, cuya solución es incierta y que puede tener graves consecuencias como puede ser el incremento en el déficit que obliga a un ajuste real de los precios relativos para incentivar la entrada de capitales extranjeros y financiar este déficit. En primer lugar cae el precio de los bienes comercializables, pero esto lleva a una posterior caída de los bienes no comercializables debido a que disminuye la demanda de los mismos. Estos bienes no comercializables (terrenos, inmuebles...) son los activos que se utilizan como garantías o colateral en los préstamos. La caída del precio del colateral hace que haya una restricción al crédito por parte de bancos y entidades financieras. Esto lleva a una restricción de la liquidez, subida de los tipos de interés y por tanto un descenso de la inversión en el país que puede desacelerar o incluso estancar el crecimiento económico del mismo, lo cual genera el aumento de desempleo. En general el comportamiento de la inversión depende de la Tasa de interés. Las altas tasas de interés desestiman la inversión, las bajas tasas de interés estimulan la inversión.
- *Tiempo y monto*, se sabe que el dinero se encarece con el crecimiento de los plazos otorgados en los préstamos. Este aumento en el costo de los fondos está íntimamente ligado al riesgo que implica un mayor plazo, y al sacrificio de liquidez; por tanto

dependiendo de la cantidad y el tiempo del préstamo o la inversión así mismo variará la tasa de interés que permitirá la equivalencia del dinero en el tiempo. Además a mayor monto del dinero se poseerá mayor poder de negociación sobre las tasas de interés.

Por lo tanto, si le piden un préstamo hoy para pagarlo dentro de un año, usted aceptará solamente si le entregan una cantidad adicional que compense los factores mencionados anteriormente.

Para el cálculo de la tasa de interés nos podemos apoyar también en la ecuación 3-2.

$$\text{Tasa de Interés} = \frac{\text{Valor Final} - \text{Valor Inicial}}{\text{Valor inicial}} * 100\% \quad \text{Ecuación 3-2}$$

Donde el Valor Inicial es el capital que se prestó o se invirtió y el Valor Final es el que se obtiene al cabo de un tiempo por haber prestado o invertido el dinero.

Cuando el capital lo coloca un inversionista el interés sobre este se calcula como se indica en la ecuación 3-3.

$$\text{Interés} = \text{Cantidad Acumulada} - \text{Inversión Inicial} \quad \text{Ecuación 3-3}$$

Pero si el que coloca el capital es un prestamista el interés se obtiene empleando la ecuación 3-4.

$$\text{Interés} = \text{Cantidad Adecuada} - \text{Préstamo original} \quad \text{Ecuación 3-4}$$

La rentabilidad desde el punto de vista del inversor es una medida de ganancia, y desde el punto de vista del deudor es una medida de costo.

Como se mencionó anteriormente cuando se invierte en un proyecto, la persona o entidad que coloca el capital generalmente trata de obtener una retribución económica, exigiendo que le devuelvan el monto inicial, incrementado en una suma porcentual por cada mes o período transcurrido, que compense la desvalorización de la moneda, cubra el riesgo corrido y le pague el valor del alquiler del dinero, dado que las personas prefieren utilizarlo en el presente y no en el futuro. El interés como todo precio, depende del mercado y de las condiciones de cada transacción, principalmente del plazo y del riesgo.

### Ejemplo Práctico

¿Cuál sería la tasa de interés y el interés, si hoy me conceden un crédito de \$ 1'000.000 con un plazo de un año al 20% anual?

$$\text{Cantidad acumulada} = [(1'000.000) + (1'000.000 * 20\%)] = \$ 1'200.000$$

Si empleamos la ecuación 3-3 podremos encontrar el valor correspondiente al interés.

$$\text{Interés} = \text{cantidad acumulada} - \text{valor inicial} = \$ 1'200.000 - 1'000.000$$

$$\text{Interés} = \$ 200.000$$

*Una vez determinada la cantidad de interés a pagar, deberá hallar el porcentaje o tasa de interés a la cual equivale dicho monto; para cual utilizara la ecuación 3-2*

$$\text{Tasa de Interés} = \frac{\text{Valor Final} - \text{Valor Inicial}}{\text{Valor inicial}} * 100\% = \frac{1'200.000 - 1'000.000}{1'000.000} * 100 = 20\%$$

## 3.2. CONCEPTO DE EQUIVALENCIA

Uno de los fundamentos de la Economía es la Psicología. El comportamiento del individuo en cuanto a sus decisiones, comportamiento de consumo y ahorro es el elemento básico del estudio de la ciencia económica. Por ejemplo, los individuos obtienen satisfacción al consumir lo más pronto posible y se puede cambiar consumo actual por consumo futuro, siempre que la utilidad o satisfacción de este último sea al menos equivalente no necesariamente igual a la del consumo actual. La gente tiene una preferencia subjetiva a consumir hoy, por lo tanto, la postergación de un consumo actual, implica la exigencia de una mayor cantidad de consumo futuro, para alcanzar una satisfacción equivalente. Cuando esta necesidad compulsiva de consumir se inhibe, se produce una insatisfacción, que de alguna manera debe ser compensada; esa compensación la recibe el individuo al disponer de mayor capacidad de consumo en el futuro. Al reconocer esto, se llega fácilmente a la conclusión que ya no se pueden sumar unidades monetarias de diferentes períodos de tiempo, porque no son iguales.

También es muy visto que en muchas situaciones propias de la Ingeniería Económica, se requiere que los ingresos y los egresos potenciales de dos o más propuestas alternativas se les asigne una base equivalente para hacer posible su comparación. Comparación que no se puede realizar a simple vista, se hace necesario colocar todas estas cantidades sobre una base equivalente que tenga en cuenta la cantidad de cada ingreso o egreso, el tiempo de ocurrencia de cada uno de ellos y la tasa de interés.

El principal reto que enfrenta la ingeniería económica es hacer que sumas de dinero ubicadas en tiempos diferentes se puedan sumar; en respuesta a esta problemática el estudio de las técnicas de ingeniería económica permite que una o varias sumas de dinero ubicadas en periodos de tiempo diferentes se pueden transformar en otra u otras equivalentes o de igual significado económico, siempre y cuando consideren el valor del dinero en el tiempo a través de una tasa de interés que satisfaga a las partes que intervienen en la transacción.

Cuando se introduce el concepto de inversión, o sea que un individuo ahorra o invierte \$10.000 para obtener más de \$10.000 al final de un período, se encuentra que invertirá hasta cuando el excedente que le paguen por su dinero, no sea menor que la que el individuo asigna al sacrificio de consumo actual, o sea, a la tasa a la cual está dispuesto a cambiar consumo actual por consumo futuro.

Un modelo matemático que representa estas ideas, consiste en la siguiente ecuación:

$$F = P + \text{compensación por aplazar consumo}$$

donde:

F = Capital poseído al final de n períodos.

P = Suma de capital colocado en el período 0.

Este modelo y los párrafos anteriores permiten introducir un concepto de mucha importancia: el concepto de equivalencia. Se dice que dos sumas son equivalentes, aunque no iguales, cuando la persona le es indiferente recibir una suma de dinero hoy (P) y recibir otra diferente (F) -mayor- al cabo de un (1) período de tiempo. Esta relación es la base de todo lo que se conoce como Ingeniería Económica.

Esta diferencia entre P y F representa el “valor” que le asigna el individuo al sacrificio de consumo actual y al riesgo que percibe y asume al posponer el ingreso.

El concepto de equivalencia implica que el valor del dinero depende del momento en que se considere, esto es, que un peso hoy, es diferente a un peso dentro de un mes o dentro de un año.

### 3.3. DIAGRAMA DE FLUJO DE CAJA

El diagrama de flujo de caja, consiste en un modelo gráfico que se utiliza para representar los desembolsos e ingresos de dinero a través del tiempo. Lo primero que se debe hacer es dibujar una línea de tiempo, como la que muestra la figura 3-1. Aquí cada número indica el final del período correspondiente.

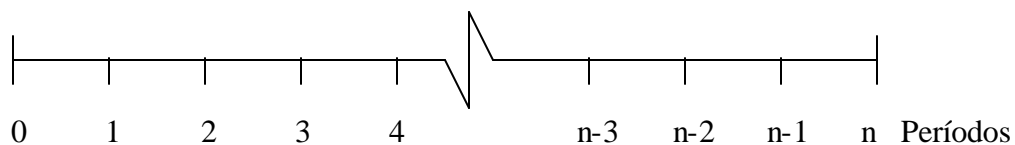
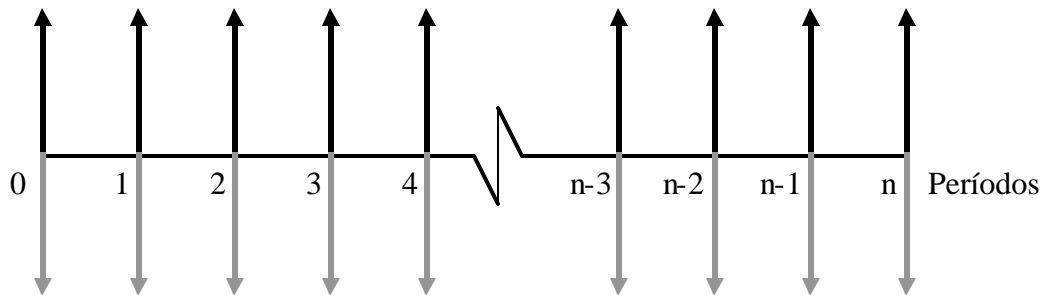


Figura 3-1. Flujo de caja

Así, el número cero indica el momento presente, o sea cuando el prestatario o decisor se encuentra tomando una decisión; el número uno indica el final del período uno, etcétera. En esta línea de tiempo, el período puede ser un día, un mes, un año o cualquier otra unidad de tiempo.

Por lo general el flujo de caja emplea vectores (flechas) verticales para simular los flujos de caja, convencionalmente se expresan con una flecha hacia arriba cuando nos referimos a ingresos o entradas de dinero y con una flecha hacia abajo cuando hablamos de egresos o salidas de dinero en los momentos apropiados. En una hoja de cálculo, debe respetarse el signo, o sea, se debe escribir con positivo los ingresos y signo negativo los egresos. Esto lo puede visualizar en la figura 3-2.

## INGRESOS



## EGRESOS

Figura 3-2. Convención del flujo de caja

El flujo de caja es una de las herramientas que permite hallar el valor del dinero en el tiempo; el cual se basa en un interés y una ubicación en el diagrama. Esto se puede ampliar con el siguiente cuadro sinóptico de la figura 3-3.



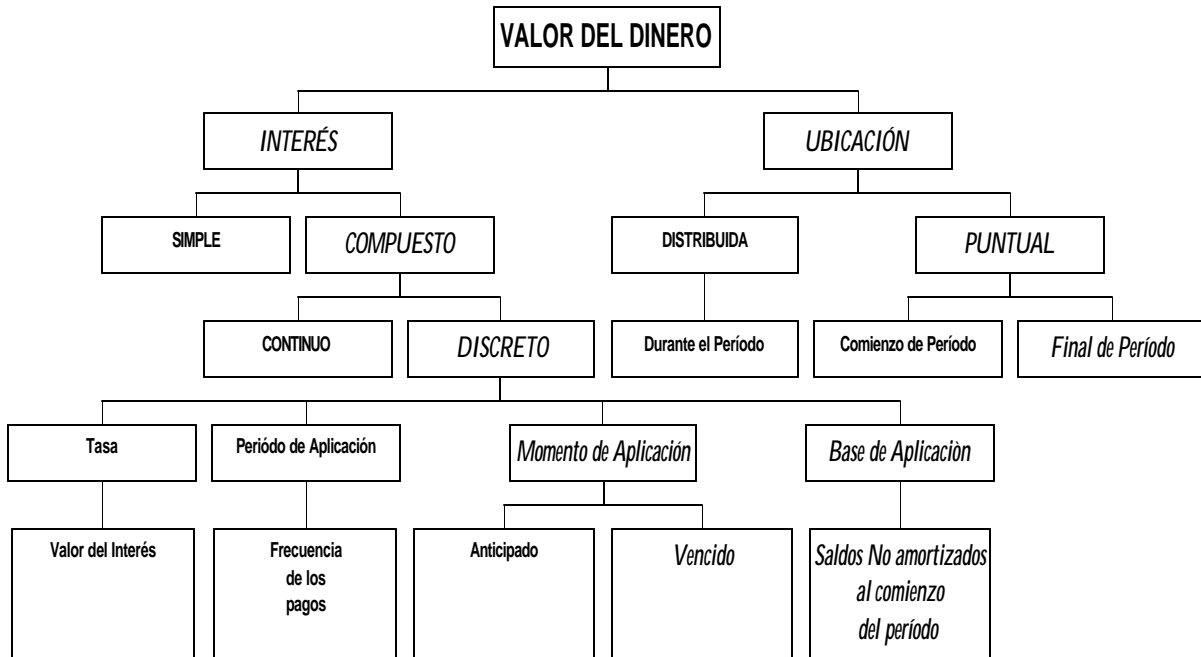


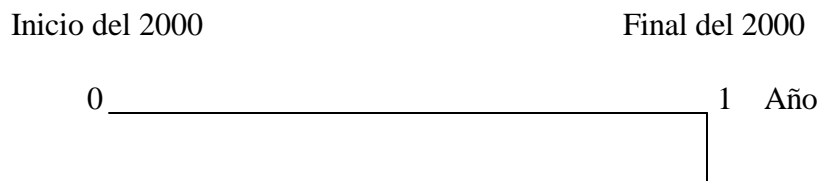
Figura 3-3. Composición del valor del dinero en el tiempo

La ubicación es una convención utilizada para representar el dinero en un tiempo determinado, la cual es clave para obtener un mayor o menor valor del dinero

1. *Ubicación PUNTUAL*: Es una convención que considera el dinero ubicado en posiciones de tiempo específicas. Existen dos modalidades:

A) Convención de FIN de periodo: Estima todos los ingresos y egresos como ocurridos al final del periodo.

Ejemplo: La empresa ABC pagó la suma de \$10'000.000 en el año 2000

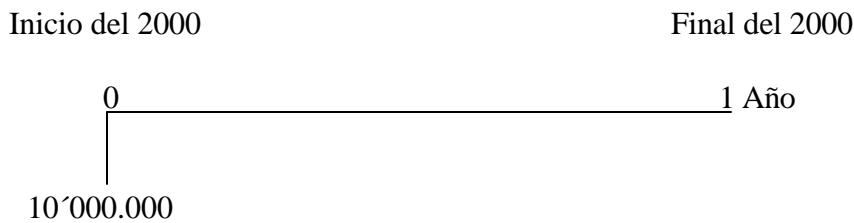


10'000.000

Como la convención es de fin de periodo se asume el pago como hecho al final del año 2.000

B) Convención de COMIENZO de periodo: Estima todos los ingresos y egresos como ocurridos al comienzo del periodo

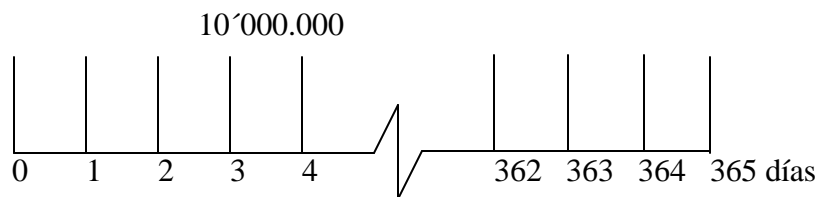
Ejemplo: La empresa ABC pagó la suma de \$10'000.000 en el año 2000



Como la convención de ubicación es de comienzo de periodo se asume que la empresa paga al comienzo del año 2.000.

2. *Ubicación DISTRIBUIDA*: Cuando se expresa que la ubicación es distribuida durante el periodo, se considera todos los ingresos y egresos uniformemente distribuidos durante el periodo de análisis.

Ejemplo: Los gastos de \$ 10'000.000 se considerarían distribuidos durante los 365 días del año 2000.



### 3.4. NOMENCLATURA

**Valor Presente =  $P$**  = Suma de dinero ubicada en cualquier periodo de tiempo denominado presente o pasado respecto a una posición en la cual nos encontramos.

**Valor Futuro =  $F$**  = Suma de dinero ubicada en cualquier periodo de tiempo futuro respecto a una posición a la cual no encontramos

**Valor Anual =  $A$**  = Situación en la que al final de todos y cada uno de los posibles periodos ubicados en las posiciones 1 y  $n$ , hay una misma cantidad de dinero. Una serie igual y consecutiva de dinero al final de cada periodo.

**Número de períodos =  $n$**  = Tiempo en el que va ser distribuido el pago o ingreso o número de períodos que se analizan (año, mes, día, trimestre, semana, etc.), siendo todos períodos iguales.

**Tasa de interés por periodos =  $i$**  = Se expresa en porcentaje por unidad de tiempo. Este interés debe ser estipulado por unidad de tiempo igual al período indicado en  $n$ .

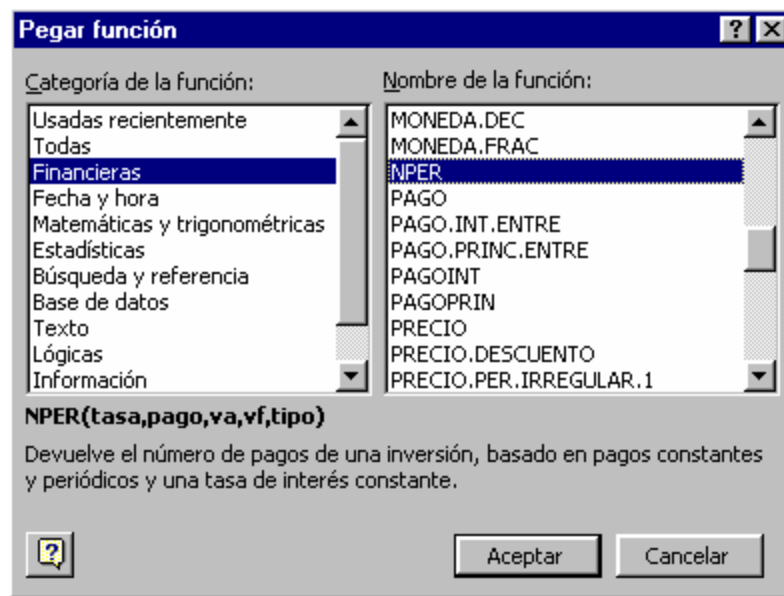
Nota : la tasa de interés por periodo y el número de periodos se deben manejar en las mismas unidades de tiempo.

Para el desarrollo práctico de los siguientes capítulos se utilizará, un programa denominada EXCEL, el cual es una herramienta tecnológica que permitirá al estudiante interactuar más directamente con los procesos de análisis, dejando las operaciones matemáticas al operador.

La nomenclatura correspondiente a este programa (en español) es la siguiente:

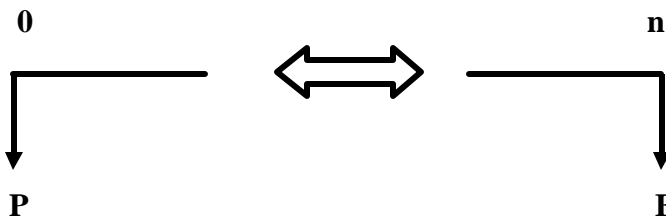
<i>VARIABLE</i>	<i>SÍMBOLO</i>	<i>EXCEL</i>
Valor Presente	P	VA
Valor Futuro	F	VF
Valor Anual	A	PAGO
Número de Períodos	n	NPER
Tasa de interés	i	TASA

En el siguiente cuadro mostramos una de las nomenclaturas en el programa de Excell.



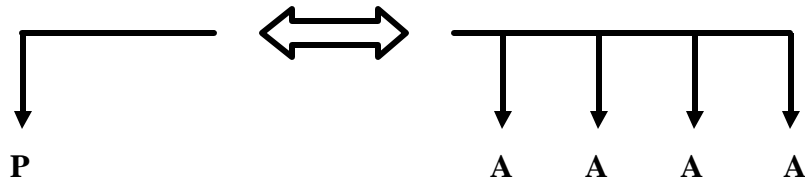
Entre estas variables se pueden establecer relaciones cuando se cumplen ciertos patrones, como:

1. Se puede transformar una suma de dinero presente  $P$  en el período  $0$ , en una suma de dinero mayor,  $F$  en el período  $n$  y viceversa.

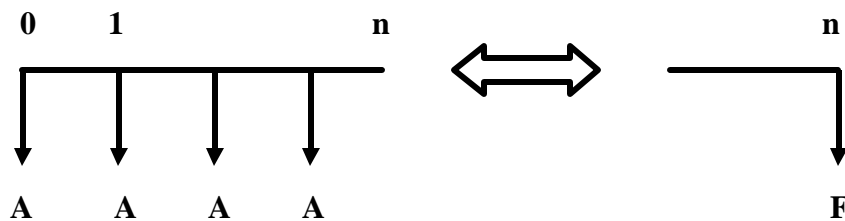


2. Se puede transformar una suma de dinero presente  $P$ , en el período  $0$ , en una serie de cuotas uniformes  $A$ , que comienzan en el período  $1$  y terminan en el período  $n$  y viceversa.

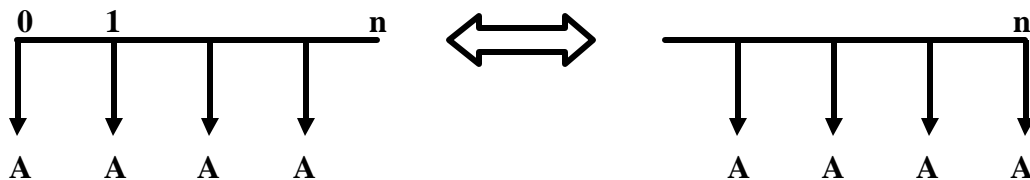




3. Se puede transformar una suma de dinero futura  $F$ , en el período  $n$ , en una serie de cuotas uniformes  $A$ , que comienzan en el período 1 y terminan en el período  $n$  y viceversa.



3. Se puede transformar una serie de cuotas uniformes que comienza en el periodo 1, en una serie de cuotas uniformes  $A$ , terminan en el período  $n$  y viceversa.



### 3.5. RESUMEN

**E**l hombre durante toda su historia ha tomado decisiones, pero en la actualidad estas decisiones involucran dinero. Por esto cualquier alternativa que se tome hoy representará una ganancia o pérdida en el futuro.

Para evitar alguna pérdida por devaluación e inflación en la moneda y obtener ganancias, el hombre ha creado un mecanismo que le permita mantener o mejorar la capacidad de adquisición, conservando el valor del dinero con el tiempo.

Por esto ha analizado factores como:

- Efecto del tiempo sobre el valor del dinero
- Poder que tiene el dinero para generar ganancias en el transcurso del tiempo
- Cambio en la cantidad de dinero durante un período de tiempo.

Factores que le han permitido llegar a la conclusión que una o varias sumas de dineros, pueden transformarse en otra u otras equivalentes o de igual valor económico, ubicados en fechas distintas, siempre y cuando la tasa de interés utilizada para efectuar la transacción satisfaga las partes; dando lugar al concepto que comúnmente se denomina equivalencia.

Pero para esto, debe haber un acuerdo en el cual un prestamista, ofrece su capital a un prestatario, a cambio de una compensación que se basa en las siguientes razones:

- Pérdida de la oportunidad de hacer otras transacciones atractivas con el dinero
- Estar sujeto al riesgo
- Disminuye los bienes que tiene a la mano
- Estar sujeto a procesos de devaluación, inflación, etc. que implican pérdida en la capacidad de compra.
- Participar de los beneficios que obtiene el usuario.

Esta compensación adicional da origen a lo que comúnmente se conoce como interés, que no es más sino la evidencia del valor del dinero en el tiempo, pues es el pago que se hace por el alquiler de un dinero o por el uso del dinero tomado en préstamo o más ampliamente como el retorno que debe obtener el prestamista por la inversión productiva realizada.

Generalmente para analizar estos movimientos de dinero la Ingeniería Económica se apoyan de gráficos que le permiten representar de forma clara y sencilla tales flujos de efectivos, este gráfico es llamado Flujo de Caja, que no es más sino un apoyo visual que presente los movimientos de dinero, para facilitar su estudio y comprensión.

## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por sí mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a sí mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.

*AUTOEVALUACIÓN III*

1. En un diagrama de flujo represente un depósito de \$P al inicio del período 3 y un depósito de \$P al final del período 3.
2. Afirme o niegue las siguientes proposiciones, justificando su respuesta.
  - a. El valor correspondiente a una tasa de interés puede tomar valores negativos. ( )
  - b. Dos sumas de dinero pueden ser equivalentes, aunque se encuentren en fechas diferentes. ( )
  - c. Se puede afirmar que  $n-1$  es el inicio del período  $n$  y que  $n$  es el final del mismo. ( )
3. Ante el deseo de montar su negocio, usted ha decidido adquirir un local en un centro Comercial de la ciudad, por valor de \$ 80'000.000 de contado, o a crédito dando un 30% de inicial y el saldo a 10 años, cancelando cuotas mensuales de \$ 500.000, y cuotas extraordinarias de \$500.000 cada tres meses. Como construye usted el diagrama de flujo si:
  - a. El valor de la cuota la cancela por periodos vencidos
  - b. El valor de la cuota la cancela por periodos anticipados.
4. Grafique las transacciones utilizando un diagrama de flujo, para así obtener una mejor visión de todos los movimientos efectuados y establecer una diferenciación, si estos los hubiera hecho:
  - a. Quincenalmente
  - b. Mensualmente
  - c. Trimestralmente

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO



*ACTIVIDADES DE REFUERZO*

1. Si le preguntan en estos momentos a qué hace referencia el valor del dinero en el tiempo, usted que respondería.
2. ¿Por qué es importante el estudio del valor del dinero a través del tiempo?
3. Investiguen cuáles son los pasos a seguir para la solución de problemas de ingeniería económica.
4. Investigar cuáles son las tasas de interés aplicadas en los principales Bancos de la Ciudad.
5. Da ejemplos de algunas aplicaciones de las tasas de interés en actividades reales.
6. Investigar cuáles son los programas o herramientas utilizadas en las matemáticas financieras que faciliten su desarrollo.
7. ¿Qué tipos de conocimientos matemáticos se requieren para la aplicación de la Ingeniería Económica?
8. Investigar cuáles son los tipos de riesgo y métodos empleados para su cálculo.
9. ¿Por qué la suma y la resta ente cantidades que no estén situadas en el mismo tiempo están prohibidas en Ingeniería Económica?

## BIBLIOGRAFÍA

BACA, Gabriel. Fundamento de Ingeniería Económica. México: McGraw-Hill, 1994.

INFANTE, Arturo. Evaluación financiera de Proyectos de inversión. Colombia: Grupo Editorial Norma, 1997.

TARQUIN, Anthony. Ingeniería Económica, Colombia: McGraw – Hill, 1999.

THUESEN, H. Ingeniería Económica, Colombia: Prentice Hall, 1999.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones. México: McGraw-Hill, 1997.

VILLALOBOS, José Luis. Matemáticas financieras. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.



# INTERÉS SIMPLE

Como el fuego, el dinero en sí  
no es bueno ni malo su valor  
depende del ojo que lo percibe y  
de la mano que lo gasta.

[Jerrold Mundis]

C  
A  
P  
I  
T  
U  
L  
O

*IV*

## OBJETIVOS

### Objetivo General

Comprender los conceptos relacionados con el interés simple, de tal manera que se pueda conocer la ganancia de cualquier negocio realizado, en el cual se posea como base este tipo de interés.

### Objetivos Específicos

- Conocer el concepto de interés simple.
- Identificar el interés simple mediante cada uno de los aspectos que lo caracteriza.
- Deducir cada una de las ecuaciones que permitan resolver los problemas relacionados con este tema.

## CONDUCTA DE ENTRADA

El siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.
  - a. Existe un tipo de interés llamado interés simple. ( )
  - b. El interés simple se aplica siempre sobre el capital inicial. ( )
  - c. El interés simple es diferente para cada periodo durante el plazo del préstamo. ( )
  - d. Existe un tipo de interés simple que se le denomina ordinario porque trabaja bajo el supuesto que un año tiene 365 días. ( )
  - e. El interés simple es el más empleado en todas las negociaciones. ( )
2. ¿Qué es el interés simple?
3. ¿En qué casos se emplea el interés simple?
4. ¿Cree usted qué capital y monto hace referencia al mismo concepto?

## RESPUESTAS CORRECTAS

1.
  - a. V
  - b. V
  - c. F
  - d. F
  - e. F
2. Es aquel interés que se aplica únicamente sobre el capital inicial o principal.
3. Los casos más generales donde se emplea interés simple es en los CDT.
4. Capital hace referencia a un bien medido en el momento en que se comienza la operación, mientras que monto es lo que se tiene que pagar al culminar la operación.

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

## ACTIVIDADES PREVIAS

1. *Dirigirse al libro de Ingeniería Económica de su preferencia y lea lo referente al interés simple.*
2. Visite algunas páginas web cuyo contenido este relacionado con el interés simple.
3. Identifique situaciones donde usted crea que es aplicable el interés simple.
4. Compare la información que usted obtuvo con la encontrada por su compañero.
5. Desarrollar un test de inquietudes relacionadas con el Interés Simple que se pueda desarrollar y aclarar a medida que se avanza en el estudio de este tema.

## 4. INTERÉS SIMPLE

Como se mencionó en el capítulo anterior, el dinero cambia su valor con el transcurrir del tiempo, lo cual queda evidenciado con la existencia del interés. En este capítulo se tratará el tipo de interés denominado *Interés Simple*.

### 4.1. ¿QUÉ ES EL INTERÉS SIMPLE?

Este interés se define como la ganancia del capital dado en préstamo durante un periodo de tiempo determinado, de tal forma que los intereses serán proporcionales a la longitud del periodo de tiempo durante el cual se ha tenido en préstamo la suma principal.

El interés simple es una tasa de interés que se aplica únicamente sobre el capital inicial que se invierte u otorga en préstamo; además se caracteriza por:

- Ser igual para cada uno de los periodos del plazo del préstamo.
- Ser proporcional al número de periodos de tiempo en los cuales se tiene el dinero en préstamo.
- Que la retribución económica causada y pagada no se reinvierte.
- Que se calcula siempre sobre el capital inicial.

La última característica es la razón por la cual los inversionistas y/o prestamistas no emplean este tipo de interés en sus negocios, ya que con éste, el dinero siempre le producirá los mismos intereses a lo largo del préstamo, en vez de irse incrementando con el tiempo, y generar así más ganancias para ellos.

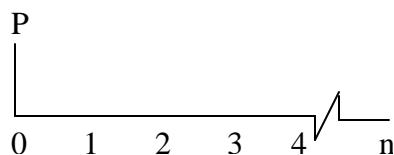
El interés simple se denomina ordinario o comercial cuando este se calcula bajo el supuesto que un año posee 360 días. Y se le llama real o exacto cuando consideran que un año equivale a 365 días ó 366 cuando el año es bisiesto.



## 4.2. SIMBOLOGÍA A EMPLEAR

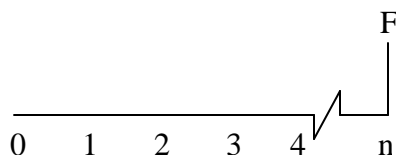
### **P = Valor Presente, Principal ó Capital**

Es el valor de una obligación ó un bien medido en el momento en que se comienza la operación. Este valor o suma de dinero es ubicada en un periodo de tiempo llamado presente. El valor presente se representa gráficamente así:



### **F = Valor Futuro ó Monto**

Es el valor de una obligación o un bien medido en una fecha posterior, la cual estará n periodos adelante. Se localiza al final en el periodo que representa la culminación de la operación; dicho periodo de tiempo es denominado futuro. Su gráfica se ilustra de la siguiente manera:



### **n = Número de Periodos de Interés**

Se refiere al tiempo (Año, Mes, Días) que transcurrirán para recuperar el dinero invertido o prestado.

### **i = Tasa de Interés Simple por Periodo**

**Es el porcentaje que se paga o se gana por prestar o invertir una cantidad determinada de dinero.**

### 4.3. FÓRMULAS PARA EL INTERÉS SIMPLE

Ya identificado los símbolos a emplear en el calculo de interés simples; se puede proceder a deducir las fórmulas a utilizar, a partir del siguiente problema.

¿Qué cantidad de dinero obtendría al cabo de n periodos, si hoy invierto un capital P a una tasa de interés simple i%?

Se apoyará en cuadro 4-1 para darle solución al interrogante.

Cuadro 4-1. Dedución de fórmula del interés simple

<i>Periodo</i>	<i>Deuda al comienzo del periodo</i>	+	<i>Intereses causados durante el periodo</i>	=	<i>Deuda al final del periodo</i>
1	P	+	Pi	=	P + Pi
2	P + Pi	+	Pi	=	P + 2Pi
3	P + 2Pi	+	Pi	=	P + 3Pi
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n-1	P + (n-2)Pi	+	Pi	=	P + (n-1)Pi
n	P + (n-1)Pi	+	Pi	=	P + nPi

Del anterior cuadro se deduce que el monto a cobra al final de los n periodos (valor futuro) es el siguiente:

$$F = P + nPi \quad \text{Ecuación 4-1}$$

Factorizamos la ecuación 4-1, llegaremos a la ecuación 4-2.

$$F = P (1 + ni) \quad \text{Ecuación 4-2}$$

A partir de esta fórmula se puede hallar la del valor presente si se despeja P de ella.

$$P = \frac{F}{(1 + ni)}$$

Ecuación 4-3

De igual manera se obtiene el valor de la tasa de interés simple por periodo.

$$i = \frac{F - P}{nP}$$

Ecuación 4-4

El valor de n, o sea, el tiempo de recuperación del préstamo o de la inversión se obtiene de la misma fórmula así:

$$n = \frac{F - P}{Pi}$$

Ecuación 4-5

#### 4.4. RESUMEN DE FÓRMULAS

		CALCULAR			
		<i>F</i>	<i>P</i>	<i>i</i>	<i>n</i>
C O N O C	<b>P, i, n</b>	$P(1 + ni)$			
	<b>F, n, i</b>		$\frac{F}{(1 + ni)}$		
	<b>P, F, n</b>			$\frac{F - P}{P}$	
	<b>P, F, i</b>				$\frac{F - P}{Pi}$

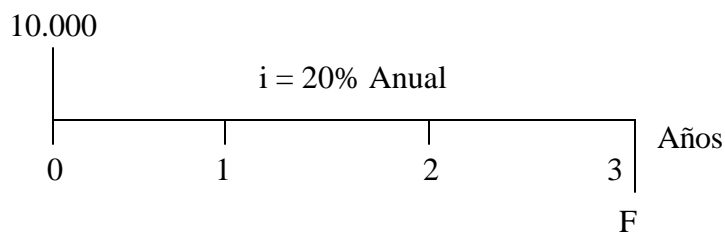
Capítulo IV

#### 4.5. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Suponga un capital inicial \$10.000, el cual será prestado con un interés simple anual del 20%, para ser cancelado al cabo de tres años; ¿Cuál sería la suma que se deberá pagar al prestamista al finalizar ese periodo de tiempo?

$P = \$10.000$   
 $i = 20\%$  simple anual  
 $n = 3$  años

Primero se grafica el problema identificando cada uno de los datos proporcionados para tener una mejor visión de éste.

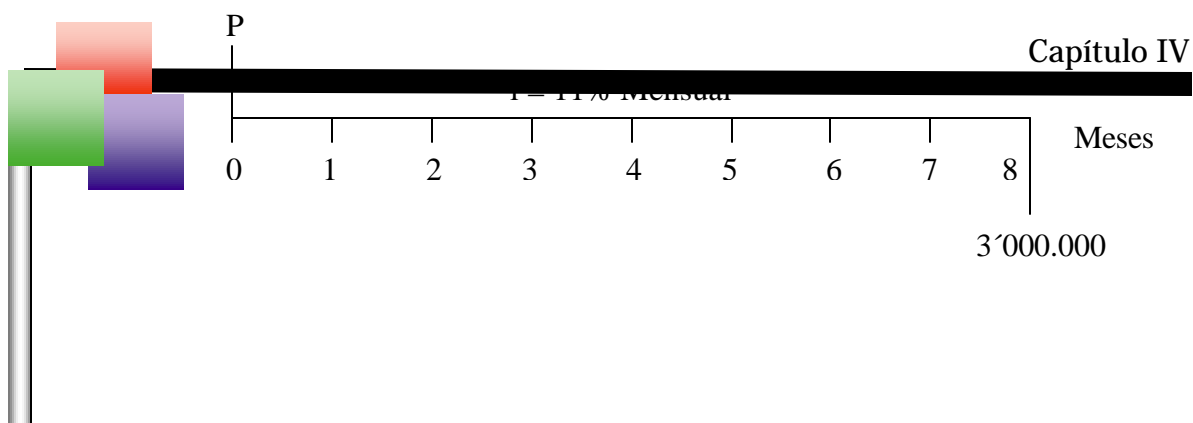


Ya se conoce la situación del problema entonces se procederá a calcular ese valor futuro mediante la ecuación 4-2.

$$F = 10.000 (1 + 3 * 0.20) = 16.000$$

Por tanto el capital recibido al final de los tres años será de \$ 16.000

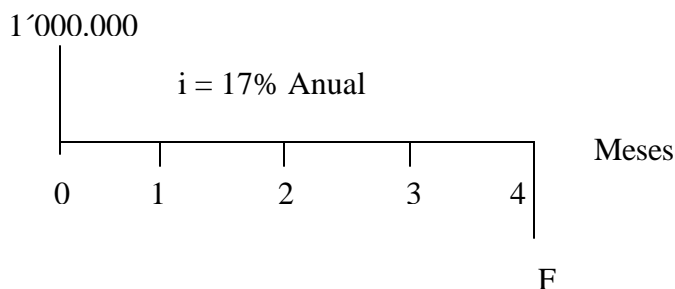
2. Si se desea guardar en el banco una cantidad de dinero para obtener \$ 3'000.000 al cabo de 8 meses; ¿Cuánto debería ser esa cantidad si el banco maneja una tasa de interés simple de 11% mensual?



$$P = \frac{F}{(1+ni)} = \frac{3'000.000}{(1+8*0.11)} = 1'595.745$$

Se debe guardar en el banco \$1'595.745 para obtener el valor deseado

3. ¿Cuánto tendría usted que cancelar en total por un crédito de \$1'000.000, para pagar dentro de 4 meses, si le pidieron una tasa de interés simple del 17% anual?



Como lo habrán notado el problema ofrece unidades de tiempo diferentes, lo cual impide la realización del ejercicio, a menos que una de esas unidades se convierta en la otra.

En el caso del interés simple se puede dividir la tasa de interés anual para convertirla en su equivalente en periodos menores.

Como la respuesta se requiere en meses entonces se transformará la tasa de interés en su equivalente en meses de la siguiente manera:

$$E = t * i_p$$

$$17\% \text{ anual} = 12 * i_p$$

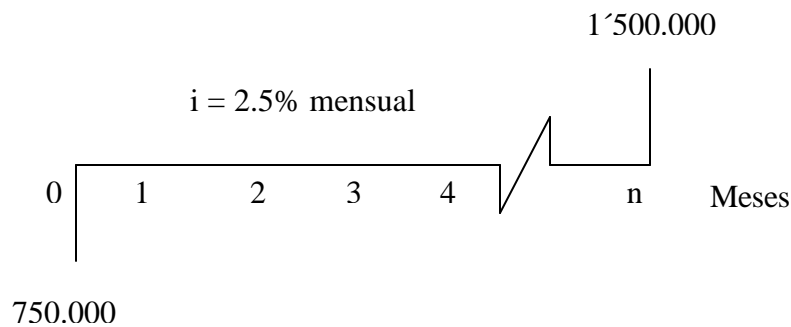
$$i_p = \frac{17\%}{12} = 1.42\% \text{ mensual}$$

Capítulo IV

Obtenida la tasa de interés mensual se prosigue a calcular el valor futuro de la deuda.

$$F = 1'000.000 (1 + 4 * 0.0142) = 1'506.800$$

4. La señora Yépez desea abrir un CDT en el Banco Superior, el cual le ofrece un interés simple del 2.5% mensual. Si ella deposita hoy \$ 750.000 ¿Cuántos meses tendrían que transcurrir para que se acumularan \$ 1'500.000?

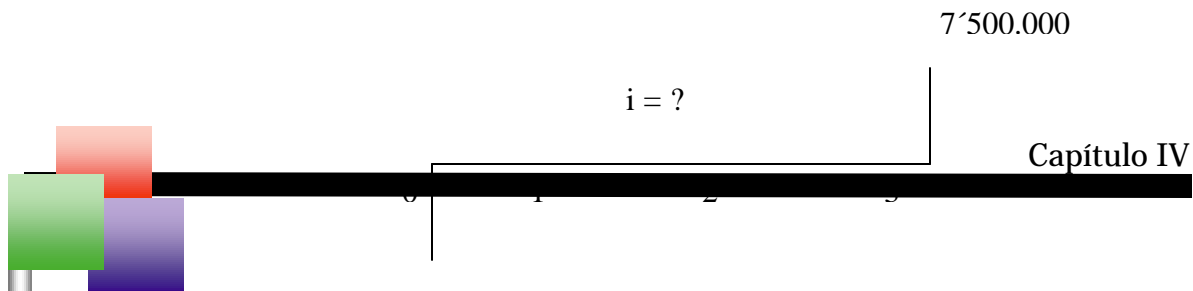


Para la solución de este ejercicio basémonos en la ecuación 4-5

$$n = \frac{1'500.000 - 750.000}{750.000 * 2.5}$$

$$n = 40 \text{ meses}$$

5. ¿Cuál sería el interés que arrojaría un proyecto si usted invierte hoy \$ 3'000.000 para ganar 7'500.000 transcurrido 3 años?



Emplee la ecuación 4-4, para encontrar la solución del ejercicio

$$i = \frac{7'500.000 - 3'000.000}{3 * 3'000.000}$$

$$i = 0.5 = 50\% \text{ anual}$$

## 4.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Cuál debería ser la tasa de interés simple a ganar en un negocio si usted desea un capital final de \$7'500.000 al cabo de un año y dos meses, si invierte en él \$2'000.000 ?
2. Si invierte hoy \$300.000 en un CDT, a una tasa de interés simple del 6% mensual durante un año ordinario; ¿Cuánto obtendrá al finalizar el periodo de tiempo?
3. Si tiene pensado viajar a Medellín el 25 de julio ¿Cuánto tendría que ahorrar hoy 10 de marzo en el banco, con el fin de obtener \$ 5'500.000 que es el valor del viaje; si este le ofrece una tasa de interés simple del 12% mensual?
4. Usted tiene la opción de cancelar hoy \$250.000 o pagar cierta cantidad de dinero dentro de 8 años. ¿Cuál sería esa cantidad de dinero si le piden una tasa de interés simple del 7.5% anual?
5. ¿Cuál será el monto del interés simple sobre \$150.000 con una tasa de interés del 14% anual, durante un año y tres meses?
6. ¿Encontrar el valor presente, con una tasa del 2,7% de interés simple mensual con vencimiento de tres meses, para un saldo final de \$800.000?
7. ¿A qué tasa de interés simple estuvo invertido un capital de \$670.000 para que en 4 años, 7 meses y 12 días, produjeran \$94.000 de intereses.?
8. ¿Cuánto producirían \$85.000 colocados al 40% de interés simple anual, durante un año y medio, si el cobro de intereses se hace bimestralmente?.

## 4.7. RESUMEN

**E**n este capítulo se trataron aspectos básicos del interés simple, entre ellos sus características, las cuales son:

- Que se calculado siempre sobre el capital inicial.
- Que la retribución económica causada y pagada no se reinvierte.
- Ser igual para cada uno de los periodos del plazo del préstamo.
- Ser proporcional al número de periodos de tiempo en los cuales se tiene el dinero en préstamo.

Basándose en esas características se dedujeron las fórmulas o ecuaciones que permiten realizar los cálculos correspondientes al interés simple. Dicha deducción se obtuvo relacionando el valor presente (el valor que posee el dinero hoy) con un valor futuro (valor del dinero expresado en pesos del mañana).

En conclusión se puede decir que el interés simple no es más que una función dependiente de tres variables: el capital inicial, la tasa de interés y del tiempo



## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por si mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a si mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.

## AUTOEVALUACIÓN IV

1. ¿Cómo explicarías el concepto de interés simple?
2. ¿Cómo se calcula el interés simple de una negociación?
3. Enumere las características del interés simple.
4. ¿En qué consiste el interés simple ordinario o comercial?
5. ¿En qué consiste el interés simple real o exacto?

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO

## ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Investiga cuáles son las tasas de interés simple que actualmente ofrecen los bancos o corporaciones financieras y en que situaciones particulares la ofrecen
2. Infórmese en que consisten los descuentos simples
3. Analice por que se dice que el interés simple no incluye totalmente el concepto del valor del dinero en el tiempo.

## BIBLIOGRAFÍA

- BACA, Gabriel. Fundamento de Ingeniería Económica. México: McGraw-Hill, 1994.
- DEGARMO, Paul. Ingeniería Económica. México: Prentice Hall, 1998
- INFANTE, Arturo. Evaluación financiera de Proyectos de inversión. Colombia: Grupo Editorial Norma, 1997.
- MARULANDA, Luis. Decisiones Financieras y Costo del Dinero en Economías Inflacionarias. Colombia: Editorial norma, 1985.
- PORTUS, Lincoyán. Matemáticas Financieras. Colombia: McGraw- Hill, 1997.
- RAMIREZ, Eugenio. Ingeniería Económica, "Caso Colombiano". Colombia: Universidad Eafit, 1984.
- TARQUIN, Anthony. Ingeniería Económica, Colombia: McGraw – Hill, 1999.
- THUESEN, H. Ingeniería Económica. Colombia: Prentice Hall, 1999.
- VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones. México: McGraw-Hill, 1997.
- VILLALOBOS, José Luis. Matemáticas financieras. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.



# **INTERÉS COMPUESTO**

**Mucha gente ve  
en el riesgo un  
enemigo cuando**

**C**

**A**

**P**

**I**

**T**

**U**

**L**

**O**

**V**

## ***OBJETIVOS***

### **Objetivo General**

Conocer todos los conceptos y fórmulas asociadas al interés compuesto con el propósito de aplicarlos a situaciones de inversión y determinar su conveniencia o no.

### **Objetivos Específicos**

- Describir el concepto de interés compuesto.
- Identificar los elementos que intervienen en un problema de interés compuesto.
- Identificar las clases de interés compuesto con el fin de seleccionar el adecuado para la situación presentada.
- Aprender a deducir cada una de las fórmulas relacionadas con el interés compuesto, de tal forma que se pueda aplicar a cualquier decisión de inversión o financiación.

## CONDUCTA DE ENTRADA

**E**l siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.

- a. En una operación financiera donde se utiliza el interés compuesto, el capital aumenta en cada final de período, por la adición de los intereses vencidos según la tasa convenida. ( )
- b. La expresión simbólica no admite la inversa en su notación. ( )
- c. El interés compuesto es aquel que genera interés sobre interés. ( )
- d. El interés simple es en cualquier situación mayor que el interés compuesto. ( )
- e. En el interés compuesto el capital inicial varía periodo a periodo. ( )
- f. El interés compuesto a diferencia del interés simple no se expresa en porcentaje. ( )
- g. La capitalización frecuente del interés es una forma práctica de aumentar el costo del dinero. ( )

2. Responda las siguientes pregunta.

- a. ¿Cuáles son las clases de interés compuesto?
- b. ¿Cuáles son las herramientas en los que se puede apoyar para determinar el valor de un factor?

## *RESPUESTAS CORRECTAS*

1.

- a. V
- b. F
- c. V
- d. F
- e. V
- f. F
- g. V

2.

- a. Discreto y continuo
- b. Las tablas de interés, Excell, Las calculadoras financieras, La interpolación.

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.



## ***ACTIVIDADES PREVIAS***

6. Usted deberá dirigirse al libro de ingeniería económica de su preferencia y leer lo referente al interés compuesto.
7. Visite varias páginas web cuyo contenido este relacionado con el interés compuesto y elabore un banco de preguntas con el fin de identificar sus dudas.
8. Indagar entre los almacenes de electrodomésticos sobre las tasas de interés que ellos ofrecen para la cancelación de los productos.
9. Consultar en la banca local las tasas y periodos de capitalización para cuentas de ahorro.
10. Consultar en la banca local las tasas y periodos de capitalización para los créditos a mediano y largo plazo.

## 5. INTERÉS COMPUESTO

En el cálculo anterior del interés simple, el capital sobre el cual se generaban los intereses permanecía constante durante la duración del préstamo. Pero la modalidad de interés compuesto presupone que los intereses causados no son pagados al final de cada período, sino más bien “abonados” al capital o deuda. Así, la deuda va creciendo, no sólo en razón de los intereses generados sobre el capital sino también sobre los intereses acumulados. Aquí el interés de cada período no se calcula sobre la cuantía o capital original sino sobre la cuantía o capital al comienzo de ese período.

Es decir, que si en cada intervalo de tiempo estipulado en una obligación, se agregan los intereses al capital, formará un nuevo monto, sobre los cuales se calcularán los intereses para el siguiente intervalo o período de tiempo y así sucesivamente, por tal motivo el interés compuesto recibe también el nombre de interés capitalizado.

Lo anterior origina nuevos conceptos tales como:

- Monto: Es el valor acumulado del capital agregando los intereses devengados. Es decir, el monto es igual al capital más los intereses.
- Capitalización: Proceso mediante el cual los intereses se liquidan y se incorporan al capital generándose una nueva base para el cálculo de los nuevos intereses.
- Período de Capitalización: Es el intervalo convenido en la obligación, para capitalizar los intereses.
- Tasa de interés compuesta: Es la tasa que se recibe o se paga tanto sobre el capital, como sobre los intereses ganados en períodos anteriores.

En general podemos decir que el interés compuesto es aquel interés obtenido a partir del capital y los intereses ganados en periodos anteriores, de manera que se ganarán o pagarán intereses sobre intereses.

A continuación se encuentra un cuadro comparativo entre el interés compuesto y el interés simple, con el fin de diferenciar el uno del otro tomando como base sus características.

Cuadro 5-1. Comparación entre el interés simple y el compuesto

<i>INTERÉS SIMPLE</i>	<i>INTERÉS COMPUESTO</i>
Se calcula sobre el capital inicial de la inversión o préstamo	Se calcula sobre el capital obtenido al inicio de cada periodo
El monto del interés es igual en cada periodo de tiempo	El monto del interés es diferente en cada periodo de tiempo
El capital inicial permanece constante	El capital inicial varia periodo a periodo
Los intereses causados son pagados	Los intereses causados son abonados al capital.

## 5.1. CLASES DE INTERÉS COMPUESTO

El interés compuesto dependiendo de la frecuencia de su aplicación puede ser clasificado como:

### 5.1.1. Interés compuesto continuo

Es aquel que se caracteriza por que los periodos de tiempo empleados para liquidar los intereses son infinitesimales o demasiado pequeños.

Esta clase de interés compuesto es empleada generalmente en las actividades económicas desarrolladas en la bolsa de valores.

### 5.1.2. Interés compuesto discreto

Es aquel que se caracteriza porque los periodos de tiempo empleados para liquidar los intereses son periodos de tiempo finitos (un mes, un año, etc.).

Para efecto de nuestro texto se estudiará solamente el interés compuesto discreto ya que este es el más utilizado en las operaciones financieras.

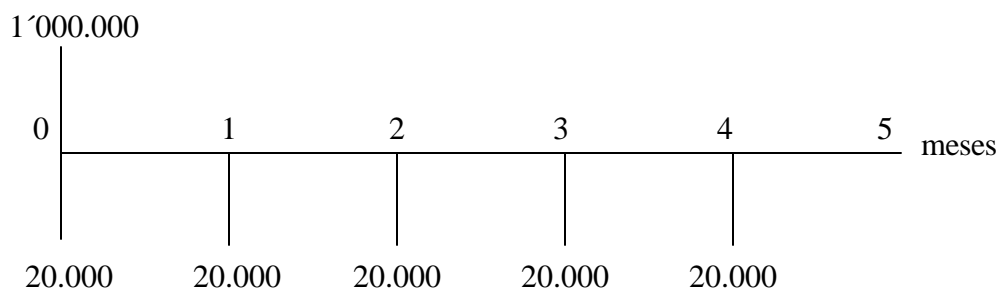
## 5.2. MOMENTO DE APLICACIÓN

El interés tiene dos momentos de aplicación en la inversión, los cuales hacen referencia al instante en que se ocasiona el interés; dichos instantes o momentos se mencionan a continuación.

### 5.2.1. Interés anticipado

Es aquel interés que se ocasiona al comienzo del periodo. Con un interés cuyo momento de aplicación sea anticipado, la persona que recibe el préstamo debe cancelar inmediatamente el interés del primer periodo, por tanto ésta contará con menos dinero para operar; ya que del préstamo obtenido debe sustraer los intereses.

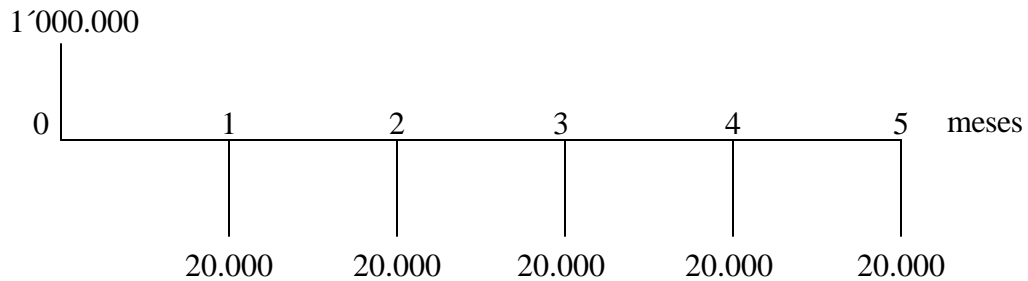
Se ilustrará este caso con un diagrama de flujo que representará el préstamo de una cantidad de dinero igual a \$ 1'000.000 con un interés anticipado del 2% mensual y el plazo para pagar la deuda es de 5 meses.



Basándose en el gráfico se puede notar que los intereses anticipados se cancelan al iniciar el mes, por tanto al aceptar este tipo de interés no se recibirán \$ 1'000.000 si no en realidad serán \$ 980.000. Además no es lógico pagar por un servicio si este no se a recibido, salvo en ciertos casos como es el servicio de cine, el de bus, entre otros.

### 5.2.2. Interés vencido

Es aquel interés que se ocasiona o se cancela al final del periodo.



Recuerde que el inicio de un periodo es equivalente al final del periodo anterior.

## 5.3. FÓRMULAS PARA EL INTERÉS COMPUESTO

**A** continuación encontrará la definición de interés compuesto expresada en ecuaciones matemáticas, las cuales facilitarán la solución de problemas o situaciones relacionadas con este tipo de interés. Para llevar a cabo estas deducciones fue necesario fraccionar este análisis de la siguiente forma, primero se deducirá el valor futuro de una cantidad de dinero conocido un principal (F / P), luego se determinará el monto de una cantidad de dinero a partir de una serie de pagos (F / A) y finalmente se deducirá la fórmula que permitirá el cálculo de un valor presente conocido una serie de pagos uniformes (P / A).

### 5.3.1. Relación valor futuro - valor presente

Para hallar esta relación matemática se tomará como base el siguiente cuadro, el cual se apoyará en la definición de dicho interés suponiendo que se recibirá (o se pagará) una cantidad (P) a lo largo de los n periodos, a una tasa de interés compuesto i% por periodo vencido.

Cuadro 5-2. Deducción fórmula de interés compuesto

<i>n</i>	<i>Deuda al comienzo del periodo</i>	+	<i>Intereses causados durante el periodo</i>	=	<i>Deuda al final del periodo</i>	<i>Factorizar</i>
1	P	+	Pi	=	P + Pi	$P(1+i)^1$
2	$P(1+i)$	+	$P(1+i)i$	=	$P(1+i) + P(1+i)i$	$P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	+	$P(1+i)^2 i$	=	$P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i$	$P(1+i)^3$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
n	$P(1+i)^{n-1}$	+	$P(1+i)^{n-1} i$	=	$P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1} i$	$P(1+i)^n$

Del cuadro 5-2 se deduce que el futuro del capital al final de los n periodos (valor futuro) será:

$$F = P(1+i)^n \quad \text{Ecuación 5-1}$$

A partir de la fórmula 5-1, se puede hallar la del valor presente si se despeja P de ella.

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} \quad \text{Ecuación 5-2}$$

De igual forma se obtiene el valor de la tasa de interés

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$$

Ecuación 5-3

El valor de n, o sea, el tiempo de recuperación de la inversión se obtiene de la misma fórmula así:

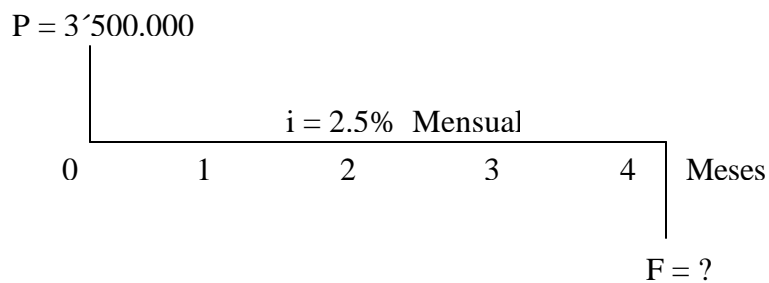
$$n = \frac{\text{Log}\left(\frac{F}{P}\right)}{\text{Log}(1+i)}$$

Ecuación 5-4

### Ejercicio Práctico

Al adquirir hoy un computador para su oficina por \$ 3'500.000 usted se comprometió a cancelarlo en 4 meses con una tasa de 2.5% mensual vencido. ¿Cuál sería el monto que se debería pagar?

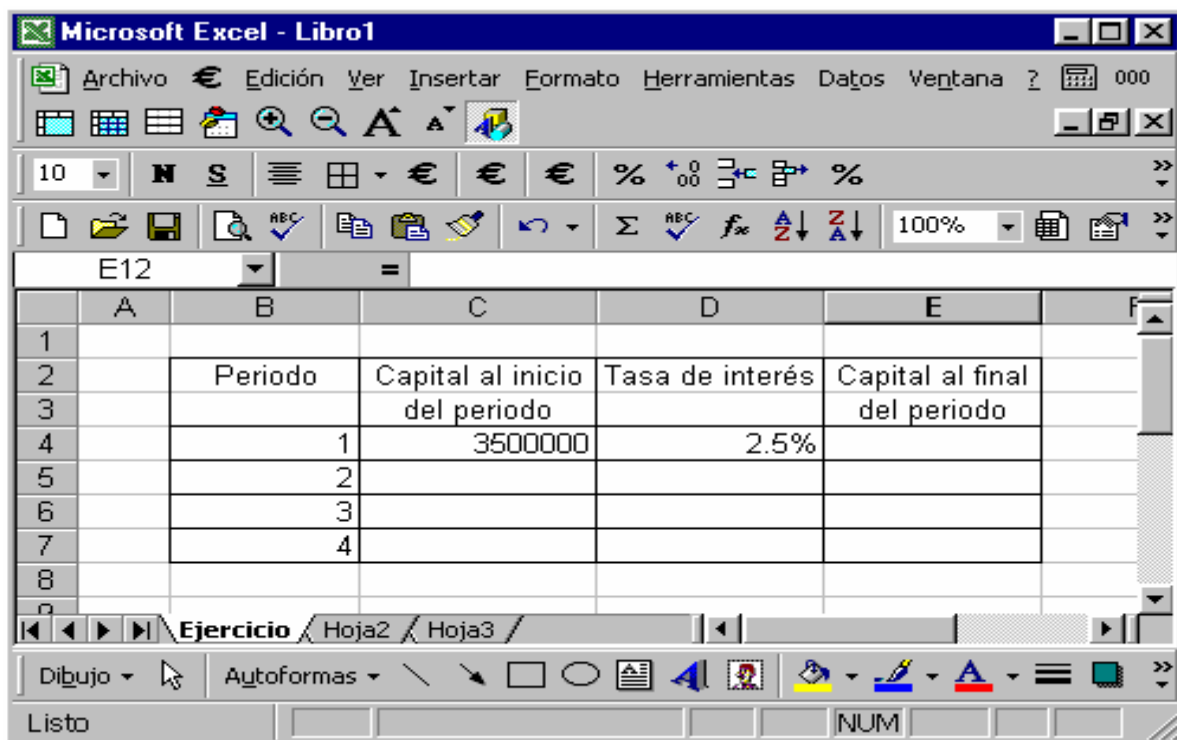
Para resolver este ejercicio primero se realiza el diagrama flujo con el fin de ilustrarlo.



Al identificar con que información poseemos y que debemos averiguar, notaremos que la ecuación que aplica para este ejercicio es 5-1.

$$F = P ( 1 + i )^n = 3'500.000 ( 1 + 0.025 )^4 = 3'863.345$$

Este tipo de ejercicios se puede resolver empleando una hoja de cálculo del programa Excel que proporciona Microsoft, de la siguiente forma:



- Se coloca en la hoja de cálculo, los datos que proporciona el ejercicio
- Se coloca el número de periodos de tiempo el cual es conocido.
- El capital inicial en el periodo cero genera interés al final de dicho periodo



2. Se realizan las operaciones necesarias

Periodo	Capital al inicio del periodo	Tasa de interés	Capital al final del periodo
1	3500000	2.5%	3587500
2	3587500	2.5%	3677188
3	3677188	2.5%	3769117
4	3769117	2.5%	3863345

The screenshot shows the Excel interface with the following data in the worksheet:

Periodo	Capital al inicio del periodo	Tasa de interés	Capital al final del periodo
1	3500000	2.5%	3587500
2	3587500	2.5%	3677188
3	3677188	2.5%	3769117
4	3769117	2.5%	3863345

Labels C5 and E5 are positioned below the table, with lines pointing to the cells in the fourth row of the data table.

El capital inicial de cada periodo es igual al capital final del periodo anterior. En el caso del periodo cero como no se generan intereses durante este, entonces el capital inicial será igual al final. La tasa de interés es igual para cada periodo

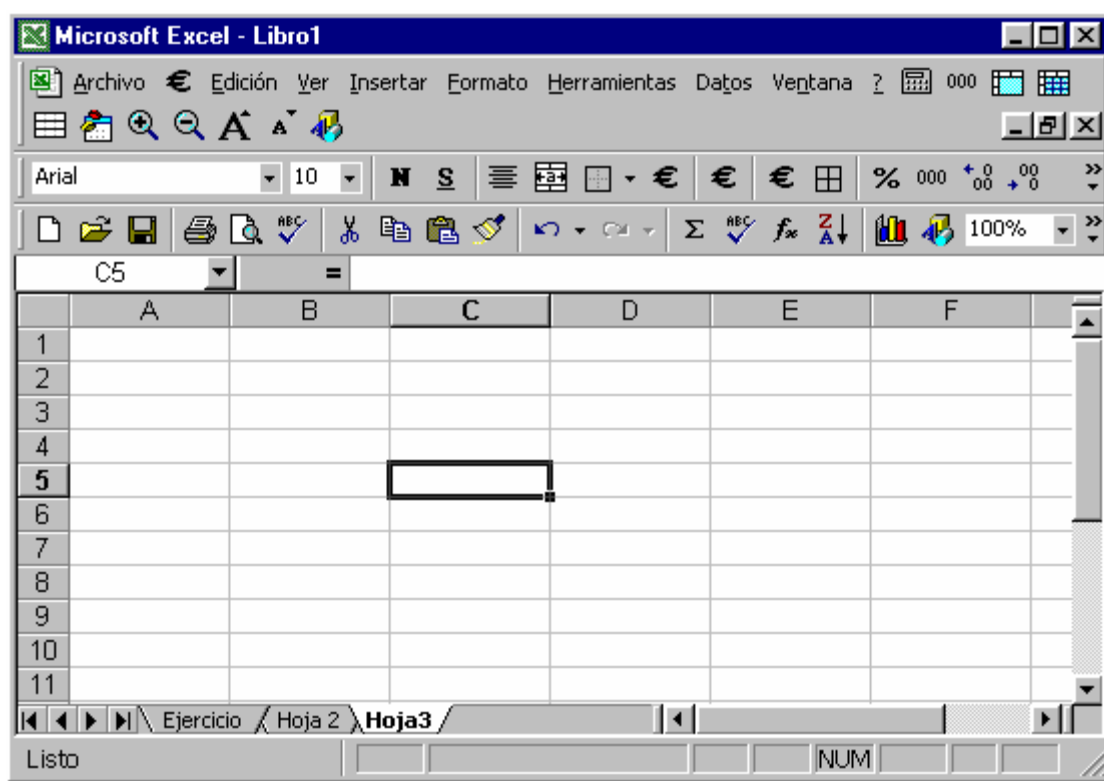
Las fórmulas empleadas en las celdas para realizar los cálculos son:

$$C5 = E4 \quad , \quad E5 = C5 * (1 + D5)$$

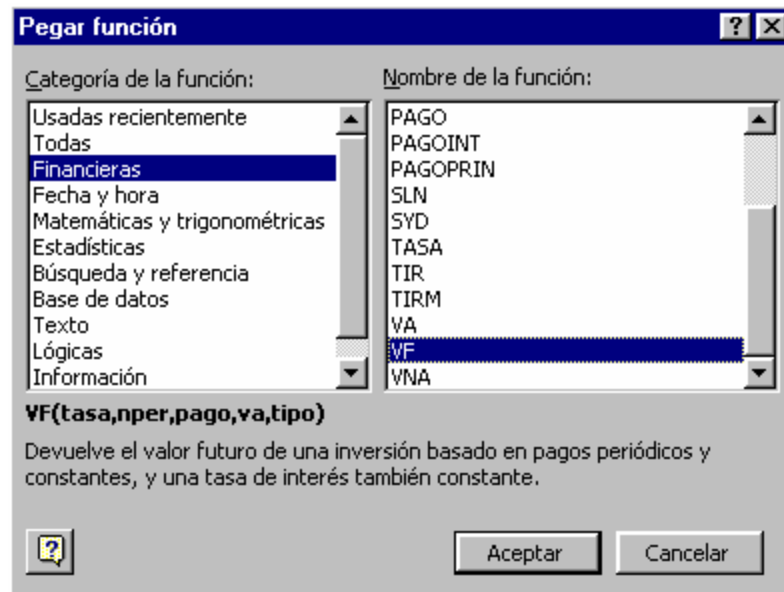
La respuesta para el ejercicio planteado sería el capital final en el periodo cuatro, por tanto el monto es \$3'863.345.

Además de las dos formas anteriores de resolver un problema existe una más, que es mediante la función  $f_x$ , la cual se enseñará a continuación.

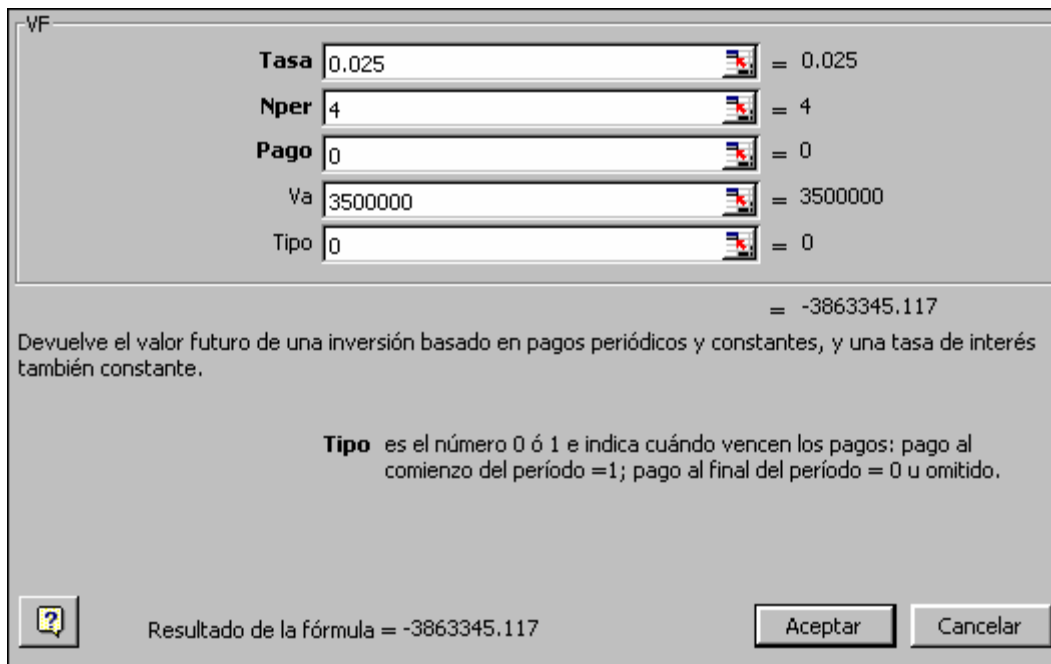
1. Abra el programa Excel y diríjase al menú *Insertar* y seleccione la opción *Pegar función*



2. Seleccione en la columna *Categoría de la función* la fila que lleva por nombre *Financiera*, para luego seleccionar la función *VF* en la columna *Nombre de la función*.



3. Al aceptar se despliega el siguiente cuadro, el cual se llena con los datos del problema, obteniendo así el valor futuro deseado.



### 5.3.2. Relación valor futuro - valor anual

Esta relación matemática se determinará a partir del siguiente supuesto: una cierta cantidad de dinero (F) se debe pagar al final del periodo n, representado por un pago único, si recibimos una serie de ingresos iguales al final de todos y cada uno de los periodos sujetos a una tasa de interés del  $i\%$  por periodo, en donde el primer ingreso (egresos) ocurre al final del periodo 1 y el último ingreso (egreso) ocurre al final del periodo n. Ver figura 5-1

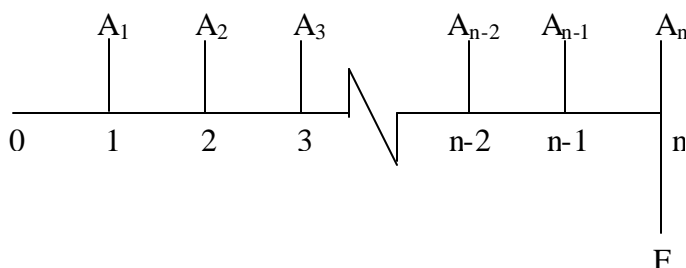
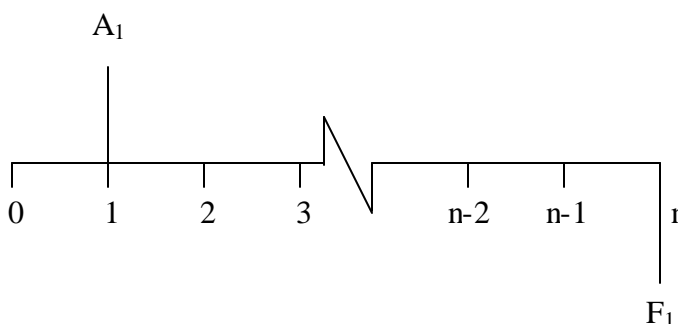


Figura 5-1. Relación futuro - anualidad

La anualidad consiste en una serie de pagos iguales por tanto  $A_1 = A_2 = A_n = A$ . Ahora se hallará el valor futuro de cada uno de esos valores, transformándose cada valor anual en un presente y con base en esto se calcula el monto empleando la fórmula obtenida de la relación P / F.

Seleccionemos el primer pago  $A_1$  de la figura 5-1, y si lo relacionamos con  $F_1$  en la posición n representa un valor presente que se encuentra a  $(n - 1)$  periodos.

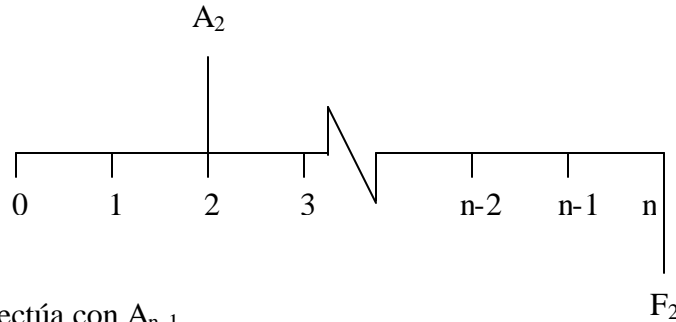


Por tanto,

$$F_1 = A (1 + i)^{n-1}$$

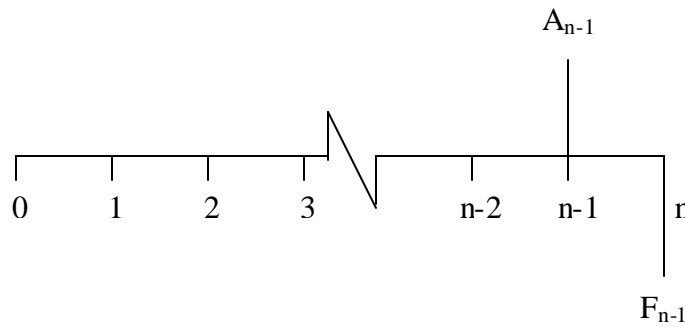
Como se puede observar esto se reduce a una relación P / F

Seleccionamos ahora a  $A_2$ ; que es con relación a  $F_2$  un valor presente.



Por tanto, si se efectúa con  $A_{n-1}$

$$F_2 = A (1 + i)^{n-2}$$



$$F_{n-1} = A (1 + i)$$

Y así sucesivamente cada valor de A se transformará en un valor futuro representado por su monto inicial y los intereses ganados de tal forma que el valor futuro total será igual a la sumatoria de todos los valores futuros de cada valor de A como lo expresa la ecuación 5-5:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n$$

esto, se reemplaza el valor de  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ , en la ecuación 5-5.

$$F = A (1 + i)^{n-1} + A (1 + i)^{n-2} + \dots + A (1 + i) + A$$

Ecuación 5-6

Factorice la constante A de la ecuación 5-6, y ordene de manera ascendente los factores para obtener:

$$F = A [ 1 + (1 + i) + \dots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} ] = A S_n \quad \text{Ecuación 5-7}$$

Si observa detenidamente dentro de los corchetes en la ecuación 5-7, notará que los factores siguen una progresión geométrica, la cual se expresa mediante la siguiente sumatoria, la cual se tomará como base para hallar la suma de los n periodos ( $S_n$ ).

$$S_n = \frac{a_0(1-r^n)}{1-r} \quad \text{Ecuación 5-8}$$

Donde:

$S_n$  = Suma de n términos de la serie.

$a_0$  = Primer término o periodo de la progresión, en este caso es 1.

r = Razón de la progresión, la cual es igual a  $(1 + i)$  ya que esta se define como la división entre un valor cualquiera de la progresión y el valor inmediatamente anterior.

Ahora reemplace cada uno de los valores obtenidos anteriormente en la ecuación 5-8; quedándonos la relación  $F / A$  de la siguiente manera:

$$S_n = \frac{1[1 - (1 + i)^n]}{1 - (1 + i)} = \frac{1 - (1 + i)^n}{-i}$$

Se multiplica y se divide la fracción obtenida por  $(-1)$

$$S_n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Para así reemplazar en la ecuación 5-7 y obtener que:

$$F = A \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

Ecuación 5-9

A partir de esta relación se puede obtener la ecuación de n, la cual sería:

$$n = \frac{\log \left( \frac{F}{A} i + 1 \right)}{\log (1 + i)}$$

Ecuación 5-10

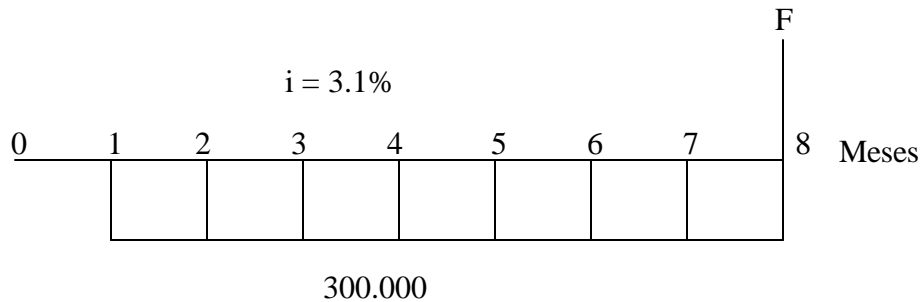
Así mismo se determina la ecuación para hallar el valor anual que durante cierto periodo será equivalente a una cantidad futura o monto.

$$A = F \left[ \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

Ecuación 5-11

### ***Ejercicio Práctico***

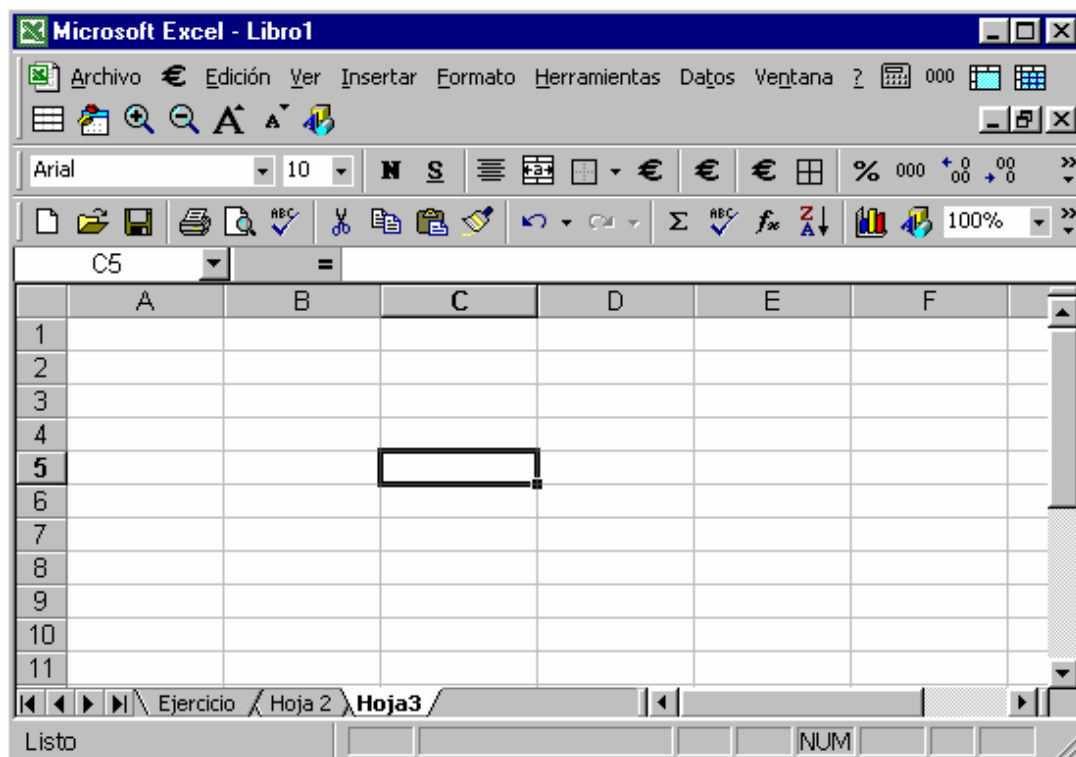
Una persona sueña con viajar a final de año a Miami; y tiene la idea de ahorrar a partir de abril con el propósito de que a noviembre ya pueda pagar todo lo referente al viaje. Con cuánto dinero contaría esta persona a finales del mes de noviembre, si deposita en el banco una cantidad de dinero equivalente a \$ 300.000 mensuales, y esta organización le ofrece una tasa de interés del 3.1% mensual.



$$F = 300.000 \frac{(1+0.031)^8 - 1}{0.031} = 2'677.186$$

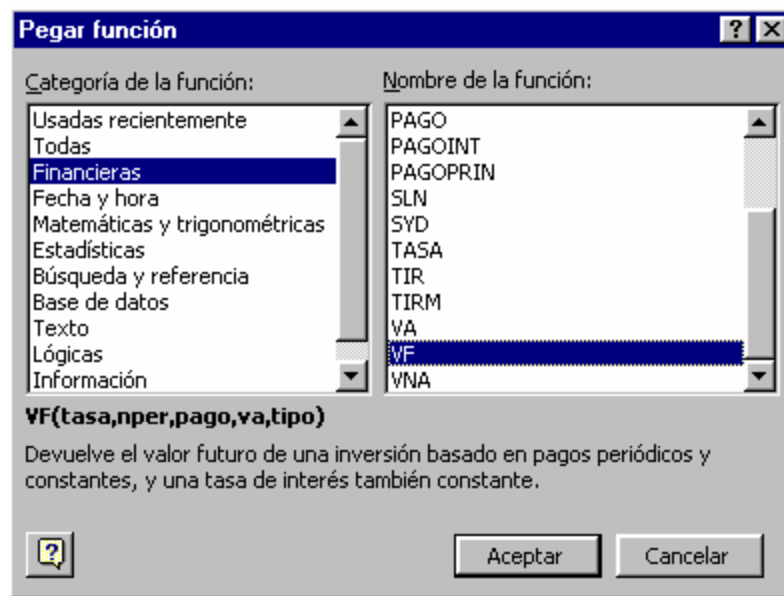
Este ejercicio puede ser resuelto apoyándose en el programa de Microsoft Excel, de la siguiente forma:

1. Abra el programa Excel y diríjase al menú *Insertar* y selecciona la opción *pegar función*

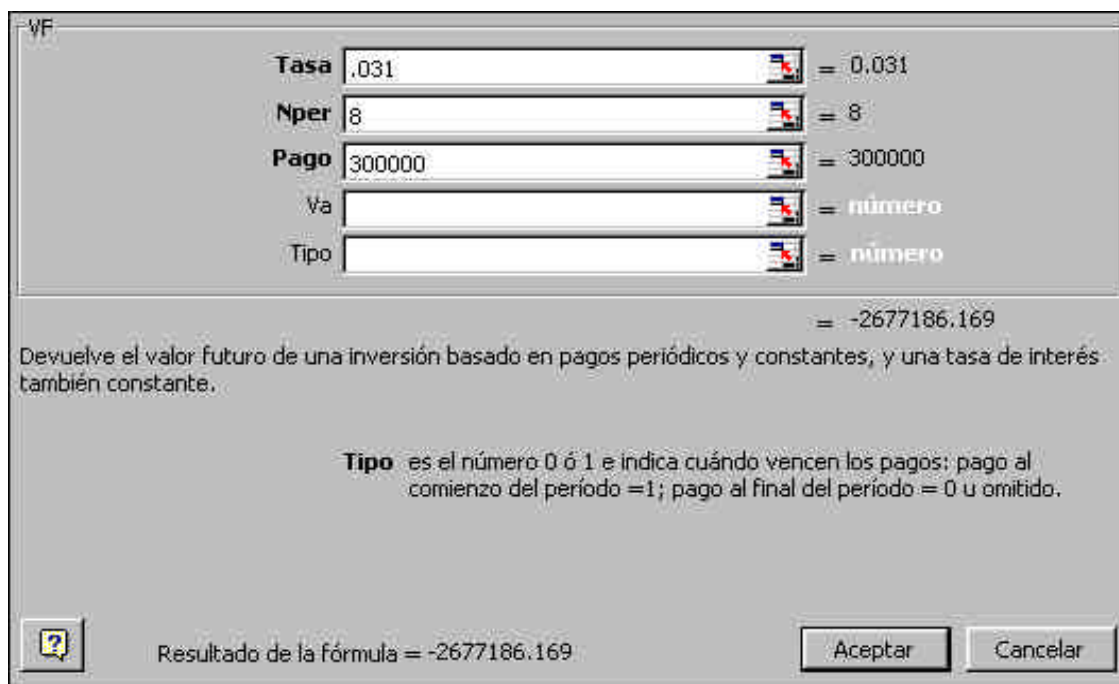




2. Seleccione en la columna *Categoría de la función* la fila que lleva por nombre *Financiera*, para luego seleccionar la función *VF* en la columna *Nombre de la función*.



3. Al aceptar se despliega el siguiente cuadro, el cual se diligencia con los datos del problema, para que este le arroje el resultado deseado.



### 5.3.3. Relación valor presente - valor anual

Esta relación tiene como objetivo calcular el valor presente en una posición cero, representado por un pago único, de una serie de pagos iguales y consecutivos ocurridos al final de todos y cada uno de los  $n$  periodos, sujetos a una tasa de interés del  $i\%$  por periodo, en donde el primer pago ocurre al final del periodo 1 y el último pago ocurre al final del periodo  $n$ , y existen  $n$  pagos que cubren  $n$  periodos.

Para encontrar la ecuación que represente a esta relación, se igualarán la ecuación 5-1 a la ecuación 5-9 obteniendo lo siguiente:

$$P(1+i)^n = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Si de esta igualdad se despeja  $P$ , obtendremos la ecuación 5-12.

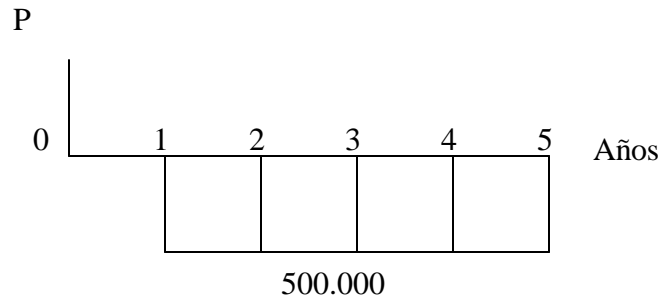
$$P = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \quad \text{Ecuación 5-12}$$

Ahora para determinar el valor de  $A$  bastará con despejarla de la ecuación 5-12.

$$A = P \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad \text{Ecuación 5-13}$$

#### ***Ejercicio Práctico***

¿Cuál es el verdadero valor de un carro si debe cancelarlo en cuotas uniformes cada una de \$500.000 durante cinco años a una tasa de interés del 23% anual?



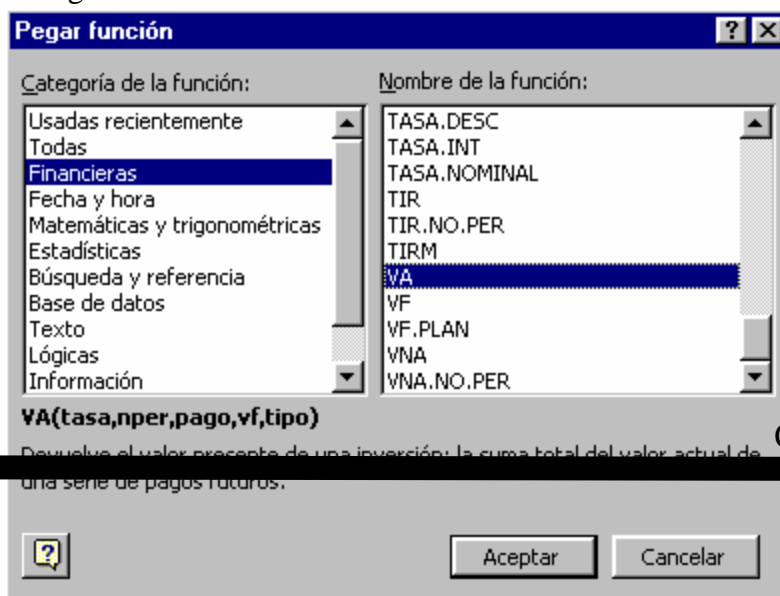
$$P = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

$$P = 500.000 \left[ \frac{(1+0.23)^5 - 1}{0.23(1+0.23)^5} \right]$$

$$P = 1'401.736$$

Si te apoyas en Excel la solución sería:

1. Seleccione primero en la columna *Categoría de la función* la fila que lleva por nombre *Financiera*, para luego seleccionar la función *VA* en la columna *Nombre de la función*.



2. Introduzca los datos en el cuadro de diálogo, para que este le arroje el resultado esperado.

VA

Tasa 0,23 = 0,23

Nper 5 = 5

Pago 500000 = 500000

Vf = número

Tipo = número

= -1401736.489

Devuelve el valor presente de una inversión: la suma total del valor actual de una serie de pagos futuros.

**Pago** es el pago efectuado en cada período y no puede cambiar durante la anualidad.

Resultado de la fórmula = -1401736.489

Aceptar Cancelar

## 5.4. FACTORES DE EQUIVALENCIA

Como todas las ciencias las matemáticas financieras han evolucionado con el tiempo y han dado origen a un nuevo modelo para representar la relación funcional entre los factores que intervienen en un problema financiero, esta nueva notación se denomina Relación mediante Factores, Expresión Simbólica, Notación Estándar o Notación simplificada entre otras.

Para efectos de aplicación en este libro se llamará Expresión Simbólica, y su estructura es la siguiente:

Capítulo V

donde:

- X = Cantidad equivalente a calcular o valor incógnita
- Y = Es el valor o dato conocido
- i = Tasa de interés
- n = Número de Periodos.
- ( X/Y , i , n ) = Es una expresión que está e función de i y de n .

Esta notación representa la relación entre la variable que se va a calcular y la variable conocida y se lee de la siguiente forma: Encontrar X dado Y, con una tasa *i* % y por *n* períodos.

Para la primera relación vista (P / F) la ecuación matemática deducida fue:

$$F = P [ (1 + i)^n ]$$

La Expresión simbólica que resume al factor será:

$$(F / P, i, n)$$

Esta expresión se interpreta así: Encontrar el valor futuro dado un valor presente, una tasa de interés y un número (n) de periodos determinados. Por tanto la relación de equivalencia F / P expresada simbólicamente será:

$$F = P (F / P, i, n)$$

## 5.5. RESUMEN DE FÓRMULAS

la expresión simbólica y se resumen a continuación.

<i>CALCULAR</i>	<i>CONOCIDO</i>	<i>EXPRESIÓN MATEMÁTICA</i>	<i>EXPRESIÓN SIMBÓLICA</i>

F	P	$F = P [(1 + i)^n]$	$F = P (F/P, i, n)$
P	F	$P = F \left[ \frac{1}{(1 + i)^n} \right]$	$P = F (P/F, i, n)$
F	A	$F = A \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$	$F = A (F/A, i, n)$
A	F	$A = F \left[ \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right]$	$A = F (A/F, i, n)$
P	A	$P = A \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \right]$	$P = A (P/A, i, n)$
A	P	$A = P \left[ \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right]$	$A = P (A/P, i, n)$

## 5.6. TABLAS DE INTERÉS

Debido al advenimiento de la tecnología, se han creado instrumentos como las calculadoras financieras, software financieros, hojas de cálculo, etc, que nos permiten obtener los valores deseados con mayor precisión. Conscientes que estos son un recurso óptimo y muy utilizado actualmente, no podemos desechar totalmente el uso de las tablas de factores de interés compuesto, que aparecen en el Anexo A al final del texto, pues estas son un instrumento muy útil cuando no se tiene la oportunidad de utilizar los avances tecnológicos.

Por ejemplo, en un determinado problema se necesita calcular el factor  $(F / P, 3\%, 20)$ . Para buscar el valor correspondiente en tablas, primero localice la tabla del interés del 3%, segundo la columna del factor  $(F / P)$  y busque hacia abajo hasta encontrar  $n = 20$ . El valor de la tabla es 1.80611

**TABLA DE INTERÉS =  $i \% = 3 \%$**

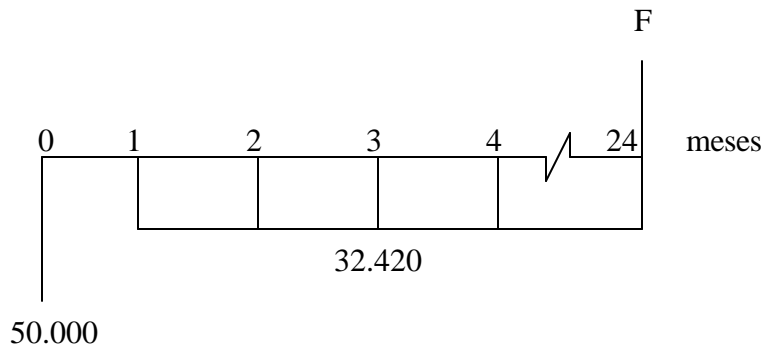
<b>n</b>	<b>(F/P,i,n)</b>	<b>(P/F,i,n)</b>	<b>(F/A,i,n)</b>	<b>(A/F,i,n)</b>	<b>(A/P,i,n)</b>	<b>(P/A,i,n)</b>	<b>(A/G,i,n)</b>	<b>n</b>
1								1
2								2
3								3
4								4
5								5
6								6
7								7
8								8
9								9
10								10
.								.
.								.
.								.
18								18
19								19
<b>20</b>	<b>1.80611</b>							<b>20</b>
21								21
.								.
.								.

Si usted realiza el cálculo directo con la fórmula notará que existe una pequeña variación que se debe a los efectos de redondeo pues no se utilizan todos los decimales obtenidos al aplicar las fórmulas en las tablas.

Otro inconveniente presentado con estas tablas, lo genera el hecho de que sólo llegan hasta cierto número de períodos, lo que significa que si se desea calcular un factor cualquiera para un n periodo superior a 100, simplemente no es posible su utilización, aunque se puede apelar a los conocimientos matemáticos, como son las propiedades de los productos de potencias, tema sobre el cual no profundizaremos, por no considerarse trascendental para el desarrollo de la asignatura; igualmente ocurre para la tasa de interés, que sólo están dadas para ciertos valores, pero al igual que el anterior, se puede recurrir a su cálculo utilizando la interpolación lineal.

**Ejercicio Práctico**

1. La señora Rico, ha comprado una nueva nevera y desea saber cuanto pagará por la nevera si ha aceptado un plan de pago que le exige una cuota inicial de \$ 50.000 y 24 cuotas de \$ 32.420 mensuales con un interés del 1.5% mensual

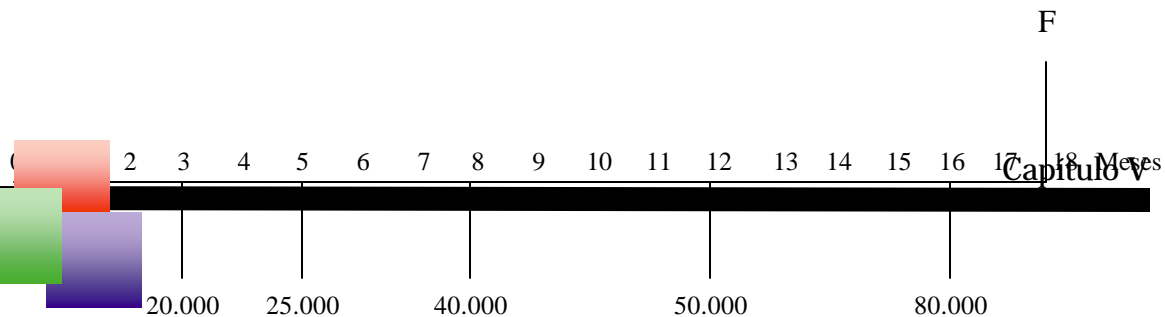


$$F = 50.000 (F / P, 1.5\%, 24) + 32.420 (F/A, 1.5\%, 24)$$

$$F = 50.000 (1.429503) + 32.420 (28.633521)$$

$$F = 999.773,75$$

2. Usted tiene programado ahorrar cierto dinero para su grado (dentro de tres semestres) y ha calculado que puede depositar \$ 20.000 dentro de tres meses, \$25.000 dentro de cinco meses, \$ 40.000 luego de ocho meses, \$ 50.000 dentro de 12 meses y \$ 80.000 en 16 meses. ¿Cuánto dinero tendrá si la corporación le ofrece un interés del 2% mensual?



$$F = 20.000 (F / P, 2\%, 15) + 25.000 (F/P, 2\%, 13) + 40.000 (F/P, 2\%, 10) + 50.000$$

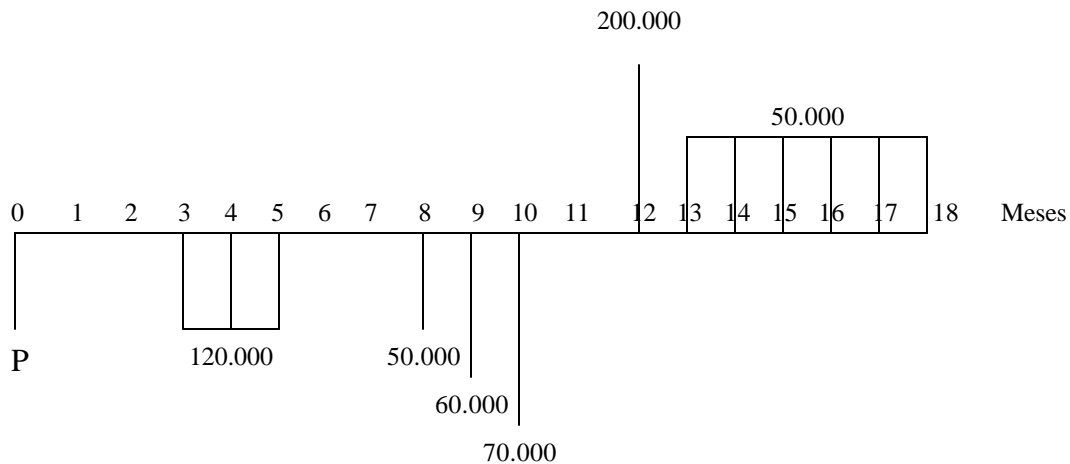


$$(F/P, 2\%, 6) + 80.000 (F/P, 2\%, 2)$$

$$F = 20.000 (1.345868) + 25.000 (1.293607) + 40.000 (1.218994) + 50.000 (1.126162) + 80.000 (1.040400)$$

$$F = 247.557,4$$

3. Calcular el valor presente en el punto 0 equivalente al siguiente diagrama de flujo, con un interés del 5% mensual



$$P = 120.000 (P/A, 5\%, 3) (P/F, 5\%, 2) + 50.000 (P/F, 5\%, 8) + 60.000 (P/F, 5\%, 9) + 70.000 (P/F, 5\%, 10) - 200.000 (P/F, 5\%, 12) - 50.000 (P/A, 5\%, 6) (P/F, 5\%, 12)$$

$$P = 120.000 (4.329477) (0.907029) + 50.000 (0.783526) + 60.000 (0.644609) + 70.000 (0.613913) - 200.000 (0.556837) - 50.000 (5.075692) (0.556837)$$

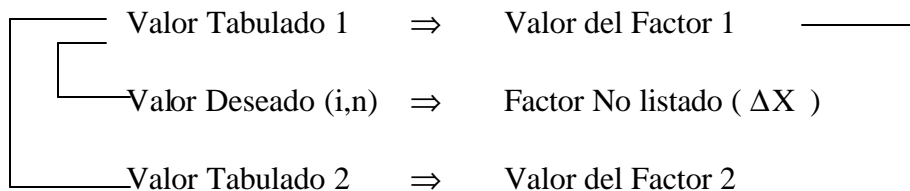
$$P = 339.378,038$$

## 5.7. INTERPOLACIÓN LINEAL

Es sabido que el valor del factor que se desea calcular, se puede obtener:

- a. Por la utilización de la fórmula, es decir a través de cálculos directos.
- b. Utilizando calculadoras financieras, software u hojas de cálculo.
- c. Como se mencionó anteriormente con la utilización de un instrumento matemático como lo es la Interpolación Lineal.

La Interpolación Lineal es utilizada para el cálculo del valor de un factor, de una tasa de interés  $i$  o un período  $n$  que no aparece listado en las tablas de interés. Por ejemplo si queremos calcular el factor (P/A, 7.8%, 10) directamente en la tablas, no podríamos ya que la tabla del 7.8% no se encuentra, sin embargo existen las tabla del 7% y del 8% los cuales son valores tabulado en el Apéndice 1 y por consiguiente se les puede hallar el correspondiente valor al factor. Con esta información se podría hacer una disposición para la interpolación así:



Luego

$$? X = \left( \frac{\text{Valor Deseado} - \text{Valor Tabulado1}}{\text{Valor Tabulado2} - \text{Valor Tabulado1}} \right) (\text{Valor del Factor 2} - \text{Valor del Factor 1})$$

Entonces

$$\text{El Valor Deseado} = \text{Valor del factor 1} \pm \Delta X$$

**Ejercicio Práctico**

1. Interpolar linealmente para encontrar el valor del siguiente factor: ( P/A, 7.8%,10)

Como el valor ajustado al interés del 7.8% que deseamos encontrar no se encuentra en tablas, ubicamos en estas los valores del interés por exceso y por defecto más próximos del interés dado, que en nuestro caso será el 7% y 8%, luego de ubicadas estos valores, en cada tabla se busca el n = 10, para cada uno de estos intereses, en el factor ( P/A ), quedando de la siguiente forma:

7%	⇒	7.0236
7,8%	⇒	ΔX
8%	⇒	6.7101

Luego

$$\Delta X = \left( \frac{7.8 - 7}{8 - 7} \right) (6.7101 - 7.0236)$$

$$\Delta X = -0.02508$$

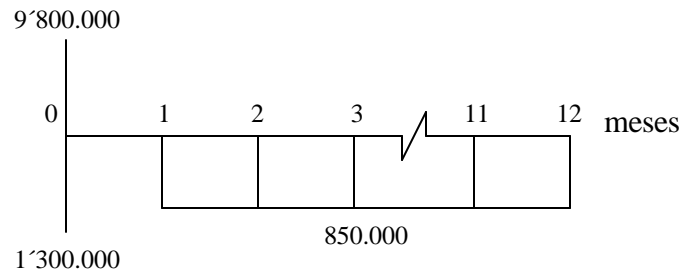
Entonces

$$( P/A, 7.8\%, 10) = 7.0236 - 0.02508 = 6.99852$$

2. La compañía " Nueva Marcha " de su propiedad piensa adquirir un vehículo por valor de \$ 9'800.000 y tiene dos opciones de compra, ¿Cuál elegiría usted?

- Financiera A  
Cuota inicial \$ 1'300.000 y 12 cuotas mensuales de \$ 850.000 cada una
- Financiera B  
12 cuotas mensuales de \$ 920.000 cada una

Financiera A



$$9'800.000 - 1'300.000 = 850.000 (P/A, i\%, 12)$$

$$10 = (P/A, i\%, 12)$$

Por tanteo se calcula i

P/A	i%
10.257765	2,5
10	X
9.954004	3

$$? X = \left( \frac{\text{Valor Deseado} - \text{Valor Tabulado1}}{\text{Valor Tabulado2} - \text{Valor Tabulado1}} \right) (\text{Valor del Factor 2} - \text{Valor del Factor 1})$$

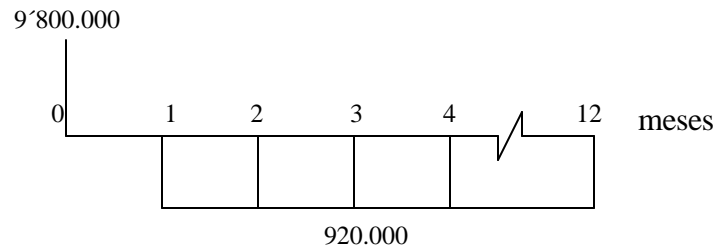
$$? i = \left( \frac{10 - 10.257765}{10.257765 - 9.954004} \right) (2.5 - 3)$$

$$? i = 0.4242$$

$$i = \text{valor 1} \pm \Delta i$$

$$i = 2.5 + 0.4242 = 2.9242\% \text{ mensual}$$

Financiera B



$$9'800.000 = 920.000 (P/A, i\%, 12)$$

$$10.652173 = (P/A, i\%, 12)$$

Se calcula por tanteo

P/A	i%
10.907505	1,5
10.652173	?
10.575341	2

$$? X = \left( \frac{\text{Valor Deseado} - \text{Valor Tabulado1}}{\text{Valor Tabulado2} - \text{Valor Tabulado1}} \right) (\text{Valor del Factor 2} - \text{Valor del Factor 1})$$

$$? i = \left( \frac{10.652173 - 10.907505}{10.907505 - 10.575341} \right) (1.5 - 2)$$

$$? i = 0.3844$$

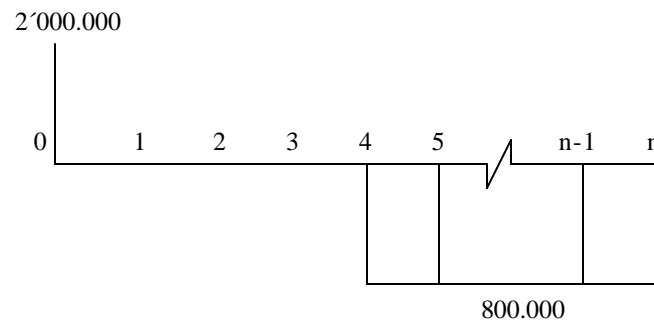
$$i = \text{valor } 1 \pm \Delta i$$

$$i = 1.5 + 0.3844$$

$$i = 1.88\% \text{ mensual}$$

La mejor opción es la financiera B

3. Calcule n del siguiente diagrama de flujo, si  $i = 18\%$  anual.



$$2'000.000 (F/P, 18\%, 3) = 800.000 (P/A, 18\%, n)$$

$$2'000.000 (1.643032) = 800.000 (P/A, 18\%, n)$$

$$4.10758 = (P/A, 18\%, n)$$

P/A	i%
4.077566	8
4.10758	?
4.303022	9

$$? X = \left( \frac{\text{Valor Deseado} - \text{Valor Tabulado1}}{\text{Valor Tabulado2} - \text{Valor Tabulado1}} \right) (\text{Valor del Factor 2} - \text{Valor del Factor 1})$$

$$? n = \left( \frac{4.10758 - 4.077566}{4.077566 - 4.303022} \right) (8 - 9)$$

$$? n = 0.1331$$

$$n = \text{valor } 1 \pm \Delta n$$

$$n = 8 + 0.1331$$

$$n = 8.1331 \text{ años} = 8 \text{ años y } 48 \text{ días}$$

## 5.8. ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE EQUIVALENCIA

Las ecuaciones vistas anteriormente se pueden resumir en una denominada *Ecuación fundamental de equivalencia*, la cual se basa en las comparaciones que se pueden hacer en cualquier posición, por lo cual se podrían desplazar los dineros a cualquiera de las  $n$  posiciones existentes en el diagrama o expresarlas en series uniformes.

Generalmente se habla de Presente, Futuro y Anualidad, dando así origen a las tres ecuaciones básicas de la ingeniería económica, que expresan la equivalencia entre ingresos y egresos considerando la posición del dinero en el tiempo y el interés sobre el capital no amortizado.

Los ingresos se pueden igualar a los egresos en cualquier posición de tiempo (tiempo focal), siempre y cuando se considere el valor del dinero en el tiempo y el momento en el cual ocurren. Esto es, todos los ingresos y egresos se deben llevar a la misma posición focal seleccionada utilizando una tasa de interés.

Esto expresado con variables específicas sería:

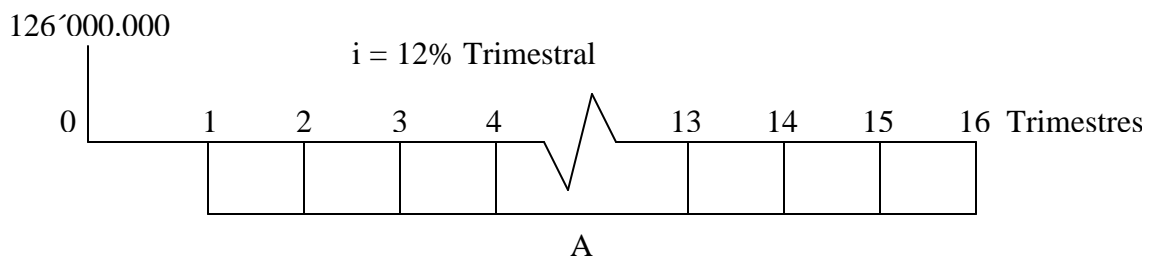
$$\text{El Valor} \begin{cases} \text{Presente} \\ \text{Anual} \\ \text{Futuro} \end{cases} \begin{cases} \text{De los ingresos} \\ \text{considerando} \\ \text{una tasa de} \\ \text{interés } i \text{ y el} \\ \text{momento en el} \\ \text{cual ocurren} \end{cases} = \text{El Valor} \begin{cases} \text{Presente} \\ \text{Anual} \\ \text{Futuro} \end{cases} \begin{cases} \text{De los egresos} \\ \text{considerando} \\ \text{una tasa de} \\ \text{interés } i \text{ y el} \\ \text{momento en el} \\ \text{cual ocurren} \end{cases}$$

El cual significa:

- El valor presente de los ingresos es igual al valor presente de los egresos.
- El valor anual de los ingresos es igual al valor anual de los egresos.
- El valor futuro de los ingresos es igual al valor futuro de los egresos.

## 5.9. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si ECOPETROL adquiere un equipo de perforación por \$ 126'000.000 el cual debe ser cancelado al cabo de cuatro años en cuotas trimestrales a una tasa del 12% trimestral, cuál será el valor de cada cuota?.

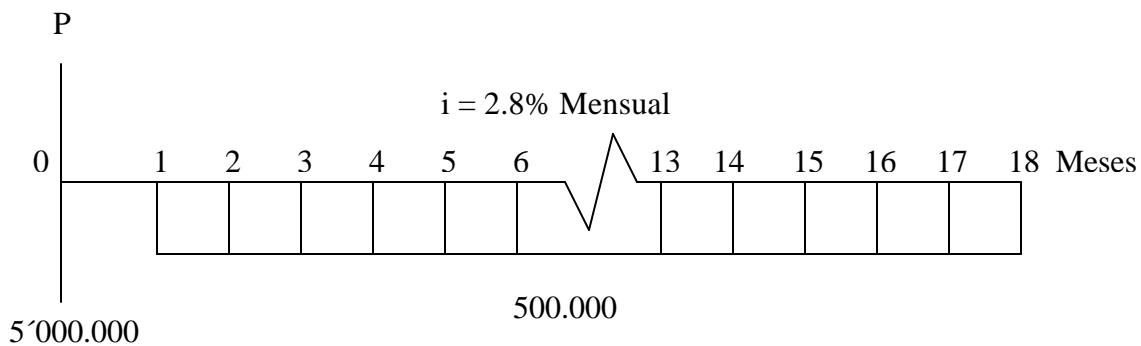




$$A = P \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] = 126'000.000 \left[ \frac{0.12(1+0.12)^{16}}{(1+0.12)^{16} - 1} \right] = 18'067.142$$

$$A = 18'067.142$$

2. Una señora esta dispuesta a cambiar su viejo carro por uno nuevo, por tal motivo se dirige a un concesionario. Al llegar a este un vendedor le pregunta que tipo de carro deseaba en particular, para lo cual la señora responde: “aquel que se ajuste a mi presupuesto, pues sólo puedo dar una cuota inicial de \$ 5'000.000 y cuotas mensuales de hasta \$ 500.000 durante 18 meses”. Si el concesionario le cobra una tasa de interés del 2.8% mensual, ¿Cuál será el valor del carro que la señora podrá comprar?



Para resolver este ejercicio será necesario hallar el valor futuro para el principal y sumarlo al valor futuro de la anualidad para obtener el valor del carro que puede pagar la señora.

$$P = P + A (F/A, i, n)$$

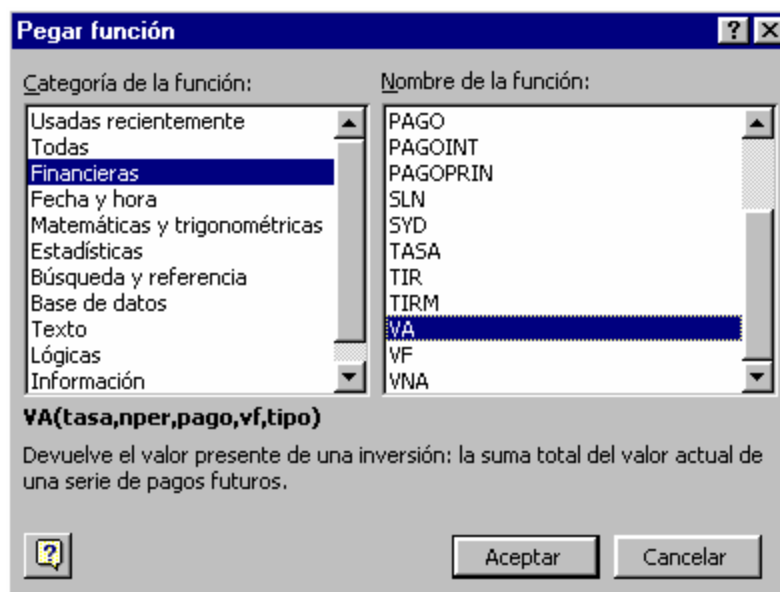
$$P = 5'000.000 + 500.000 (P/A, 2.8, 18)$$

$$P = 5'000.000 + 500.000 \left[ \frac{(1 + 0.028)^{18} - 1}{0.028(1 + 0.028)^{18}} \right]$$

$$P = 5'000.000 + 6'994.490$$

$$P = 11'994.490$$

Para resolverlo basándose en Excel; se tendrá primero que hallar el presente de la anualidad y ese valor sumarlo al presente equivalente a la cuota inicial



VA

Tasa  = 0.028

Nper  = 18

Pago  = -500000


Vf  = número

Tipo  = número

= 6994489.792

Devuelve el valor presente de una inversión: la suma total del valor actual de una serie de pagos futuros.

**Pago** es el pago efectuado en cada período y no puede cambiar durante la anualidad.

 Resultado de la fórmula = 6994489.792

$$500.000 (P/A, 2.8, 18) = 6'994.489$$

Al hallar el anterior valor se continua con la suma de la cuota inicial:

$$P = 5'000.000 + 500.000 (P/A, 2.8, 18)$$

$$P = 5'000.000 + 6'994.489 = 11'994.490$$

## 5.10. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una persona compra un artículo electrodoméstico por valor de \$1.500.000 y conviene pagarlo de la siguiente forma: \$500.000 de Cuota Inicial y el saldo en 4 cuotas cada una de \$500.000 mensuales más un recargo del 3% de intereses sobre saldo. Elabore una tabla de amortización de los pagos efectuados.

2. El abuelo al morir dejó a su nieta de 2 años, una herencia de \$1.000.000 depositados en una cuenta de ahorros, para que al cumplir los 18 años le sean entregados junto con el

interés generado durante este período de tiempo. Si al cumplir la edad esta recibe \$2.223.804,80 ¿Qué interés anual ganó la herencia?

3. En un juicio civil por cobro de una deuda de \$5.000.000, el juez falla ordenando el pago de la cantidad adeudada con acumulación anual de interés al 24% por 5 años, contados desde la fecha de su vencimiento.

- a. Calcular el valor acumulado de la deuda.
- b. El Deudor no puede cancelarla totalmente y propone cancelar cuotas iguales por un período de 8 años reconociendo un interés anual del 30%. ¿Cuál es el valor de cada cuota?
- c. El prestamista a su vez propone que le cancela cuotas \$2.000.000= anuales por un periodo de 6 años.
- d. ¿Cuál opción recomendaría usted al deudor.

4. El gerente de la compañía naviera firma los siguientes pagaré con el 9% de rendimiento: \$10.000.000 a 120 días, \$12.000.000 a 90 días, \$10.000.000 a 180 días. Trascurrido 30 días propone:

- a. Efectuar un pago de \$10.000.000 al contado y un pago único a 180 días con el 10% de rendimiento, ¿De cuánto sería el valor de esta cuota?
- b. Cancelar dos pagos iguales con vencimiento a 6 meses y un año respectivamente, ofreciendo un rendimiento del 10%.
- c. ¿Será que son equivalentes estas forma de pago propuestas por el gerente? ¿Está usted de acuerdo con estas propuestas?

5. Una organización debe adquirir un equipo de construcción, el cual tiene un valor de \$9'560.000. la organización esta dispuesta a pagar \$ 2'600.000 de contado y el resto en 12 meses. Se esta estudiando la posibilidad de pedir un préstamo a la financiera ABC la cual acepta 12 cuotas de \$ 700.000 y la financiera XYZ que ofrece una tasa de interés del 0.78% mensual.

- a. ¿Cuál financiación debe aceptar?
- b. ¿Que interés mensual cobra la financiera ABC?
- c. ¿Cuál sería el monto de las cuotas de la financiera XYZ?

## 5.11. RESUMEN

Con la finalización de este capítulo puede afirmarse que usted está preparado para comprender cualquier tema de Ingeniería Económica.

En este capítulo se aprendió a diferenciar el interés simple del interés compuesto a partir del concepto de cada uno de ellos, y basándose en estos se dedujeron las fórmulas relacionadas con el interés compuesto, para lo cual, fue necesario fraccionar este estudio, obteniendo las siguientes relaciones:

- Valor Futuro – Valor Presente
- Valor Futuro – Valor Anual
- Valor Presente – Valor anual

Cada una de ellas con su respectiva notación inversa.

Todo esto se resume en la ecuación fundamental de equivalencia.

De igual forma se aprendió a resolver las situaciones o problemas apoyándose en diversos métodos:

- Fórmulas deducidas
- Hojas de cálculo
- Función  $f_x$  de Excel
- Tablas de interés

Con el desarrollo de cada uno de los ejercicios a lo largo del capítulo se puede observar que existe un proceso a seguir para la realización y mejor comprensión de los problemas el cual es:

- Identifique cada uno de los datos que le suministra el ejercicio
- Grafique el diagrama de flujo
- Escriba la fórmula o ecuación que necesitará para la solución del problema
- Realice los respectivos cálculos
- Analice los resultados obtenidos y de respuesta al cuestionamiento del problema.

## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por si mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a si mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.

**AUTOEVALUACIÓN V**

1. *¿Qué es el interés compuesto?*
2. *¿Qué es el periodo de capitalización?*
3. *¿Qué diferencia existe entre interés compuesto e interés simple?*
4. *¿Qué efecto tiene la frecuencia de capitalización del interés sobre el costo del dinero?*
5. Coloque el factor de interés faltante:
  - a.  $(P/A, i\%, n) ( \quad ) = (F/A, i\%, n)$
  - b.  $(F/P, i\%, n) (A/F, i\%, n) = ( \quad )$

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO

### ACTIVIDAD DE REFUERZO

1. Elabore una gráfica donde se compare el interés simple e interés compuesto.
1. Investigue como se resuelven los problemas cuando el número de periodos es mayor que los presentados en la tabla, por ejemplo como calcularía el valor del factor:  $(P/F, 2\%, 2)^{80}$
2. ¿Cómo se calcula comercialmente (En bancos, en corporaciones, etc) los intereses cuyo periodo de capitalización no sean periodos enteros?. Por ejemplo cuando se debe cancelar una deuda al cabo de 2 años 5 meses.
3. Investigue cuál es el nombre que recibe cada una de las expresiones simbólicas obtenidos de la expresión matemáticas
4. Elabore una gráfica que le permita visualizar la diferencia entre interés compuesto e interés simple
5. Analice los efectos de las variaciones de las tasas de interés y de los números de periodos sobre los factores de interés compuesto. Realice su análisis completando el siguiente cuadro.

	<b>FACTORES QUE TRAEN AL PRESENTE</b>		<b>FACTORES QUE LLEVAN AL FUTURO</b>	
	<i>Si aumenta <math>i</math></i>	<i>Si aumenta <math>n</math></i>	<i>Si aumenta <math>i</math></i>	<i>Si aumenta <math>n</math></i>
P/F	Disminuye		-	-
F/P	-	-		
A/F		Disminuye	-	-
F/A	-	-	Aumenta	Aumenta
P/A		Aumenta	-	-
A/P	-	-		



## BIBLIOGRAFÍA

BACA, Gabriel. Fundamento de Ingeniería Económica. México: McGraw-Hill, 1994.

DEGARMO, Paul. Ingeniería Económica. México: Prentice Hall, 1998.

INFANTE, Arturo. Evaluación financiera de Proyectos de inversión. Colombia: Grupo Editorial Norma, 1997.

MARULANDA, Luis. Decisiones Financieras y Costo del Dinero en Economías Inflacionarias. Colombia: Editorial norma, 1985.

PORTUS, Lincoyán. Matemáticas Financieras. Colombia: McGraw- Hill, 1997.

RAMIREZ, Eugenio. Ingeniería Económica, "Caso Colombiano". Colombia: Universidad Eafit, 1984.

TARQUIN, Anthony. Ingeniería Económica, Colombia: McGraw – Hill, 1999.

THUESEN, H. Ingeniería Económica. Colombia: Prentice Hall, 1999.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones. México: McGraw-Hill, 1997.

VILLALOBOS, José Luis. Matemáticas financieras. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.



# **TASA DE INTERÉS NOMINAL Y EFECTIVA**

Es mejor consultar las cosas  
con la almohada a tiempo, que  
perder el sueño por sus  
causas después.

[Baltasar Gracían]

Y  
A  
P  
I  
T  
U  
O

VI

## OBJETIVOS

### Objetivo General

Identificar e interpretar las diferencias que existen entre tasa nominal y tasa efectiva, para aplicarlas en los cálculos económicos, utilizando las fórmulas de equivalencia matemática.

### Objetivos Específicos

- Comprender el concepto de tasa nominal.
- Conocer la definición de interés efectivo.
- Identificar las diferencias entre estas tasas de interés.
- Aprender la manera de obtener tasas equivalentes.
- Identificar el tipo de tasa de interés que se ofrece en las diferentes situaciones económicas.

## CONDUCTA DE ENTRADA

El siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas (F) ó son Verdaderas (V)
  - a. Se obtiene el mismo capital final cobrando un interés mensual que uno trimestral. ( )
  - b. La tasa de interés puede ser aplicada al inicio o al final del periodo. ( )
  - c. La tasa efectiva es considerada una tasa referencial. ( )
  - d. 30% semestral capitalizable mensualmente es un ejemplo de interés efectivo. ( )
  - e. Las fórmulas del interés simple sólo pueden ser usadas cuando se cuenta con un interés nominal. ( )
  - f. Las tasas equivalentes son aquellas tasas de interés que aunque teniendo diferentes periodos de convertibilidad y aplicadas sobre un mismo monto y un mismo lapso de tiempo producen el mismo resultado al final de un periodo. ( )
  - g. Todo préstamo de dinero sólo se protege a través de la tasa de interés. ( )
  - h. El interés periódico es equivalente a un interés efectivo cuyo periodo es inferior a un año. ( )
  - i. La tasa nominal se caracteriza por estar constituida por un periodo de referencia o base y un periodo de aplicación. ( )
  - j. El interés efectivo siempre será mayor que el interés nominal. ( )
  - k. Para realizar cálculos con las tasas de interés no es necesario que estas estén en las mismas unidades de tiempo. ( )
  
2. Identifica si las siguientes tasas son nominales (r) o Efectivas (E)
  - a. 36% semestral. ( )
  - b. 35% anual capitalizable diariamente. ( )
  - c. 30% semestral convertible mensualmente. ( )
  - d. 10% anual
  - e. 25% capitalizable trimestralmente. ( )
  - f. 8% anual convertible semestralmente. ( )

## RESPUESTAS CORRECTAS

1.

- a) F
- b) V
- c) F
- d) F
- e) V
- f) V
- g) F
- h) V
- i) V
- j) V
- k) F

2.

- a) E
- b) r
- c) r
- d) E
- e) E
- f) r

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

## **ACTIVIDADES PREVIAS**

- 1) Investigar que tasas cobran los bancos por manejo de las tarjetas de crédito.
- 2) Investigar que tipos de costos adicionales al interés existen en la financiación de un crédito.
- 3) Consultar en el comercio local el precio de un artículo de contado y a plazos, el recargo a plazos y la cuota inicial; además infórmese sobre los descuentos por pago de contado y por pronto pago.
- 4) Leer lo relacionado con el interés nominal y efectivo en el libro de su preferencia y desarrolle un banco de preguntas.
- 5) Realizar un ensayo del artículo “El plástico a cero costo”, donde relacione la importancia de conocer el tipo de interés. Revista finanzas personales No. 110.

## 6. TASA DE INTERÉS NOMINAL Y EFECTIVA

El hombre actual vive en un mundo dinámico que ofrece cambios permanentes, brindando diferentes oportunidades de inversión, valoración o desvalorización de sus recursos, pero para analizarlas debe hacer uso de los conocimientos sobre los tipos de interés empleados, tanto en el comercio como en la banca, porque no se puede lanzar al mundo de las finanzas sin conocer las relaciones de las cantidades de dinero invertidas y la existencia de una tasa de interés, ya sea simple o compuesta, que le asegure su inversión a través del tiempo.

Pero estas tasas de interés pueden expresarse, según la figura 6-1, de dos formas: interés nominal e interés efectivo; cada una de ellas con sus respectivas subdivisiones y nomenclatura los cuales darán una visión más clara de la viabilidad de las alternativas de inversión o financiación, como se verá a continuación.

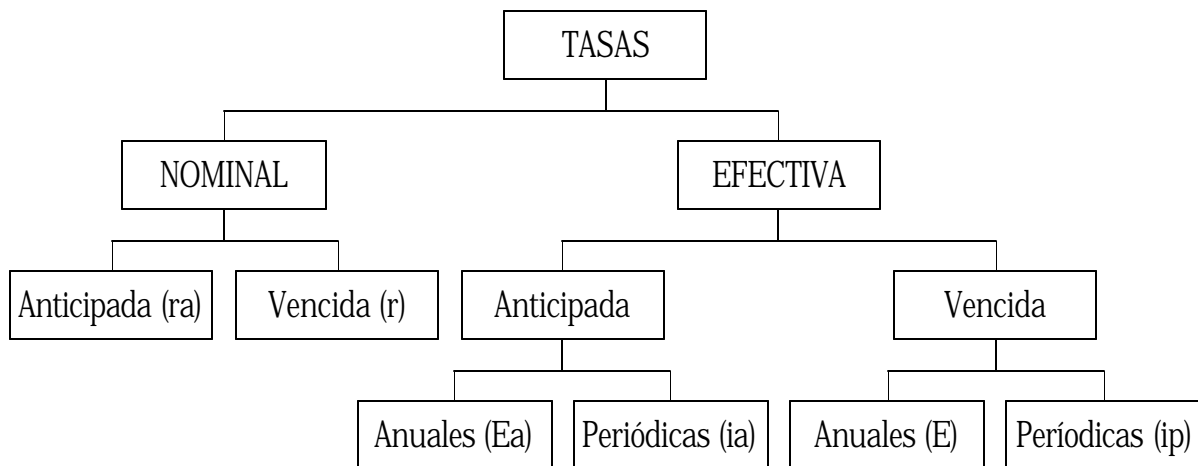


Figura 6-1. Clases de tasas de interés

### 6.1. TASA DE INTERÉS NOMINAL

Es una tasa referencial que se caracteriza por mencionar el interés del periodo y el número de periodos al año. Se denota con la letra  $r$

**Para el cálculo de esta tasa de interés no se tiene en cuenta el valor del dinero a través del tiempo, al igual que en el cálculo del interés simple. Este interés nominal se obtiene o se paga periódicamente pero no se capitaliza (no se reinvierte).**

Se acostumbra a expresarse como una tasa referida a una base anual (explícita o tácita), pero inmediatamente seguida del periodo real de aplicación, composición o capitalización.

Por ejemplo:

<i>ENUNCIADO DE INTERÉS</i>	<i>PERÍODO BASE</i>	<i>PERÍODO DE CAPITALIZACIÓN</i>
5% anual compuesto mensualmente	Anual	Mensual
8% compuesto mensualmente	Anual (Tácita)	Mensual
10% semestral compuesto mensualmente	Semestre	Mensual
15% nominal trimestral compuesto mensualmente	Trimestral	Mensual
2% mensual capitalizado diariamente	Mensual	Diariamente
1% mensual capitalizado diariamente y por anticipado	Mensual	Diariamente y por anticipado

Por ser el interés nominal una tasa de referencia, su valor es aparente ya que no refleja el verdadero costo de la transacción, es decir, al ofrecer una tasa nominal del 2.3% trimestral,



se debe entender que en cada uno de los cuatro trimestres del año, se ganará un interés de 2.3%, por tanto en el año se cobrará o pagará un interés del 9.2% que se liquidará trimestralmente; y por esto se dice, que la tasa de interés nominal no es real, ya que no tiene en cuenta el valor del dinero en el tiempo al no capitalizar los intereses. Capítulo VI

de interés nominal es la que frecuentemente se declara en las operaciones financieras y tiene como objetivo fundamental servir como punto de referencia.

En conclusión se puede decir que la tasa de interés nominal es aquella que dice cuanto se debe pagar por el alquiler del dinero.

## 6.2. TASA DE INTERÉS EFECTIVA

Es aquella tasa que se utiliza para determinar el interés periódico que efectivamente debe sumarse al capital en el momento de la liquidación. Esta tasa especifica el interés y el periodo de capitalización.

# Se considera que el interés efectivo es la tasa real de interés de un periodo.

El análisis de la tasa de interés efectiva se subdivide en:

- Anuales (E). Es la que indica el interés real cuando el periodo de aplicación es un año, las decisiones en el mercado financiero utilizan como tasa de referencia la tasa efectiva anual.
- Periódicas ( $i_p$ ). Es la tasa efectiva que se emplea cuando los periodos de capitalización son inferiores a un año, un semestre, un trimestre o un mes.

Se tratan como tasas de interés efectiva toda las tasas que no identifican el periodo de capitalización y si lo tienen explícito debe ir acompañado de la palabra efectivo, de lo contrario se considerará como una tasa nominal.

Ejemplo:

12% anual

15% anual efectivo compuesto mensualmente

Lo cual deduce que todas las tasas de interés empleadas en los ejercicios del capítulo anterior son consideradas efectivas.

Además el interés efectivo hace referencia a cuanto se tiene que cancelar. El interés nominal, mientras el interés nominal no sea un número entero se pagará un poco más.

El interés efectivo siempre será mayor que el nominal en la misma base de referencia ya que este último genera interés sólo sobre el capital prestado; por tanto con el interés efectivo el capital obtenido al final del periodo será mayor mientras mayor sea la frecuencia de cobro de los intereses ganados.

Cuando se habla de interés efectivo, la tasa de interés mensual no es equivalente a la que resulta de dividir la tasa anual entre 12. Por tanto una rentabilidad anual del 48%, no es equivalente a una tasa mensual del 4%, es decir,  $48/12$ ; en esto radica la diferencia entre interés nominal e interés efectivo.

Tomando como apoyo las definiciones anteriores, se puede afirmar, que se debe emplear el interés efectivo para realizar cálculos basados en las ecuaciones del interés compuesto y aquellos cálculos que se basan en las fórmulas del interés simple se harán a partir del interés nominal.

Por lo general al momento de realizar cálculos basados en estos intereses se encuentran que el periodo de capitalización (periodo en cual los intereses se suman al monto del antiguo capital) y el periodo de pago (frecuencia de las entradas y salidas dentro del intervalo de un año), no son iguales; y las fórmulas o ecuaciones que permiten llevar a cabo esos cálculos parten del supuesto que estas dos variables deben tener las mismas unidades de tiempo, por tanto se deben buscar ecuaciones que permitan hacer equivalentes esos periodos.

### 6.3. COMISIÓN

Además de las tasas de interés existen otros recargos que se hacen a los diferentes tipos de financiación, aumentando así su costo.

Estos recargos son denominados agregados o arandelas financieras, que pueden ser por conceptos tales como gastos de administración, saldo mínimo en cuentas bancarias o de ahorros, gastos legales o de papelería, descuentos o simplemente comisiones, dependiendo del bien que se este negociando y del prestamista con el cual se ha transado la negociación. Pero en general estos pagos adicionales sólo incrementan el interés efectivo real del capital recibido.

Comúnmente estas tasas adicionales se descuentan anticipadamente del efectivo que recibe el prestatario y es un porcentaje inicial y único, dependiendo del monto del crédito. **Capítulo VI**

Es importante tener siempre presente estos costos adicionales, para así poder determinar el verdadero costo de la financiación o inversión.

## 6.4. MOMENTO DE APLICACIÓN

Para analizar la conveniencia de las diferentes situaciones financieras es fundamental saber en que momento del periodo se pagarán o cobrarán los intereses, ya que dependiendo de esto el análisis tomará rumbos diferentes, pues el momento de generación de los intereses dentro del periodo determina si los intereses ofrecidos son por anticipado o al vencimiento.

### 6.4.1. Interés anticipado

Como se mencionó en el capítulo anterior la tasa de interés anticipada es aquella que se pacta cobrar o pagar al inicio del periodo.

Esta modalidad de interés es muy empleada por los intermediarios financieros (bancos u otras entidades financieras) cuando conceden créditos. Este interés incrementa o aumenta de manera significativa los intereses ganados por el prestatario.

El negociar con este interés implica el hecho de no recibir la totalidad del crédito, ya que es descontado de forma inmediata el dinero correspondiente a los intereses del primer período de pago pactado.

En este tipo de interés es imprescindible especificar que la liquidación se realiza en forma anticipada, a diferencia de la tasa vencida la cual puede ser expresada tácitamente. Por ejemplo 8% semestral anticipado y 36% anual anticipado.

Todas las fórmulas vistas anteriormente se aplican a intereses liquidados al final del periodo por tanto será necesario convertir los intereses anticipados en intereses vencidos.

Cuando la tasa de interés nominal se causa por adelantada se simboliza con  $r_a$ , pero si es el interés efectivo anual anticipado se denota con la letra  $E_a$ , y si es efectivo periódico anticipado se identificará con  $i_a$ .



### 6.4.2. Interés vencido

Al contrario del interés anticipado este interés vencido se cobra o se paga al final del periodo y se puede expresar sin el término interés vencido, por ejemplo: 8% semestral, 18% capitalizado mensualmente, etc.

Con esta modalidad de interés la persona que recibe el préstamo o el crédito tiene por lo menos un período (quince días, un mes, un trimestre, etc.) para disfrutar del dinero; pero además debe pensar como pagará los intereses generados al final de este lapso de tiempo, problema del que carece el empleador del interés anticipado porque éste los ha cancelado de antemano.

Si el interés vencido es nominal se simboliza con la letra  $r$ , si es un interés efectivo anual se denota con letra  $E$ , y si por el contrario es efectivo periódico se representa con  $i_p$ .

Es importante tener presente que la mayoría de las fórmulas financieras trabajan con tasas vencidas, por tanto si la tasa está dada en forma anticipada se debe transformar en su equivalente vencida.

## 6.5. TASAS EQUIVALENTES

A raíz de la necesidad de trabajar con tasas aplicadas en diferentes momentos en el periodo o con modalidades diferentes (nominal o efectivo), es indispensable incluir el término equivalencia, por esto aparecen las tasas efectivas equivalentes.

Son aquellas tasas de interés que teniendo diferentes periodos de convertibilidad o capitalización y aplicadas sobre un mismo monto en un mismo lapso de tiempo producen el mismo resultado al final de un periodo. Por ejemplo: El 36% efectivo anual es equivalente al 31.96% nominal anual capitalizado trimestralmente y a su vez al 29.59% nominal anual capitalizado trimestralmente y por anticipado.

La importancia de esta tasa radica en la necesidad de calcular las relaciones de equivalencia entre tasas nominales y tasas efectivas, así como la equivalencia entre tasas vencidas y anticipadas y viceversa, ya que la mayoría de las fórmulas emplean tasas efectivas

## 6.6. EXPRESIONES MATEMÁTICAS DE EQUIVALENCIA

Para poder transformar las tasas nominales y efectivas, según sea necesario, se hace indispensable conocer las relaciones que existen entre estas, por eso a continuación se conocerán las expresiones matemáticas que permiten relacionar los diferentes tipos de intereses.

### 6.6.1. Relación interés nominal e interés efectivo periódico ( $r - i_p$ )

Como se anotó en el capítulo anterior sólo se analizarán las situaciones financieras con base en el interés efectivo; por tal motivo toda tasa nominal será convertida a efectiva.

Las tasa nominales tienen la siguiente estructura:

$$r = \# \% \text{ Periodo base de referencia. Periodo de capitalización}$$

Ejemplo: 36% anual capitalizable mensualmente. En este caso el periodo de referencia es anual y el periodo de capitalización es mensual.

Por tanto el interés nominal esta regido por la siguiente ecuación:

$$r = i_p * t$$

Ecuación 6-1

Donde:

$r$  = Interés nominal por periodo de referencia

$i_p$  = Interés efectivo periódico

$t$  = Número de capitalizaciones o número de veces que un periodo de capitalización cabe en un periodo base de referencia.

### ***Ejercicio Práctico***

¿Cuál es la tasa efectiva periódica equivalente a una tasa nominal del 35% anual capitalizado trimestralmente?

$r = 35\%$  anual capitalizado trimestralmente  
 $t = 4$  trimestres

La solución de este problema la obtenemos despejando  $i_p$  de la ecuación 6-1, como se muestra seguidamente.

$$i_p = \frac{r}{t} = \frac{0.35}{4} = 0.0875 = 8.75\% \text{ trimestra l}$$

#### **6.6.2. Relación interés nominal e interés efectivo anual (r - E)**

Para la solución de este interrogante se empleará la ecuación 5-1, del capítulo de Interés Compuesto, la cual recordaremos seguidamente.

$$F = P (1 + i)^n$$

Si asumimos que:  $n = t$  e  $i = i_p$  y reemplazamos  $i_p$  por  $i_p = \frac{r}{t}$

Al sustituir todo lo anterior en la ecuación base (5-1), llegaremos a la ecuación 6-2.

$$F = P \left( 1 + \frac{r}{t} \right)^t \quad \text{Ecuación 6-2}$$

Por otro lado, si utilizamos otra tasa y tiempo equivalentes a los anteriores y se emplea la misma fórmula de interés compuesto pero empleando una tasa de interés efectiva, y un periodo de tiempo  $n = 1$  tenemos que:

$$F = P (1 + E)^1 \quad \text{Ecuación 6-3}$$

Donde se sabe que  $t$  es equivalente a un periodo (generalmente un año).

**Al igualar las ecuaciones 6-2 y 6-3, obtendremos una equivalencia denotada en la ecuación 6-4.**

$$\left(1 + \frac{r}{t}\right)^t = 1 + E \quad \text{Ecuación 6-4}$$

A partir de la ecuación 6-4, calculamos el valor correspondiente a  $E$ , a fin de establecer una ecuación (6-5) que determine la relación entre una tasa de interés nominal y una efectiva.

$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1 \quad \text{Ecuación 6-5}$$

Si por el contrario, se desea convertir una tasa efectiva anual a una tasa nominal, sólo se despejará  $r$  de la ecuación 6-5, quedando de la siguiente forma:

$$r = \left[ (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1 \right] t \quad \text{Ecuación 6-6}$$





**Ejercicio Práctico**

1. Calcule el interés efectivo anual de las siguientes tasas:

- a. 32% anual compuesto trimestralmente
- b. 15% anual compuesto mensualmente

a.

$r = 32\%$  anual compuesto trimestralmente

$t = 4$  (un año tiene 4 trimestres)

$E = ?$

**El ejercicio brinda una tasa de interés nominal la cual debe convertirse en efectiva, por tanto, debemos emplear la ecuación 6-5.**

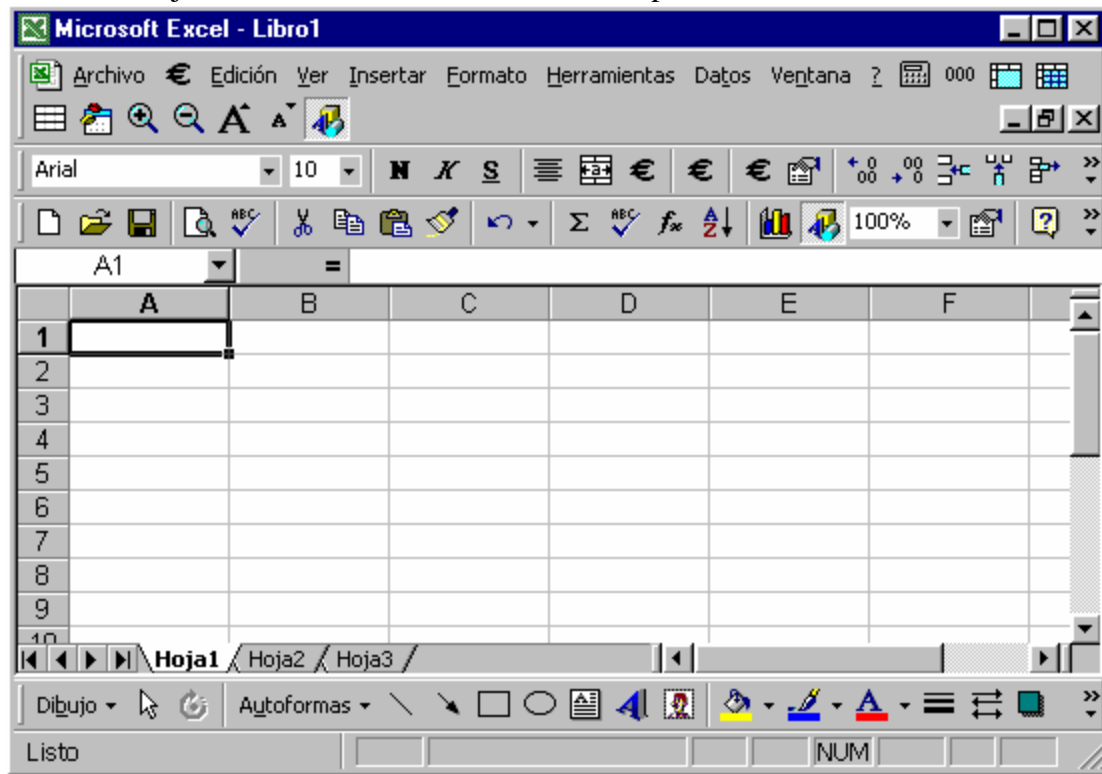
$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$$

$$E = \left(1 + \frac{0.32}{4}\right)^4 - 1$$

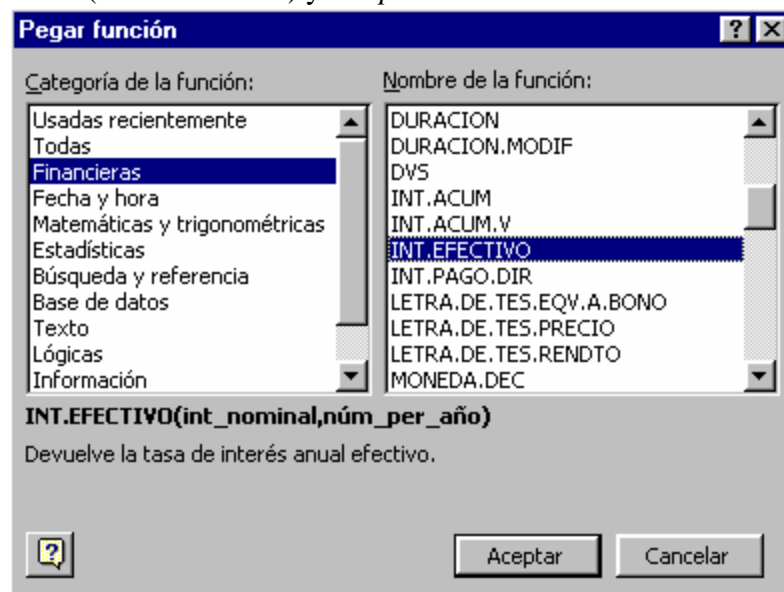
$$E = 0.3604 = 36.04\% \text{ efectivo anual}$$

De igual forma estos ejercicios pueden ser resueltos basándonos en la Hoja de Cálculo EXCEL, si se cumple el procedimiento indicado a continuación.

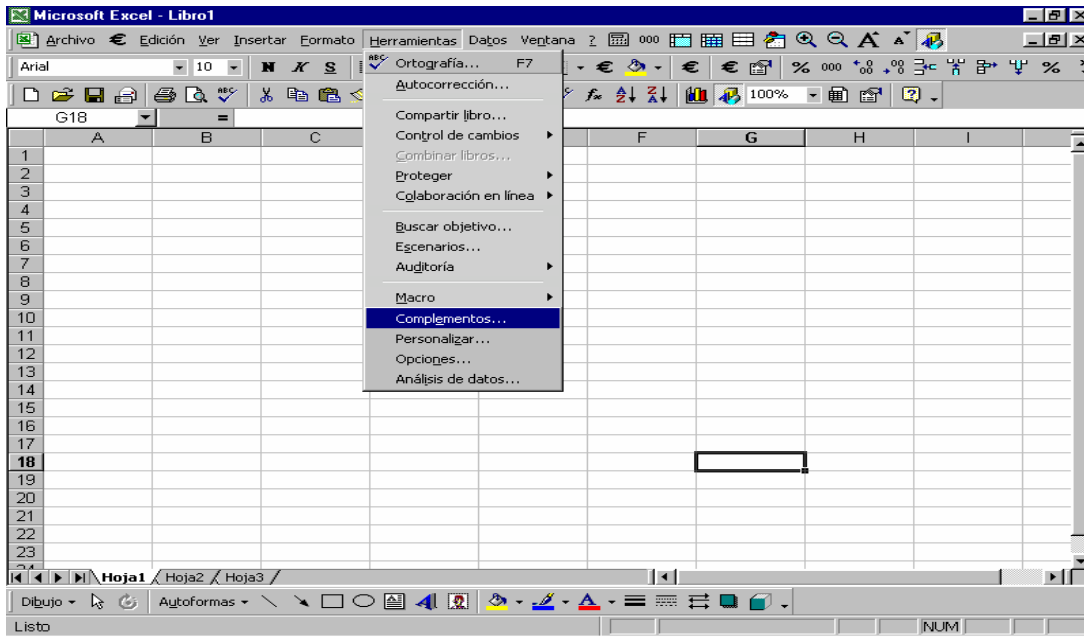
1. Abra la hoja de cálculo en la cual realizará las operaciones.



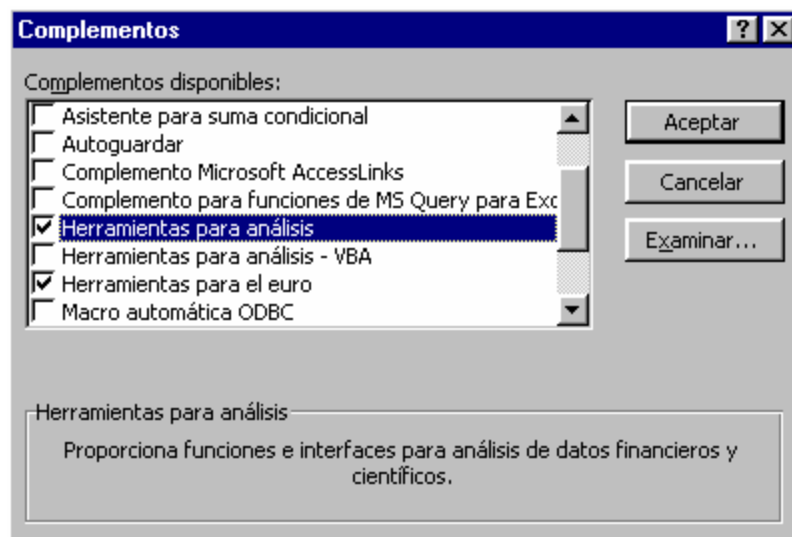
2. Desplegar la opción *fx*, la cual se encuentra en el menú *Insertar* función *fx*. En este nuevo cuadro seleccione la categoría de la función correspondiente a *Financiera* y escoja la función *Int. Efectivo* (interés efectivo) y *Aceptar*.



Si al seguir este paso nota que en su programa no aparece la opción de interés efectivo; deberá dirigirse hacia el menú *Herramientas* y seleccionar la opción de *Complementos*



El cual despliega un cuadro de dialogo sobre el que se marcar la opción *Herramientas para análisis*. Esto con el fin de activar las funciones necesarias para las aplicaciones financieras.



Luego aparecerá el siguiente cuadro; el cual pide el valor del interés nominal, dato proporcionado por el ejercicio, al igual que el número de periodos al año en los cuales se pagarán los intereses.

INT.EFECTIVO

Int\_nominal 0.32 = 0.32

Núm\_per\_año 4 = 4

= 0.36048896

Devuelve la tasa de interés anual efectivo.

**Núm\_per\_año** es el número de pagos de interés por año.

Resultado de la fórmula = 0.36048896

Aceptar Cancelar

Hecho estos pasos al *Aceptar* brindará el valor del interés efectivo equivalente al interés nominal conocido.

b. 15% anual compuesto mensualmente

$r = 15\%$  anual compuesto mensualmente

$t = 12$

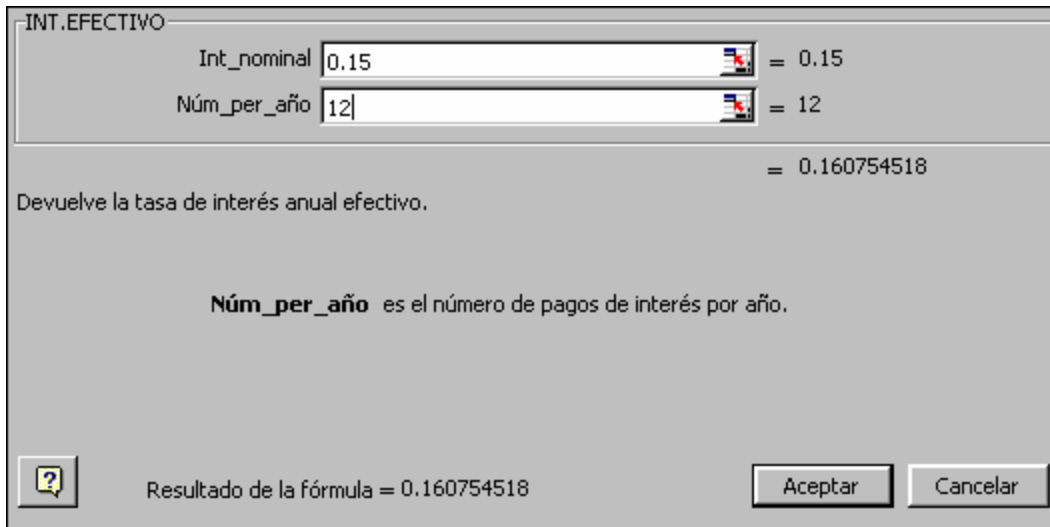
$E = ?$

$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$$

$$E = \left(1 + \frac{0.15}{12}\right)^{12} - 1$$

$$E = 0.1607 = 16.07\% \text{ efectivo anual}$$

Apoyándose en la Hoja de Cálculo Excel sería:



2. ¿Cuál es la tasa nominal capitalizable trimestralmente equivalente a una tasa efectiva del 32% semestral?

$$E = 32\% \text{ semestral}$$

$$t = 2 \text{ semestres}$$

Empleamos en este caso la ecuación 6-6 ya que se debe convertir una tasa semestral a una trimestral.

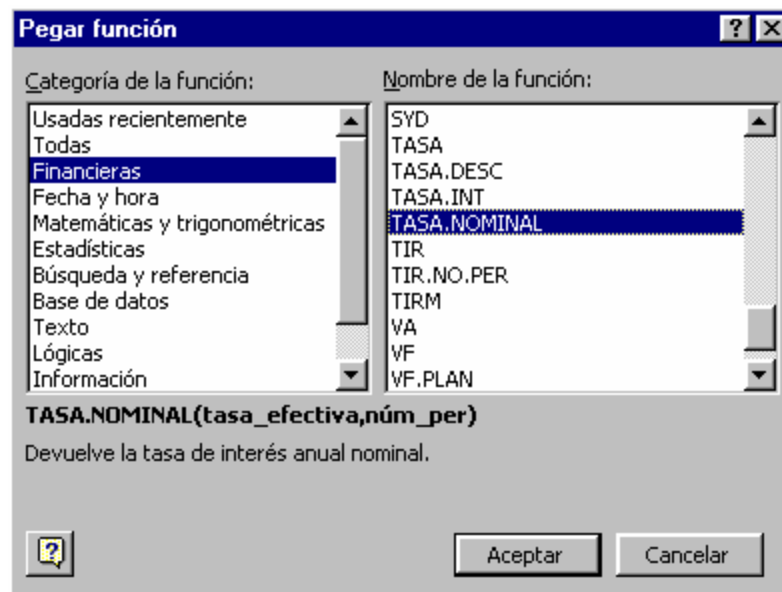
$$r = \left[ (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1 \right] t$$

$$r = \left[ (1 + 0.32)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] * 2$$

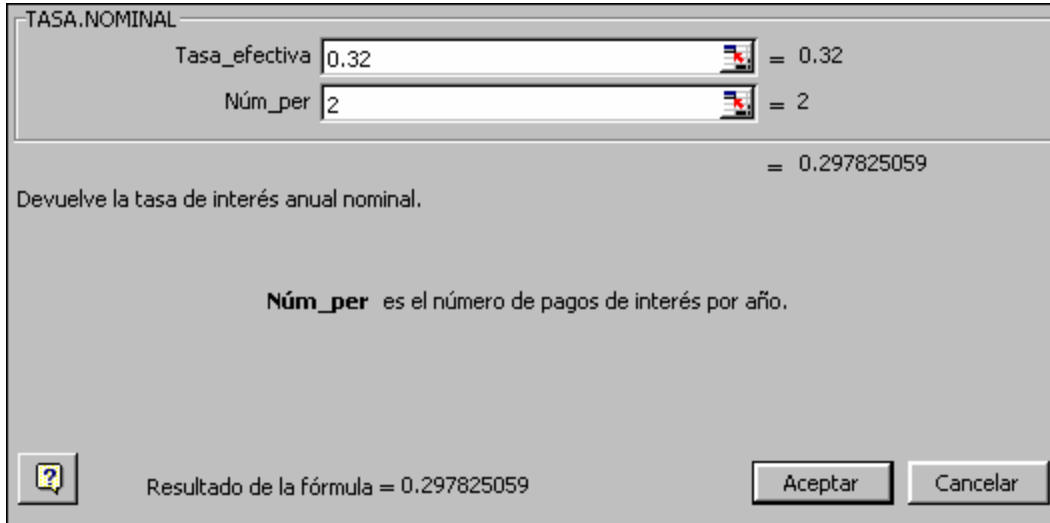
$$r = 0.297 = 29.7\% \text{ semestral capitalizable trimestralmente}$$

Apoyándose de Excel se soluciona así:

1. Abra la hoja de cálculo en la cual realizará las operaciones.
2. Desplegar la opción *fx*, que se encuentra en el menú *Insertar* función *fx*, en este cuadro selecciona la categoría de la función correspondiente a *Financiera* y escoja la función *Tasa Nominal* y *Aceptar*.



3. Hecho lo anterior el programa mostrará el cuadro que se muestra a continuación; el cual pide el valor del interés efectivo, dato proporcionado por el ejercicio, al igual que el número de periodos al año en los cuales se pagarán los intereses.



## De esta forma se obtiene igual resultado.

### 6.6.3. Relación interés efectivo anual e interés efectivo periódico( $E - i_p$ )

La ecuación que describe esta relación se obtendrá a partir de las ecuaciones 6-1 y de la 6-5

$$r = i_p * t \quad \text{y} \quad E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$$

De la ecuación 6-1 se despeja  $i_p$  y se reemplaza en la ecuación 6-5, para obtener la relación que se busca en este ítem, como se muestra a continuación:

$E = (1 + i_p)^t - 1$

Ecuación 6-7

Con esta fórmula se puede convertir un interés efectivo de un periodo menor a uno mayor; y si se desea lo contrario, es decir, transformar el interés efectivo de un periodo mayor a uno menor se despeja  $i_p$  de la ecuación obteniendo la ecuación 6-8.





$$i_p = (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Ecuación 6-8

### ***Ejercicio Práctico***

1. Convertir una tasa de 27% efectivo semestral a efectivo trimestral

E = 27% semestral  
 t = 2 semestres  
 $i_p = ?$

$$i_p = (1 + 0.27)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$i_p = 0.1269 = 12.69\% \text{ trimestral}$$

2. Transformar una tasa efectiva mensual del 2.3% en una efectiva anual

$i_p = 2.3\%$  mensual  
 t = 12 meses  
 E = ?

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.023)^{12} - 1$$

$$E = 0.3137 = 31.37\% \text{ anual}$$

### 6.6.4. Relación interés nominal anticipado e interés periódico anticipado ( $r_a - i_a$ )

Para determinar esta relación suponga que le han ofrecido un interés nominal anticipado; y usted desea conocer a que tasa efectiva periódica equivale. Esto se hace mediante la ecuación 6-9:

$$r_a = i_a * t \quad \text{Ecuación 6-9}$$

Ésta es la fórmula del interés nominal anticipado. Si se despeja el interés efectivo anticipado tenemos:

$$i_a = \frac{r_a}{t} \quad \text{Ecuación 6-10}$$

Donde:

$i_a$  = Interés efectivo periódico anticipado.

$r_a$  = Interés nominal anticipado.

#### *Ejercicio Práctico*

¿Cuál es la tasa de interés efectiva anticipada que hay en una tasa nominal del 15% anual capitalizable trimestralmente y por anticipado?

$r_a = 15\%$  anual trimestre anticipado

$t = 4$  trimestres

$i_a = ?$

$$i_a = \frac{r_a}{t}$$

$$i_a = \frac{0.15\%}{4} = 3.75\% \text{ trimestre anticipado}$$

### 6.6.5. Relación interés anticipado e interés vencido ( $i_a - i_p$ )

Para llegar a esta relación, parta del supuesto que hoy usted solicita un préstamo al banco por una cantidad de dinero  $P$  y este se lo presta con un interés efectivo periódico pagado por adelantado; por tal motivo hoy mismo tiene que pagarle al banco  $Pi_a$ , por esto sólo recibirá una suma de  $(P - Pi_a)$ ; pero al final del periodo debe regresarle la entidad la cantidad  $P$  solicitada.

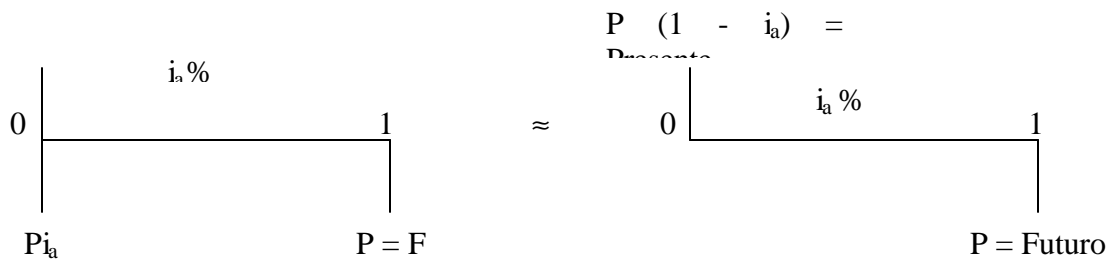
$P$  = Valor Futuro

$P - Pi_a$  = Valor presente

$i_a$  = Interés efectivo periódico anticipado, el cual será equivalente al interés vencido ( $i_p$ ) al final del periodo

$n$  = se asumirá igual a 1, ya que es un solo periodo el que se está estudiando.

Esto se resuelve haciendo una analogía de esta definición con la ecuación 5-1.



Aplicando la fórmula se obtiene:

$$P = (P + Pi_a) (1 + i_p)^1 = P (1 + i_a) (1 + i_p)$$

Al simplificar la cantidad  $P$  de dinero se logra la siguiente igualdad:

$$1 = (1 + i_a) (1 + i_p)$$

A partir de esta igualdad podemos obtener el valor del interés anticipado mediante el interés vencido si se despeja  $i_a$ , llegando a la ecuación 6-11.

$$i_a = \frac{i_p}{1 + i_p} \quad \text{Ecuación 6-11}$$

Esta ecuación es sólo aplicable cuando se cuenta con intereses efectivos; si no es así, entonces se debe buscar la equivalencia entre el interés con el que cuenta y el interés efectivo.

Si lo que busca es calcular un interés periódico vencido a partir de un interés periódico anticipado, sólo se despeja  $i_p$  de la fórmula 6-11, generando la siguiente ecuación:

$$i_p = \frac{i_a}{1 - i_a} \quad \text{Ecuación 6-12}$$

### *Ejercicio Práctico*

¿Cuál sería la tasa equivalente de 14.5% trimestral pagada al final del periodo, si ésta se pagará por anticipado?

$i_p = 14.5\%$  trimestral

$$i_a = \frac{i_p}{1 + i_p}$$

$$i_a = \frac{0.145}{1 + 0.145}$$

$$i_a = 0.126 = 12.6\% \text{ trimestre anticipado}$$

### 6.6.6. Relación interés periódico anticipado e interés efectivo ( $i_a - E$ )

Para llegar a la obtención de ésta relación matemática se traerá a colación la ecuación 6-5 que relaciona el interés efectivo vencido con el interés nominal.

$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$$

Pero como  $(r / t)$  es equivalente a una tasa efectiva periódica vencida, ésta se transformará en una tasa anticipada mediante la ecuación 6-12.

$$i_p = \frac{i_a}{1 - i_a}$$

Al reemplazar ahora la ecuación 6-12 en la 6-5, se obtendrá la ecuación que caracteriza a esta sección.

$$E = \left(1 + \frac{i_a}{1 - i_a}\right)^t - 1 \quad \text{Ecuación 6-13}$$

Se resuelve la operación dentro del paréntesis de la ecuación 6-13 y se obtiene la ecuación que relaciona el interés efectivo vencido con el interés efectivo anticipado.

$$E = (1 - i_a)^{-t} - 1 \quad \text{Ecuación 6-14}$$

**Ejercicio Práctico**

Convierta una tasa del 6% efectiva mensual anticipada en efectiva anual

$i_a = 6\%$  efectiva mensual  
 $E = ?$   
 $t = 12$

$$E = (1 - i_a)^{-t} - 1$$

$$E = (1 - 0.06)^{-12} - 1$$

$$E = 28.08\% \text{ anual}$$

**6.6.7. Relación interés nominal anticipado e interés efectivo (  $r_a - E$  )**

Para encontrar esta relación se debe tener en cuenta la ecuación 6-10 y la 6-14.

$$i_a = \frac{r_a}{t} \quad \text{y} \quad E = (1 - i_a)^{-t} - 1$$

Reemplace la ecuación 6-10 en la 6-14, para obtener la relación en estudio.

$$E = \left(1 - \frac{r_a}{t}\right)^{-t} - 1 \quad \text{Ecuación 6-15}$$

**Ejercicio Práctico**

Convertir una tasa de 11.3% nominal anual trimestre anticipado en efectiva anual

$r_a = 11.3\%$  anual trimestre anticipado  
 $t = 4$  trimestres

$$E = \left( 1 - \frac{r_a}{t} \right)^{-t} - 1$$

$$E = \left( 1 - \frac{0.113}{4} \right)^{-4} - 1$$

$$E = 0.1214 = 12.14\% \text{ efectiva anual}$$

**6.6.8. Relación comisión e intereses pagados por anticipado ( $i_c - i_a$ )**

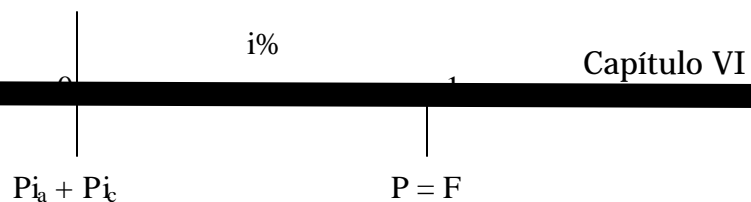
Para determinar cual será la ecuación matemática que describirá ésta relación debe suponer la siguiente situación. Hoy el banco le autoriza un préstamo (P), pero usted debe pagar un interés efectivo anticipado ( $i_a$ ) por el préstamo, además una comisión ( $i_c$ ) por estudio del crédito, ambos deben ser cancelados por anticipados; este préstamo debe ser pagado al cabo de un periodo.

P = Valor Futuro

$P - (P i_a + P i_c) = \text{Valor presente}$

$i_a$  = Interés efectivo periódico anticipado, el cual será equivalente al interés vencido (i) al final del periodo

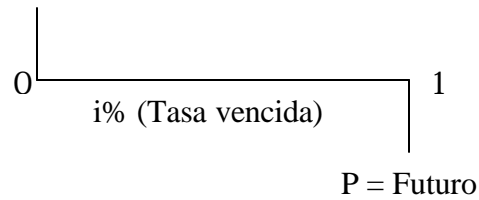
n = se asumirá igual a 1, ya que es un solo periodo el que se esta estudiando.



Esto es equivalente a:



$$P - (P i_a + P i_c) = P (1 - i_a - i_c) = \text{Presente}$$



Solucionando esta situación se obtendrá lo siguiente:

$$P = P (1 - i_a - i_c) (1 + i)$$

De esta ecuación se simplifican las P y se despeja i

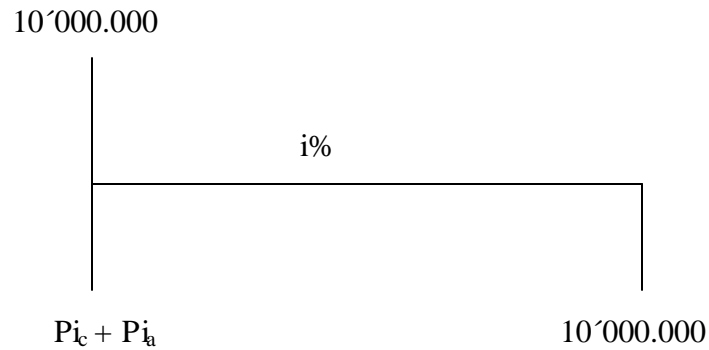
$$1 = (1 - i_a - i_c) (1 + i)$$

$$\boxed{i = \frac{i_a + i_c}{1 - (i_a + i_c)}} \quad \text{Ecuación 6-16}$$

### Ejercicio Práctico

El señor Juan Rodriguez solicita al banco un préstamo de \$10'000.000, para comprar un carro, el cual cancelaría al cabo de cinco años. El banco concede el préstamo pero cobrará una tasa de interés del 14% semestral anticipada además de una comisión del 10% cobrada una sola vez sobre el valor del préstamo. ¿Cuál es la tasa de interés que realmente pagaría el Señor Rodriguez al banco?

$P = \$10'000.000$   
 $i_c = 10\%$   
 $i_a = 14\%$  semestral anticipado



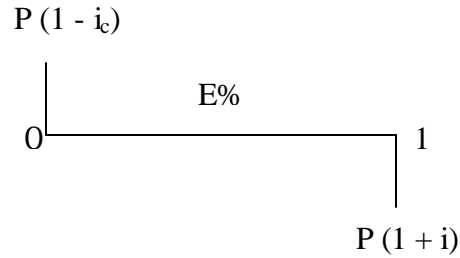
$$i = \frac{i_a + i_c}{1 - (i_a + i_c)}$$

$$i = \frac{0.14 + 0.10}{1 - (0.14 + 0.10)}$$

$$i = 0.3157 = 31.57\% \text{ semestral vencida}$$

### 6.6.9. Relación comisión por anticipado e interés vencido ( $i_c - i$ )

Esta relación se obtendrá a partir de los conocimientos que sean adquirido hasta ahora, ya que se supondrá que se cobra un interés por comisión al inicio del periodo y un interés por el préstamo del dinero al final del mismo, sabido esto se determinará cuál es el interés que se cobrará en el período.



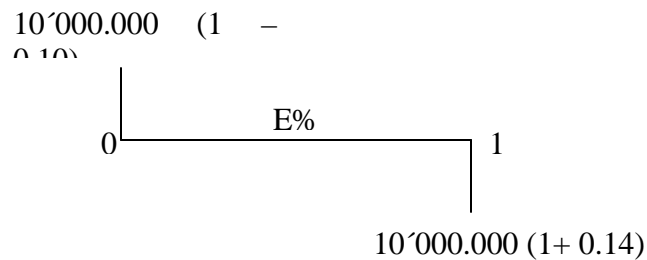
$$P(1 + i) = P(1 - i_c)(1 + E)$$

Se simplifican los P y se despeja E

$$E = \frac{i + i_c}{1 - i_c} \quad \text{Ecuación 6-17}$$

### Ejercicio Práctico

¿Cuál será el interés total que estaría cobrando el banco al Señor Rodriguez si la comisión fuera del 10%, y el interés por el préstamo del 14% anual vencido?



$$E = \frac{i + i_c}{1 - i_c}$$

$$E = \frac{0.14 + 0.10}{1 - 0.10}$$

$$E = 0.2666 = 26.66\% \text{ anual}$$

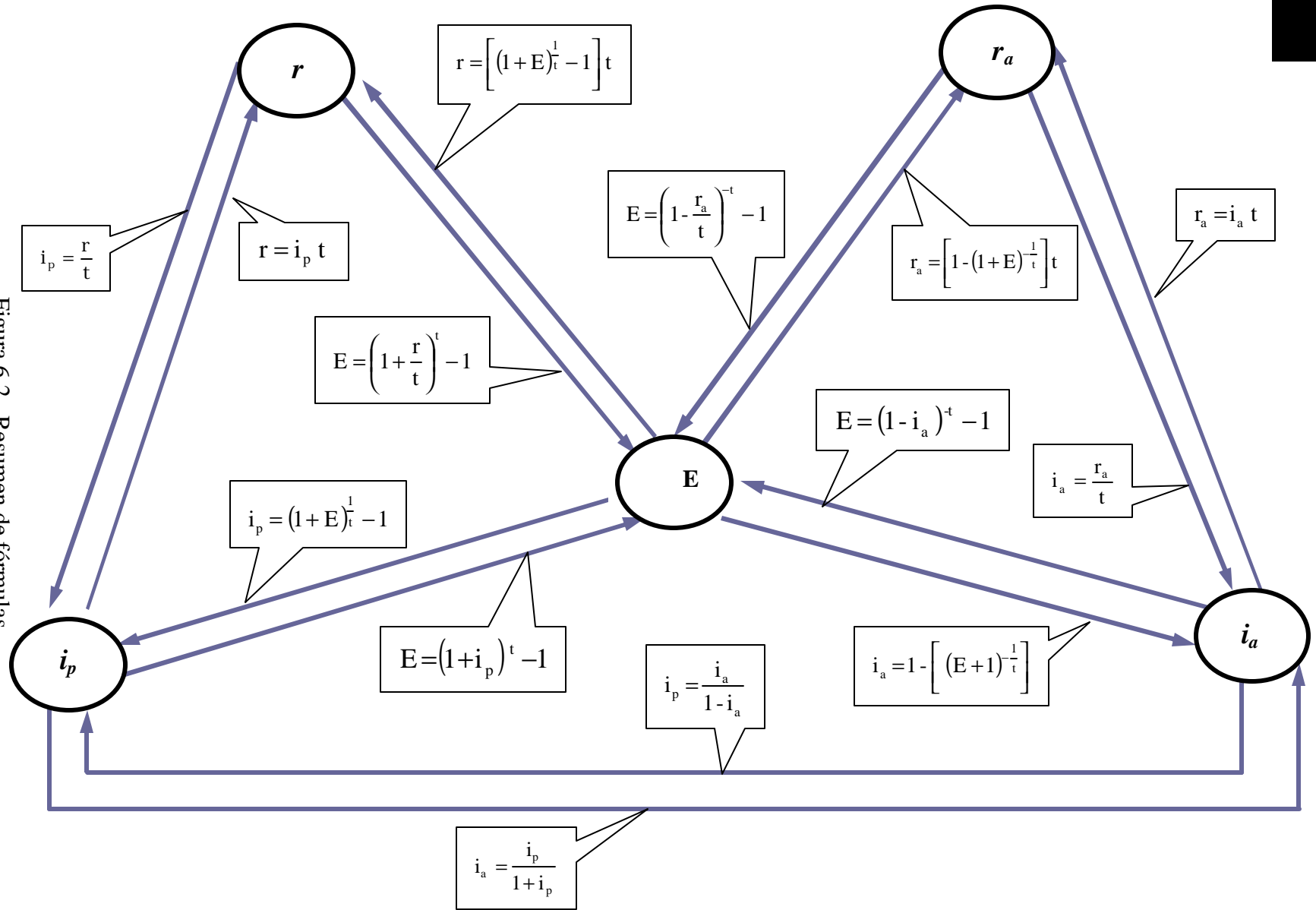


Figura 6-2. Resumen de fórmulas.

## 6.7. RESUMEN DE FÓRMULAS

A continuación se recordará el significado de cada una de las ecuaciones vistas a lo largo de este capítulo, las cuales se resumen en la figura 6-2.

$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$       Convierte una tasa nominal en efectiva quedando la efectiva con igual periodo base de la tasa nominal.

$i_p = (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1$       Convierte una tasa de interés efectiva de un periodo mayor a uno menor.

$r = i_p \cdot t$       Convierte una tasa de interés efectiva periódica a una tasa nominal, quedando la nominal con un periodo base igual a la efectiva.

$i_p = \frac{r}{t}$       Convierte una tasa de interés nominal a una tasa efectiva periódica, quedando la efectiva con el mismo periodo de capitalización.

$r = \left[ (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1 \right] \cdot t$       Convierte una tasa de interés efectiva anual a una tasa nominal cuyo periodo de capitalización es igual a t.

$E = (1 + i_p)^t - 1$       Convierte la tasa de interés efectiva de un periodo inferior a uno superior, quedando esta con un periodo base igual periodo deseado.

$E = \left(1 - \frac{r_a}{t}\right)^{-t} - 1$       Convierte la tasa de interés nominal anticipada en una tasa de interés efectiva anual que tendrá como base de referencia el periodo de  $r_a$ .

Convierte la tasa de interés efectiva periódica anticipada en una tasa nominal anticipada que estará constituida por el periodo base del interés efectivo y un periodo de capitalización equivalente al tiempo t.

$i_a = 1 - \left[ (E + 1)^{\frac{1}{t}} \right]$  Convierte un interés efectivo vencido en un interés efectivo periódico anticipado.

$r_a = \left[ 1 - (1 + E)^{\frac{1}{t}} \right] t$  Convierte un interés efectivo anual vencido en una tasa nominal anticipada cuyo periodo de capitalización es equivalente a t.

$i_a = \frac{r_a}{t}$  Convierte una tasa de interés nominal anticipado en una efectiva con el mismo periodo base.

$E = (1 - i_a)^t - 1$  Convierte un interés efectivo periódico anticipado en uno efectivo con el mismo periodo base.

$i_p = \frac{i_a}{1 - i_a}$  Convierte un interés efectivo periódico anticipado en un interés efectivo periódico vencido con el mismo periodo base.

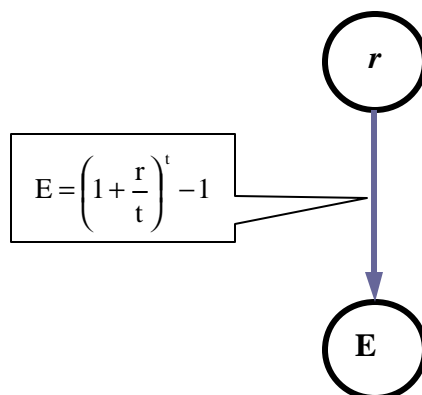
$i_a = \frac{i_p}{1 + i_p}$  Convierte un interés efectivo periódico vencido en un interés efectivo periódico anticipado con el mismo periodo base.

## 6.8. EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuál es el interés efectivo anual equivalente al 32% anual compuesto trimestralmente?

$r = 32\%$  anual compuesto trimestralmente  
 $t = 4$  trimestres  
 $E = ?$

La ruta a seguir es:



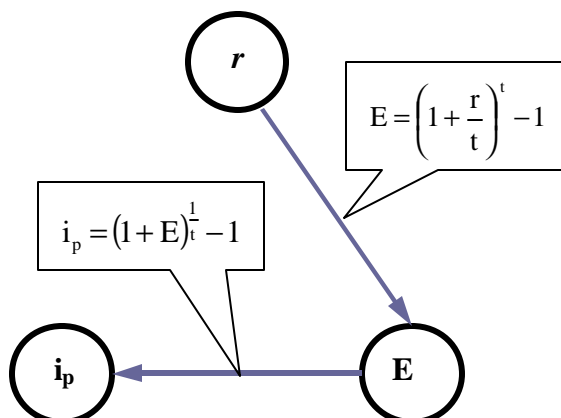
$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1 = \left(1 + \frac{0.32}{4}\right)^4 - 1$$

$$E = 36.05\% \quad \text{anual}$$

2. ¿Cuál es el interés efectivo semestral correspondiente a un interés anual del 36% compuesto trimestralmente?

$r = 36\%$  anual compuesto trimestralmente  
 $t = 4$  trimestres  
 $E = ?$

La ruta a seguir será:



$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$$

$$E = \left(1 + \frac{0.36}{4}\right)^4 - 1$$

E = 41.16 % efectivo anual

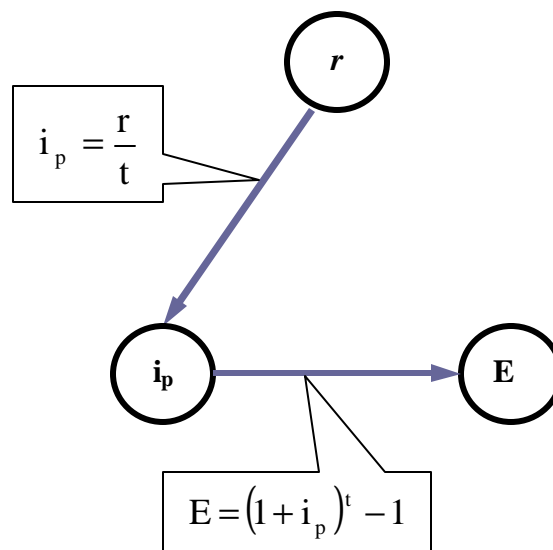
Ahora se transformará ese interés efectivo anual en un interés efectivo semestral donde t será igual a 2 ya que hay dos semestres en año.

$$i_p = (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$i_p = (1 + 0.4116)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$i_p = 18.81\%$  efectivo semestral

Otra ruta a seguir para obtener de igual forma el resultado del problema es:





$$i_p = \frac{r}{t}$$

$$i_p = \frac{0.36}{4}$$

$$i_p = 9\% \text{ Trimestral}$$

Se procede ahora a convertir el interés efectivo obtenido a un interés efectivo cuyo periodo base es mayor:

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

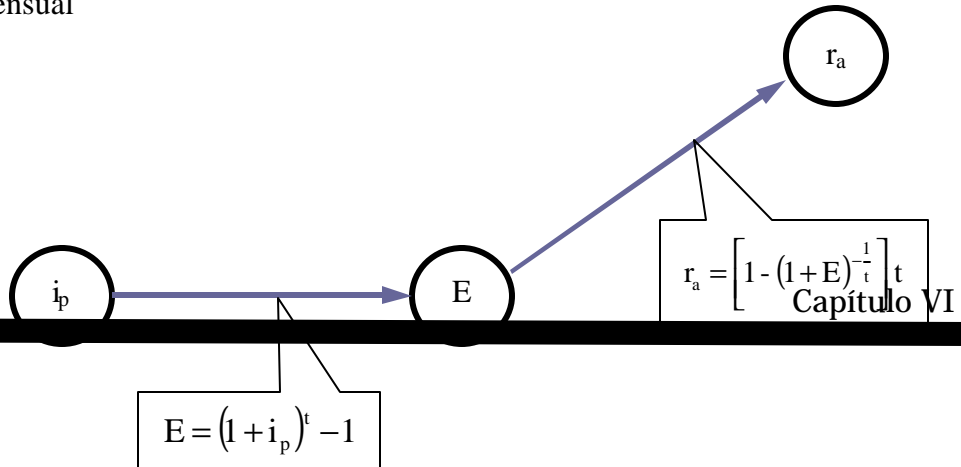
$$E = (1 + 0.09)^2 - 1$$

$$E = 18.81\% \text{ efectivo semestral}$$

3. ¿A qué interés nominal anual capitalizado semestralmente y por anticipado equivale el 5% efectivo mensual?

$r = ?$  anual capitalizado semestralmente y por anticipado

$i_p = 5\%$  mensual



Primero se debe llevar el interés efectivo mensual a una base anual

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.05)^{12} - 1$$

$$E = 0.79 = 79\% \text{ efectivo anual}$$

Ahora convertimos la tasa efectiva anual en la tasa nominal requerida, aplicando la siguiente fórmula, donde  $t = 2$

$$r_a = \left[ 1 - (1 + E)^{-\frac{1}{t}} \right] t$$

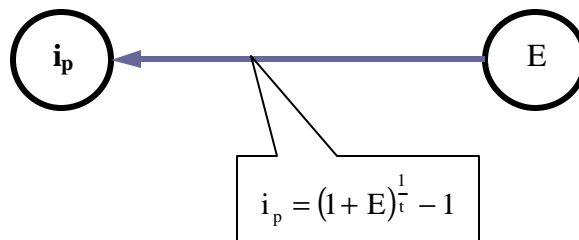
$$r_a = \left[ 1 - (1 + 0.79)^{-\frac{1}{2}} \right] 2$$

$$r_a = 0.51 = 51\% \text{ nominal anual capitalizado semestralmente y por anticipado}$$

4. ¿Cuál es el interés efectivo mensual equivalente al 36% efectivo anual?

$E = 36\%$  efectivo anual

$i_p = ?$

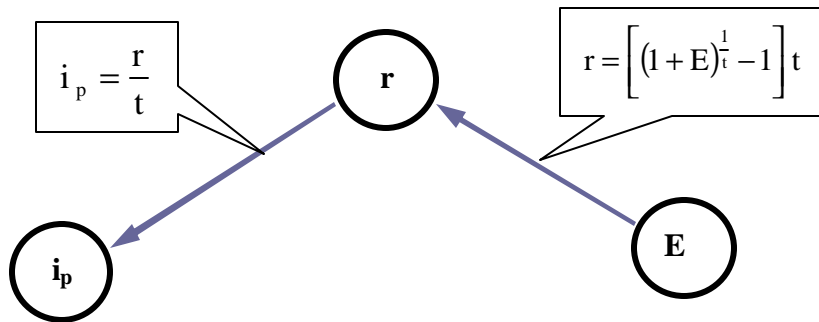


$$i_p = (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$i_p = (1 + 0.36)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_p = 0.026 = 2.6\% \text{ efectivo mensual}$$

Otra ruta posible es:



$$r = \left[ (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1 \right] t$$

$$r = \left[ (1 + 0.36)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] 12$$

$$r = 31.15\% \text{ anual}$$

$$i_p = \frac{r}{t}$$

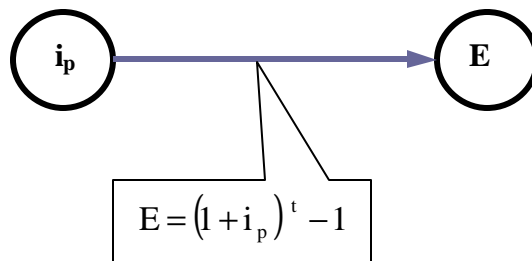
$$i_p = \frac{0.3115}{12}$$

$$i_p = 2.6\% \text{ mensual}$$

5. ¿Cuál es el interés anual equivalente al 20% efectivo semestral?

$E = ?$

$i_p = 20\%$  semestral

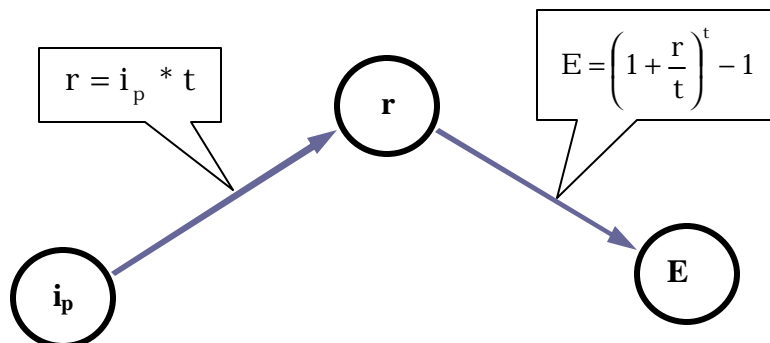


$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.20)^2 - 1$$

$E = 44\%$  efectivo anual

Otra ruta es:



$$r = i_p * t$$

$$r = 0.20 * 2$$

$r = 40\%$  nominal anual capitalizable semestralmente

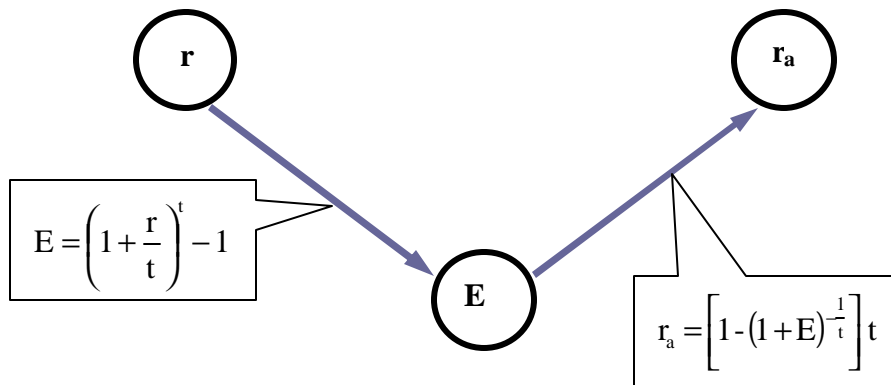
$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$$

$$E = \left(1 + \frac{0.40}{2}\right)^2 - 1$$

E = 44% efectivo anual

6. ¿Cuál es el interés nominal anual capitalizado semestralmente y por anticipado equivalente al 36% nominal anual capitalizado trimestralmente?

$r_a = ?$  anual capitalizado semestralmente por anticipado  
 $r = 36\%$  anual capitalizado trimestralmente



$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$$

$$E = \left(1 + \frac{0.36}{4}\right)^4 - 1$$

E = 41.15% efectivo anual

$$r_a = \left[ 1 - (1 + E)^{-\frac{1}{t}} \right] t$$

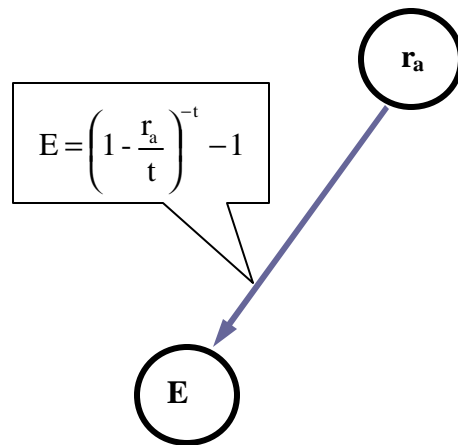
$$r_a = \left[ 1 - (1 + 0.4115)^{-\frac{1}{2}} \right] 2$$

$r_a = 31.66\%$  anual capitalizado semestralmente por adelantado

7. ¿Cuál es el interés anual equivalente al 22 % anual capitalizable trimestralmente y por adelantado?

$E = ?$

$r_a = 22\%$  anual capitalizado trimestralmente y por adelantado



$$E = \left( 1 - \frac{r_a}{t} \right)^{-t} - 1$$

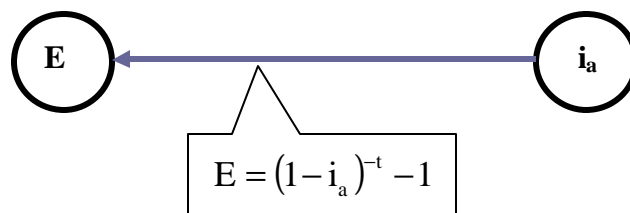
$$E = \left( 1 - \frac{0.22}{4} \right)^{-4} - 1$$

$E = 25.39\%$  efectivo anual

Otra forma es la siguiente:

$r_a = 22\%$  anual capitalizable trimestralmente y por adelantado

$$i_a = \frac{r_a}{t} = \frac{22\%}{4} = 5.5\% \text{ trimestra l anticipado}$$



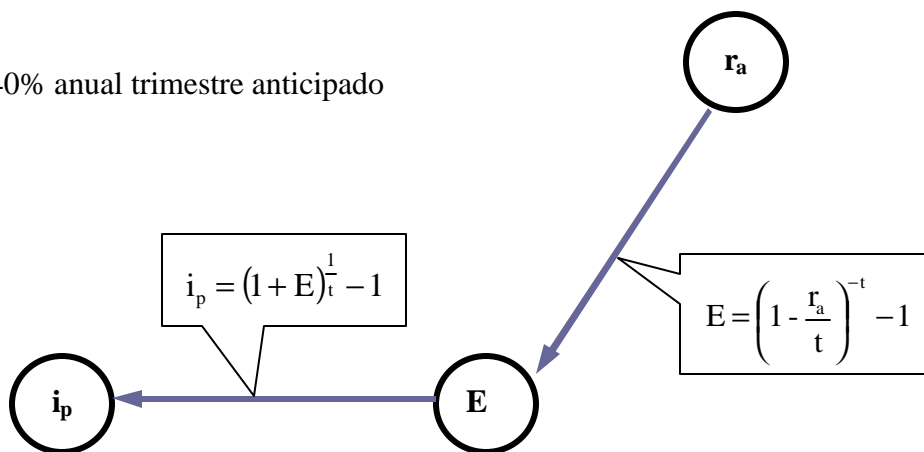
$$E = (1 - i_a)^t - 1$$

$$E = (1 - 0.055)^4 - 1$$

$$E = 25.39\% \text{ efectivo anual}$$

8. ¿Cuál es el interés mensual equivalente un interés anual del 40% trimestre anticipado?

$i_p = ?$   
 $r_a = 40\%$  anual trimestre anticipado



$$E = \left( 1 - \frac{r_a}{t} \right)^{-t} - 1$$

$$E = \left( 1 - \frac{0.40}{4} \right)^{-4} - 1$$

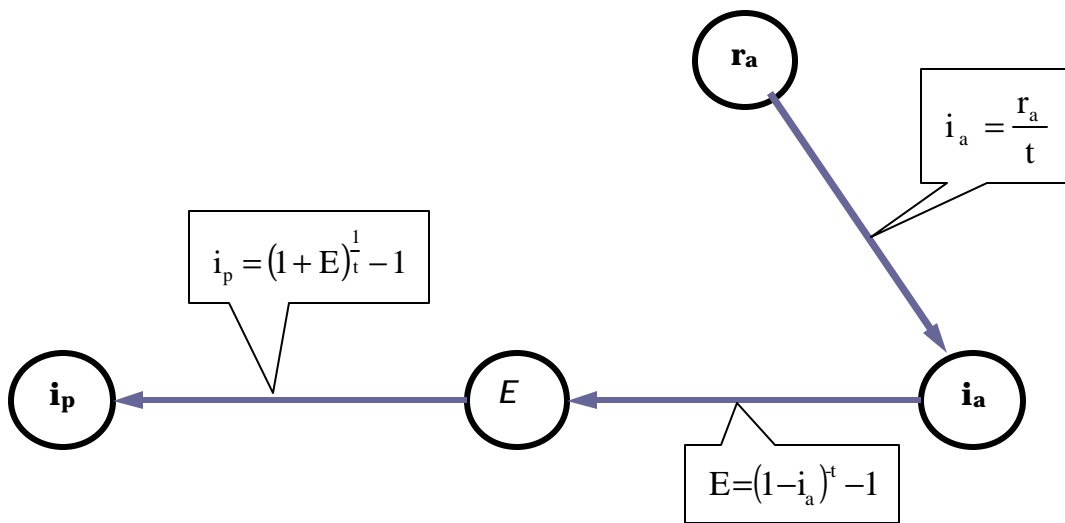
$$E = 52.42\% \quad \text{anual}$$

$$i_p = (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$i_p = (1 + 0.5242)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_p = 3.57\% \quad \text{mensual}$$

Otra forma de resolver el ejercicio es la siguiente:





$$i_a = \frac{r_a}{t}$$

$$i_a = \frac{0.40}{4}$$

$$i_a = 0.10 \text{ mensual anticipado}$$

$$E = (1 - i_a)^t - 1$$

$$E = (1 - 0.10)^4 - 1$$

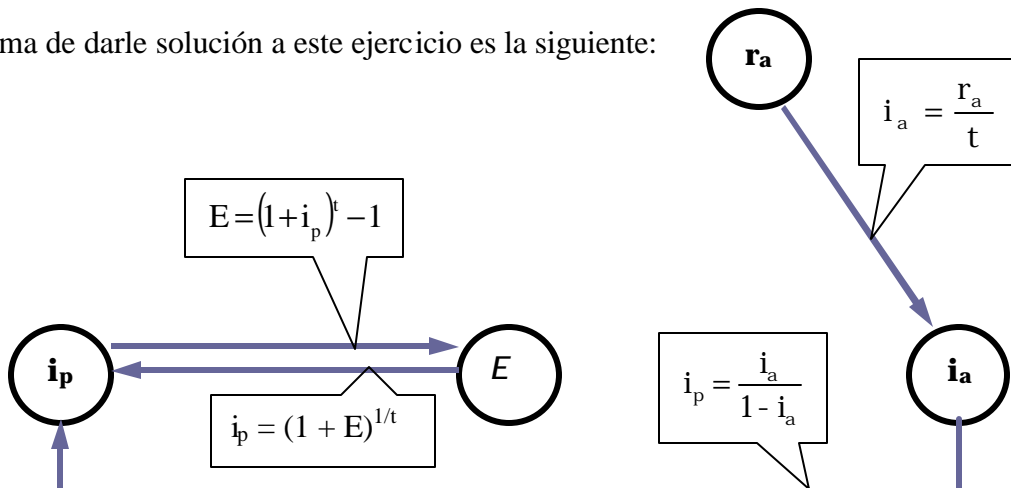
$$E = 52.42\% \text{ efectivo anual}$$

$$i_p = (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$i_p = (1 + 0.5242)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_p = 3.57\% \text{ mensual}$$

Otra forma de darle solución a este ejercicio es la siguiente:



$$i_a = \frac{r_a}{t}$$

$$i_a = \frac{0.40}{4}$$

$$i_a = 0.10 \text{ trimestre anticipado}$$

$$i_p = \frac{i_a}{1 - i_a}$$

$$i_p = \frac{0.10}{1 - 0.10}$$

$$i_p = 0.111 \text{ trimestre vencido}$$

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.111)^4 - 1$$

$$E = 52.42\% \text{ efectivo anual}$$

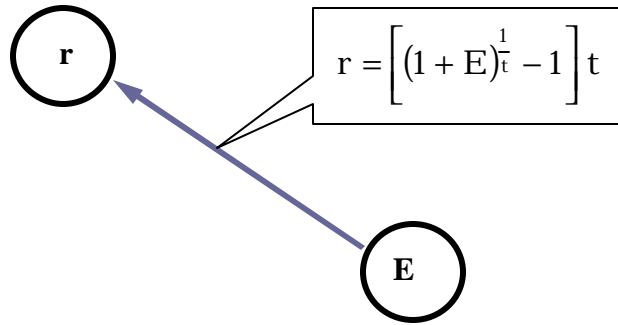
$$i_p = (1 + 0.5242)^{1/12} - 1$$

$$i_p = 3.57\% \text{ mensual}$$

9. ¿Qué interés nominal anual compuesto mensualmente corresponde a un interés efectivo anual de 35%?

$r = ?$  anual compuesto mensualmente

$E = 35\%$  anual



$$r = \left[ (1 + E)^{\frac{1}{i}} - 1 \right] t$$

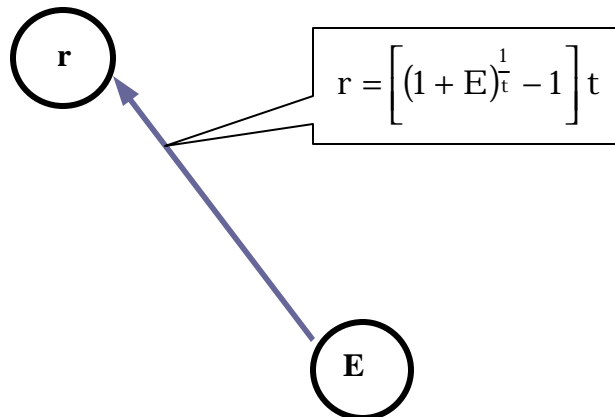
$$r = \left[ (1 + 0.35)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] 12$$

$r = 30.39\%$  anual compuesto mensualmente

10. ¿Cuál es la tasa nominal anual capitalizable trimestralmente que produce un rendimiento anual efectivo del 42%?

$E = 42\%$  anual efectivo

$r = ?$



$$r = \left[ (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1 \right] t$$

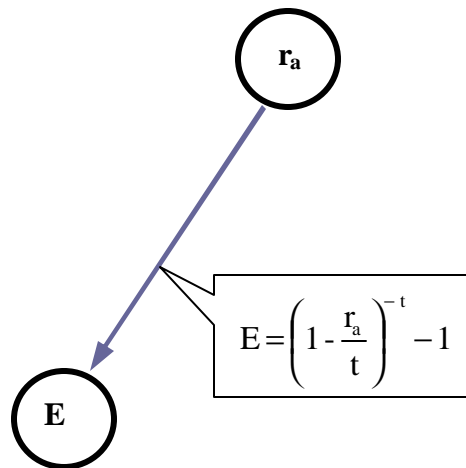
$$r = \left[ (1 + 0.42)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] 4$$

$r = 36.65\%$  anual capitalizable trimestralmente

11. ¿Calcule el interés efectivo anual equivalente al 30% anual capitalizado trimestralmente y por anticipado?

$r_a = 30\%$  anual capitalizado trimestralmente y por anticipado

$E = ?$



$$E = \left( 1 - \frac{r_a}{t} \right)^{-t} - 1$$

$$E = \left( 1 - \frac{0.30}{4} \right)^{-4} - 1$$

$E = 36.59\%$  efectivo anual

12. Un inversionista esta deseoso de multiplicar su dinero y la financiera "Tío Rico" le ofrece un interés nominal anual del 36% liquidado cada mes vencido pero recibe otra opción del banco "Mucha Plata" que le pagará los intereses anticipadamente cada trimestre. ¿Qué interés nominal anual debe ofrecer el banco "Mucha Plata" para que su alternativa sea equivalente a la ofrecida por la financiera "Tío Rico"?

*Financiera Tío Rico*

$r = 36\%$  anual capitalizable mensualmente

$$i_p = \frac{r}{t}$$

$$i_p = \frac{0.36}{12}$$

$$i_p = 3\% \text{ mensual}$$

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.03)^{12} - 1$$

$$E = 42.58\% \text{ efectivo anual}$$

*Banco Mucha Plata*

$r_a = ?$  anual trimestre anticipado

$$r_a = t \left[ 1 - (E + 1)^{-\frac{1}{t}} \right]$$

$$r_a = 4 \left[ 1 - (0.4258 + 1)^{-\frac{1}{4}} \right]$$

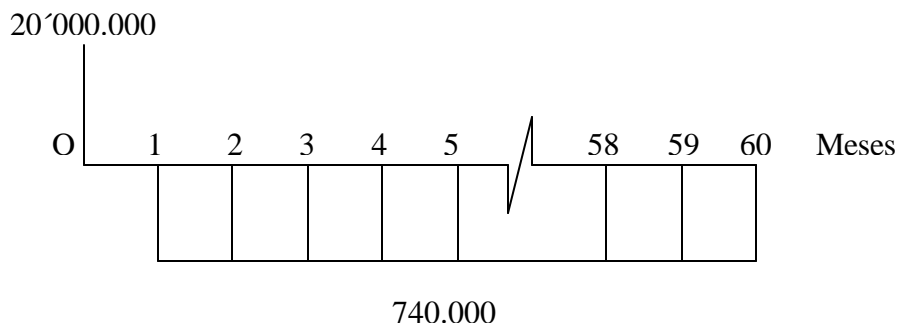
$$r_a = 33.94\% \text{ anual trimestreanticipado}$$

13. Para iniciar la empresa de asesorías "Ideas Brillantes" se necesita un capital de \$ 20'000.000. Usted como nuevo empresario contacta varias corporaciones que le ofrecen este dinero con formas de pago a cinco años; analice utilizando sus conocimientos de Ingeniería Económica, estas alternativas:

- a) Pagos mensuales de \$ 740.000.
- b) Pagos trimestrales con un interés del 36% anual compuesto semanalmente.
- c) Pagos mensuales con un interés del 26% anual compuesto mensualmente.
- d) Pagos bimestrales uniformes a capital, con un interés del 32% anual compuesto mensualmente, pagados por adelantado.
- e) Pagos trimestrales de \$ 2'800.000.
- f) Un interés del 12% trimestral.

Responda para cada una de las alternativas: ¿Cuál es el valor de la cuota a pagar?, ¿Cuál es el interés efectivo anual? y ¿Cuál de todas esas alternativas escogería?

a.



$$20'000.000 = 740.000 (P/A, i\%, 60)$$

$$27'027.027 = (P/A, i\%, 60)$$

Para determinar el valor de  $i\%$  nos apoyaremos en la interpolación

$i\%$		P/A
5%	_____	18'533.111
X	_____	27'027.027
2%	_____	34'592.051

$$i\% = 3.4132\% \text{ mensual}$$

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.034132)^{12} - 1$$

$$E = 49.59\% \text{ anual}$$

b.

$r = 36\%$  anual compuesto semanalmente

$$i_p = \frac{r}{t}$$

$$i_p = \frac{0.36}{52}$$

$$i_p = 0.7\% \text{ semanal}$$

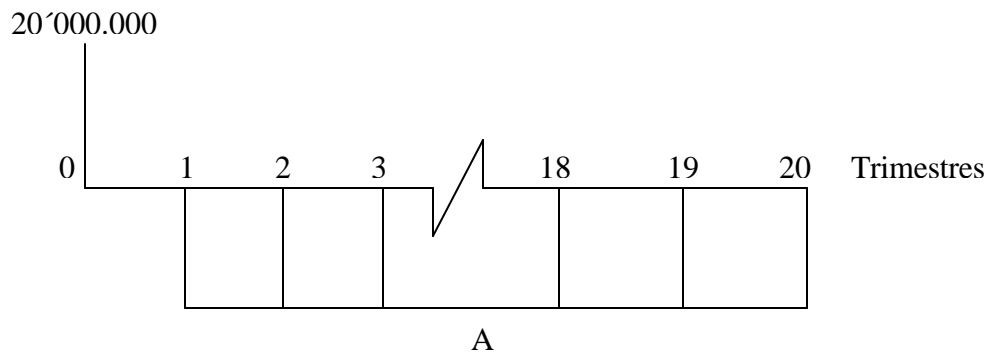
$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.007)^{52} - 1$$

$$E = 43.72\% \text{ efectivo anual}$$

$$i_p = (1 + E)^{1/t} - 1$$

$$i_p = 9.5\% \text{ trimestral}$$



El factor P/A, con un interés del 9.5% se calcula interpolando

i%	P/A
8	9.818147
9.5	X
10	8.513564

$$X = 8.839707$$

$$20'000.000 = A (P/A, 9.5\%, 20)$$

$$20'000.000 = A (8.839707)$$

$$A = 2'262.517,92$$



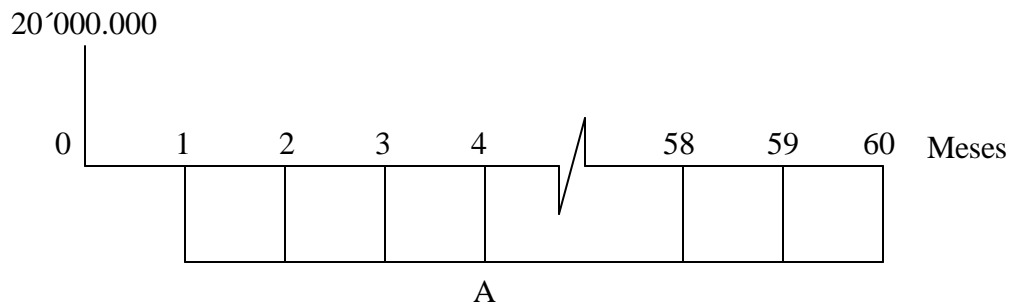
c.

$r = 26\%$  anual compuesto mensualmente

$$i_p = \frac{r}{t}$$

$$i_p = \frac{0.26}{12}$$

$$i_p = 2.17\% \text{ mensual}$$



$$20'000.000 = A (P/A, 2.17\%, 60)$$

$$20'000.000 = A (33.373209)$$

$$A = 599.283,1 \text{ mensual}$$

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.0217)^{12} - 1$$

$$E = 29.38\% \text{ anual}$$

d.

$r_a = 32\%$  anual compuesto mensualmente pagados por adelantado

$$i_a = \frac{r_a}{t} = \frac{0.32}{12}$$

$i = 5.33\%$  mensual anticipado

$$i_p = \frac{i_a}{1 - i_a}$$

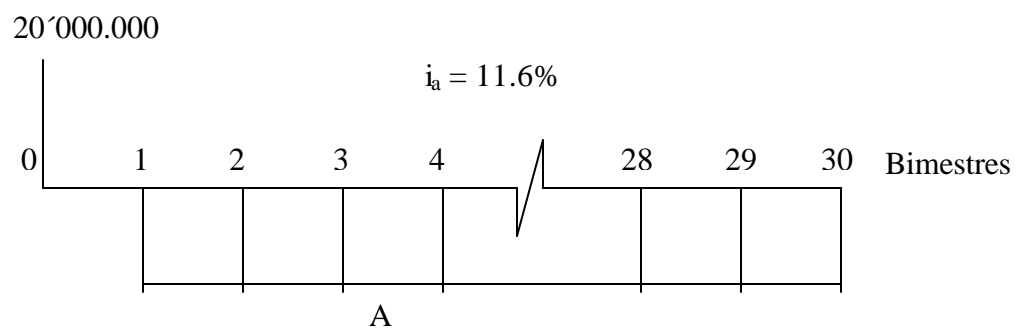
$i_p = 5.63\%$  mensual

$$E = (1 + i_p)^t - 1 = (1 + 0.0563)^{12} - 1$$

$E = 92.95\%$  anual

$$i_p = (1 + E)^{1/t} - 1 = (1.09295)^{1/6} - 1$$

$i_p = 11.6\%$  bimestralmente



$$20'000.000 = A (P/A, 11.6\%, 30)$$

i%	P/A
10	9.426914
11.6	X
12	8055184

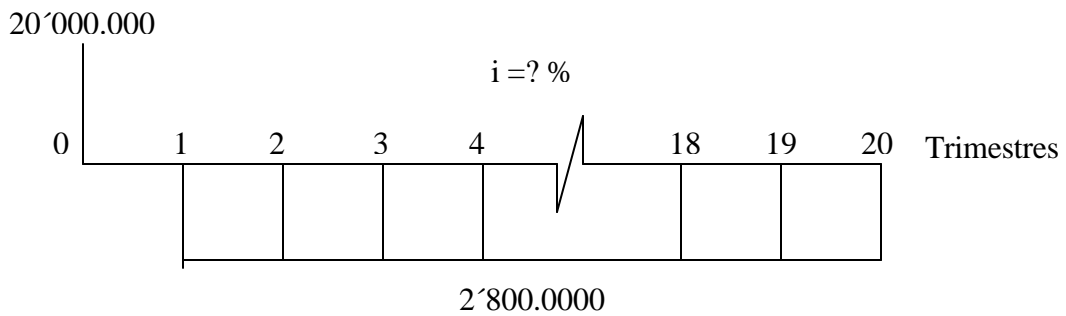
$$X = 8.32953$$

Por tanto:

$$20'000.000 = A (8.32953)$$

$$A = 2'401.095,86$$

e. Pagos trimestrales de \$ 2'800.000



$$20'000.000 = 2'800.000 (P/A, i\%, 20)$$

$$7'142.857 = (P/A, i\%, 20)$$

Interpolando

i%		P/A
12%	—————	7.469444
X %	—————	7.142857
14%	—————	6.623131

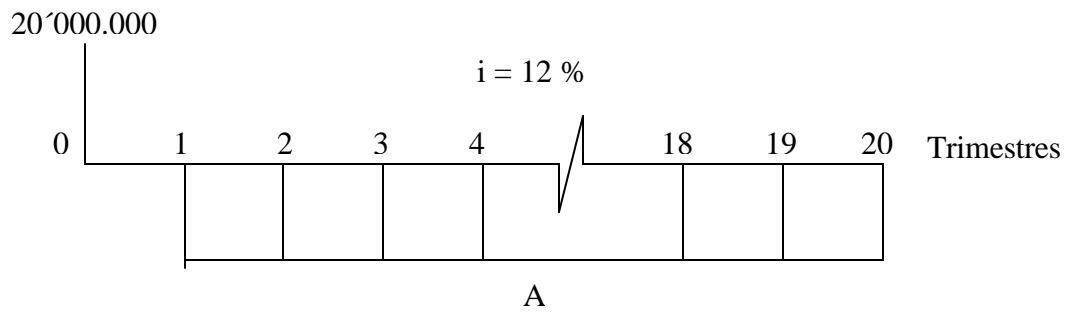
$i\% = 12.77\%$  trimestral

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.1277)^4 - 1$$

$E = 61.72\%$  anual

f.



$$20'000.000 = A (P/A, 12\%, 20)$$

$$20'000.000 = A (7'469.444)$$

$$A = 2'677.575,47$$

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.12)^4 - 1$$

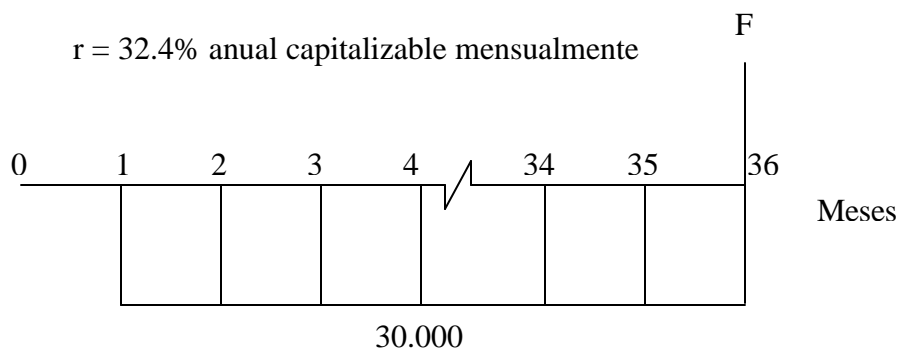
$$E = 57,35\% \text{ anual}$$

ALTERNATIVAS						
	A	B	C	D	E	F
INTERÉS EFECTIVO ANUAL	49.59%	43.72%	29.38%	92.95%	61.72%	57.35%

La alternativa a elegir será la C ya que esta posee un menor interés, por tanto más baja será la cantidad a pagar por el préstamo recibido.

14. Tres personas A, B y C deciden ahorrar dinero durante 3 años. Determine cuál tiene la mayor cantidad transcurrido este tiempo; sabiendo que la persona A hace depósitos mensuales de \$ 30.000 y la tasa de interés es del 32.4% anual, mes vencido, la persona B deposita \$ 100.000 cada trimestre al 33% anual trimestre vencido; la persona C deposita \$ 205.000 cada semestre al 34% efectivo anual.

Persona A



$$i = \frac{r}{12} = \frac{0.324}{12}$$

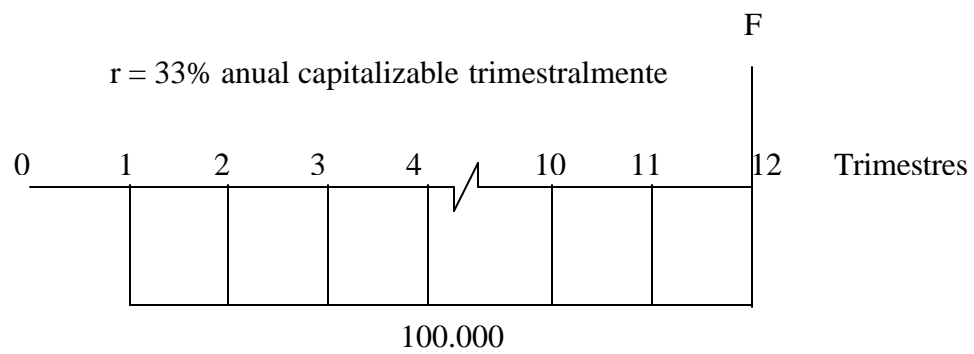
$$i_p = 2.7\% \text{ mensual}$$

$$F = 30.000 (F/A, 2.7\%, 36)$$

$$F = 30.000 (59,606364)$$

$$F = 1'788.190,92$$

Persona B



$$i_p = \frac{r}{t} = \frac{0.33}{4}$$

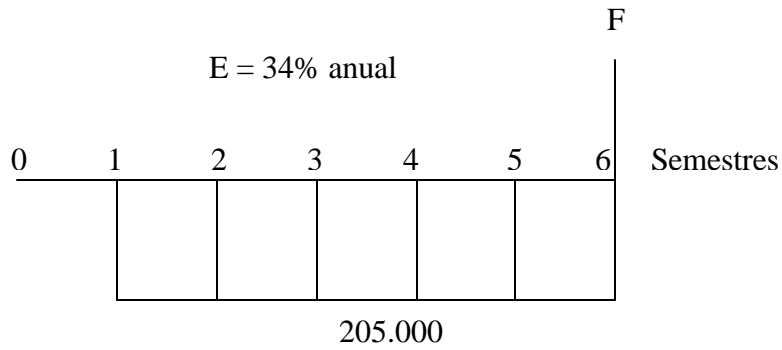
$$i_p = 8.25\% \text{ trimestra } 1$$

$$F = 100.000 (F/A, 8.25\%, 12)$$

$$F = 100.000 (19.260809)$$

$$F = 1'926.080,90$$

Persona C



$$i_p = (1 + E)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$i_p = (1 + 0.34)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$i_p = 15,76\% \text{ semestral}$$

$$F = 205.000 (F/A, 15.76\%, 6)$$

$$F = 205.000 (8,923270)$$

$$F = 1'829.270,35$$

La persona que tiene más dinero ahorrado al cabo de tres años es la persona B con un monto de \$ 1'926.080,90

## 6.9. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para un interés del 36.21% Anual Trimestre Anticipado ¿Cuál es el interés nominal anual mes anticipado, equivalente?
2. Para una inversión de \$2.000.000, cuánto se tendrá al final de 5 años con una tasa del 32% nominal, si los intereses se pagan:
  - a) Año vencido.
  - b) Semestre vencido.
  - c) Trimestre vencido.
  - d) Mes vencido.
  - e) Día vencido.
3. Se compra un CDT de \$10.000.000 a 120 días, con un interés del 22,36% anual trimestre anticipado. Pero al cabo de 90 días se requiere el dinero y se necesita venderlo en el mercado secundario, presentándose las siguientes opciones:
  - a) Venderlo a una tasa de 1.5 % mensual.
  - b) A una tasa de 1,36% trimestral anticipado.
  - c) A una tasa del 16% anual capitalizado trimestralmente.¿Cuál opción recomendaría usted?
4. ¿Cuál es el costo efectivo de un préstamo con las siguientes condiciones?

Monto: \$15.000.000  
Plazo: 48 meses.  
Interés: 37,25% Anual capitalizado trimestralmente.  
Amortización: Un año de gracia y cuotas iguales anuales.  
Comisión: 1,5% por estudio del crédito, pagado por anticipado y una sola vez.
5. En el Periódico Local, aparece la siguiente noticia: "40 personas nuevos millonarios en Colombia.". En este artículo se cuenta la historia de un grupo de 40 trabajadores de una empresa pastusa, que compraron en compañía un boleto de Baloto y ganaron el premio mayor de \$1.550.000.000, al cual es necesario descontar el impuesto de ganancia ocasional del 15%. Uno de los afortunados ganadores decidió colocar su premio en un CDT a 120 días con un interés del 27,12% anual capitalizable mensualmente. Al cabo de este tiempo tiene planeado iniciar su propia empresa para la cual requiere un capital inicial de \$50.000.000. Por el dinero que le hace falta piensa tomar un crédito con una tasa de interés del 32,6% anual compuesto trimestralmente, y por 36 meses, ¿A cuánto ascenderán las cuotas mensuales de éste crédito?.



6. Se estima que los costos anuales de operación y mantenimiento de un puente que se planea construir son de \$1.052.300 durante los primeros 12 años y aumentarán a \$2.547.800 por los 38 años restantes de vida útil. En los años 9 y 15 será necesario hacer unos gastos extras de \$4.600.000 para cubrir reparaciones estructurales. Si se espera tener en funcionamiento el puente 4 años más, ¿Cuál es la cantidad de dinero que será necesario ahorrar desde ahora y anualmente para cubrir los costos especificados durante la vida útil del puente, con una tasa de interés del 36,8% nominal capitalizado mensualmente?

7. Se toma un préstamo de \$20.000.000 con un banco que cobra una tasa de interés del 22% semestral capitalizado mensualmente para ser pagado en cuotas iguales durante 48 meses. Luego de haber amortizado el 47,5% del crédito se negocia con el banco pagar el saldo restante en dos cuotas iguales, la primera un mes después y la segunda al final del plazo pactado inicialmente. ¿Cuál es el valor de estas dos cuotas?.

8. Si una compañía de confecciones invierte hoy \$2.500.000 para mejorar la eficiencia en un proceso de costura, cuanto deberá ahorrar mensualmente en costo de mano de obra para recuperar la inversión en 4 años, si la tasa de interés es del 14% anual capitalizable trimestralmente.

9. Un empresario dedicado a la venta de equipos tiene un cliente potencial para venderle uno cuyo precio de lista es de \$15.000.000. La financiación de esta operación se hará por intermedio de una compañía de financiamiento comercial que exige el 24% de cuota inicial y el saldo pagado en 13 cuotas mensuales con un rendimiento esperado del 20% efectivo anual. ¿De cuanto le quedarán las cuotas?

10. Si se tiene un plan de financiación a 8 años para una maquinaria como el que se muestra a continuación: \$700.000 de cuota inicial, \$300.000 a 6 años y \$100.000 a 10 años. Además de lo anterior se deben pagar \$50.000 anuales, a partir del primer año y durante los 10 años. Si el interés es del 20% anual capitalizable trimestralmente:

- a). Encontrar cuánto se puede pagar, como máximo por la maquinaria.
- b). Determinar cuánto se podrá pagar en contados iguales durante los 8 años.

11. Una empresa debe adquirir un terreno para ampliar sus instalaciones bajo las siguientes condiciones: Una cuota inicial de contado del 20% del valor y el resto en 6 pagos trimestrales de \$20.000.000 cada uno, debiendo cancelar el primero de estos pagos dentro dos años, determine el valor de contado del terreno, sabiendo que la financiación se firmó bajo un interés del 28% anual trimestre anticipado.

12. La Señora de Yépez deposita \$500.000 en una cuanta de ahorros, que paga un interés del 40% anual capitalizable trimestralmente; dentro de 3 años retira la cuarta parte del

total acumulado en su cuenta, 4 años más tarde hace un depósito igual a la tercera parte del saldo existente en ese momento y un año después retira la totalidad del dinero existente en esa fecha. Hallar el valor de último retiro.

## 6.10. RESUMEN

**M**uchas veces nos vemos enfrentados a situaciones en las cuales debemos decidir entre dos o más alternativas, las cuales se evalúan teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- La tasa de interés que ofrecen cada una de esas situaciones (nominal o efectiva)
- Cuál es el momento en que se generan los intereses, es decir, si la tasa es anticipada o es vencida.
- Cuál es la frecuencia de liquidación o de pago de los intereses.

Estos factores son fundamentales y no excluyentes el uno del otro, para la selección viable o más apropiada de la alternativa de financiación o inversión a seguir.

Como se pudo establecer no se ha dejado de emplear la base de la Ingeniería Económica que es el valor del dinero en el tiempo, pues esta se ve representada en el uso de la tasa efectiva, la cual nos muestra el interés que se debe cancelar o cobrar por un préstamo, aunque este puede verse aumentado por el cobro o pago de las arandelas o agregados financieros como lo es la comisión.

Además este interés efectivo siempre será mayor al interés nominal, siendo este último empleado sólo como tasa de referencia en las operaciones financieras e identificado porque siempre se verá acompañado por el período de capitalización.

Conjuntamente se dedujeron las diferentes expresiones matemáticas que permiten calcular sus equivalencias a través del tiempo.

## AUTOEVALUACIÓN

Son pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por si mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a si mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.

## AUTOEVALUACIÓN VI

1. Enumere algunas diferencias entre interés efectivo e interés nominal.
2. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas.
  - a. Los agregados o arandelas financieras no deben tenerse en cuenta para calcular el verdadero costo de la financiación o inversión porque no forman parte del crédito. ( )
  - b. Entre mayor sea el número de periodo mayor será el costo de crédito. ( )
  - c. Se debe sumar algebraicamente los intereses cobrados por el crédito más los intereses de comisión para obtener el monto real de interés cobrado. ( )
  - d. Se paga menos intereses por un crédito si estos se pagan en forma anticipada. ( )
3. Seleccione la respuesta correcta.

Las tasas equivalentes son importantes porque:

- a. Nos permiten calcular el interés real de un crédito.
- b. Nos permiten calcular las relaciones de equivalencia sólo entre tasas vencidas y anticipadas.
- c. Nos permite calcular las relaciones de equivalencia entre tasas nominales y efectivas.

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO

## ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones:
  - a. Si la tasa nominal es capitalizable anualmente es totalmente equivalente a una tasa efectiva anual.
  - b. La tasa nominal se compone por subperiodos y entre mayor sean estos más caro resulta el préstamo.
  - c. Los intereses siempre se pactan en forma anticipada y no vencida.
  - d. Las comisiones generalmente se pactan en forma anticipada y equivalen a un porcentaje del valor del crédito.
  - e. Es posible calcular el interés efectivo para periodos diferentes a un año.
  - f. Verifique que la tasa de interés ofrecida en la opción de financiación de vehículos que se encuentra en la página 61 de la revista Finanzas Personales No.110 es real.
  - g.Cuál es la relación que existe entre el descuento por pago de contado y pago a crédito.

## BIBLIOGRAFÍA

BACA, Gabriel, Fundamentos de Ingeniería Económica, México: McGraw Hill, 1994.

CORREDORES ASOCIADOS S.A., Manual para el cálculo de rentabilidades, Colombia, 1994

DEGARMO, Paul, Ingeniería Económica, Mexico: Prentice Hall, 1998.

GARCIA, Jaime, Matemáticas Financieras con ecuaciones diferenciales.

PORTUS, Lincoyán. Matemáticas Financieras. McGraw-Hill. Colombia. 1997.

RAMIREZ, Eugenio, Ingeniería Económica "Caso Colombiano", Colombia: Universidad EAFIT, 1960.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Proyectos de Inversión. Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica de Colombia S.A. 1997.

VILLALOBOS, Jose Luis, Matemáticas Financiera, México: Grupo Editorial Iberoamericana, 1993



# ANUALIDADES

Vacía tu bolsillo en tu mente y  
tu mente llenará tu bolsillo.

[Benjamín Franklin]

C

A

P

I

T

U

L

O

VII

## ***OBJETIVOS***

### **Objetivo General**

Conocer el concepto de anualidad, las clases que existen y los factores que intervienen en el cálculo de éstas, con el propósito de ampliar el campo de acción en la solución de problemas presentados en la vida económica.

### **Objetivos Específicos**

- Describir el concepto de anualidad.
- Identificar los elementos que intervienen en un problema de anualidades.
- Identificar las clases de anualidades con el fin de seleccionar el método de solución adecuado para la situación presentada.
- Aprender a deducir cada una de las fórmulas relacionadas con las anualidades, de tal forma que se pueda aplicar a cualquier decisión de inversión o financiación.



## **CONDUCTA DE ENTRADA**

**E**l siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

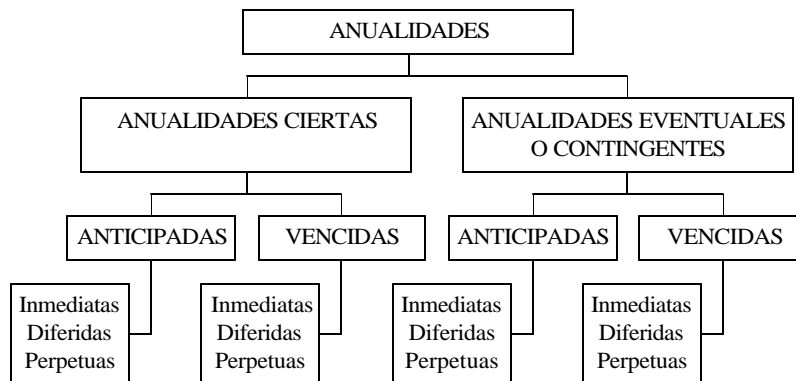
1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.
  - h. Existen operaciones financieras donde se pacten cuotas fijas e iguales así como los intervalos de tiempo ( )
  - i. En la solución de los problemas de anualidad sólo se emplean las expresiones simbólicas. ( )
  - j. Una anualidad es una serie de pagos iguales y uniformes. ( )
  - k. Una anualidad cierta es aquella en la que se conocen todos los datos. ( )
  - l. En una anualidad la cuota varía periodo a periodo uniformemente. ( )
2. ¿Cuáles son las clases de anualidades?
3. Enumere ejemplos de negocios en los cuales se empleen las anualidades anticipadas
4. Defina anualidades contingentes
5. Explique como se determina el futuro de una anualidad perpetua
6. Deduzca la fórmula que se debe aplicar, en la siguiente situación.

Calcule  $\$P$  que se prestaron, sabiendo que son equivalentes a una serie de cuotas iguales y anticipadas de  $\$A$  que deben cancelar durante  $n$  períodos, pero cuyo primer pago se realizará dentro de  $k$  periodos, y con una tasa de interés del  $i\%$  por período.

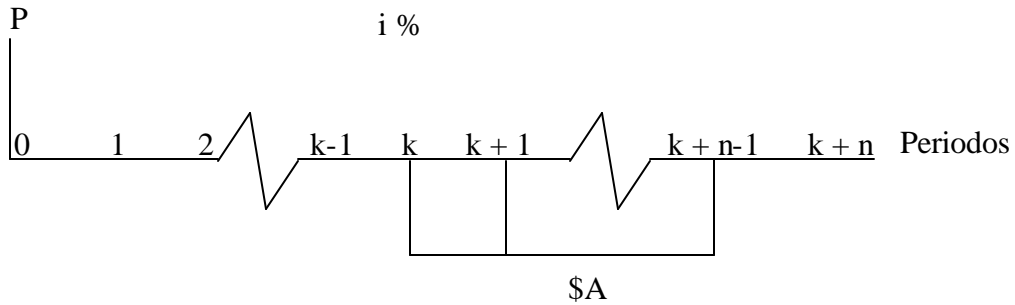
## RESPUESTAS CORRECTAS

1.
  - h. V
  - i. F
  - j. V
  - k. F
  - l. F

2.



3. Arriendo de casas o terrenos, pago de primas correspondientes a pólizas de seguros, contratos de leasing, ventas a crédito.
4. Anualidades contingentes son aquellas que se caracterizan porque el primer o último pago son desconocidos, ya que dependen de un hecho específico al cual no se le puede adjudicar una fecha concreta.
5. A una anualidad perpetua no se le puede calcular un valor equivalente en el futuro, ya que posee un flujo de caja ilimitado, es decir, tiene un número de periodos de pagos infinitos.
6. El gráfico que ilustra la situación es el siguiente.



Partiendo de la ecuación fundamental de equivalencia, tenemos que:

$$P (F/P, i \%, k - 1) = A ( P/A, i \%, n)$$

Por lo cual la formula adecuada es:

$$P = A [( P/A, i \%, n)( P/F, i \%, k -1)$$

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

## ***ACTIVIDADES PREVIAS***

1. Consultar las formas de ventas a crédito de los almacenes de electrodomésticos y muebles, y solicitar algún plan de pago, para desarrollarlo en clase.
2. Visite varias páginas web cuyo contenido este relacionado con el tema de anualidades y elabore un banco de preguntas con el fin de identificar sus dudas.
3. Indagar entre los bancos que ofrecen préstamos con periodos de gracias y hacer un informe donde se especifique como funciona este tipo de crédito.
4. Consultar en la banca local las líneas de crédito y los sistemas de préstamo para estudios universitarios.
5. Consultar en la banca local las tasas y periodos de capitalización para los créditos a mediano y largo plazo, con cuotas fijas.

## 7. ANUALIDADES

En el mundo financiero se presentan situaciones en las que pagos, depósitos o retiros son fijos así como sus intervalos de tiempo, estos sistemas de pagos son conocidos con el nombre de Anualidades, rentas uniformes, series uniformes o pagos periódicos. Para el desarrollo de este capítulo denominaremos este sistema de pago como Anualidades, lo cual no significa que se realizarán los egresos o ingresos anualmente, sino a intervalos de tiempo iguales (semestres, trimestres, meses, semanas, días, etc.).

### 7.1. CLASIFICACIÓN DE LAS ANUALIDADES

Para poder organizar las anualidades hay que tener en cuenta dos factores que intervienen en la clasificación, los cuales son:

- Forma de pago de las anualidades (al inicio o al final de cada período)
- Períodos de capitalización de las tasas de interés (puede coincidir o no con el periodo de pago)

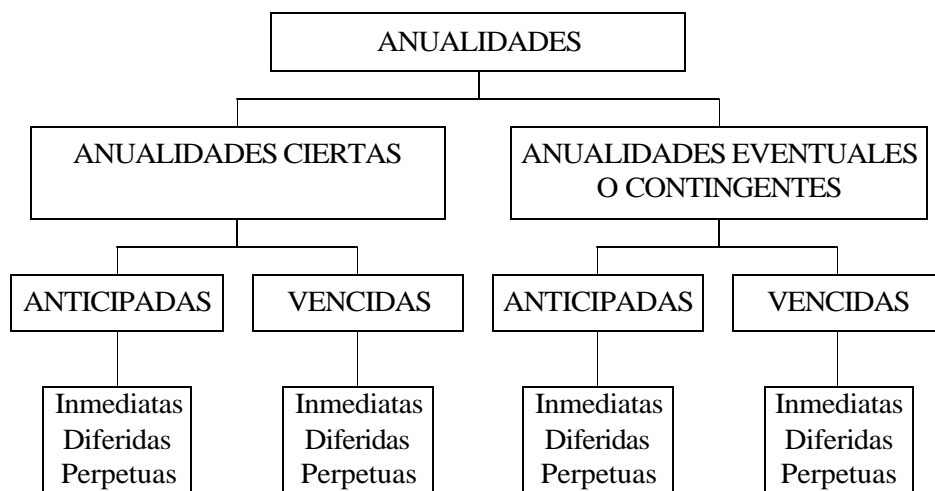


Figura 7-1. Clases de anualidades

Además de la clasificación ilustrada en la figura 7-1, encontramos dos tipos de anualidades agrupadas según el periodo de capitalización de los intereses, estas son las Anualidades Simples y las Anualidades Generales, la primera llamada así por que los intervalos de pago coinciden con el periodo de capitalización de los intereses, por ejemplo anualidades trimestrales con una tasa de interés trimestral, y la segunda los intervalos de pago y los periodos de capitalización de los intereses no son iguales, por ejemplo una anualidad mensual, con una tasa de interés nominal trimestral.

A continuación explicaremos el concepto de cada una de las clases de anualidades que aparecen en la figura 7-1.

- ***Anualidad cierta***

Son aquellas Anualidades en las que se conoce las fechas de iniciación y terminación del plazo, ya que está establecida en forma concreta.

- ***Anualidades contingentes o eventuales***

Son aquellas en las cuales el primer o último pago (o ambos) son desconocidos, pues dependen de un hecho específico, pero sobre el cual no se pudo establecer una fecha concreta.

- ***Anualidad anticipada***

Como su nombre lo indica son anualidades donde los ingresos o egresos se realizan al inicio de cada periodo.

- ***Anualidades vencidas***

También conocidas como Anualidad Ordinaria, que contraria a la anterior, sus ingresos o egresos los realiza al final de cada período.

- ***Anualidades inmediatas o convencionales***

Esta Anualidad hace referencia a la inmediatez del primer pago de la serie, el cual se realiza al inicio o final del primer periodo.

- ***Anualidades diferidas o trasladada***

Son aquellas en las que se acuerda que el primer egreso o ingreso se llevará a cabo transcurrido algunos periodos después de que se concreta la operación y no desde un principio.

- ***Anualidades perpetuas***

Son anualidades en las que la duración de los ingresos o egresos, son en teoría ilimitada.

## 7.2. ANUALIDADES COMUNES EN EL MERCADO ECONÓMICO

**P**ara el desarrollo de este capítulo se asumirán todas las anualidades como ciertas, ya que son las más comunes en el mercado económico, por tal razón para continuar tomaremos como base la ruta demarcada en la figura 7-1.

### 7.2.1. Anualidades inmediatas o convencionales

Son un tipo de anualidades que se caracterizan por que su primer pago se realiza inmediatamente pactado el negocio, es decir al inicio o final del primer periodo.

#### a. Vencidas

Es una anualidad cuyo primer pago se realiza al final del primer periodo. Este tipo de anualidad fue tratada y expuesta en el capítulo V de Interés compuesto, por eso sólo se hará alusión a las fórmulas halladas y su aplicación práctica.

**Relación valor presente – valor anual**

La ecuación que determina esta relación es la 5-12, que recordamos a continuación.

$$P = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

Expresión Simbólica o relación mediante factores

$$P = A (P/A, i\%, n)$$

Si lo que deseamos calcular la anualidad equivalente a un valor presente empleamos la ecuación 5-13

$$A = P \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Relación mediante factores

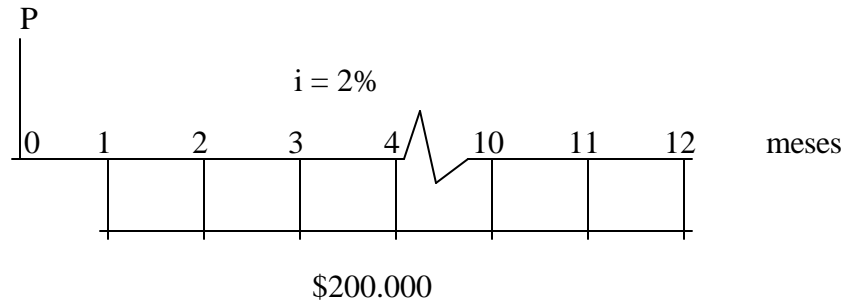
$$A = P (A/P, i\%, n)$$

***Ejercicio Práctico***

1. ¿Cuánto cuesta una nevara, por la que hay que pagar 12 cuotas mensuales de \$200.000 cada una, si el almacén cobra el 2% mensual por financiación?.

n = 12 meses  
 A = \$200.000  
 i = 2% mensual  
 P = ?





$$P = A (P/A, i \%, n)$$

$$P = \$200.000 (P/A, 2\%, 12)$$

$$P = \$200.000 (10.575341)$$

$$P = \$2'115.068,20$$

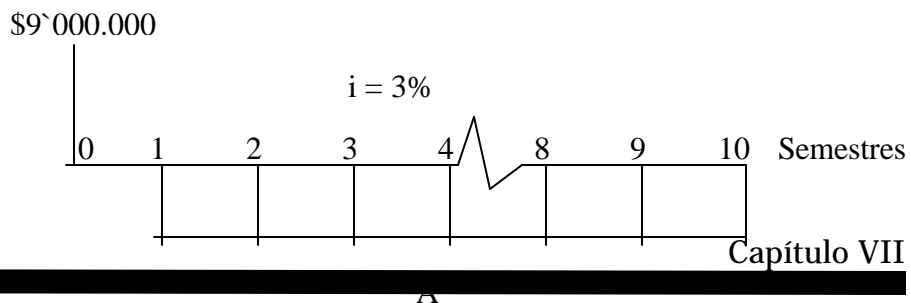
2. Calcular los pagos semestrales vencidos, necesario para cancelar el valor de \$9'000.000 de un carro comprado a 5 años de plazo con un interés del 3% semestral.

$$n = 10 \text{ semestres}$$

$$i = 3\% \text{ semestral}$$

$$P = \$9'000.000$$

$$A = ?$$



$$A = P (A/P, i \%, n)$$

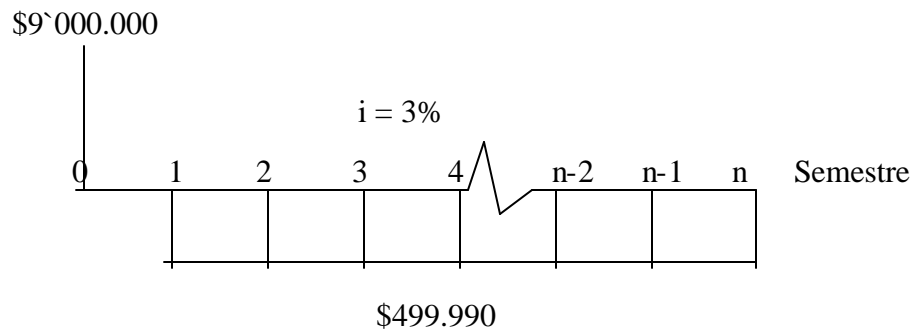
$$A = \$9'000.000 (A/P, 3\%, 10)$$

$$A = \$9'000.000 (0.117230)$$

$$A = \$1.055.070$$

3. Tomando como base el ejercicio anterior ¿Cuántos pagos debe realizar, si las cuotas son de \$499.990 semestrales?

$$\begin{aligned} A &= \$499.990 \\ i &= 3\% \text{ semestral} \\ P &= \$9'000.000 \\ n &= ? \end{aligned}$$



$$P = A (P/A, i \%, n)$$

Utilizamos la expresión matemáticas 5-12, correspondiente a la expresión simbólica anterior.

$$P = A \left( \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right)$$

Capítulo VII

$$\left( \frac{1 - (1.03)^{-n}}{0.03} \right)$$

$$\begin{aligned} 0.540011 &= 1 - (1.03)^{-n} \\ (1.03)^{-n} &= 0.459989 \end{aligned}$$

$$-n \log (1.03) = \log (0.459989)$$

$$n = 26,27 \text{ semestres}$$

### **Relación valor futuro – valor anual**

Esta relación esta descrita en la ecuación 5-9

$$F = A \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

Expresión simbólica o relación mediante factores

$$F = A (F/A, i\%, n)$$

Si necesitamos determinar el valor anual equivalente a un valor en el futuro debemos apoyarnos en la ecuación 5-11

$$A = F \left[ \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

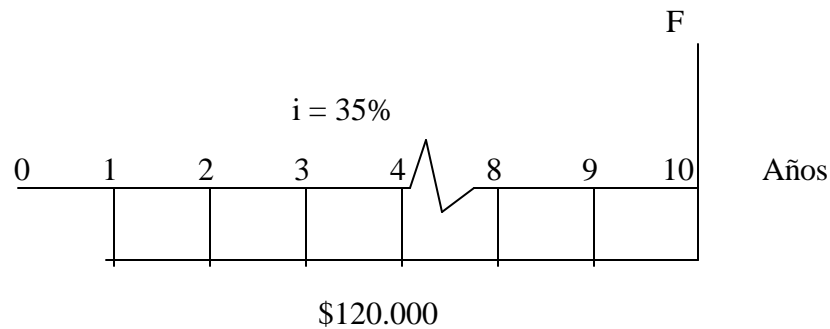
Expresión Simbólica o relación mediante factores

$$A = F (A/F, i\%, n)$$

*Ejercicio práctico*

¿Cuánto dinero tendrá dentro de 10 años si ahorra \$120.000 anualmente en una corporación que paga el 35% anual?

- n = 10 años
- A = \$120.000
- i = 35% mensual
- F = ?



$$F = A (F/A, i \%, n)$$

$$F = \$120.000 (F/A, 35\%, 10)$$

$$F = \$120.000 (54.590159)$$

$$F = 6\ 550.819,08$$

**b. Anticipadas**

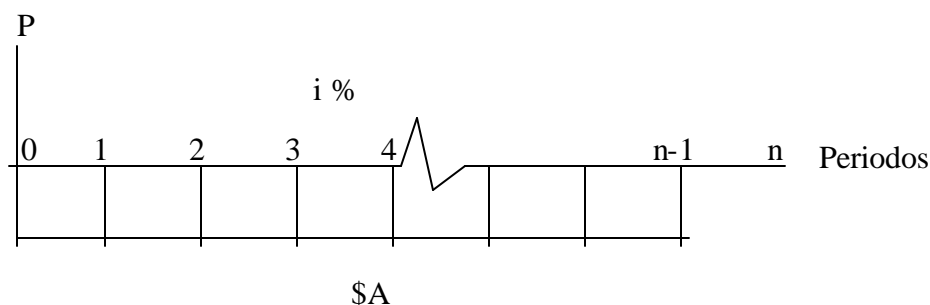
Es sabido que en algunos tipos de negocios, como arrendamiento de casas, terrenos, etc, o el pago de primas correspondientes a una pólizas de seguro, con **Capítulo VII** al inicio del período, lo cual da origen a la Anualidades Anticipadas, ya que su ingreso o egreso se realiza al inicio de cada uno de los periodos durante la existencia del contrato.

Para la deducción de fórmulas de este tipo de anualidad cierta e inmediata, apeláremos a las expresiones simbólicas obtenidas en el capítulo V, y trabajadas nuevamente en las

anualidades vencidas, con el fin de evitar la utilización de nuevas ecuaciones matemáticas, que en algún momento puedan confundir, por esto sólo se recurrió al uso de los conocimientos hasta ahora adquiridos para la solución de un mayor número de situaciones. Claro está que para el cálculo de este tipo de anualidades las ecuaciones matemáticas le permitirán llegar al mismo resultado, pero sobre estas no se hará alusión, por considerarlas menos generales limitando así su uso.

### *Relación valor presente – valor anual*

Para la deducción de la ecuación correspondiente al valor presente, suponemos que se tiene una serie de pagos anticipados cada uno de \$A, durante n periodos, con una tasa de interés i % por período, que son equivalente a una suma presente de \$P, y cuyo diagrama de flujos es el siguiente.



La ecuación correspondiente al Valor Presente del diagrama de flujo anterior se puede hallar de dos formas diferentes, pero que nos dará igual resultado

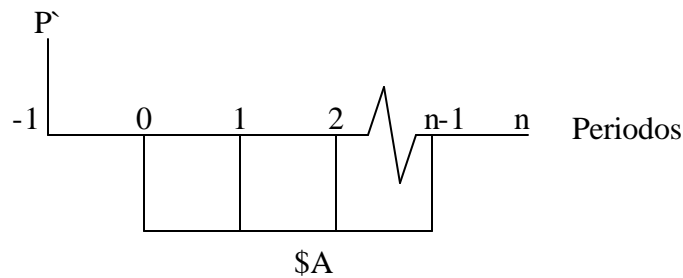
- a) Si nos ubicamos en el punto 0 notamos que hay un ingreso y un egreso los cuales restaremos a un lado de la ecuación y la otra serie de pagos tiene un comportamiento de anualidad vencida que forma parte de la segunda parte de la igualdad, así:

$$P - A = A (P/A, i \%, n-1)$$

$$P = A + A (P/A, i \%, n-1)$$

$$P = A [1 + (P/A, i \%, n-1)]$$

- b) Tratando toda la serie como una anualidad vencida, de  $n$  pagos, que se llevará a un valor presente  $P'$  en la posición  $-1$ , de la siguientes forma:



$$P' = A (P/A, i \%, n)$$

Quedando el valor presente ( $P'$ ) un período antes del primer pago.

Luego para ubicarlo nuevamente en el período 0 debemos mover o correr el valor presente calculado ( $P'$ ), un periodo aplicando el factor  $(F/P, i \%, 1)$ , dando como origen la siguiente fórmula, que será la utilizada para calcular el valor presente.

$$P = A (P/A, i \%, n) (F/P, i \%, 1)$$

Ecuación 7-1

**Ejercicio Práctico**

Se desea saber el costo de un equipo de sonido, el cual se pretende cancelar en 18 cuotas de \$50.000 mes anticipado, si la tasa de interés acordada es del 2% mensual.

- = \$50.000
- = 2% mensual
- P = ?

P

$$P = A [1 + (P/A, i \%, n-1)]$$

$$P = \$50.000 [1 + (P/A, 2\%, 17)]$$

$$P = \$50.000 [1 + (14.291871)]$$

$$P = 764.593,5$$

Aplicando la otra fórmula hallada obtendremos:

$$P = A (P/A, i \%, n) (F/P, i \%, 1)$$

$$P = \$50.000 (14.992031) (1.020000)$$

$$P = 764.593,5$$

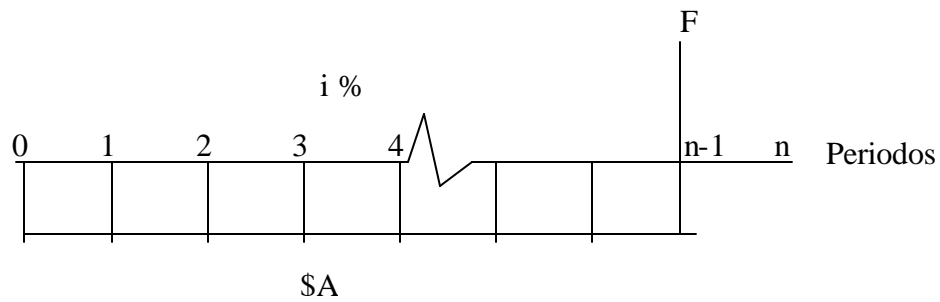
### **Relación valor futuro – valor anual**

El procedimiento para el cálculo del Valor Futuro es muy similar al presentado en la deducción del Valor Presente, con la única diferencia que se debe tener claro el punto en el cual se desea hallar el Valor Futuro, dado que se puede presentar dos situaciones:

#### Capítulo VII

Hallar el Valor Futuro en el último periodo de la operación. (en  $n$ )

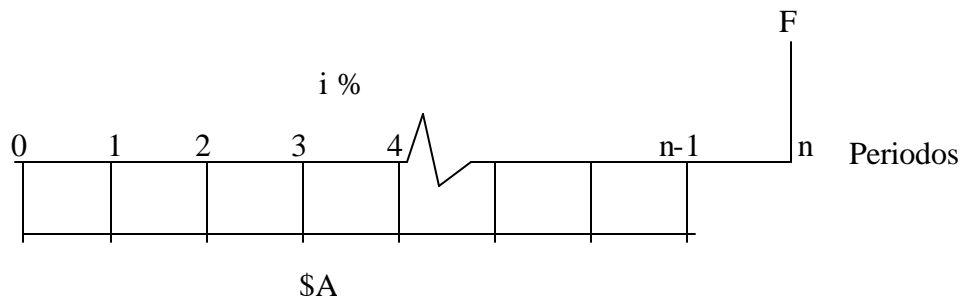
a) Hallar el Valor futuro en el momento de realizar el último pago o cobro (en  $n-1$ )



La expresión a utilizar es:

$$F = A ( F/A, i \%, n )$$

b) Hallar el Valor Futuro en el último periodo de la operación. (en  $n$ )



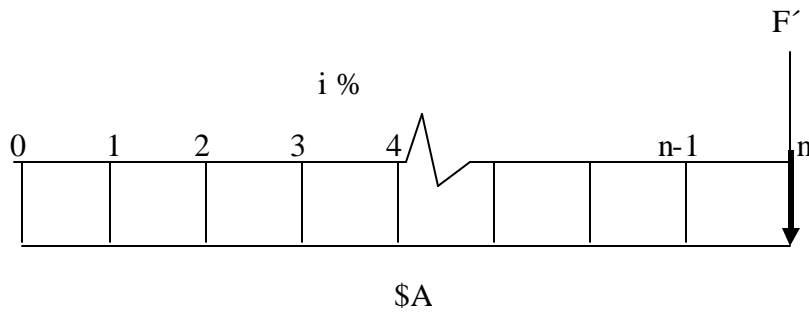
La ecuación a emplear es:

$$F = A ( F/A, i \%, n ) ( F/P, i \%, 1 )$$

Esta fórmula se obtiene empleando la expresión deducida en la situación a) con la salvedad de que valor futuro quedaría en el período  $n-1$ , por lo cual hay que trasladarlo al periodo  $n$ , utilizando el factor  $( F/P, i \%, 1 )$ , situación similar a la presentada en el cálculo del Valor Presente.



Otra fórmula empleada en esta situación se deduciría al tratar la anualidad como una anualidad vencida, pagadera durante  $n + 1$  periodo, así:



$$F' = A ( F/A, i \% , n + 1)$$

Como se adicionó una anualidad para poder tratarla como vencida ésta se restará de la expresión anterior, para transformarla en anualidad anticipada, cuyo valor futuro será F.

$$F = A ( F/A, i \% , n + 1) - A$$

$$F = A [ ( F/A, i \% , n + 1) - 1 ]$$

Con lo anterior se puede observar no es necesario recurrir a nuevas ecuaciones matemáticas ya que estas serían un limitante para la gran variedad de situaciones financieras que se pueden presentar, lo que si es una base sólida para la solución de cualquier problema, es el empleo de la ecuación fundamental de equivalencia, deducida del diagrama de flujo correspondiente a cada situación presentada.

Además con las expresiones simbólicas obtenidas anteriormente se puede afirmar que no hay diferencia entre las expresiones de las anualidades vencidas y anticipadas, por tanto la interpretación de estas es el factor clave para la solución acertada de problemas.

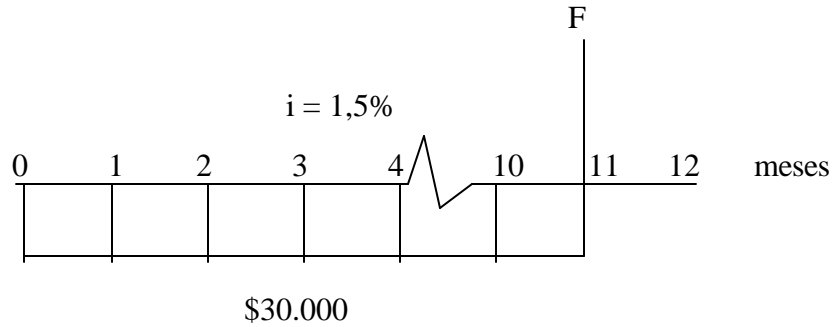
**Ejercicio Práctico**

Una persona deposita \$30.000 al inicio de cada mes durante 12 meses en una cuenta de ahorros que paga el 1,5% mensual.

- a) ¿Cuánto dinero tendrá al efectuar la última consignación?
- b) ¿Cuánto dinero tendrá al final del mes 12?

a)

- n = 12 meses
- A = \$30.000
- i = 1,5% mensual
- F = ?



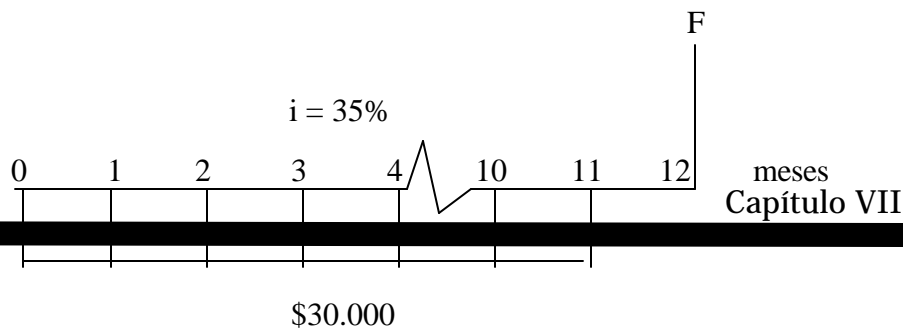
$$F = A (F/A, i \%, n)$$

$$F = \$30.000 (F/A, 1,5\%, 12)$$

$$F = \$30.000 (13.041211)$$

$$F = \$391.236,33$$

b)



$$F = A (F/A, i \%, n) (F/P, i \%, 1)$$

$$F = \$30.000 (F/A, 1.5\%, 12) (F/P, i \%, 1)$$

$$F = \$30.000 (13.041211) (1.015000)$$

$$F = 397.104,8$$

Aplicando la otra fórmula obtendremos

$$F = A [(F/A, i \%, n+1) - 1]$$

$$F = \$30.000 [(F/A, 1.5\%, 13) - 1]$$

$$F = \$30.000 [14,236829 - 1]$$

$$F = 397.104,8$$

### **7.2.2. Anualidades diferidas**

En algunas actividades comerciales, tales como préstamos bancarios al sector agrícola, ganadero, cafetero, etc., se pactan pagos o cobros que no inician en el primer período, sino que comienzan en una fecha futura, es decir luego de haber transcurrido algún período de iniciada la negociación. A este tipo de anualidad se le conoce como Anualidad Diferida, ya que su primer ingreso o egreso se efectúa luego de haber transcurrido dos o más periodos después de iniciada la operación financiera.

Como se ha mencionado anteriormente seguiremos utilizando las mismas expresiones simbólicas que hasta el momento se han empleado, ya que la solución de este tipo de problema, radica en la capacidad de análisis, así como la imaginación y creatividad, que con el apoyo de los Diagramas de flujos, permitirán encontrar la ecuación de equivalencia que pueda llevar a la solución correcta de estos problemas.

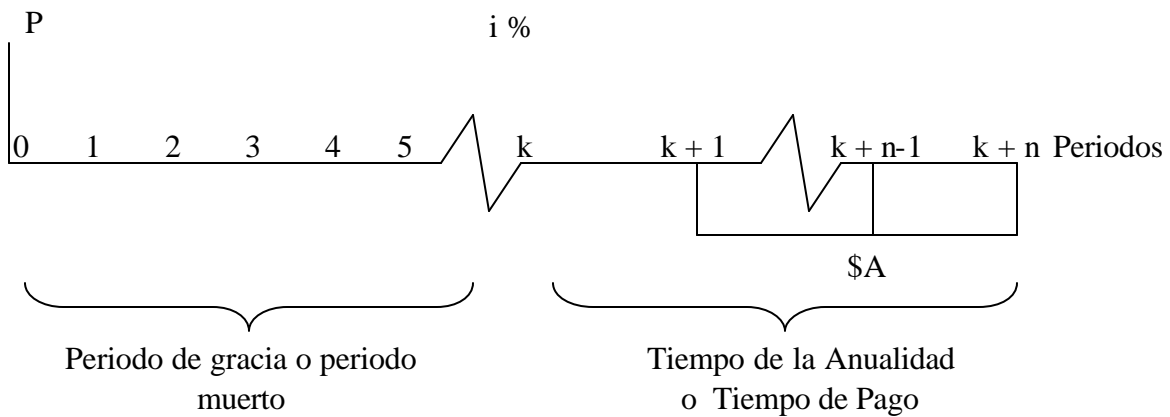
Para el cálculo del valor presente y valor futuro de las anualidades diferidas, se debe tener claro la diferencia entre el tiempo de gracia y el tiempo de pago.

Tiempo de pago es equivalente a la cantidad de pagos iguales que se realizarán durante la existencia del contrato y Tiempo de gracia, también llamado Tiempo muerto, hace

referencia periodo comprendido entre el inicio de la operación financiera y el primer pago de la anualidad.

**Relación valor presente – valor anual**

Supongamos que se prestaron P cantidades de pesos que son equivalentes a una serie de cuotas iguales y vencidas de A que deben cancelar durante n períodos, pero cuyo primer pago se realizará dentro de k períodos, y con una tasa de interés del i% por período.



Donde la ecuación de equivalencia sería,  $P (F/P, i \%, k) = A (P/A, i \%, n)$ , de esta podemos deducir que:

$$P = A (P/A, i \%, n) (P/F, i \%, k)$$

Otra forma sería, suponiendo que la anualidad se presenta desde el primer período, pero luego se restaría el valor correspondiente a las anualidades no canceladas durante el período muerto, así:

$$P = A (P/A, i \%, k + n) - A (P/A, i \%, k)$$

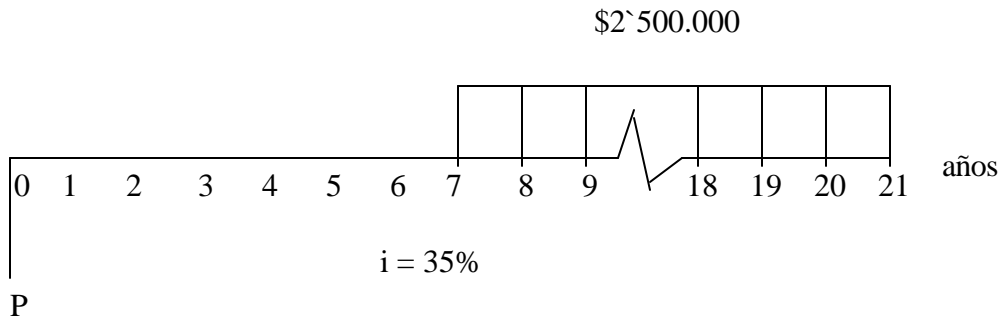
Si factorizamos A de la anterior ecuación podemos simplificarla obteniendo la siguiente:

$$P = A [(P/A, i \%, k + n) - (P/A, i \%, k)]$$

*Ejercicio Práctico*

1. Tio Rico se encontró una mina de oro, y los estudios de ingeniería muestran que los trabajos preparatorios y vías de acceso demorarán 6 años y a partir de esta fecha cada año vencido se estima que la explotación rendirá una ganancia anual de \$2`500.000. Suponiendo que la tasa de interés es del 35% anual y que la mina se agotará después de 15 años continuos de explotación. Hallar el Valor Presente de la renta que espera recibir.

- n = 15 años
- A = \$2`500.000
- i = 35% anual
- k = 6 años
- P = ?



$$P = A (P/A, i \%, n) (P/F, i \%, k)$$

$$P = \$2`500.000 (P/A, 35\%, 15) (P/F, 35\%, 6)$$

$$P = \$2`500.000 (2.825452) (0.165195)$$

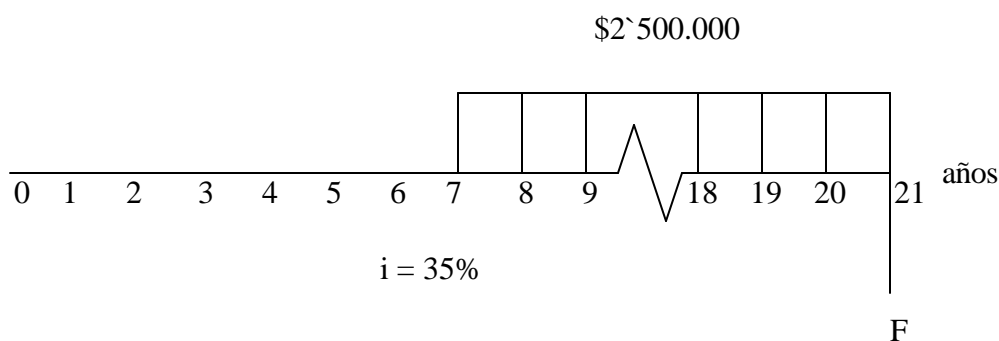
$$P = 1`166.876,3$$



### Ejercicio Práctico

Basándose en la información del ejercicio anterior determine el Valor Futuro de la renta que espera recibir

- n = 15 años
- A = \$2`500.000
- i = 35% anual
- k = 6 años
- F = ?



$$F = A (F/A, i \%, n)$$

$$F = \$2`500.000 (F/A, 35\%, 15)$$

$$F = \$2`500.000 (254,738482)$$

$$F = \$636`846.205$$

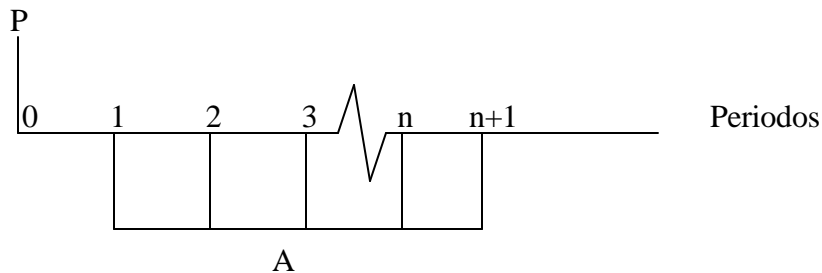
### 7.2.3. Anualidades Perpetuas

Son un tipo de anualidad que se caracteriza por que no tiene un plazo límite para su pago, es decir no existe un último ingreso o egreso definido, como por ejemplo el pago de los servicios públicos, con la suposición de que estos permanecieran constantes, a través del tiempo.

Como es una anualidad de la que se supone no hay un último pago, resulta imposible calcular su valor futuro, por tanto sólo se obtendrá el Valor Presente de este tipo de series uniformes.

**Relación valor presente – valor anual**

Supongamos que se tiene una serie de pagos perpetuos vencidos de \$A cada uno, con una tasa de interés  $i$  % por periodo, y se desea hallar el valor presente equivalente.



Cuando se trata de una anualidad perpetua, el método utilizado para hallar el valor presente es considerando los  $n$  primeros pagos de la serie, así:

$$P_n = A (P/A, i \%, n)$$

Cuya expresión matemática es:

$$P = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

$$P = A \left[ \frac{\cancel{(1+i)^n} - 1}{i\cancel{(1+i)^n}} - \frac{1}{i(1+i)^n} \right]$$



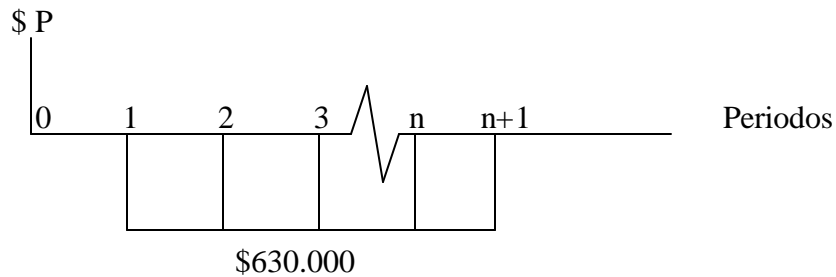
Como  $n$  tiende a infinito el factor  $\frac{1}{i(1+i)^n}$  es considerado como cero, por tanto la ecuación del valor presente de una anualidad perpetua es:

$$P = \frac{A}{i}$$

*Ejercicio Práctico*

¿Qué cantidad de dinero debe invertirse hoy para disponer de \$630.000 trimestrales de forma perpetua a partir del próximo trimestre?. Este dinero gana un interés del 12% trimestral.

- A = \$630.000
- i = 12% trimestral
- P = ?



$$P = \frac{A}{i}$$

$$P = \frac{\$630.000}{0.12}$$

$$P = 5\ 250.000$$

### 7.2.4. Anualidades Perpetuas Diferidas

Este tipo de cualidad se presenta cuando hay cierto periodo de gracia antes de iniciar los pagos, que se desembolsarán o recibirán indefinidamente.

Este tipo de anualidad tiene el mismo manejo que las anualidades diferidas anteriormente estudiadas, utilizando la siguiente fórmula:

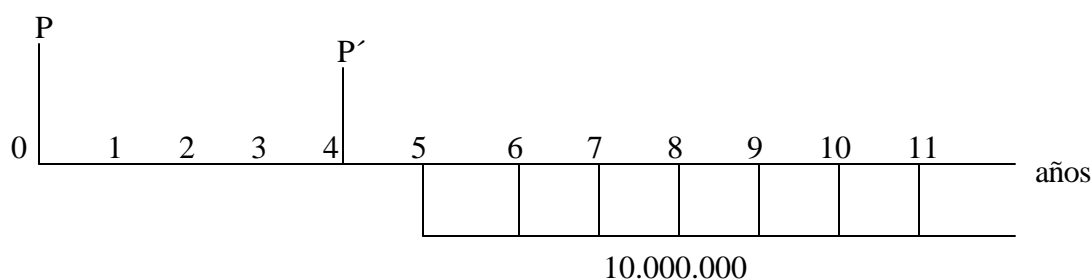
$$P = \frac{A}{i} (P/F, i\%, k)$$

Donde  $k$  representa el periodo de gracia o periodo muerto.

#### *Ejercicio Práctico*

El gobierno municipal construye un muelle y establece un fondo para su mantenimiento, que se prevé costará \$ 10.000.000 cada año a partir del año cinco inclusive. Obtener el valor actual del fondo si se ganan intereses del 17% anual.

$A = 10.000.000$   
 $i = 7\%$  anual  
 $k = 5$  años



$$P = \frac{A}{i} (P/F, i, k)$$

$$P = \frac{10.000.000}{0.17} (P/F, 0.17, 5)$$

$$P = 58.823530 (0.533650)$$

$$P = 31.391.176,78$$

### 7.3. RESUMEN DE FÓRMULAS

		Vencida	Anticipada
ANUALIDAD INMEDIATA	<b>P/A</b>	$P = A (P/A, i\%, n)$	$P = A(P/A, i\%, n)(F/P, i\%, 1)$ $P = A [1 + (P/A, i\%, n-1)]$
	<b>A/P</b>	$A = P (A/P, i\%, n)$	$A = \frac{P}{[1 + (P/A, i\%, n-1)]}$
	<b>F/A</b>	$F = (F/A, i\%, n)$	En el periodo $n-1$ $F = A (F/A, i\%, n)$  En el periodo $n$ $F = A [(F/A, i\%, n+1) - 1]$
	<b>A/F</b>	$A = F(A/F, i\%, n)$	En el periodo $n-1$ $A = \frac{F}{(F/A, i\%, n)}$  En el periodo $n$ $A = \frac{F}{[(F/A, i\%, n+1) - 1]}$

		Vencida
ANUALIDAD DIFERIDA	<b>P/A</b>	$P = A (P/A, i\%, n) (P/F, i\%, k)$ $P = A[(P/A, i\%, k+n) - (P/A, i\%, k)]$ <p>Donde <math>k =</math> Periodo de gracia</p>
	<b>A/P</b>	$A = \frac{P}{(P/A, i\%, n)(P/F, i\%, k)}$
	<b>F/A</b>	$F = (F/A, i\%, n)$

		Inmediata	Diferida
ANUALIDAD PERPETUA	<b>P/A</b>	$P = \frac{A}{i}$	$P = \frac{A}{i} (P/F, i\%, k)$ <p>Donde <math>k =</math> periodo de gracia</p>

## 7.4. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Comprobar mediante un ejercicio que una anualidad inmediata con un  $n > 30$  se comporta como una anualidad perpetua.

Para la solución de este ejercicio supondremos que se tiene una anualidad de \$100.000 mensuales con un interés del 2% mensual. Se calculará el valor presente de una anualidad inmediata para un  $n = 10, 20, 30, 40, 50$  y  $100$ , y luego se compara estos resultados con los obtenidos utilizando una anualidad perpetua.

Anualidad Inmediata

$$P = A (P/A, i \%, n)$$

$n = 10$	$\Rightarrow$	$P = \$100.000 (P/A, 2\%, 10)$	$\Rightarrow$	$P = 4^{\circ}995.117,1$
$n = 20$	$\Rightarrow$	$P = \$100.000 (P/A, 2\%, 20)$	$\Rightarrow$	$P = 4^{\circ}999.995,2$
$n = 30$	$\Rightarrow$	$P = \$100.000 (P/A, 2\%, 30)$	$\Rightarrow$	$P = 4^{\circ}999.999,9$
$n = 40$	$\Rightarrow$	$P = \$100.000 (P/A, 2\%, 40)$	$\Rightarrow$	$P = 5^{\circ}000.000$
$n = 50$	$\Rightarrow$	$P = \$100.000 (P/A, 2\%, 50)$	$\Rightarrow$	$P = 5^{\circ}000.000$
$n = 100$	$\Rightarrow$	$P = \$100.000 (P/A, 2\%, 100)$	$\Rightarrow$	$P = 5^{\circ}000.000$

Anualidad Perpetua

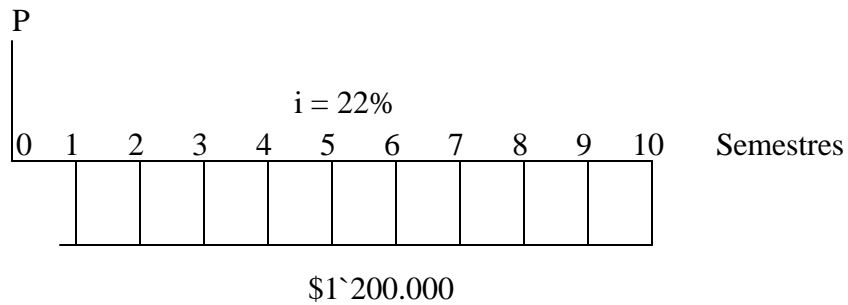
$$P = \frac{A}{i} = \frac{\$100.000}{0.02} = 5^{\circ}000.000$$

Como se puede observar el valor presente de una anualidad inmediata cuyo  $n > 30$  tiene el mismo comportamiento que una anualidad Perpetua.

2. Una persona que viaja fuera de la ciudad dejó un apartamento en alquiler por 5 años, con la condición que le paguen \$1'200.000 por semestre vencido. Esta cantidad se le consigna en una cuenta de ahorros que paga el 22% semestral. Hallar el Valor futuro y valor presente del contrato de alquiler.

- n = 5 años = 10 semestres
- A = \$1`200.000 semestral
- i = 22% semestral
- P = ?
- F = ?

Valor Presente



$$P = A (P/A, i \%, n)$$

$$P = \$1`200.000 (P/A, 22\%, 10)$$

Por interpolación hallamos el valor de  $(P/A, 22\%, 10)$ , ya que el interés del 22% no se encuentra tabulado.

i	P/A
20%	3.923184
22%	?
24%	3.681856

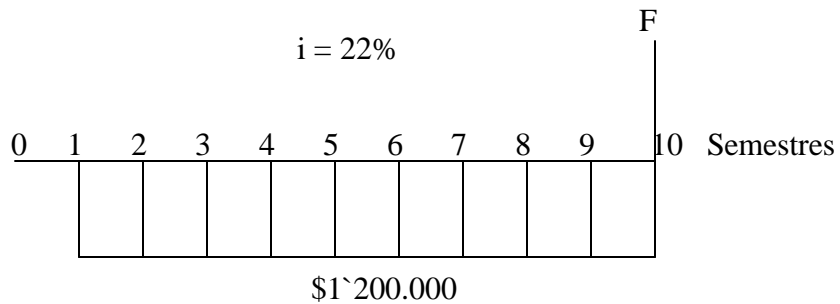
$$\Rightarrow (P/A, 22\%, 10) = 3.80252$$

Luego

$$P = \$1^200.000 (3.80252)$$

$$P = \$4^563.024$$

Valor Futuro



$$F = A (F/A, i \% ,n)$$

$$F = \$1^200.000 (F/A, 22\%, 10)$$

El factor (F/A, 22%, 10) se halla por interpolación

i	F/A
20%	25.958621
22%	?
24%	31.643439

$$\Rightarrow (F/A, 22\%, 10) = 28.80103$$

Luego

$$F = \$1^200.000 (28.80103)$$

$$F = 34^561.236$$

3. Al cumplir el primer año su hija, el Sr. Niño deposita \$10.000 en una cuenta que paga el 8% anual, dicha cantidad la consignó cada cumpleaños durante 10 años.

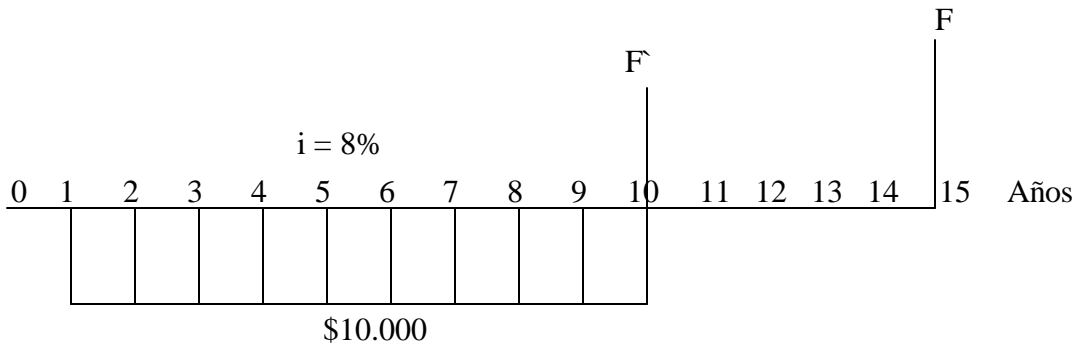
- a. Calcular la cantidad que tendrá en su cuenta la hija al cumplir 15 años.
- b. De cuánto serían las anualidades consignadas durante 15 años, para obtener el mismo capital.

a.

A = \$10.000 anuales

i = 8 % anual

n = 10 años



Primero se calcula el valor futuro  $F^{\wedge}$  de las consignaciones durante los 10 años

$$F^{\wedge} = A (F/A, i \% ,n)$$

$$F^{\wedge} = \$10.000 (F/A, 8\%, 10)$$

$$F^{\wedge} = \$10.000 (14.486563)$$

$$F^{\wedge} = \$144.865,6247$$

Cuando su hija cumpla 10 años y hecho el último depósito el valor ahorrado es de \$144.865,6247. Ahora este valor se debe llevar al futuro cuando cumpla 15 años.



Donde

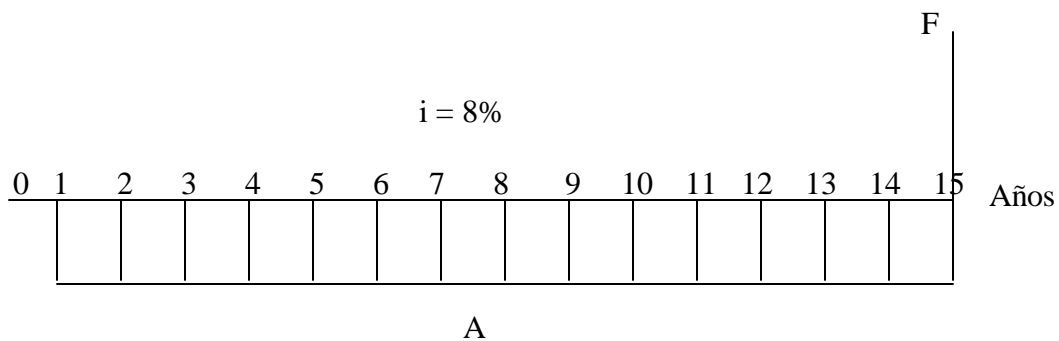
$$n = 5 \quad F = P (F/P, i \%, n)$$

$$F = \$144.865,6247 (F/P, 8\%, 5)$$

$$F = \$144.865,6247 (1.469328)$$

$$F = \$212.855,1186$$

b.



$$A = F (A/F, i \%, n)$$

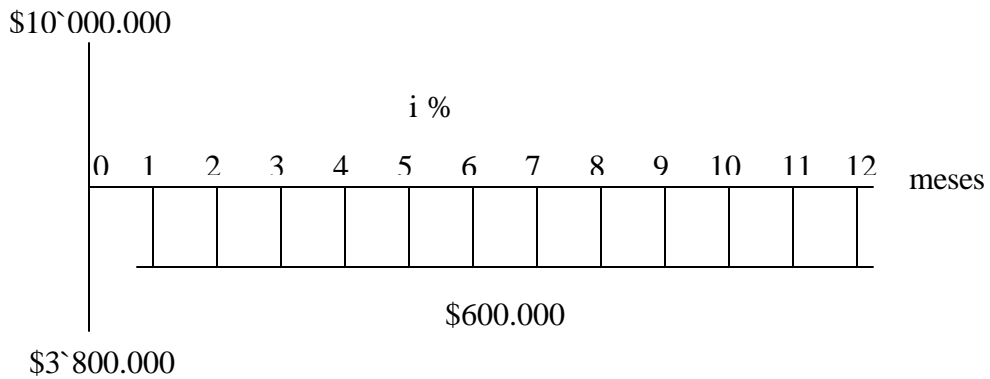
$$A = \$212.855 (A/F, 8\%, 15)$$

$$A = \$212.855 (0.036829)$$

$$A = \$7.839,35$$

3. Calcular el interés cobrado por la financiación de una propiedad que tiene un costo de \$10`000.000 si se piensa dar \$3`800.000 de Cuota Inicial y 12 pagos de \$600.000 mensuales.

$P = \$10\text{'}000.000$   
 $n = 12$  meses  
 $A = \$600.000$  mensual  
 $i = ?$   
 $C.I. = \$3\text{'}800.000$



$$\$10\text{'}000.000 - \$3\text{'}800.000 = \$600.000 (P/A, i \%, 12)$$

$$\$6\text{'}200.000 = \$600.000 (P/A, i \%, 12)$$

$$10,333333 = (P/A, i \%, 12)$$

Por tanteo e interpolación se halla el valor de  $(P/A, i \%, 12)$ , que corresponda a 10,333333

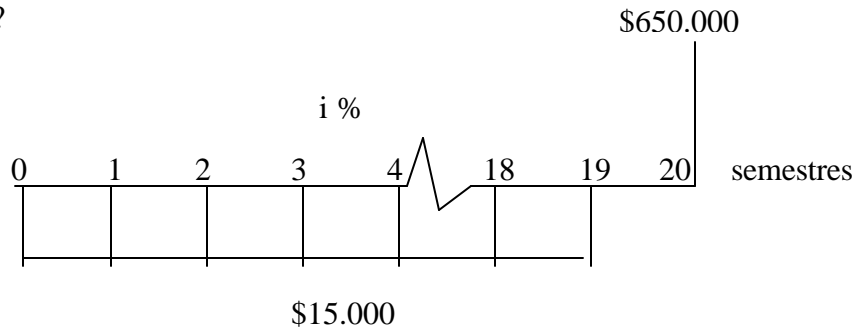
P/A	i
10.575341	2 %
10.333333	?
9.954003	3 %

$$\Rightarrow (P/A, i \%, 12) = 2,39 \text{ \% mensual}$$

4. Pedro Segura, desea comprar una Póliza de Capitalización y tiene dos opciones:
- Cancelar \$15.000 semestrales pagaderos al principio de cada semestre durante 10 años para formar un capital de \$650.000 al final de este tiempo.
  - Cancelar \$7.500 trimestrales pagaderos a principio de cada trimestre durante 10 años para formar un capital de \$700.000 al culminar todo este tiempo.
- ¿Cuál de las dos alternativas es la mejor?

a.

$$\begin{aligned} A &= \$15.000 \\ n &= 20 \text{ semestres} \\ F &= \$650.000 \\ i &= ? \end{aligned}$$



$$F = A [(F/A, i \%, n+1) - 1]$$

$$\$650.000 = \$15.000 [(F/A, i \%, 21) - 1]$$

$$44,333333 = (F/A, i \%, 21)$$

Por tanteo e interpolación hallamos el factor  $(F/A, i \%, 21)$

i	F/A
7 %	44.865176
?	44.333333
8 %	39.992726

$$\Rightarrow i = 7.17\% \text{ semestral}$$

Luego el interés anual pagado es:

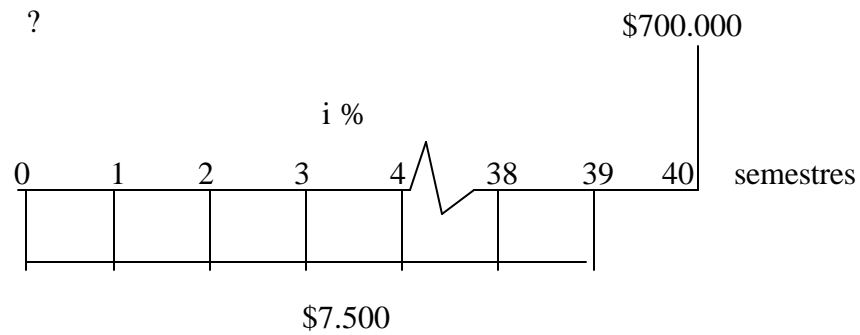
$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.0717)^2 - 1$$

$$E = 14,85\% \text{ anual}$$

b.

- A = \$7.500
- n = 40 trimestres
- F = \$700.000
- i = ?



$$F = A [(F/A, i \%, n+1) - 1]$$

$$\$700.000 = \$7.500 [(F/A, i \%, 41) - 1]$$

$$94.333333 = (F/A, i \%, 41)$$

Por tanteo e interpolación hallamos el factor (F/A, i %, 41)

i	F/A
3 %	78.663297
?	94.333333
4 %	99.826536

$$\Rightarrow i = 3.74\% \text{ trimestral}$$

Luego el interés anual pagado es:

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.0374)^4 - 1$$

$$E = 15,82\% \text{ anual}$$

Entonces la mejor opción es la b.

5. Sustituya una serie de 3 pagos de \$20.000 cada uno al final del año, por el equivalente en pagos mensuales anticipados, con un interés del 3% mensual.

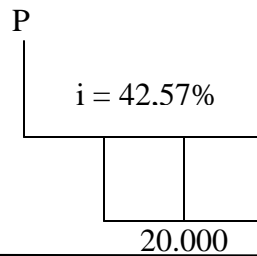
$A = \$20.000$   
 $n = 3$   
 $i = 3\%$  mensual

Primero hay que calcular el valor presente de la anualidad de \$20.000= para poder hallar su equivalente en pagos mensuales, pero para esta hay que transformar el interés mensual en un interés anual.

$$E = (1 + i)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.03)^{12} - 1$$

$$E = 42,57\% \text{ anual}$$



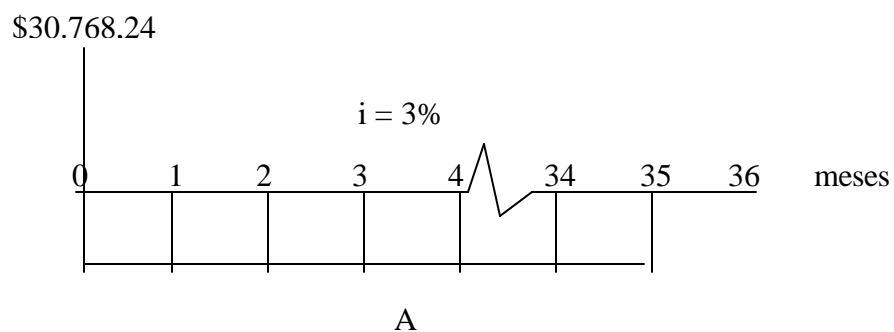
Capítulo VII

$$P = A (P/A, i \%, n)$$

$$P = \$20.000 (P/A, 42,57\%, 3)$$

$$P = \$30.768, 24$$

Su equivalente en meses anticipados será:



$$P = A [1 + (P/A, i \%, n - 1)]$$

$$30.764,24 = A [1 + (P/A, 3\%, 35)]$$

$$A = \$1.368,3$$

6. Un comerciante estima que puede aumentar sus ventas de lavadoras que tienen un precio de \$825.000 de contado, en cuotas mensuales de \$25.000 cada una, sin cuota inicial. Hallar el número de cuotas, si se carga un 18% anual capitalizado mensualmente. Al retirar el producto se debe cancelar la primera cuota.

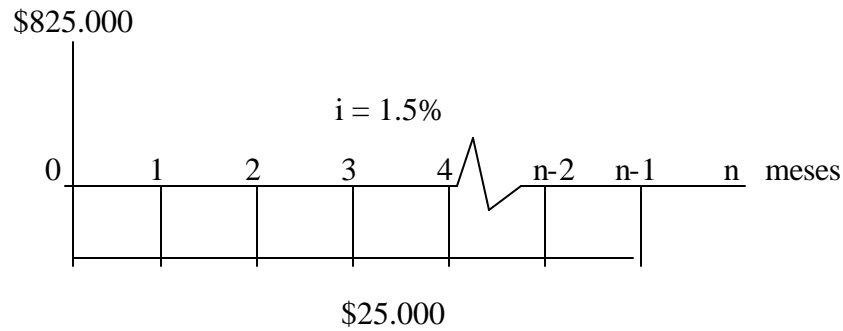
$$P = \$825.000$$

$$A = \$25.000$$

$$r = 18\% \text{ anual capitalizado mensualmente}$$

$$n = ?$$

$$i = \frac{r}{t} = \frac{0.18}{12} = 1.5\% \text{ mensual}$$



$$P = A [1 + (P/A, i \%, n - 1)]$$

$$\$825.000 = \$25.000 [1 + (P/A, 1.5\%, n - 1)]$$

$$32 = (P/A, 1.5\%, n - 1)$$

Por tanteo e interpolación hallamos el valor de n-1, así:

n	P/A
43	31.521231
n-1	32
45	32.552337

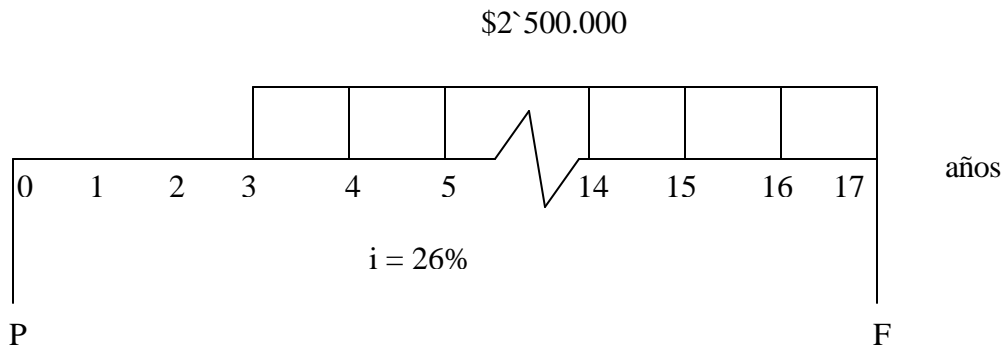
$$\Rightarrow n - 1 = 43.9286$$

Luego  $n = 44.92 \approx 45$  meses

7. Una compañía es concesionaria de la explotación de un hotel por 15 años, contados desde su inauguración; este estará en servicio al final del año 2. Se estima que los ingresos brutos anuales vencidos por año serán de \$2`500.000. Hallar el Valor Presente y Valor Futuro de los ingresos brutos si se deposita en una cuenta que rinde el 26% anual.



$n = 15$  años  
 $k = 2$  años  
 $A = \$2\ 500.000$   
 $i = 26\%$  anual  
 $P = ?$   
 $F = ?$



$$P = A (P/A, i \%, n) (P/F, i \%, n)$$

$$P = \$2\ 500.000 (P/A, 26\%, 15) (P/F, 26\%, 2)$$

$$P = \$2\ 500.000 (3.726074)(0.629881)$$

$$P = \$5\ 867.458,04$$

Otra forma de hallar el valor presente

$$P = A [(P/A, i \%, k + n) - (P/A, i \%, k)]$$

$$P = \$2\ 500.000 [(P/A, 26 \%, 17) - (P/A, i \%, 2)]$$

$$P = A [(3.770518) - (1.423532)]$$

$$P = \$5.867.465$$

La diferencia que se presenta, se debe a que en los cálculos no se tienen en cuenta todos los decimales.

Deducción del Valor Futuro

$$F = A (F/A, i \%, n)$$

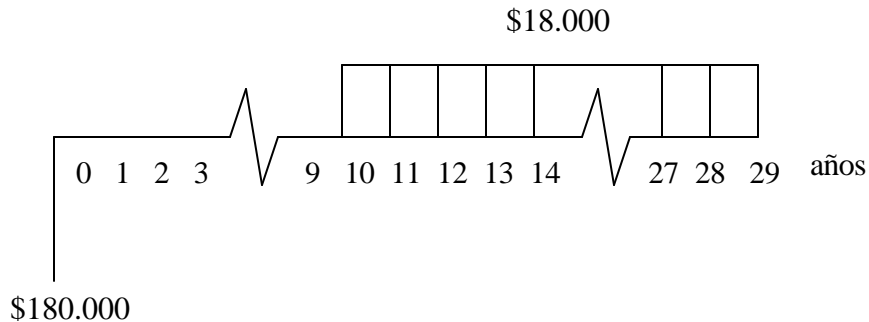
$$F = \$2\ 500.000 (F/A, 26 \%, 15)$$

$$F = \$2\ 500.000 (119.346505)$$

$$F = \$298\ 366.262,50$$

8. Por un pago inmediato de \$180.000 correspondiente a una póliza, una compañía de Seguros ofrece cancelar transcurridos 10 años una renta de \$18.000 al comienzo de cada año, durante 20 años. ¿Hallar la tasa de interés que paga la compañía?

- P = \$180.000  
 k = 10 años  
 A = \$18.000  
 n = 20 años  
 i = ?



$$P = A (P/A, i \%, n)(P/F, i \%, k - 1)$$

$$\$180.000 = \$18.000 (P/A, i \%, 20)(P/F, i \%, 9)$$

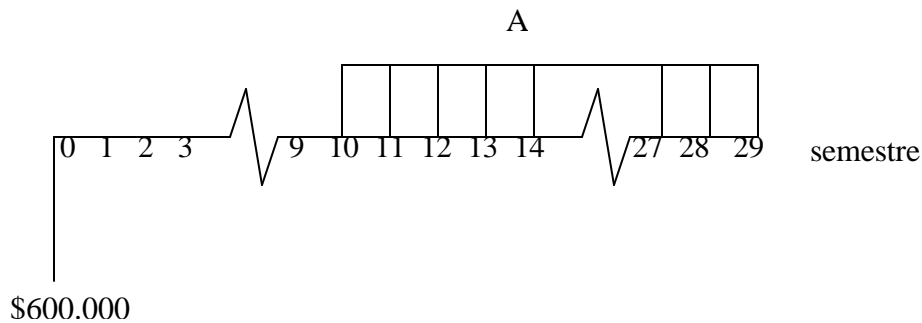
$$10 = (P/A, i \%, 20)(P/F, i \%, 9)$$

Por tanteo se obtiene la tasa de interés

$$i = 3,5 \% \text{ anual.}$$

9. Una persona deposita hoy en un banco que abona el 35% semestral para que dentro de 5 años, se le comience a cancelar semestralmente y por anticipado durante 10 años una renta. Hallar el valor de la anualidad.

$$\begin{aligned}
 P &= \$600.000 \\
 i &= 3,5\% \text{ semestral} \\
 n &= 20 \text{ semestres} \\
 k &= 10 \text{ semestres} \\
 A &= ?
 \end{aligned}$$



$$P = A (P/A, i \%, n)(P/F, i \%, k - 1)$$

$$\$600.000 = A (P/A, 3.5\%, 20)(P/F, 3.5\%, 9)$$

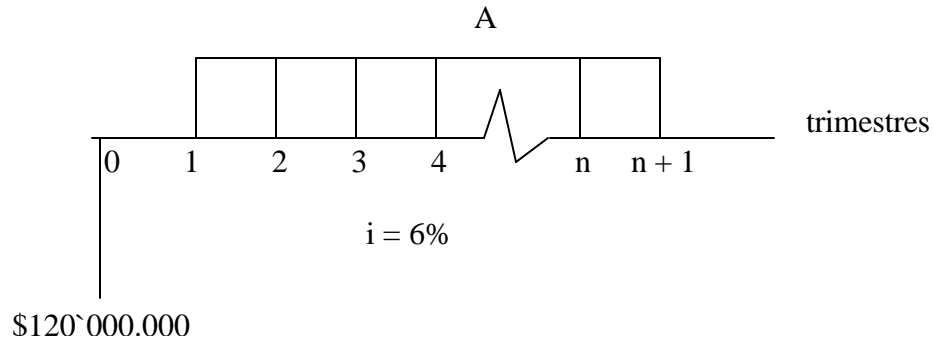
$$\$600.000 = A (14.212403)(0.733730)$$

$$A = \$57.537,03$$

10. Una Asociación dona a la Liga Contra el Cáncer \$120`000.000 los cuales consigna en una corporación de ahorro que ofreció pagar el 24% anual capitalizado trimestralmente. ¿De qué renta trimestral dispondrá la Liga Contra el Cáncer de manera perpetua?

$$\begin{aligned}
 P &= \$120`000.000 \\
 r &= 24\% \text{ anual capitalizado trimestralmente} \\
 A &= ?
 \end{aligned}$$

$$i = \frac{r}{t} = \frac{0.24}{4} = 6\% \text{ trimestra l}$$



$$P = \frac{A}{i}$$

$$A = P * i$$

$$A = \$120'000.000 * 0.06$$

$$A = \$7'200.000 \text{ trimestral}$$

### 7.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Qué cantidad debe depositarse a principio de cada año, en un banco que paga el 10% anual, para reemplazar un equipo de una compañía cuyo costo es de \$10'000.000 y con una vida útil 5 años, si el valor de salvamento se estima en el 10% del costo?
2. Tres personas X, Y y Z ahorran para su grado durante 3 años, determinar cual tiene más dinero transcurrido este tiempo, si X deposita \$50.000 mensuales a una tasa del 25% anual capitalizado mensualmente. Y ahorra \$80.000 bimensualmente a una tasa del 36% anual capitalizado bimensualmente y Z ahorra \$100.000 cada semestre a una tasa del 38% anual.

Hallar la suma que tendrá en su cuenta 5 años después del último depósito, si la Corporación paga el 26% anual capitalizable mensualmente.

4. Alguien deposita \$10'000.000 en una corporación de ahorro, con el propósito que dentro de 10 años se pague a él o a sus herederos, una renta de \$250.000 a principio de

cada mes. ¿Durante cuántos años se pagará esta renta, si la Corporación abona el 20% anual capitalizable mensualmente?

5. Usted ha comprado un Televisor con la condición de pagar 30 cuotas mensuales de \$25.000 cada una y un interés sobre saldos del 36% anual durante el primer año y del 33,2% anual de allí en adelante. Si quisiera cancelar la deuda totalmente hoy, ¿cuánto tendría que cancelar, si no ha hecho ningún abono?.
6. Se ha solicitado un préstamo al Banco Campesino para cultivar frutas tropicales por la suma de \$5`000.000 a tres años, con seis meses de gracia y un interés del 30% anual capitalizado mensualmente durante el primer año (incluyendo el tiempo muerto) y del 36% anual de ahí en adelante. ¿Cuál es el valor de la cuota a cancelar mensualmente?
7. ¿Cuántos pagos mensuales deben hacerse de \$500.000, para cancelar un préstamo de \$15`000.000 si el banco cobra el 22% anual capitalizable mensualmente. Y se debe hacer un pago igual a la cuota mensual al otorgar del préstamo?
8. Suponga que una persona hace ahora un depósito de \$1`000.000 ganando el 30% anual capitalizado mensualmente. ¿Qué cantidad retirará cada mes a partir del 4 año inclusive, si quiere que el dinero le dure 3 años?
9. Un estudiante universitario desea costearse la maestría por si solo, la cual dura 4 semestres académicos y para ello cuenta con unos ahorros que depositará al principio de enero del año en que comienza la maestría. Hace este depósito en una Corporación de ahorros que paga el 30% anual capitalizado trimestralmente. El valor de la matrícula es de \$5`000.000 por semestre anticipado y los gastos en libros y otros materiales ascienden a \$150.000 por mes de estudio anticipado. Si los meses de estudio son febrero, marzo, abril y mayo para el primer semestre y agosto, septiembre, octubre y noviembre para el segundo semestre, y la matrícula debe pagarse al principio de febrero y agosto. ¿Cuál es la cantidad que el estudiante debe depositar para que ese fondo sea suficiente para sufragar los gastos de la maestría?

10. Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta que los 6 primeros datos corresponden a una anualidad anticipada y los siguientes son de anualidades vencidas.

	Tiempo Muerto (k)	Anualidad (A)	Valor Presente (P)	Interés (i)	Plazo (n)
1	3 periodos	\$250.000	¿	24% ATV	5 años
2	4 periodos	?	\$30'000.000	45% AMV	10 semestres
3	5 periodos	?	\$45'000.000	18% AMV	2 años
4	2 periodos	\$50.000	?	57% ATV	10 trimestres
5	5 periodos	?	\$271'750.000	42% ASV	25 años
6	10 periodos	\$250.000	\$15'000.000	24% AMV	3 semestres
7	8 periodos	\$850.000	?	20% ASV	5 semestres
8	12 periodos	?	\$12'350.000	36% ATV	5 años
9	3 periodos	?	\$ 8'300.000	39% ATV	3 trimestres
10	5 periodos	\$120.000	\$23'000.000	?	10 años
11	3 periodos	\$75.000	\$ 3'500.000	10.5% AMV	? meses

11. La gobernación de Pueblo Nuevo ha tomado la decisión de crear un fondo para proveer a perpetuidad las reparaciones de un puente de madera cuyo costo es de \$ 100.000.000. Los ingenieros estiman que será necesario reemplazarlo cada 10 años, a un costo de \$ 50.000.000. Hallar el valor requerido para el fondo a fin de proveer reemplazos futuros, si la tasa de interés es de 8%.

## 7.6. RESUMEN

En el Sistema financiero y comercial muchas veces se presentan series de ingresos o egresos donde las cuotas son fijas al igual que los intervalos de tiempo. La forma de pago o cobro puede ser inmediata, diferida y perpetúa, y a su vez vencidas y anticipadas, según la forma de pago o cobro estipuladas.

Como se tenían bases matemáticas de los capítulos anteriores, para la solución de las Anualidades sólo se apeló a la capacidad de plantear ecuaciones de equivalencia basándose

en los diagramas de flujos, y así calcular los valores presentes, futuros, cuotas, tasas y plazos de las anualidades.

Como se pudo observar no hay una forma única de solución de estos problemas, ya que se presentan diferentes alternativas que nos llevan al mismo resultado, por ello se hace énfasis en la capacidad de análisis, imaginación y creatividad del estudiante.

## ***AUTOEVALUACIÓN***

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por sí mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a sí mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### **IMPORTANTE**

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrado los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, **FELICITACIONES**, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.



## AUTOEVALUACIÓN VII.

1. ¿Qué es una anualidad?
2. ¿Qué otros nombres reciben las anualidades?
3. ¿Qué diferencia existe entre las anualidades inmediatas, diferidas y perpetuas?
4. ¿Qué diferencia existe entre las anualidades ciertas y contingentes?
5. ¿Qué diferencia existe entre las anualidades anticipadas y vencidas?
6. Se solicita un préstamo al Banco campesino, el cual da 3 años de gracia con cuotas de \$1`500.000 año anticipado por 5 años, con una tasa del 35% anual.
  - a. Hallar el valor Presente del préstamo.
  - b. Hallar el valor Futuro del préstamo luego de cancelar la última cuota.
  - c. Hallar el valor Futuro del préstamo al final del último periodo.

**COMPARE SUS**

**ACTIVIDAD DE REFUERZO**

1. Diga y justifique si es posible que una anualidad simultáneamente sea:
  - a. Simple, cierta y vencida.
  - b. Eventual, general y vencida.
  - c. General, cierta y contingente.
  - d. Ordinaria, general, cierta y diferida.
  - e. General, cierta, simple y ordinaria.
  - f. Cierta, simple, ordinaria y general.
  - g. Inmediata, simple, vencida y ordinaria.
  - h. Anticipada, general, diferida y simple.
  - i. Ordinaria, cierta, anticipada y general.
2. Investigue como se resuelven los problemas donde intervienen las anualidades generales.
3. ¿Qué tipos de anualidades generales existen?
4. ¿Son los gradientes un tipo de anualidad?
5. Investigue cuál es el tratamiento para anualidades anticipadas. Deduzca sus fórmulas y establezca diferencias con las anualidades vencidas.

## BIBLIOGRAFÍA

BACA, Gabriel. Fundamento de Ingeniería Económica. México: McGraw-Hill, 1994.

DEGARMO, Paul. Ingeniería Económica. México: Prentice Hall, 1998.

INFANTE, Arturo. Evaluación financiera de Proyectos de inversión. Colombia: Grupo Editorial Norma, 1997.

MARULANDA, Luis. Decisiones Financieras y Costo del Dinero en Economías Inflacionarias. Colombia: Editorial norma, 1985.

PORTUS, Lincoyán. Matemáticas Financieras. Colombia: McGraw- Hill, 1997.

RAMIREZ, Eugenio. Ingeniería Económica, "Caso Colombiano". Colombia: Universidad Eafit, 1984.

TARQUIN, Anthony. Ingeniería Económica, Colombia: McGraw – Hill, 1999.

THUESEN, H. Ingeniería Económica. Colombia: Prentice Hall, 1999.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones. México: McGraw-Hill, 1997.

VILLALOBOS, José Luis. Matemáticas Financieras. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.



# GRADIENTES

Todo hombre paga su grandeza  
con muchas pequeñeces, su  
victoria con muchas derrotas,  
su riqueza con múltiples  
quiebras.

(Giovanni Papine)

C  
A  
P  
I  
T  
U  
L  
O

VIII

## OBJETIVOS

### *Objetivo General*

Aprender a identificar, definir y reconocer los factores que intervienen en los cálculos de los valores para las diferentes situaciones económicas donde se utilicen gradientes lineales, geométricos y escalonados empleado el principio de equivalencia.

## Objetivos Específicos

- Conocer el concepto de gradiente.
- Diferenciar el tipo de gradientes que se presenta en la situación estudiada.
- Deducir la fórmula matemática empleada en el cálculo de un gradiente lineal.
- Deducir la fórmula matemática empleada en el cálculo de un gradiente geométrico.
- Deducir la fórmula matemática empleada en el cálculo de un gradiente escalonado.
- Aplicar los conceptos de gradientes a las distintas situaciones de la economía y los proyectos de inversión.

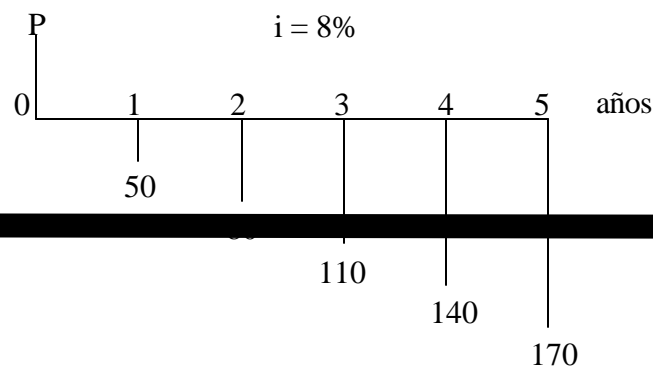
## CONDUCTA DE ENTRADA

El siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde éste completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.
  - a. Las negociaciones de inversión o financiación sólo se pueden amortizar con cuotas uniformes o pagos puntuales en determinado periodo. ( )
  - b. Los gradientes son series de pagos que cambian en la misma cantidad cada periodo. ( )
  - c. El gradiente puede variar en forma creciente o decreciente. ( )
  - d. Los gradientes se clasifican en dos grandes grupos: aritmético y geométricos. ( )
  - e. El gradiente aritmético no es más que una anualidad más cierta variación cada periodo. ( )
  - f. Un gradiente geométrico varía en forma porcentual. ( )
  - g. El gradiente geométrico al igual que el aritmético está constituido por una anualidad más una variación constante periodo a periodo. ( )
  - h. Los gradientes escalonados reciben su nombre por la forma de escalones que presentan sus representaciones gráficas. ( )

2. Determine el valor presente equivalente al siguiente flujo de caja.



# RESPUESTAS CORRECTAS

1.
  - a. F
  - b. F
  - c. V
  - d. V
  - e. V
  - f. V
  - g. F
  - h. V

2. El valor presente equivalente al flujo de caja es 420.80

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

## ACTIVIDADES PREVIAS

1. Ingresa en internet al buscador de su preferencia para que investigue sobre gradiente y lea las páginas que este le ofrezca.
2. Escoge 2 ó 3 libros de tu lista bibliográfica de esta materia y lee lo referente a gradiente.
3. Elabora un banco de preguntas que reflejen las dudas que te quedaron luego de leer sobre gradiente.
4. Investiga en que actividades económicas son aplicables los gradientes.
5. Elabora un mapa conceptual de los tipos de gradientes encontrados en las lecturas anteriores.



## 8. GRADIENTES

Si con lo que ha aprendido hasta hoy piensa involucrarse económicamente en un proyecto, ya sea de financiación o de inversión, tendrá dos opciones a seguir: recibir o pagar cantidades de dineros en un periodo puntual en el tiempo, o distribuir esa cantidad de dinero en pequeñas cuotas iguales, generadas en varios periodos dentro del tiempo del proyecto. Este capítulo le ofrece otra alternativa de amortizar capital de manera creciente o decreciente dependiendo de las posibilidades de pago.

Esta nueva alternativa es conocida con el nombre de *Gradiente*, el cual no es más que una serie de flujos de caja, ya sean ingresos o desembolsos que cambian en la misma cantidad o en un mismo factor cada periodo.

Para que una serie pagos o flujos de caja sean considerados como gradientes deben cumplir con las siguientes condiciones:

- Todos los pagos se realizan a iguales intervalos de tiempo
- El número de pagos es igual al número de periodos
- Todos los pagos se trasladan al principio o al final del periodo a la misma tasa de interés
- Los pagos aumentan o disminuyen dependiendo de la ley de formación, la cual puede ser aritmética o geométrica.

Existen cuatro formas generales de gradientes las cuales se representarán gráficamente a continuación.

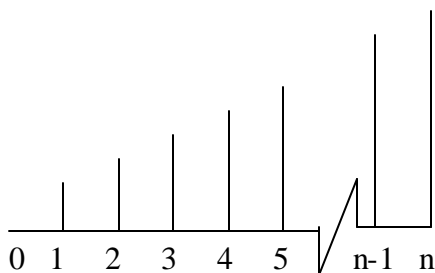


Figura. 8-1. Gradiente aritmético creciente

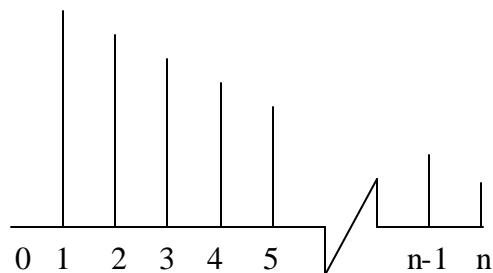


Figura. 8-2. Gradiente aritmético decreciente

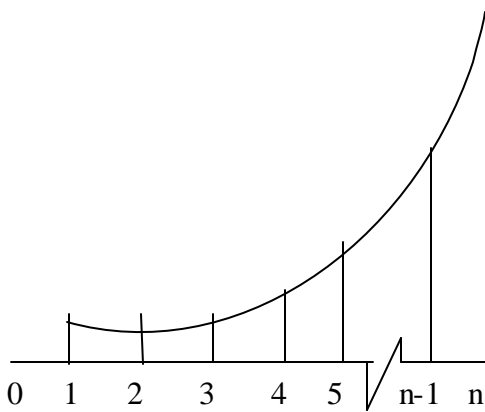


Figura. 8-3. Gradiente geométrico creciente

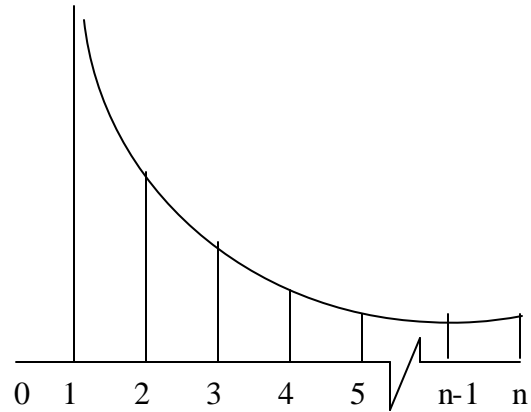


Figura. 8-4. Gradiente geométrico decreciente

Las figuras 8-1 y 8-2 representan al grupo de los gradientes aritméticos o lineales y las figuras 8-3 y 8-4 simbolizan a los gradientes geométricos o exponenciales.

A continuación encontrará un gráfico que ilustra la clasificación completa de los gradientes.

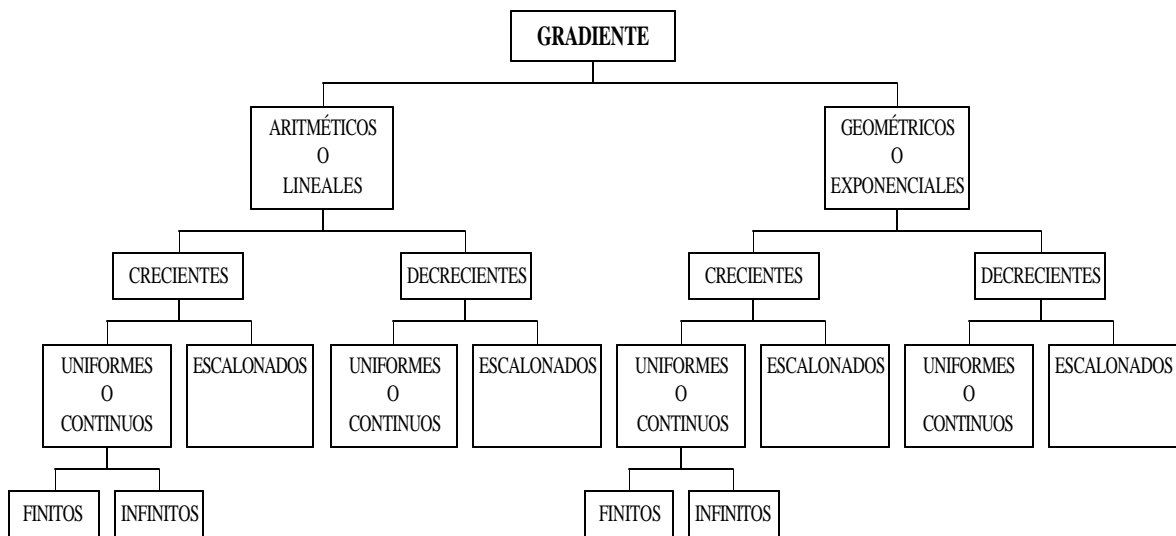


Figura 8-5. Clasificación de los gradientes

## 8.1. GRADIENTE ARITMÉTICO

Es una serie de pagos periódicos que se caracterizan porque cada pago es igual al inmediatamente anterior más un valor constante. Si dicho valor es positivo el gradiente será creciente como se observa en la figura 8-1 y si por el contrario es negativo se obtendrá un gradiente decreciente, representado en la figura 8-2.

### 8.1.1. Gradiente aritmético creciente

Este es un gradiente aritmético que se caracteriza por poseer una base o anualidad y un flujo que se forma incrementando dicha base con una cantidad constante.

A la base que constituye el gradiente se le simboliza con la letra B y la cantidad que incrementa periodo a periodo el flujo se le denota con la letra G.

Por tanto podemos decir que existe una base B a la cual se le adiciona la cantidad G para el primer periodo, en el segundo periodo a ese total (B + G) se le adiciona la misma cantidad o valor G y de igual manera se hace para el resto de periodos en estudio, como se ilustra en la figura 8-6.

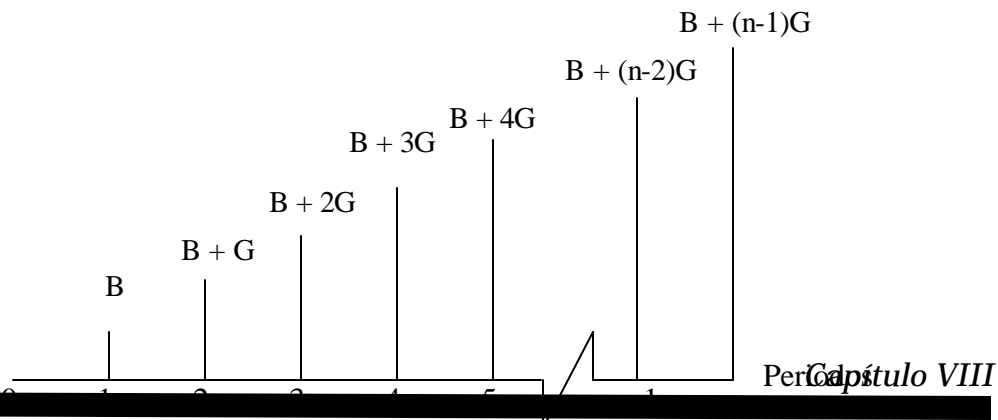


Figura 8-6. Estructura de un gradiente aritmético creciente

Si se realiza un corte como se muestra en la figura 8-7, se pueden observar mejor los componentes de un gradiente aritmético creciente.

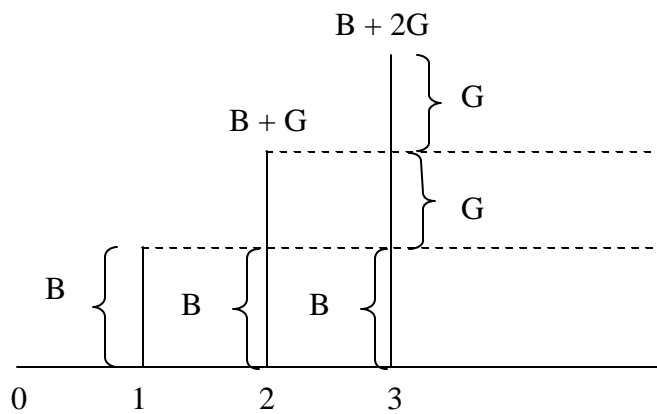


Figura 8-7. Corte vertical de un gradiente aritmético creciente

Como se observa en la figura 8-5 los gradientes aritméticos crecientes se dividen en:

- Uniforme: cuando la variación es continua.
- Escalonado: cuando la variación es por periodos y entre periodos hay subperiodos que tienen ingreso y egresos que permanecen constante.

### 8.1.1.1. Gradiente aritmético creciente uniforme

Como se mencionó anteriormente esta clase de gradiente se diferencia porque su variación es continua, es decir, que en cada periodo la cuota presenta la misma variación con respecto a la cuota inmediatamente anterior, por ejemplo, si los periodos de inversión o financiación son mensuales entonces cada mes presentará la misma variación.

La figura 8-6 es un claro ejemplo de gradiente aritmético creciente uniforme.

Al observar la figura 8-5 debe notar que este tipo de gradiente se subdivide en dos grupos

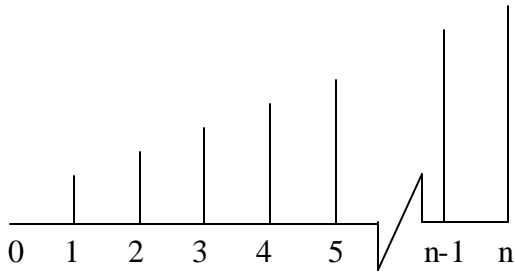


Figura. 8-8. Gradiante uniforme finito

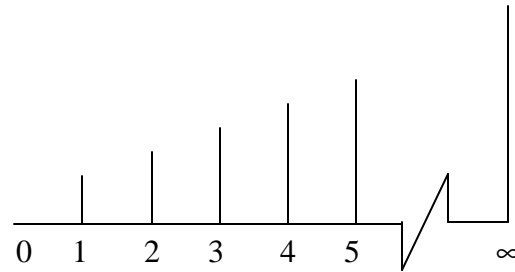


Figura. 8-9. Gradiante uniforme infinito

La figura 8-8 representa los gradientes uniformes finitos y la figura 8-9 representa a los gradientes uniformes infinitos.

### A. Gradiante aritmético creciente uniforme finitos

Este tipo de gradiente se considera finito cuando se sabe a ciencia cierta cual es el número de pagos que se han establecido en la negociación. Para conocer el valor de estas series variables a través del tiempo será necesario tener conocimiento de aquellas fórmulas o factores que permiten determinar el valor de dichas series de pagos. Las figuras 8-6 y 8-8, ejemplarizan este tipo de gradiente.

A continuación se analizará mediante una fórmula, el valor que tomaría un gradiente si este se desplazará a través del tiempo a una posición específica.

### Relación de equivalencia entre el Valor Presente y un Gradiante Creciente Finito

Esta relación nos permite calcular el valor presente de un flujo de caja que presenta una variación constante considerando una tasa de interés  $i\%$ .

Esta relación se representa gráficamente en la figura 8-10.

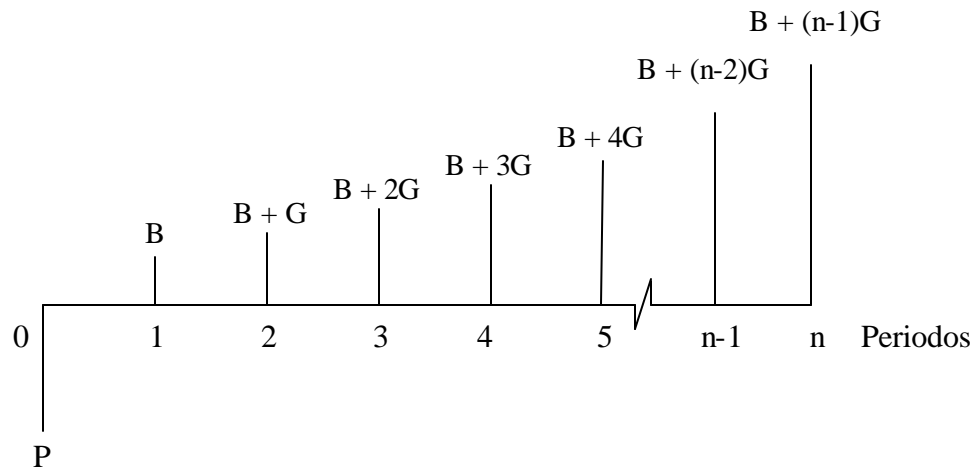


Figura 8-10. Relación valor presente y gradiente creciente finito

Como se observa en la figura 8-10, a partir del segundo pago la cuota está constituida por un valor base más las variaciones acumuladas por el correspondiente incremento. Por tanto será posible dividir la serie variable en sus dos componentes básicos, como se muestran en las figuras 8-11 y 8-12, con el fin de determinar el valor presente de cada uno de ellos para luego sumarlos y obtener el presente del gradiente. En otras palabras la serie variable de la figura 8-10 es equivalente a la suma de las figuras 8-11 y 8-12.

$$P = P_1 + P_2$$

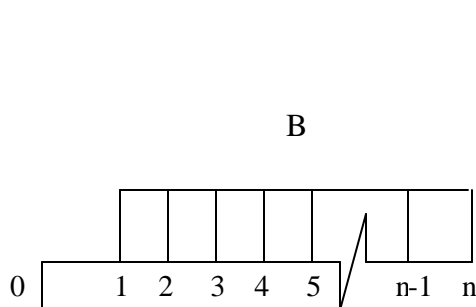


Figura 8-11. Parte constante del gradiente

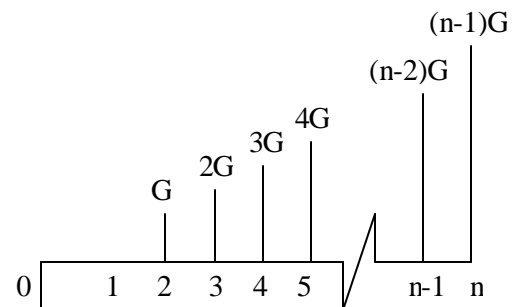


Figura 8-12. Parte variable del gradiente

Capítulo VIII

En capítulos anteriores se aprendió como encontrar el valor de P cuando se conoce una anualidad; por tanto  $P_1$  sería igual a:

$$P = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

$$P_1 = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \quad \text{Ecuación 8-1}$$

Ahora se procederá a calcular el valor de  $P_2$ , para lo cual será necesario determinar el valor presente de cada una de los flujos de la figura 8-12, en sus periodos correspondientes.

$$P_2 = \frac{G}{(1+i)^2} + \frac{2G}{(1+i)^3} + \frac{3G}{(1+i)^4} + \dots + \frac{(n-1)G}{(1+i)^n} \quad \text{Ecuación 8-2}$$

Ahora multiplicamos la ecuación 8-2 por  $(1+i)$

$$P_2 (1+i) = \frac{G}{(1+i)} + \frac{2G}{(1+i)^2} + \frac{3G}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(n-1)G}{(1+i)^{n-1}} \quad \text{Ecuación 8-3}$$

Hecho esto procede a restar la ecuación 8-3 menos la ecuación 8-2 miembro a miembro así:

$$\frac{2G}{(1+i)^2} - \frac{G}{(1+i)^2} = \frac{G}{(1+i)^2}$$

$$\frac{3G}{(1+i)^3} - \frac{2G}{(1+i)^3} = \frac{G}{(1+i)^3}$$

*Capítulo VIII*

Si se hace lo mismo con el resto de términos se obtiene lo siguiente:

$$P_2 i = \frac{G}{(1+i)} + \frac{G}{(1+i)^2} + \frac{G}{(1+i)^3} + \frac{G}{(1+i)^4} + \dots + \frac{G}{(1+i)^{n-1}} - \frac{(n-1)G}{(1+i)^n}$$

El término  $\frac{(n-1)G}{(1+i)^n}$  puede ser descompuesto para obtener dos fracciones más sencillas como las siguientes:

$$\frac{nG}{(1+i)^n} - \frac{G}{(1+i)^n}$$

Por tanto:

$$P_2 i = \frac{G}{(1+i)} + \frac{G}{(1+i)^2} + \frac{G}{(1+i)^3} + \frac{G}{(1+i)^4} + \dots + \frac{G}{(1+i)^{n-1}} + \frac{G}{(1+i)^n} - \frac{nG}{(1+i)^n}$$

Ecuación 8-4

Ahora se despeja de la ecuación 8-4 la variable  $(P_2)$ , ya que el valor de esta es el que se desea calcular.

$$P_2 = \frac{G}{i} \left[ \underbrace{\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}}_{\text{Ecuación 8-5}} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Ecuación 8-5

Si observa bien, esto es equivalente al valor presente de una anualidad



Por tanto la ecuación 8-5 se puede traducir y quedar de la siguiente manera:

$$P_2 = \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad \text{Ecuación 8-6}$$

Determinados los valores de  $P_1$  y  $P_2$ , mediante la ecuación 8-1 y 8-6 se puede encontrar el valor correspondiente a  $P$

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Ecuación 8-7a

Esta ecuación también puede ser representada en forma de factores como se muestra a continuación:

$$P = B (P/A, i\%, n) + \frac{G}{i} [(P/A, i\%, n) - n (P/F, i\%, n)]$$

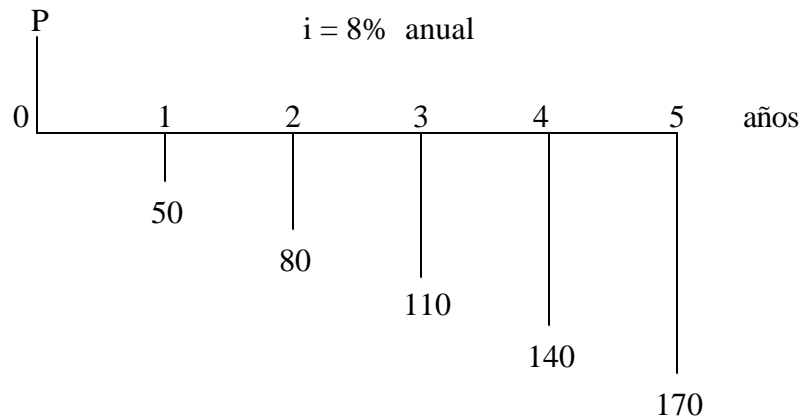
Ecuación 8-7b

La ecuación matemática que se obtuvo en esta sección equivale de igual manera a la siguiente expresión simbólica:

$$P = B (P/A, i\%, n) + G (P/G, i\%, n) \quad \text{Ecuación 8-7c}$$

*Ejercicio Práctico*

Calcular el valor presente del siguiente flujo de caja, con un interés del 8% anual.



Datos:      P = ?      i = 8%      B = 50      G = 30

Este ejercicio puede ser resuelto de tres maneras:

1. Empleando la ecuación 8-7a

$$P = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

$$P = 50 \left[ \frac{(1+0.08)^5 - 1}{(1+0.08)^5 0.08} \right] + \frac{30}{0.08} \left[ \frac{(1+0.08)^5 - 1}{(1+0.08)^5 0.08} - \frac{5}{(1+0.08)^5} \right]$$

$$P = 420.80$$

2. Tomando como base la ecuación 8-7b

$$P = B (P/A, i\%, n) + \frac{G}{i} [(P/A, i\%, n) - n (P/F, i\%, n)]$$

$$P = 50 (P/A, 8\%, 5) + \frac{30}{0.08} [(P/A, 8\%, 5) - n (P/F, 8\%, 5)]$$

$$P = 50 (3.9927) + \frac{30}{0.08} [(3.9927) - 5 (0.6806)]$$

$$P = 420.8$$

3. Utilizando la ecuación 8-7c

$$P = B (P/A, i\%, n) + G (P/G, i\%, n)$$

$$P = 50 (P/A, 8\%, 5) + 30 (P/G, 8\%, 5)$$

$$P = 50 (3.9927) + 30 (7.372)$$

$$P = 420.80$$

**Relación de equivalencia entre un Valor Futuro y un Gradiente Creciente Finito**

Esta relación nos permitirá conocer el valor equivalente en una posición n de una serie de flujos que presentan una variación constante periodo a periodo considerando una tasa de interés del i%.

Esta relación se ilustra gráficamente mediante la figura 8-13.

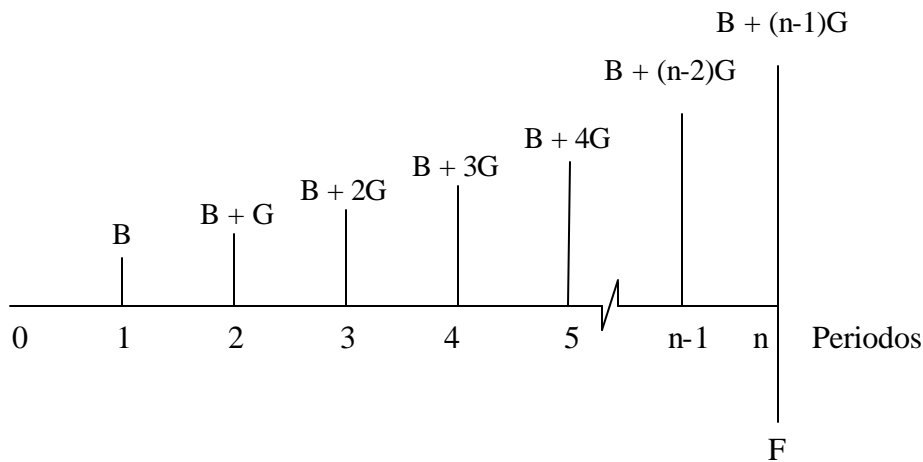


Figura 8-13. Relación valor futuro y gradiente creciente finito

Para deducir la expresión matemática que describe esta relación se tomará como base la ecuación 8-7a, la cual representa el valor presente de un gradiente. Teniendo este valor en la posición cero será sencillo convertirlo en una cantidad futura; mediante la ecuación 5-1. Obteniendo lo siguiente:

$$F = \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right\} (1+i)^n$$

Ecuación 8-8

Simplificando las fracciones de la ecuación 8-8 se obtendrá una ecuación más reducida o sencilla

$$F = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

Ecuación 8-9a

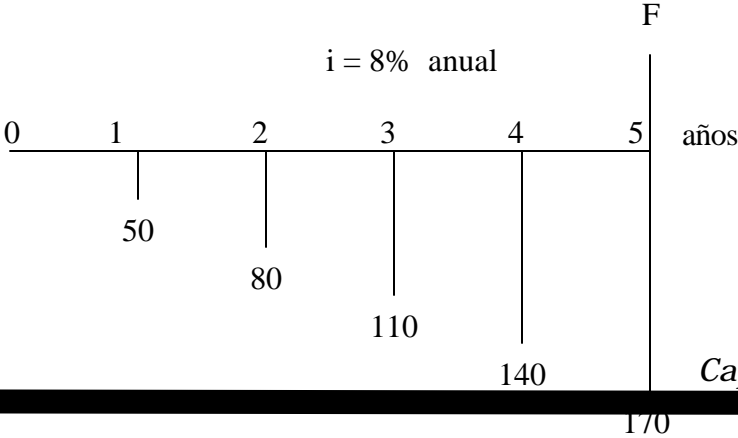
La representación mediante factores, de esta ecuación matemática es:

$$F = B (F/A, i\%, n) + \frac{G}{i} [(F/A, i\%, n) - n]$$

Ecuación 8-9b

### Ejercicio Práctico

Calcule el valor futuro al flujo de caja del anterior ejercicio.



Capítulo VIII

Datos: F = ?      i = 8%      B = 50      G = 30  
 1. Solución mediante la ecuación 8-9a

$$F = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

$$F = 50 \left[ \frac{(1+0.08)^5 - 1}{0.08} \right] + \frac{30}{0.08} \left[ \frac{(1+0.08)^5 - 1}{0.08} - 5 \right]$$

$$F = 618.31$$

2. La solución sería igual si nos apoyáramos en la ecuación 8-9b.

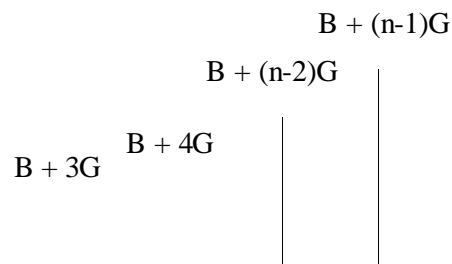
$$F = B (F/A, i\%, n) + \frac{G}{i} [(F/A, i\%, n) - n]$$

$$F = 50 (F/A, 8\%, 5) + \frac{30}{0.08} [(F/A, 8\%, 5) - 5]$$

$$F = 618.31$$

**Relación de equivalencia entre una Anualidad y un Gradiente Creciente Finito**

Esta relación nos facilita el cálculo de una anualidad a partir de un gradiente creciente cuando



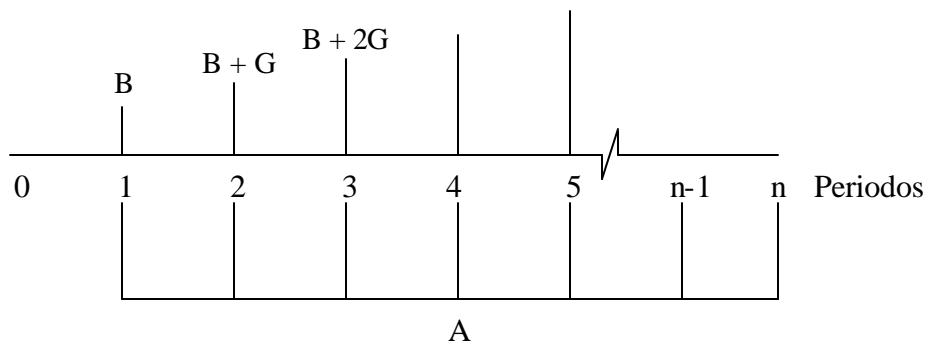


Figura 8-14. Relación valor anual y gradiente creciente finito

Para determinar la ecuación matemática que describa la relación estudiada en esta sección será necesario apoyarnos en la ecuación 8-9a. En el capítulo de interés compuesto se dedujo la ecuación que permite calcular el valor anual equivalente al valor futuro de una serie de flujos; por tanto para llegar a la ecuación de esta relación bastará con remplazar en dicha ecuación el valor equivalente al futuro de un gradiente calculado mediante la ecuación 8-9a. Todo esto para obtener la ecuación 8-10.

$$A = \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right\} \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Ecuación 8-10

Simplificando la ecuación 8-10 se llega a la siguiente ecuación:

$$A = B + G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right)$$

Ecuación 8-11a

De manera simbólica será:

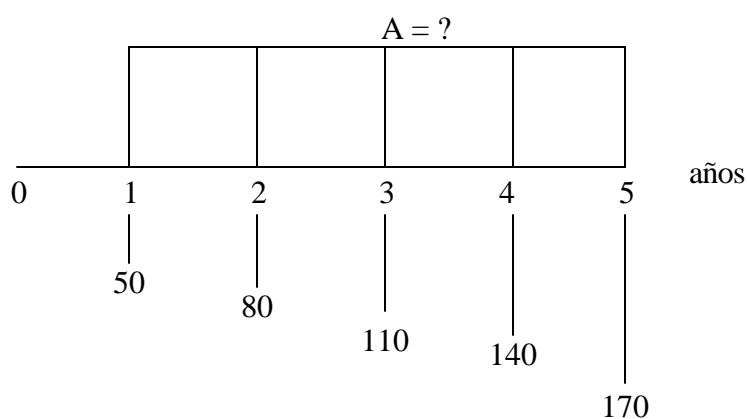
$$A = B + G (A/G, i\%, n)$$

Ecuación 8-11b

### Ejercicio Práctico

Determinar cuál es la anualidad equivalente del siguiente flujo de caja

$i = 8\%$  anual



Si nos basamos en la ecuación 8-11a, la solución será:

$$A = B + G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right)$$

$$A = 50 + 30 \left( \frac{1}{0.08} - \frac{5}{(1+0.08)^5 - 1} \right)$$

Capítulo VIII

$$A = 105.40$$

Si se desea obtener la solución mediante la ecuación 8-11b se hará de la siguiente forma:



$$A = B + G (A/G, i\%, n)$$

$$A = 50 + 30 (A/G, 8\%, 5)$$

$$A = 150.40$$

## **B. Gradiente aritmético creciente uniforme infinitos**

Este tipo de gradiente se caracteriza por poseer un número infinito de pagos, como se muestra en la figura 8-9. También se asume como infinitos aquellos gradientes con un número muy grande pagos o cuando se desconoce el número de pagos pero se intuye que son demasiados.

La principal aplicación o utilización de este tipo de gradiente es en el cálculo del costo de capital. Otra aplicación de esta clase de gradiente puede ser el cálculo del costo de mantenimiento de un puente o una carretera de la ciudad, ya que su mantenimiento no tiene límite de tiempo, es decir, se realiza cada año a lo largo de un tiempo indefinido y aumentando periodo a periodo.

Seguidamente se analizará mediante una fórmula o ecuación, el valor que tomará un gradiente aritmético infinito si es desplaza hacia la posición cero. Solo se analizará esta relación ya que al desconocer el número de periodos totales de la negociación será imposible determinar el valor futuro de ese flujo infinito, tampoco se podrá calcular un valor anual equivalente a este a lo largo del periodo.

**Relación de equivalencia entre un Valor Presente y Gradiente Creciente Infinito**

Para determinar la ecuación perteneciente a esta sección se tomará como base la ecuación 8-7a, la cual recordaremos a continuación:

$$P = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Ahora ampliamos la ecuación 8-7a con el fin de visualizar mejor cada uno de los términos que la componen.

$$P = B \left[ \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n i} - \frac{1}{(1+i)^n i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n i} - \frac{1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Ecuación 8-12

Seguidamente se analizará cada componente de la ecuación 8-12 asumiendo que n tiende a infinito.

$$P = B \left[ \frac{\cancel{(1+i)^n}^0}{\cancel{(1+i)^n}^0} * \frac{1}{i} - \frac{1}{\cancel{(1+i)^n}^0 i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{\cancel{(1+i)^n}^0}{\cancel{(1+i)^n}^0} * \frac{1}{i} - \frac{1}{\cancel{(1+i)^n}^0 i} - \frac{n}{\cancel{(1+i)^n}^0} \right]$$

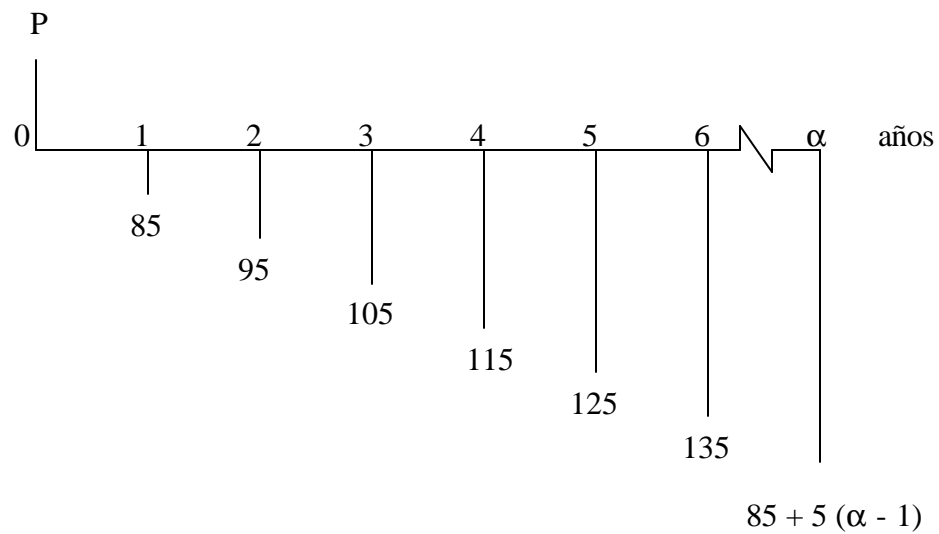
Luego del análisis anterior la ecuación final es:

$$P = \frac{B}{i} + \frac{G}{i^2}$$

Ecuación 8-13 **Capítulo VIII**

**Ejercicio práctico**

Calcular el valor presente de la siguiente serie de pagos, a una tasa de interés efectivo anual del 24%



Para solución este ejercicio debemos apoyarnos en la ecuación 8-13

$$P = \frac{B}{i} + \frac{G}{i^2}$$

$$P = \frac{85}{0.24} + \frac{5}{0.24^2}$$

$$P = 440.97$$

### 8.1.1.2. Gradiente aritmético creciente escalonado

Este tipo de gradiente se identifica fácilmente ya que está compuesto por una serie de pagos que permanece constantes durante un periodo de tiempo, los cuales aumentan luego de ciertos periodos. Se denomina escalonado por la forma de escalones que presenta su diagrama de flujo, como se muestra en la figura 8-15.

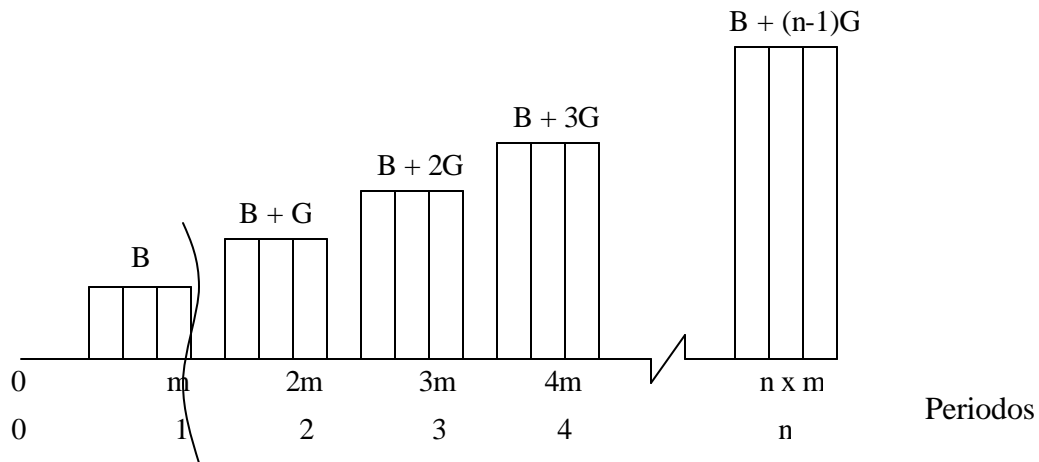


Figura 8-15. Gradiente aritmético creciente escalonado

Si hacemos un corte a la figura 15 con el fin de visualizar de mejor manera la composición del primer escalón del gradiente, como se ilustra en la figura 8-16, en esta se puede observar la anualidad que se forma dentro del primer periodo de pago, el cual contiene m subperiodos.

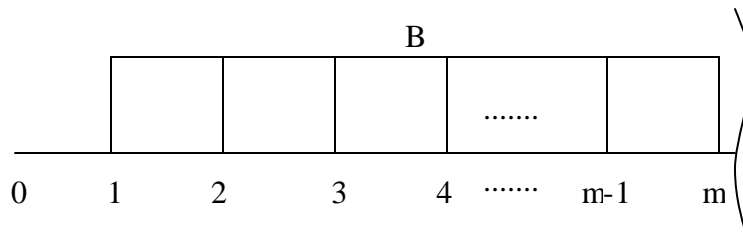


Figura 8-16. Corte vertical del gradiente aritmético escalonado

Donde:

$n$  = Número de periodos del plazo que constituyen el gradiente.

$m$  = Número de cuotas fijas que hay en un periodo del plazo.

$i_m$  = Tasa de interés de la anualidad.

$i$  = Tasa de interés de la negociación.

Este tipo de gradiente es útil no sólo en proyectos de inversión o financiamiento, sino en situaciones de la vida cotidiana; situaciones como un contrato de arrendamiento de un local, en este negocio se pacta un valor de inicio o de partida el cual permanecerá constante por ejemplo seis meses y cada seis meses ese valor se incrementará; de igual manera si usted trabaja en una empresa cualquiera y desea proyectar su salario a un número determinado de años debe tener presente que este permanece constante durante un año y al comienzo del siguiente año este aumenta cierto porcentaje; si usted transcribe trabajos a computador y cobra este por hoja, el valor de esa hoja debe aumentar por lo menos cada seis meses para que pueda cubrir los gastos de papel, tinta y mano de obra, entre otras muchas situaciones. En cada uno de estos ejemplos usted debió percatarse de la existencia de un valor que permanece constante durante cierto número de periodo el cual se incrementa luego de transcurrido cierto tiempo, repitiéndose este ciclo a lo largo de la vida de la situación.

### *Relación de equivalencia entre el Valor Presente y un Gradiente Escalonado*

Esta relación permite convertir un gradiente aritmético creciente escalonado en un valor presente ubicado en la posición cero considerando una tasa de interés  $i\%$ . Esta relación se encuentra representada en la figura 8-17.

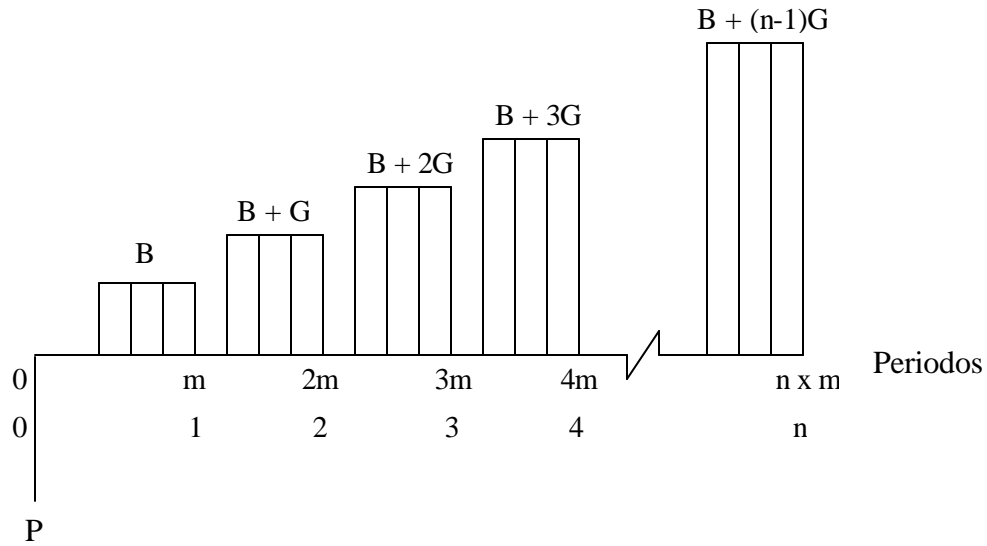


Figura 8-17. Relación valor presente y gradiente escalonado

Como puede notar en la figura 8-17 el gradiente esta constituido por una anualidad que al final del periodo incrementa su valor, para luego mantenerse constante durante un periodo de tiempo de igual magnitud que el anterior, siguiendo esta secuencia hasta el final del periodo del plazo.

Una forma de representar el gradiente escalonado de la figura 8-17 es mediante el gradiente ilustrado en la figura 8-18, donde los pagos fijos se representan por  $A_1, A_2, A_3,$  hasta  $A_n$ .

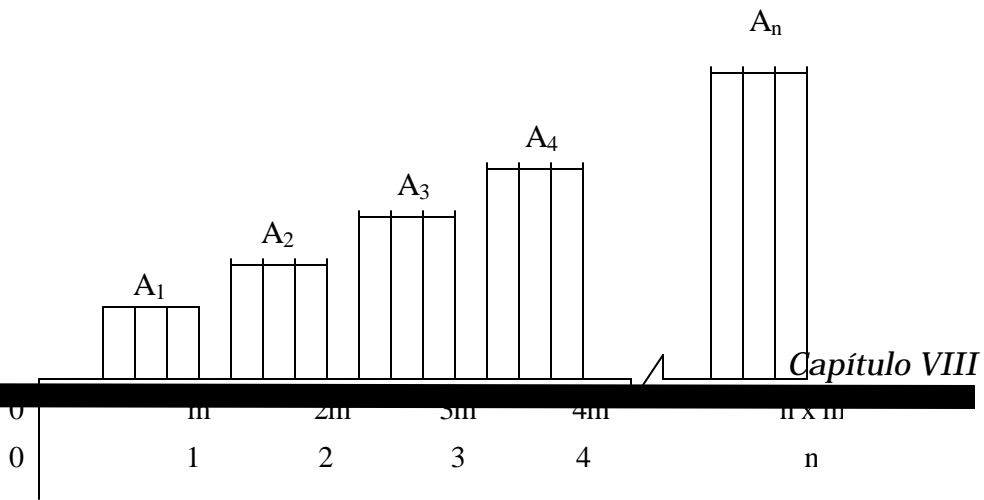


Figura 8-18. Gradiente escalonado expresado en valores anuales. Si cada una de las anualidades de la figura 8-18 se hanamos su valor futuro equivalente, se representará como se observa en la figura 8-19.

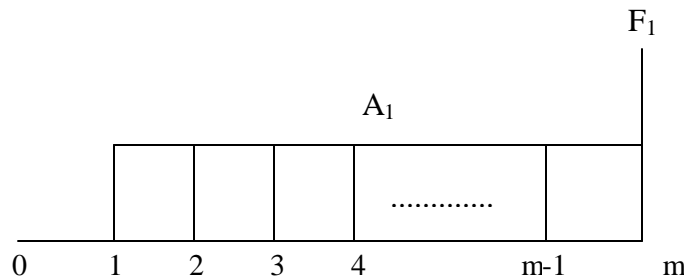


Figura 8-19. Futuro de un subperiodo de un gradiente escalonado

Al calcular el futuro de cada una de las anualidades se observará un gradiente como el representado en la figura 8-20, el cual se ha tratado con anterioridad en la sección *Gradiente Aritmético Creciente Uniforme Finito*.

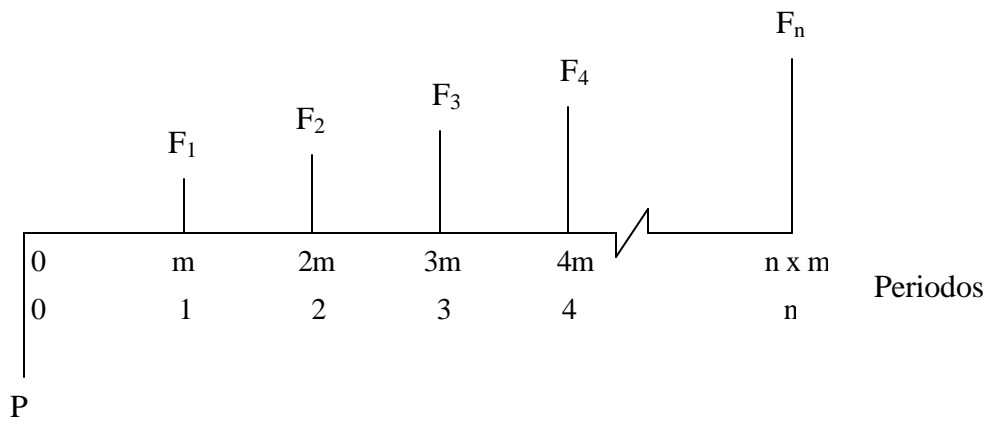


Figura 8-20. Relación valor presente y futuro de los subperiodo del gradiente

Entonces el determinar la ecuación que nos permitirá calcular el valor presente de la figura 8-17 es muy sencillo, porque ya tenemos las bases de cómo hacerlo.

En secciones anteriores, usted aprendió que los gradientes poseen una base o anualidad y una variación constante; nuestro trabajo sería hallar el equivalente a cada uno de esos componente en el gradiente escalonado.

Iniciemos calculando el valor de la anualidad, para lo cual nos apoyamos en la figura 8-19 a la cual se le determinará el valor futuro ( $F_1$ ).

$$F_1 = A_1 (F/A, i_m\%, m)$$

Donde  $A_1$  es igual a  $B$ , por tanto:

$$F_1 = B (F/A, i_m\%, m)$$

Ahora si observamos la figura 8-10 notamos que  $F_1$  es equivalente a la anualidad  $B$ ; lo cual quiere decir que ya determinamos el valor de la base.

Hecho esto debemos encontrar el valor de la variación constante. Para esto, restaremos  $F_2$  menos  $F_1$ ; sabiendo que  $F_2$  es igual a  $(B + G) (F/A, i_m\%, m)$ .

$$\Delta (F_2 - F_1) = (B + G) (F/A, i_m\%, m) - B (F/A, i_m\%, m)$$

Al realizar la operación obtenemos como resultado el siguiente.

$$\Delta (F_2 - F_1) = G (F/A, i_m\%, m)$$

Se calcula ahora la variación entre  $F_3$  y  $F_2$ ; sabiendo que  $F_2 = (B + 2G) (F/A, i_m\%, m)$

$$\Delta (F_3 - F_2) = (B + 2G) (F/A, i_m\%, m) - (B + G) (F/A, i_m\%, m)$$

$$\Delta (F_3 - F_2) = G (F/A, i_m\%, m)$$

Como notó la diferencia es la misma por tanto la variación o lo que llamamos gradiente es igual  $G (F/A, i_m\%, m)$



Finalmente reemplacemos los valores calculados de la base y el gradiente en la ecuación 8-7c; con lo cual habremos determinado la ecuación que nos permitirá calcular el valor presente de un gradiente escalonado creciente.

$$P = B (F/A, i_m\%, m) (P/A, i\%, n) + G (F/A, i_m\%, m) (P/G, i\%, n)]$$

Ecuación 8-14

Si factorizamos la ecuación 8-14, obtendremos la siguiente expresión:

$$P = (F/A, i_m\%, m) [B (P/A, i\%, n) + G (P/G, i\%, n)]$$

Ecuación 8-15a

Donde  $i_m$  es equivalente a  $i$ ; sabiendo que  $i$  es la tasa de interés considerada durante el periodo del plazo e  $i_m$  es equivalente al interés del subperiodo. Para hallar a  $i_m$  recuerde lo visto en el capítulo de tasas nominales y efectivas, cuando necesitaba transformar un interés de un periodo mayor a uno menor. A continuación le recordamos la ecuación.

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

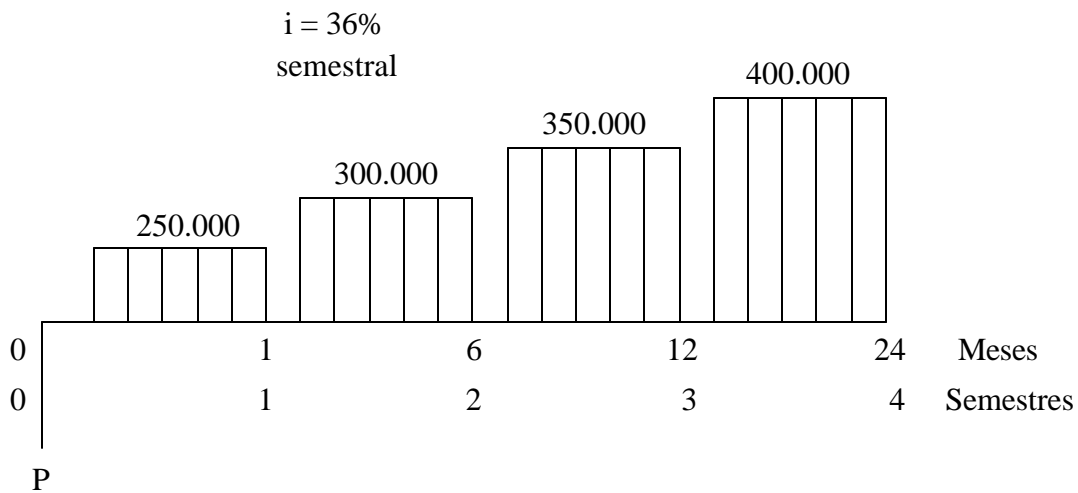
La ecuación matemática equivalente a la 8-15a, es la siguiente:

$$P = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ B \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + G \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i^2(1+i)^n} - \frac{n}{i(1+i)^n} \right) \right]$$

Ecuación 8-15b

### Ejercicio Práctico

La señora Iris desea tomar un apartamento en arriendo en el centro de la ciudad. El alquiler mensual del apartamento es de \$250.000 el cual aumentará \$50.000 cada seis meses. ¿Cuánto tendrá que pagar ella hoy, si desea cancelar dos años de arriendo, y el dueño quiere recibir una tasa de interés del 36% semestral?



Para solución esta situación usted deberá antes que todo calcular  $i_m$  si no se lo proporciona el ejercicio.

$$i_m = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i_m = (1 + 0.36)^{\frac{1}{6}} - 1$$

$$i_m = 5.26\% \text{ mensual}$$

Hecho esto puede proceder a ingresar los datos a la ecuación 8-15b

$$P = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ B \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + G \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i^2(1+i)^n} - \frac{n}{i(1+i)^n} \right) \right]$$

$$P = \left[ \frac{(1+0.0526)^{24} - 1}{0.0526} \right] \left[ 250.000 \frac{(1+0.36)^4 - 1}{0.36(1+0.36)^4} + 50.000 \left( \frac{(1+0.36)^4 - 1}{0.36^2(1+0.36)^4} - \frac{4}{0.36(1+0.36)^4} \right) \right]$$

$$P = 12'272.623$$

Si se desea resolver el problema mediante la ecuación 8-15a esta sería:

$$P = (F/A, i_m\%, m) [B(P/A, i\%, n) + G (P/G, i\%, n)]$$

$$P = (F/A, 5.26\%, 6) [250.000 (P/A, 36\%, 4) + 50.000 (P/G, 36\%, 4)]$$

$$P = (6.846999) (1'681.775 + 110.634)$$

$$P = \$12'272.623$$

### **Relación de equivalencia entre el Valor Futuro y un Gradiente Escalonado**

El objetivo de esta relación es permitirnos determinar un valor equivalente a un gradiente escalonado en la posición n del periodo del plazo

Esta relación se ilustra en la figura 8-21

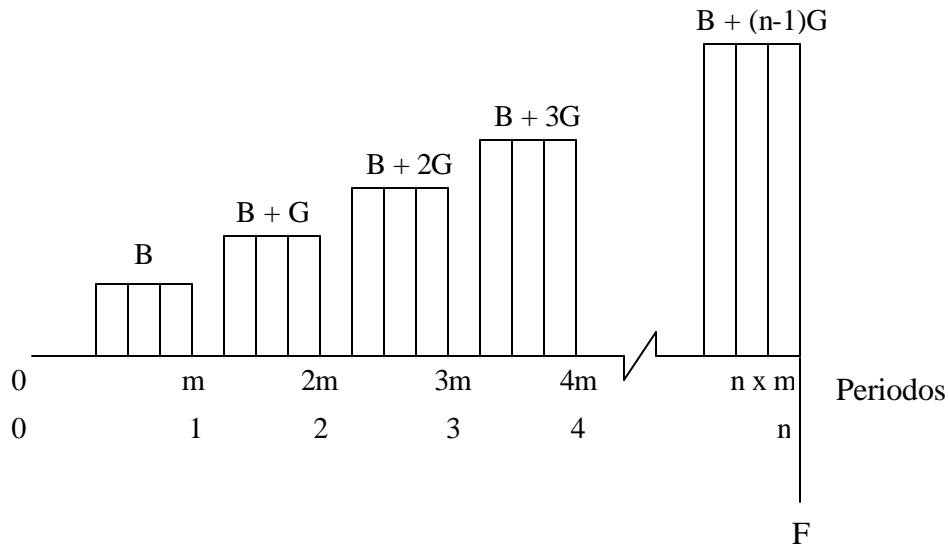


Figura 8-21. Relación valor futuro y gradiente escalonado

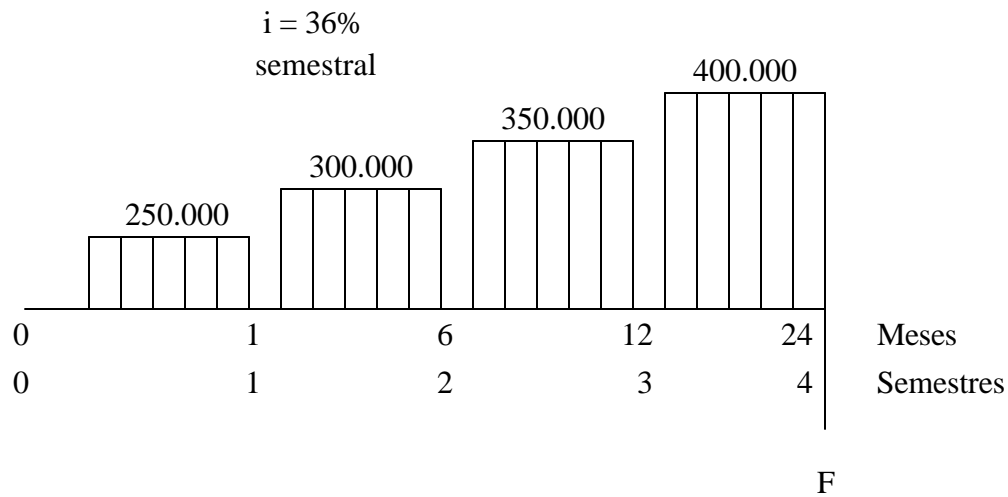
Para obtener la fórmula que representa esta relación debemos seguir paso a paso el procedimiento empleado en la sección anterior sólo que para este caso nos interesa el valor futuro y no el presente. O simplemente convierte el valor presente obtenido en la anterior sección a un valor futuro, como usted aprendió en capítulos pasados. Si realizamos esto obtendremos como resultado las siguientes ecuaciones.

$$F = (F/A, i_m \%, m) \left\{ B (F/A, i\%, n) + \left[ \frac{G}{i} (F/A, i\%, n) - n \right] \right\} \quad \text{Ecuación 8-16a}$$

$$F = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \right\} \quad \text{Ecuación 8-16b}$$

### Ejercicio Práctico

Calcular el monto de los siguientes flujos de caja



Se calcula el interés equivalente a un mes, como se aprendió en el capítulo de tasa nominal y efectiva.

$$i_m = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i_m = (1 + 0.36)^{\frac{1}{6}} - 1$$

$$i_m = 5.26\% \text{ mensual}$$

Emplee ahora la ecuación 8-16b para solucionar finalmente el ejercicio

$$F = \left[ \frac{(1 + i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} - n \right] \right\}$$

$$F = \left[ \frac{(1 + 0.0526)^6 - 1}{0.0526} \right] \left\{ 250.000 \left[ \frac{(1 + 0.36)^4 - 1}{0.36} \right] + \frac{50.000}{0.36} \left[ \frac{(1 + 0.36)^4 - 1}{0.36} - 4 \right] \right\}$$

$$F = 14'102.170$$

**Relación de equivalencia entre una Anualidad y un Gradiente Escalonado Creciente**

El objetivo principal de esta relación es determinar un valor anual equivalente a un gradiente escalonado considerando una tasa de interés  $i\%$  a lo largo del periodo del plazo.

Gráficamente esta relación se describe mediante la figura 8-22

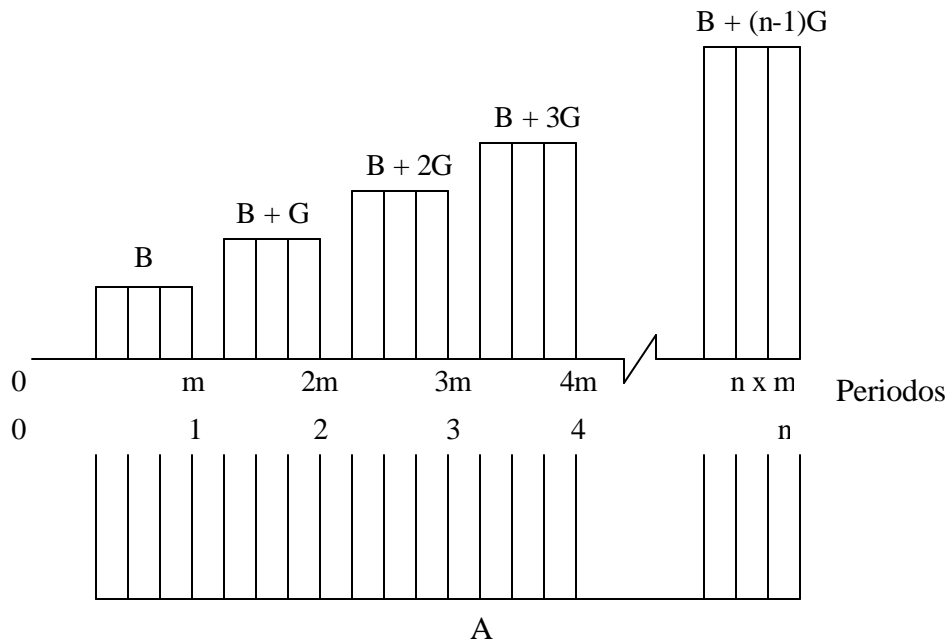


Figura 8-22. Relación valor anual y gradiente escalonado creciente

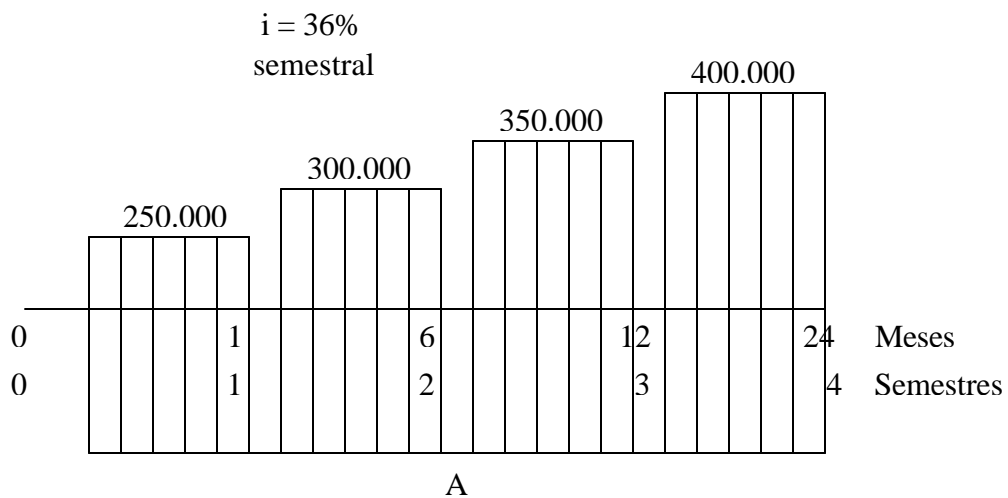
La ecuación matemática característica de esta relación se determina y transformando el valor obtenido en la ecuación 8-15a ó 8-16a, en un valor anual, situación que usted ya maneja. Esto para llegar al siguiente resultado:

$$A = (F/A, i_m\%, m) [B + G (A/G, i\%, n)] \quad \text{Ecuación 8-17a}$$

$$A = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B + G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right) \right\} \quad \text{Ecuación 8-17b}$$

**Ejercicio Práctico**

Determinar el valor anual equivalente al siguiente flujo de caja.



$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i_m = (1+0.36)^{\frac{1}{6}} - 1$$

$$i_m = 5.26\% \text{ mensual}$$

Una vez determinada  $i_m$ , se procede a calcular el valor correspondiente a A según la ecuación 8-17b.

$$A = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B + G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right) \right\}$$

$$A = \left[ \frac{(1+0.0526)^6 - 1}{0.0526} \right] \left\{ 250.000 + 50.000 \left( \frac{1}{0.36} - \frac{4}{(1+0.36)^4 - 1} \right) \right\} e$$

$$A = 2'096.959$$

### 8.1.2. Gradiente aritmético decreciente

Cuando nos encontramos con un gradiente cuya variación constante sea decreciente, o, disminuye periodo a periodo tenemos enfrente un caso de gradiente aritmético decreciente; como el de la figura 8-23.



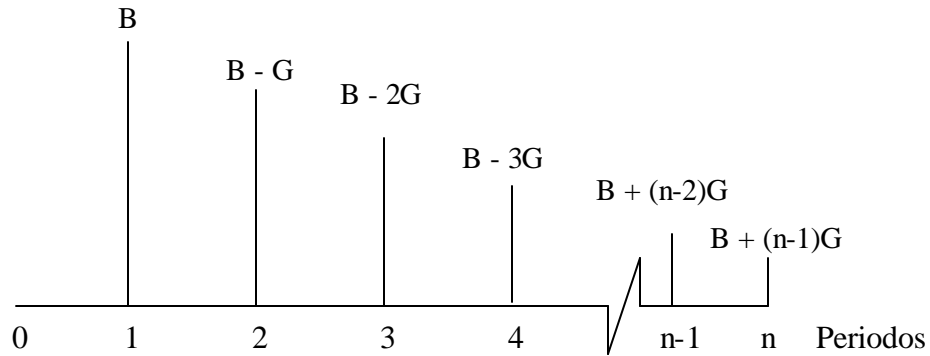


Figura 8-23. Gradiente aritmético decreciente

Para la obtención de estas fórmulas se toma como referencia las ecuaciones halladas en los gradientes crecientes, ya que su diferencia radica, en que el gradiente decreciente la fracción correspondiente a la variación (gradiente) es negativa, es decir, ya no será  $G$  sino  $-G$ .

### 8.1.2.1. Gradiente aritmético decreciente uniforme

Los gradientes decrecientes aritméticos son una serie de flujos de caja que disminuyen en forma constante, ya que disminuyen la misma cantidad o valor cada periodo.

A diferencia de los gradientes creciente estos se caracterizan porque su variación es negativa, es decir, ya no será  $G$  sino  $-G$ . Ejemplo de este tipo de gradiente es el ilustrado mediante la figura 8-23.

**Relación de equivalencia entre un Valor Presente y un Gradiente Aritmético Decreciente**

Esta relación nos permite encontrar el valor presente de una serie de ingresos o egresos ocurridos al final de cada periodo, los cuales están sujetos a una disminución constante por periodo con relación al pago inmediatamente anterior considerando una tasa de interés  $i\%$ .

La figura 8-24, ilustra esta relación.

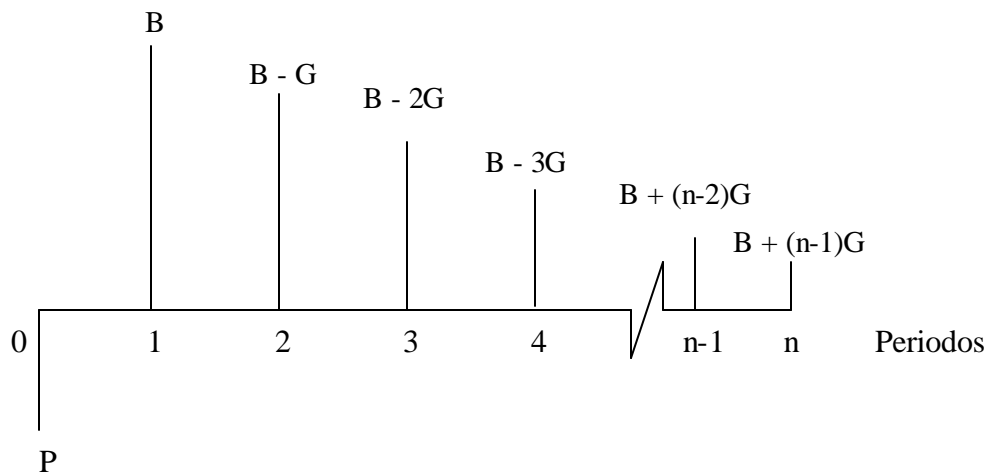


Figura 8-24. Relación valor presente y gradiente aritmético decreciente

La deducción de la fórmula matemática que describe esta relación es igual a la aprendida en la sección, *Relación de equivalencia entre un valor presente y gradiente creciente*, con la única diferencia que para esta deducción el gradiente es negativo; obteniendo la siguiente ecuación.

$$P = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad \text{Ecuación 8-18a}$$

La expresión de factores de esta ecuación es:

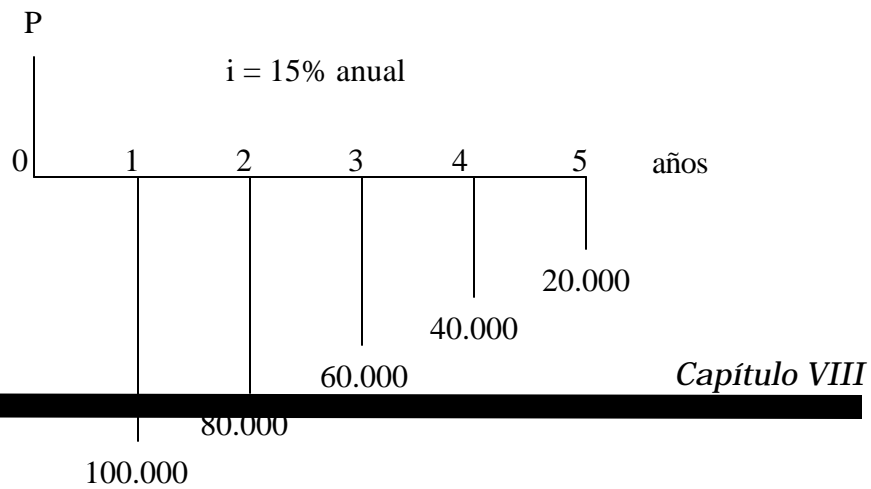
$$P = B (P/A, i\%, n) - \frac{G}{i} [(P/A, i\%, n) - n (P/F, i\%, n)] \quad \text{Ecuación 8-18b}$$

Otra forma de expresar la ecuación mediante factores es:

$$P = B (P/A, i\%, n) - G (P/G, i\%, n) \quad \text{Ecuación 8-18c}$$

### Ejercicio Práctico

El señor Cuadro adquiere una deuda hoy y el prestamista le exige la siguiente forma de pago, ¿Calcule el valor presente del préstamo?



Para darle solución a este ejercicio nos podemos basar en las ecuaciones 8-18a, 8-18b ó 8-18c. Para efectos de práctica emplearemos la ecuación 8-18a.

$$P = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

$$P = 100.000 \left[ \frac{(1+0.15)^5 - 1}{(1+0.15)^5 \cdot 0.15} \right] - \frac{20.000}{0.15} \left[ \frac{(1+0.15)^5 - 1}{(1+0.15)^5 \cdot 0.15} - \frac{5}{(1+0.15)^5} \right]$$

$$P = 219'712,654$$

### Relación de equivalencia entre el Valor Futuro y un Gradiente Aritmético Decreciente

Esta relación nos permite calcular el valor futuro de un gradiente lineal decreciente si la tasa de interés es de  $i\%$  por periodo. Dicha relación se representa gráficamente en la figura 8-25.

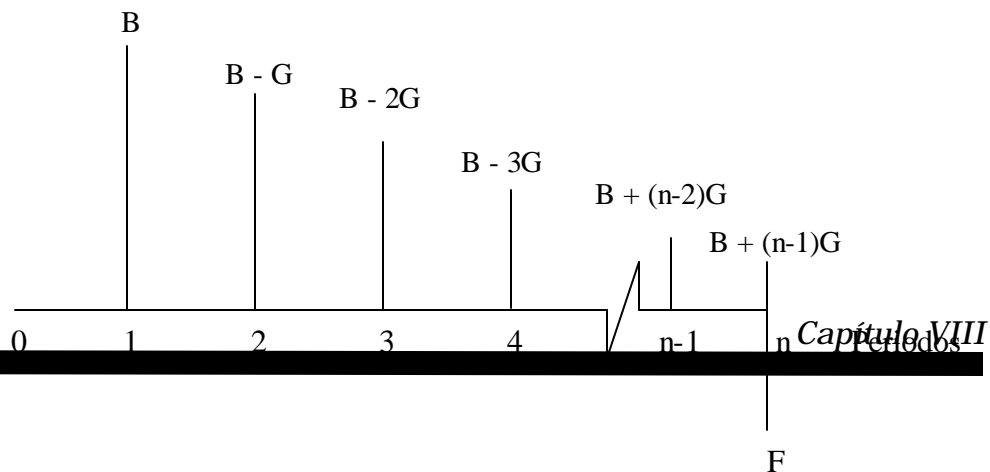


Figura 8-25. Relación valor futuro y gradiente aritmético decreciente. Para la derivación de la ecuación matemática y esta relación se ve en la sección, *Relación de equivalencia entre el valor futuro y un gradiente creciente*.

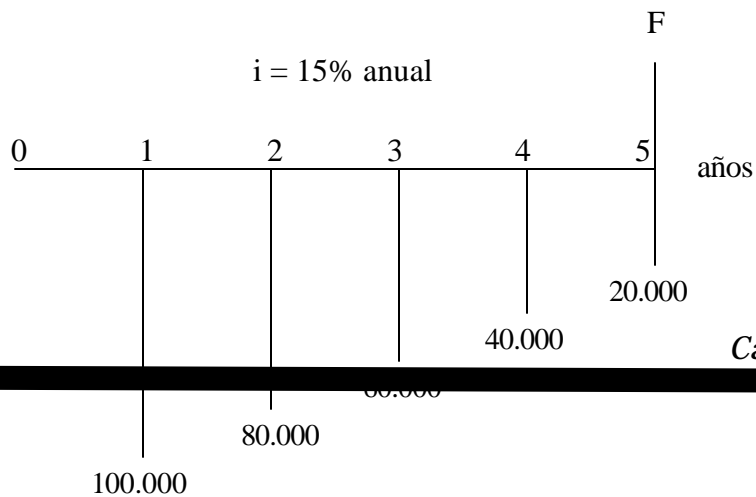
$$F = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \quad \text{Ecuación 8-19a}$$

La expresión simbólica equivalente a la ecuación 8-19a es la que se muestra a continuación:

$$F = B (F/A, i\%, n) - \frac{G}{i} [(F/A, i\%, n) - n] \quad \text{Ecuación 8-19b}$$

### Ejercicio Práctico

Cuánto será el equivalente de la deuda del señor Cuadro al cabo de los cinco años.



Si nos apoyamos de la ecuación 8-19a, la respuesta será:

$$F = B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

$$F = 100.000 \left[ \frac{(1+0.15)^5 - 1}{0.15} \right] - \frac{20.000}{0.15} \left[ \frac{(1+0.15)^5 - 1}{0.15} - 5 \right]$$

$$F = 441.920,625$$

### Relación de equivalencia entre un Valor Anual y un Gradiente Aritmético Decreciente

El objetivo de esta relación es brindar un medio que permita convertir un gradiente aritmético decreciente en una serie anual uniforme equivalente; considerando una tasa de interés  $i\%$ .

Ilustramos esta relación con la figura 8-26.

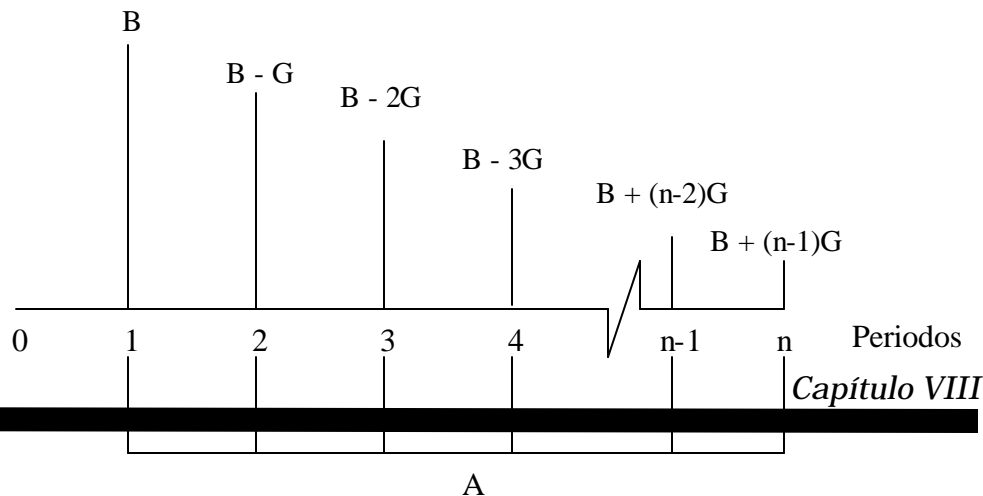


Figura 8-26. Relación valor anual y gradiente aritmético decreciente

Para llegar a la fórmula matemática de esta relación nos guiaremos del procedimiento empleado en la sección, *Relación de equivalencia entre el valor anual y un gradiente creciente*, obteniendo como resultado la ecuación 8-20a.

$$A = B - G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right)$$

Ecuación 8-20a

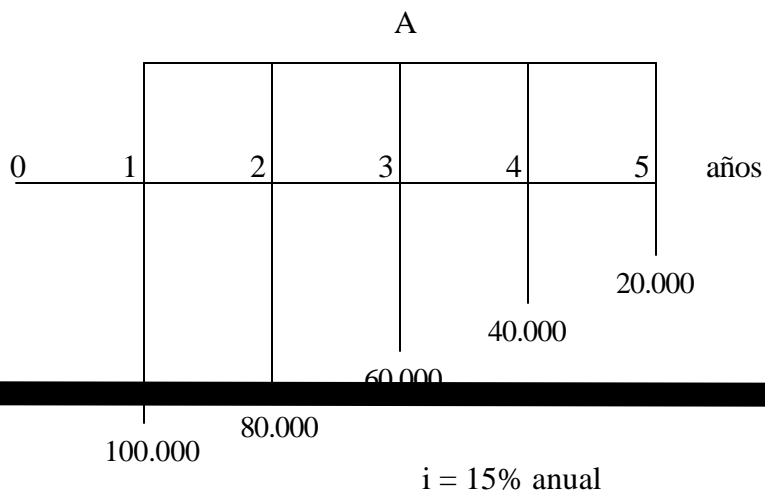
La ecuación de factores equivalente a la ecuación 8-20a, se muestra a continuación.

$$A = B - G (A/G, i\%, n)$$

Ecuación 8-20b

### Ejercicio Práctico

El señor Cuadro piensa proponerle al prestamista cancelar la deuda en cuotas igual. ¿A cuánto ascendería el valor de la cuota a pagar?



Capítulo VIII

Empleemos la ecuación 8-20a para la solución de este ejercicio

$$A = B - G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right)$$

$$A = 100.000 - 20.000 \left( \frac{1}{0.15} - \frac{5}{(1+0.15)^5 - 1} \right)$$

$$A = 65.543,7016$$

### 8.1.2.2. Gradiente aritmético decreciente escalonado

Estos gradientes al igual que los crecientes se caracterizan por poseer una serie de pagos constantes durante cierto tiempo, los cuales varían en determinados periodos; pero a diferencia de los crecientes estos varían en forma decreciente.

#### *Relación de equivalencia entre el Valor Presente y un Gradiente Decreciente Escalonado*

Esta relación tiene como principal propósito permitir el cálculo de un valor presente equivalente a un gradiente escalonado, el cual disminuye cierta cantidad o valor periodo a periodo, teniendo en cuenta una tasa de interés de  $i\%$ . Se representa gráficamente en la figura 8-27.



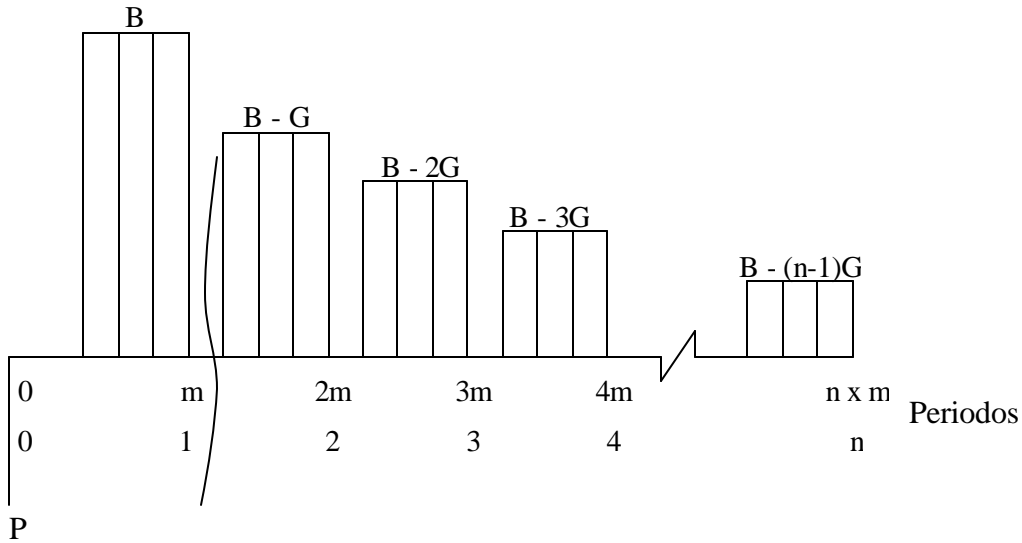


Figura 8-27. Relación valor presente y gradiente decreciente escalonado

Si realizamos un corte como se muestra en la figura 8-27 podemos observar la anualidad que constituye este tipo de gradiente, este corte se amplía en la figura 8-28.

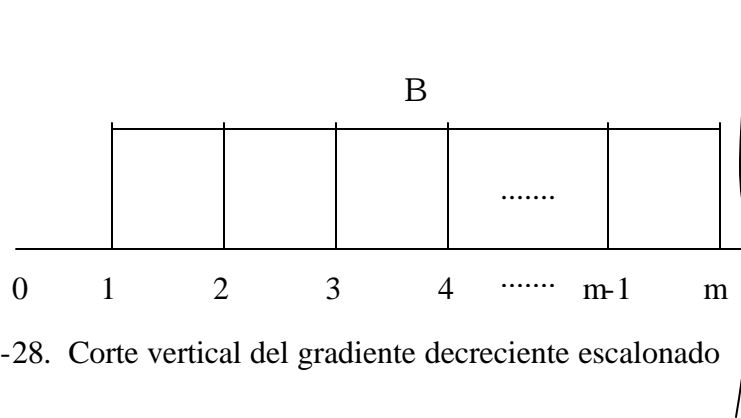


Figura 8-28. Corte vertical del gradiente decreciente escalonado

e:

$m$  = Número de cuotas fijas que hay en un periodo del plazo.

$i_m$  = Tasa de interés de la anualidad.

$i_1$  = Tasa de interés de la negociación.

De igual manera que en el gradiente creciente será necesario convertir las anualidades en futuros como se ilustra en la figura 8-29, para luego calcular el valor presente de este

gradiente que se obtiene en la misma figura. Se recomienda seguir paso a paso el procedimiento explicado en la sección, *Relación de equivalencia entre el Valor Presente y un gradiente Creciente Escalonado*, con las consideraciones que implica este gradiente decreciente.

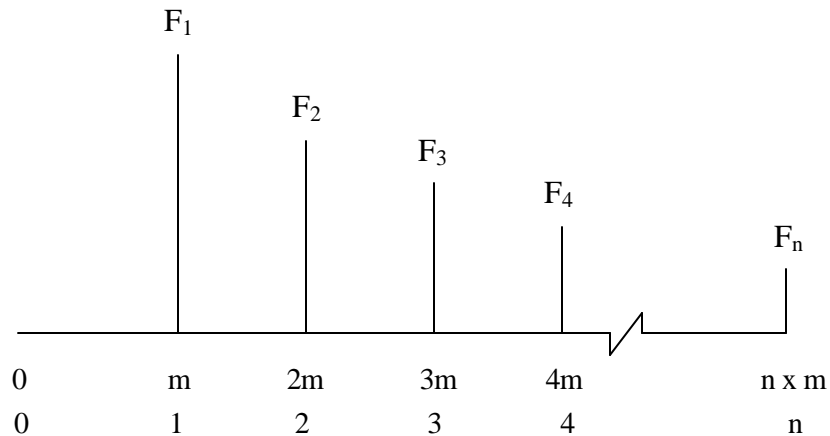


Figura 8-29. Futuro de cada uno de los subperiodos del gradiente escalonado

La ecuación que se obtiene luego del análisis es:

$$P = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] - \frac{G}{i} \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right) \right\}$$

Ecuación 8-21a

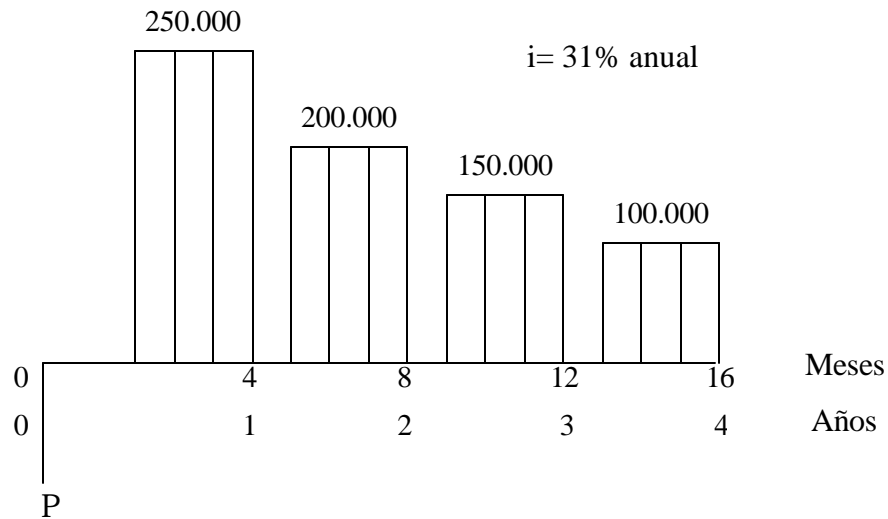
Esta ecuación matemática (8-21a) es equivalente a la siguiente ecuación simbólica:

$$P = (F/A, i_m\%, m)[B(P/A, i\%, n) - G(P/G, i\%, n)]$$

Ecuación 8-21b

**Ejercicio Práctico**

Determine el valor presente del siguiente flujo de caja



$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i_m = (1+0.31)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_m = 2.28\% \text{ mensual}$$

$$P = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right\}$$

$$P = \left[ \frac{(1+0.0228)^4 - 1}{0.0228} \right] \left\{ 250.000 \left[ \frac{(1+0.31)^4 - 1}{0.31(1+0.31)^4} \right] - \frac{50.000}{0.31} \left( \frac{(1+0.31)^4 - 1}{0.31(1+0.31)^4} - \frac{4}{(1+0.31)^4} \right) \right\}$$

$$P = 408.062$$

Relación de equivalencia entre el Valor Futuro y un Gradiente Escalonado Decreciente

El objetivo de esta relación es determinar el valor futuro de un gradiente escalonado considerando una tasa de interés  $i\%$

La figura 8-30 describe de manera gráfica esta relación.

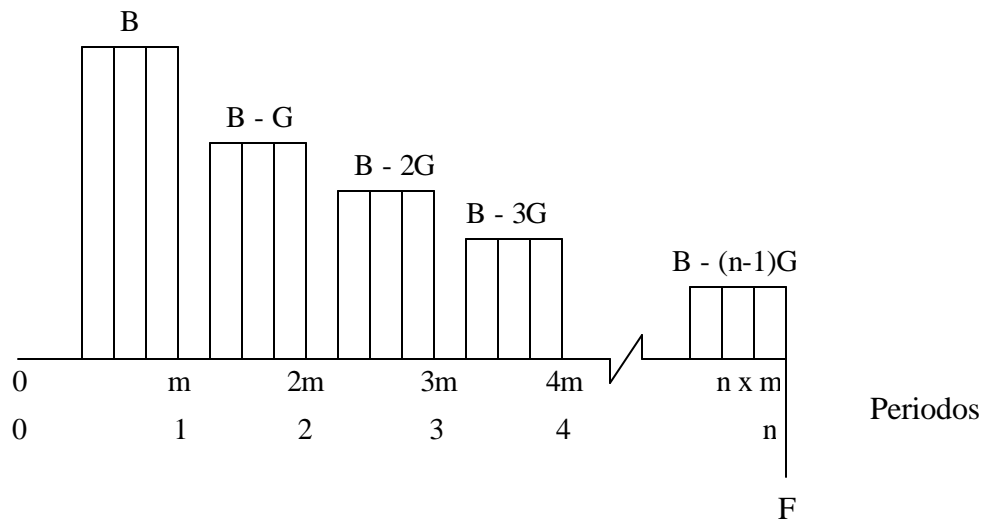


Figura 8-30. Relación valor futuro y gradiente escalonado decreciente

Para llegar a esta ecuación bastará con determinar el valor futuro equivalente al valor presente hallado en la anterior relación, mediante la ecuación 8-21a. Esto dará como resultado la siguiente ecuación:

$$F = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \right\}$$

Ecuación 8-22a

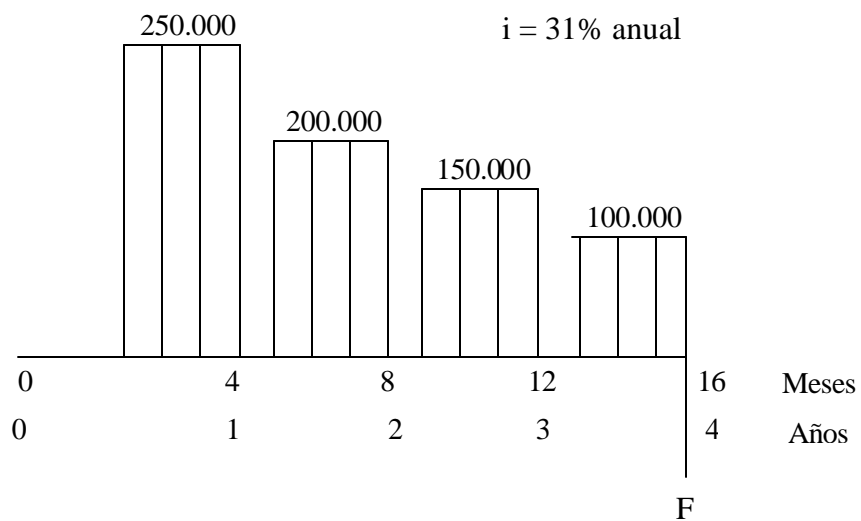
La expresión simbólica o de factores que representa a la ecuación 8-22a es:

$$F = (F/A, i_m \%, m) \left\{ B (F/A, i\%, n) + \left[ \frac{G}{i} (F/A, i\%, n) - n \right] \right\}$$

Ecuación 8-22b

**Ejercicio Práctico**

Calcule el valor futuro o monto del siguiente flujo de caja



$$i_m = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i_m = (1 + 0.31)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_m = 2.28\% \text{ mensual}$$

$$F = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \right\}$$

$$F = \left[ \frac{(1+0.0228)^4 - 1}{0.0228} \right] \left\{ 250.000 \left[ \frac{(1+0.31)^4 - 1}{0.31} \right] - \frac{50.000}{0.31} \left[ \frac{(1+0.31)^4 - 1}{0.31} - 4 \right] \right\}$$

$$F = 4'973.882$$

**Relación de equivalencia entre un Valor Anual y un Gradiente Escalonado Decreciente**

Esta relación tiene como objetivo principal determinar a partir de un gradiente escalonado decreciente una serie anual uniforme, teniendo en cuenta una tasa de interés  $i\%$ . Esta relación se ilustra en la figura 8-31.

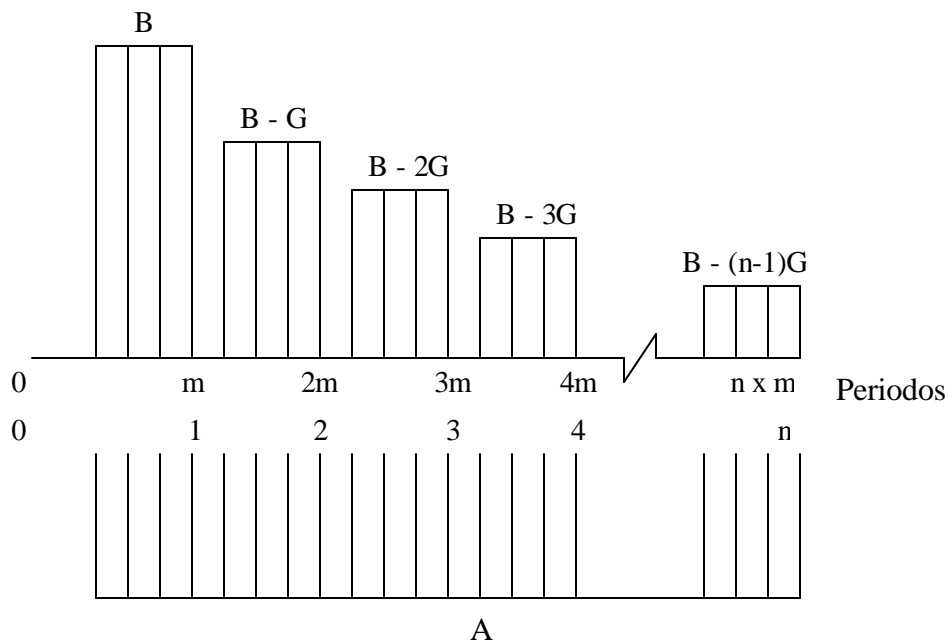


Figura 8-31. Relación valor anual y gradiente escalonado decreciente

Para hallar la ecuación característica de esta relación usted deberá determinar el valor anual equivalente al valor futuro calculado mediante la ecuación 8-22a, a fin de obtener la ecuación 8-23a.

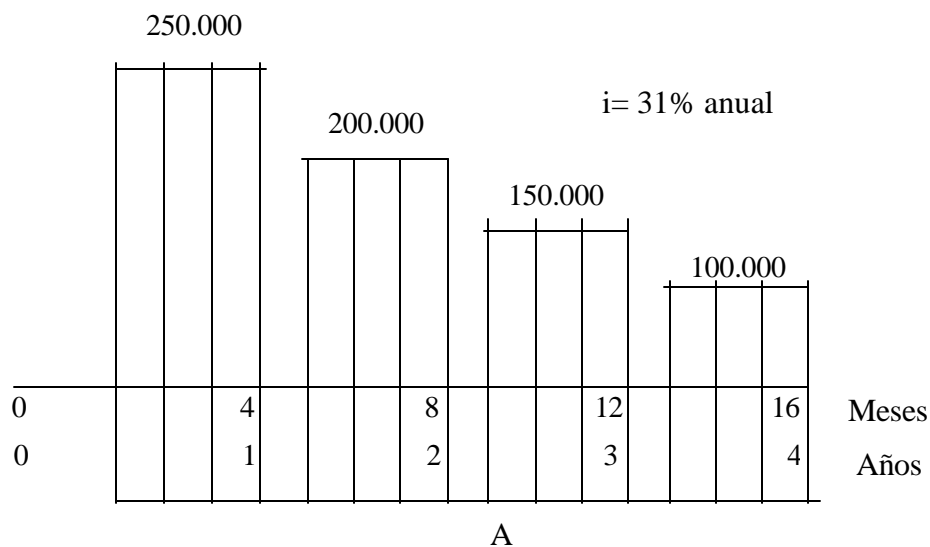
$$A = \left[ \frac{(1 + i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B - G \left[ \frac{1}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n - 1} \right] \right\} \quad \text{Ecuación 8-23a}$$

La forma simbólica de la ecuación 8-23a es:

$$A = (F/A, i_m\%, m) [B - G (A/G, i\%, n)] \quad \text{Ecuación 8-23b}$$

### Ejercicio Práctico

¿A cuánto ascendería el valor de la cuota a pagar, si se contará con el siguiente flujos de caja?



Se halla la tasa mensual equivalente a la generada cada año.

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i_m = (1+0.31)^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$i_m = 2.28\% \text{ mensual}$$

Emplee la ecuación 8-23a para darle solución al ejercicio.

$$A = \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B - G \left[ \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right] \right\}$$

$$A = \left[ \frac{(1+0.0228)^4 - 1}{0.0228} \right] \left\{ 250.000 - 50.000 \left[ \frac{1}{0.31} - \frac{4}{(1+0.31)^4 - 1} \right] \right\}$$

$$A = 792.753$$

## 8.2. GRADIENTE GEOMÉTRICO

Un gradiente geométrico es aquel que se caracteriza por que cada pago es igual al inmediatamente anterior multiplicado por un porcentaje constante. *Capítulo VIII*

Este gradiente está constituido por un primer pago denotado con la letra  $T$  y un porcentaje o de variación de un pago con respecto al anterior, denotada con la letra  $k$ .

Si la tasa de variación  $k$  es positiva obtendremos un gradiente geométrico creciente como se ilustra en la figura 8-3; ahora si  $k$  es negativa el gradiente que se formará será decreciente como se muestra en la figura 8-4.



### 8.2.1. Gradiente geométrico creciente

Como ya sabemos un gradiente geométrico es creciente cuando su tasa de variación es positiva. La ley de formación de este tipo de series es la siguiente:

Se cuenta al final del primer periodo con un pago  $T$ . Para determinar el pago al final del segundo periodo  $T$  debe ser incrementado en un porcentaje ( $k$ ) obteniendo  $(T + Tk)$  y así sucesivamente. A continuación encontrará el cuadro 8-1, el cual nos ilustra esta formación.

Cuadro 8-1. Ley de formación del gradiente geométrico

<i>PERIODO</i>	<i>PAGO DEL PERIODO</i>	<i>SIMPLIFICACIÓN DE LA EXPRESIÓN EQUIVALENTE AL PAGO</i>
1	$T$	$T$
2	$T + Tk$	$T (1 + k)$
3	$(T + Tk) (1 + k)$	$T (1 + k)^2$
4	$(T + Tk) (1 + k) (1 + k)$	$T (1 + k)^3$
.	.	.
.	.	.
n	$(T + Tk) (1 + k) (1 + k) (1 + k) \dots\dots\dots(1 + k)$	$T (1 + k)^{n-1}$

Esta formación se ilustrará de igual manera mediante la figura 8-32.

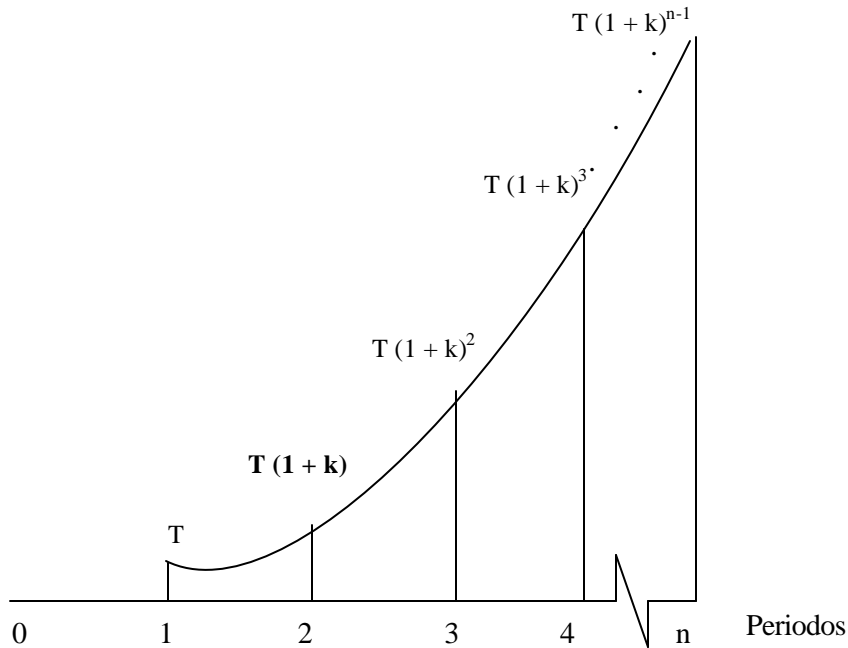


Figura 8-32. Estructura de un gradiente geométrico creciente

Como pudo observar en la figura 8-5 el gradiente geométrico posee la misma clasificación que el gradiente aritmético, cada una de las cuales se verán a continuación.

### 8.2.1.1. Gradiente geométrico creciente uniforme

Al igual que en los gradientes aritméticos uniformes, estos gradientes geométricos uniformes se caracterizan por que su variación es continua periodo a periodo.

Este tipo de gradiente se encuentra representado en la figura 8-32.

Al fijarse en la figura 8-5 notará que estos gradientes geométricos también se dividen en uniformes finitos (figura 8-33) y uniformes infinitos (figura 8-34).

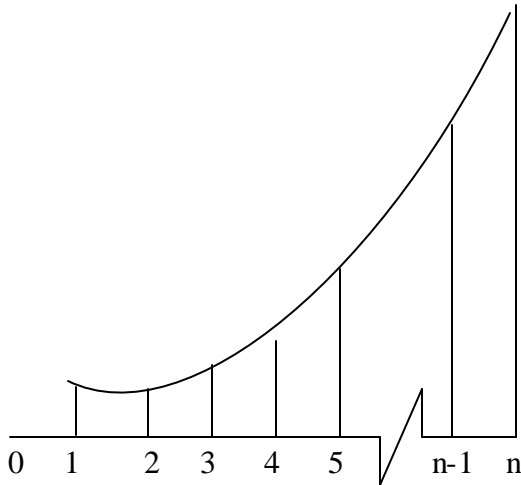


Figura. 8-33. Gradiante geométrico finito

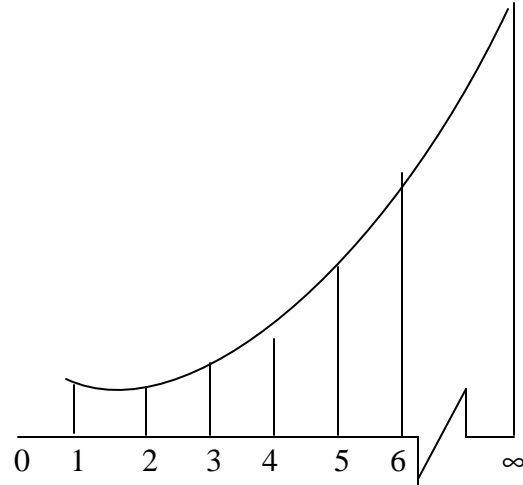


Figura. 8-34. Gradiante geométrico infinito

### A. Gradiante geométrico creciente uniforme finito

Sabemos que un gradiante es finito cuando se tiene conocimiento del número de pagos acordados. Las figuras 8-32 y 8-33 son las representaciones gráficas de estos gradientes. Seguidamente se analizará mediante la deducción de una ecuación, el valor que tomaría un gradiante si este se desplazará a través del tiempo a una posición específica.

### Relación de equivalencia entre el Valor Presente y un Gradiante Geométrico Finito

Esta relación nos ayuda a determinar el valor presente equivalente a una serie de ingresos o egresos causados al final de cada periodo los cuales están sujetos a un aumento porcentual constante con relación al periodo inmediatamente anterior considerando una tasa de interés  $i\%$

En la figura 8-35, encontramos la representación gráfica de esta relación.

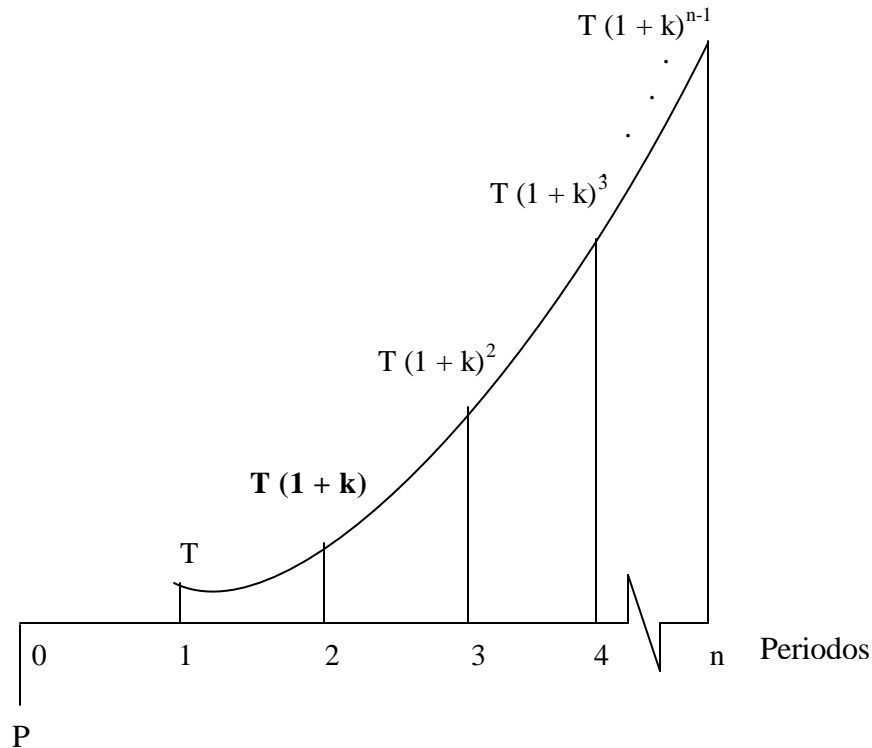


Figura 8-35. Relación valor presente y gradiente geométrico creciente

Para llegar a la expresión matemática que relacione el valor presente con el gradiente geométrico será necesario llevar a presente o trasladar a la posición cero todos y cada uno de los pagos que conforman el gradiente empleando  $i\%$  como tasa de interés.

$$P = \frac{T}{(1+i)} + \frac{T(1+k)}{(1+i)^2} + \frac{T(1+k)^2}{(1+i)^3} + \frac{T(1+k)^3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{T(1+k)^{n-1}}{(1+i)^n} \quad \text{Ecuación 8-24}$$

Se factoriza el término común en la ecuación 8-24, para llegar a la ecuación 8-25, la cual es simplificada.

$$P = \frac{T}{(1+i)} \left[ 1 + \frac{(1+k)}{(1+i)^2} + \frac{(1+k)^2}{(1+i)^3} + \frac{(1+k)^3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{(1+k)^{n-1}}{(1+i)^n} \right] \text{ Ecuación 8-25}$$

Como se puede observar esta suma de términos corresponde a una progresión geométrica la cual esta dada por:

$$S_n = \frac{a_o (1-r^n)}{(1-r)} \text{ Ecuación 8-26}$$

Donde:

$S_n$  = Suma de los n primeros términos de la progresión geométrica

$a_o$  = Primer término de la progresión, es decir, 1

$r$  = Razón de la progresión que para este caso es igual a  $\frac{1+k}{1+i}$

Reemplazamos los correspondientes valores en la ecuación 8-26, para obtener:

$$S_n = \frac{1 \left[ 1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n \right]}{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)} \text{ Ecuación 8-27}$$

Simplifiquemos la ecuación 8-27

$$S_n = \frac{\left[ 1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n \right]}{\left( \frac{1+k}{1+i} \right)} \text{ Ecuación 8-28}$$

Capítulo VIII

Hecho esto reemplazamos la ecuación 8-28 en la 8-25, obteniendo lo siguiente:

$$P = \frac{T}{(1+i)} \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{\left( \frac{i-k}{1+i} \right)} \right] \quad \text{Ecuación 8-29}$$

Ahora procedemos a simplificar la ecuación 8-28, obteniendo la siguiente ecuación:

$$P = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i - k} \right] \quad \text{Ecuación 8-30a}$$

Para  $i \neq k$

La expresión simbólica equivalente a la ecuación 8-30a es la siguiente:

$$P = T (P/T, i\%, k\%, n) \quad \text{Ecuación 8-30b}$$

Si la situación financiera a estudiar tiene como particularidad que  $i$  es igual a  $s$  entonces el cálculo del valor presente esta dado por:

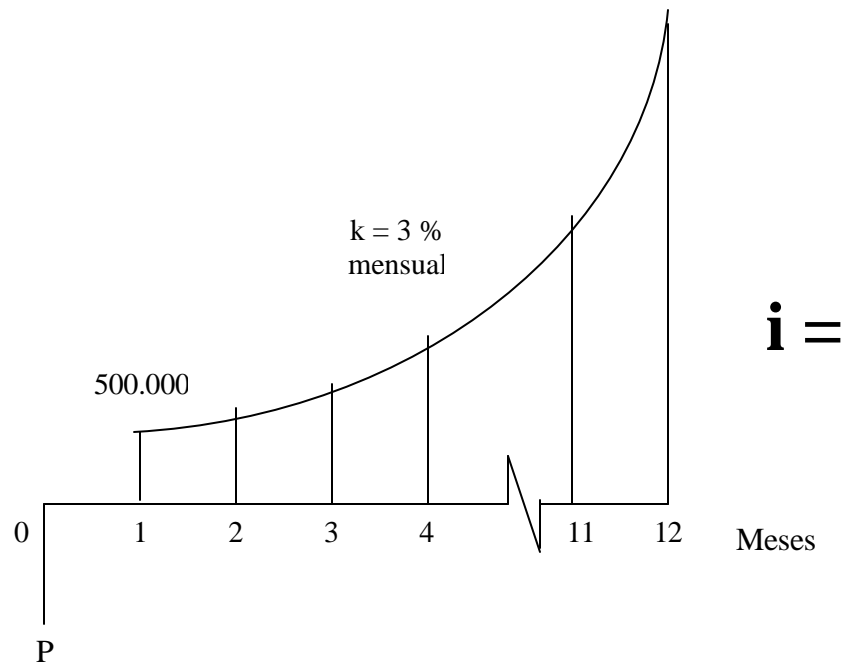
$$P = \frac{T n}{(1+i)} \quad \text{Ecuación 8-31}$$

Para  $i = k$

**Ejercicio Práctico**

Don Juan de Marco fue a la corporación el “Ahorro Feliz” con el fin de abrir una cuenta de ahorro programado para vivienda. Al llegar a la sección de atención al cliente le dieron la siguiente información: La cuenta se abre con un capital inicial de \$500.000 el cual debe incrementarse mensualmente un 3%, la corporación garantiza un rendimiento del 10% efectivo mensual. Si Don Juan se decide a abrir dicha cuenta, ¿Cuál sería el valor presente de la cantidad de dinero ahorrada por él transcurrido un año?

Primero se debe realizar la grafica como la que se muestra a continuación con el fin de esquematizar la situación



Como  $i$  es diferente de  $k$  debemos emplear la ecuación 8-30

$$P = \frac{T}{(1+i)} \left[ \frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{\left(\frac{i-k}{1+i}\right)} \right]$$

$$P = 500.000 \left[ \frac{1 - \left( \frac{1 + 0.03}{1 + 0.10} \right)^{12}}{0.10 - 0.03} \right]$$

$$P = 3'897.918$$

**Relación de equivalencia entre un Valor Futuro y un Gradiente Geométrico Creciente**

El objetivo de esta relación es determinar el valor equivalente a un gradiente en la posición n, considerando una tasa i%. La gráfica característica de esta relación es la siguiente:

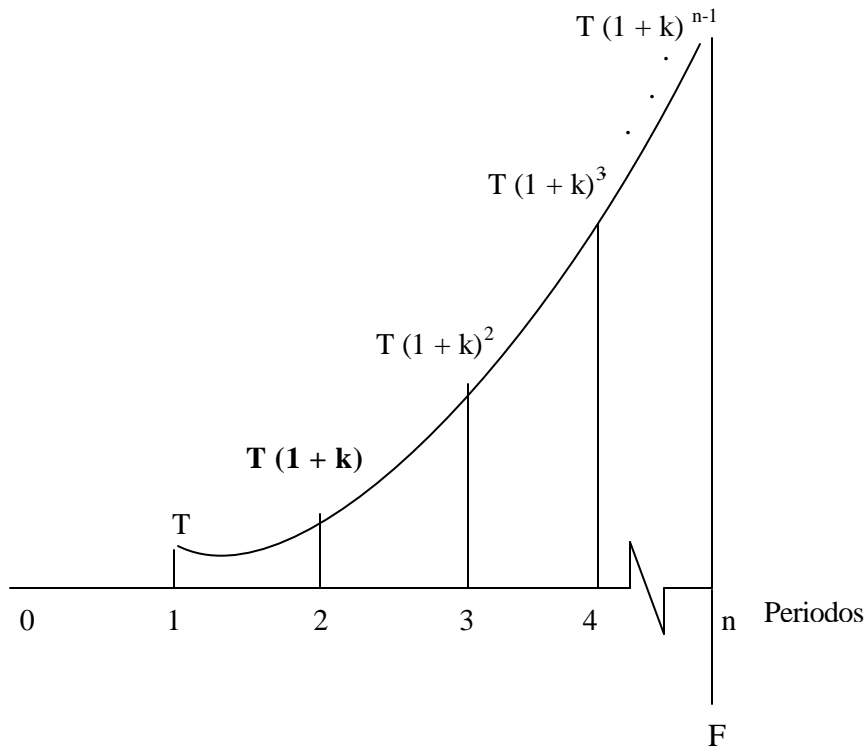


Figura 8-36. Relación valor futuro y gradiente geométrico creciente



Para la deducción de la fórmula tomamos como base la ecuación 8-30 esta se reemplaza en la ecuación vista en el capítulo de interés compuesto ( $F = P (1 + i)^n$ ), quedando de la siguiente forma:

$$F = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i - k} \right] (1+i)^n \quad \text{Ecuación 8-31}$$

La ecuación 8-31 puede ser simplificada logrando la siguiente ecuación:

$$F = T \left[ \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{\cancel{(1+i)^n} (i - k)} \right] \cancel{(1+i)^n}$$

$$F = T \left[ \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i - k} \right] \quad \text{Ecuación 8-32a}$$

Para  $i \neq k$

El factor equivalente a la ecuación 8-32a, es el representado en la ecuación 8-32b.

$$F = T ( F/T, i\%, k\%, n) \quad \text{Ecuación 8-32b}$$

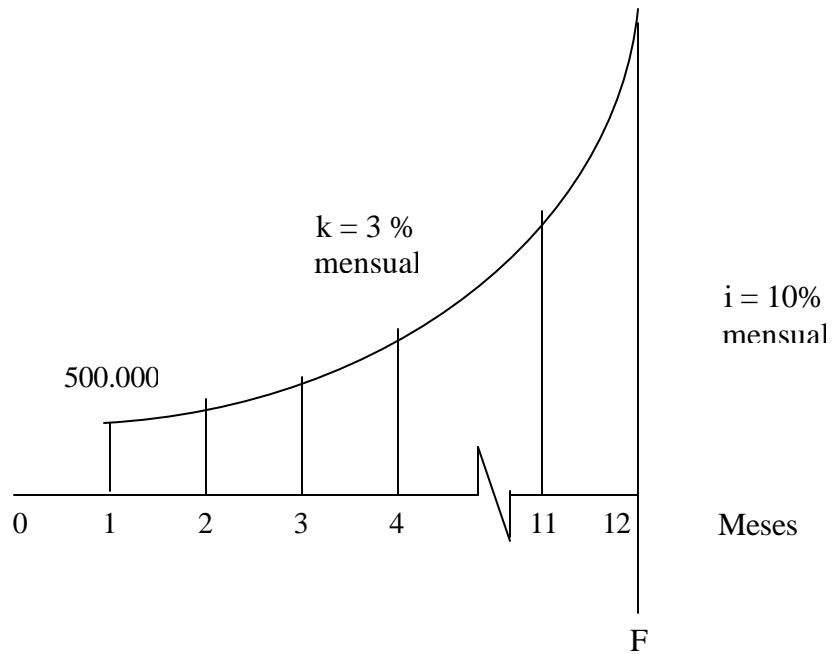
Si nos enfrentamos a una situación donde  $i$  es igual a  $k$  la resolvemos de la siguiente manera:

$$F = T n (1+i)^{n-1} \quad \text{Ecuación 8-33}$$

Para  $i = k$

**Ejercicio Práctico**

Tomando como referencia el ejercicio de la sección anterior ¿Cuál será la cantidad total de dinero ahorrada por Don Juan al final del año?



Emplearemos la ecuación 8-32a para darle solución a la situación

$$F = T \left[ \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i - k} \right]$$

$$F = 500.000 \left[ \frac{(1+.010)^{12} - (1+0.03)^{12}}{0.10 - 0.03} \right]$$

$$F = 12'233.339$$

**Relación de equivalencia entre el Valor Anual y un Gradiente Geométrico Creciente**

El propósito de esta relación es determinar la cantidad anual a lo largo del periodo de pago que será equivalente a un gradiente creciente, considerando una tasa de interés del  $i\%$ .

La representación gráfica de esta relación es la que se observa en la figura 8-37.

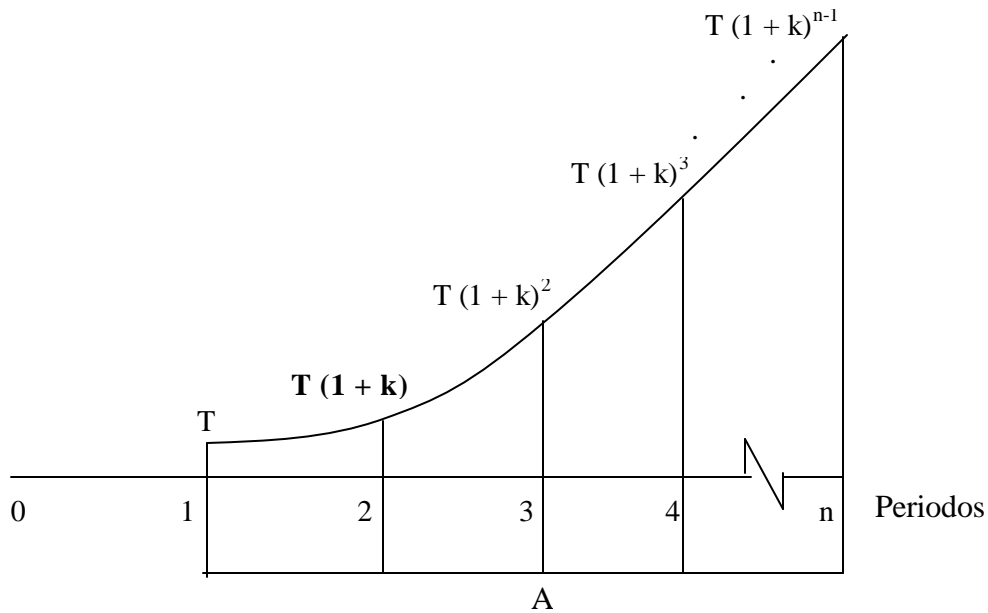


Figura 8-37. Relación valor anual y gradiente geométrico creciente

Para llegar a la deducción de la fórmula matemática convertiremos el valor obtenido mediante la ecuación 8-32a en un valor anual, como ya sabe hacerlo. Con esto se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{[(1+k)^n - (1+i)^n] \left[ \frac{i}{k-i} \right]}{[k-i] [(1+i)^n - 1]}$$

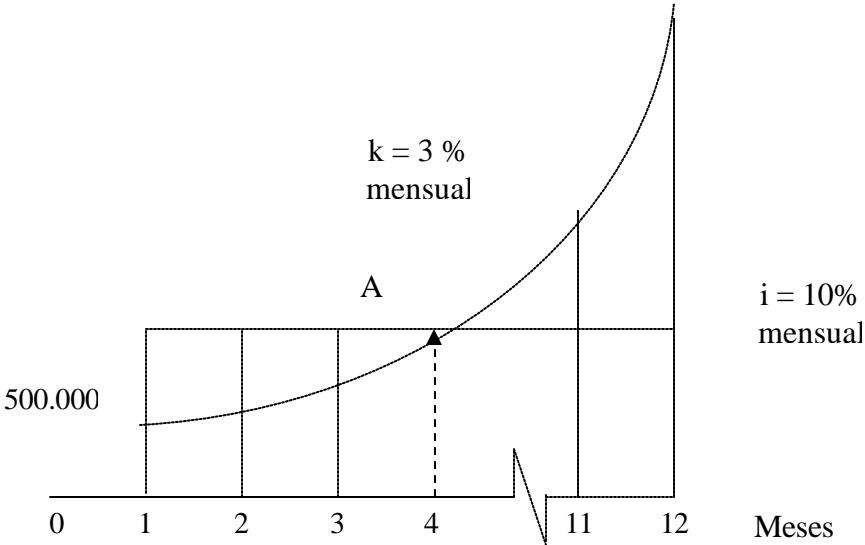
La expresión simbólica de la ecuación 8-34a es la representada en la siguiente ecuación:

$$A = T (A/T, i\%, k\%, n)$$

Ecuación 8-34b

**Ejercicio Práctico**

¿Cuál sería la anualidad equivalente al ahorro del señor De Marco, durante los 12 meses?



$$A = T \left[ \frac{(1+k)^n - (1+i)^n}{k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 500.000 \left[ \frac{(1+0.03)^{12} - (1+0.10)^{12}}{0.03-0.10} \right] \left[ \frac{0.10}{(1+0.10)^{12} - 1} \right]$$

A = 572.071

**B. Gradiente geométrico creciente uniforme infinito**

Al igual que en los gradientes aritméticos o lineales uniformes a perpetuidad se presenta una situación similar con los gradientes geométricos; como sabemos se caracterizan porque el número de periodos de pagos es desconocido o demasiado grande.

Este tipo de gradiente se ilustra mediante la gráfica 8-38.

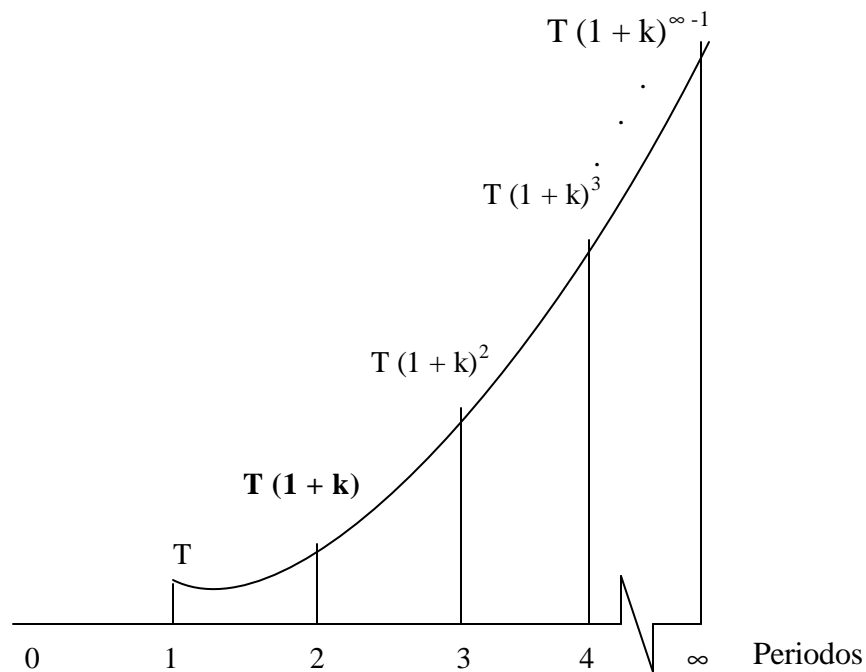


Figura 8-38. Estructura gradiente geométrico creciente infinito

Para la obtención de la ecuación matemática se analizará la fórmula que permite convertir un gradiente geométrico en un valor presente (Ecuación 8-30). Se partirá de esta fórmula ya que se sabe que es la única relación posible cuando se habla de gradiente infinito.

Analicemos ahora que pasa con la ecuación 8-30 cuando n tiende a ser infinito ( $\infty$ ).

$$P = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i - k} \right]$$

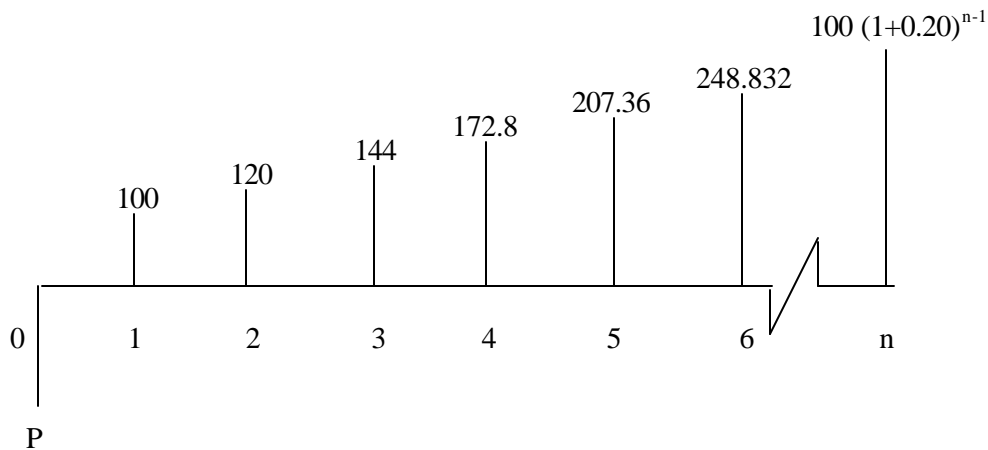
Entonces la ecuación se convierte en la siguiente:

$$P = \frac{T}{i - k} \quad \text{Ecuación 8-35}$$

Sabiendo que la ecuación existe cuando i es mayor que k de lo contrario no existe.

**Ejercicio Práctico**

Calcular el valor presente del siguiente flujo de caja a una tasa de interés del 12% mensual



$$P = \frac{T}{i - k} = \frac{100}{0.32 - 0.20}$$

$$P = 833.333$$

### 8.2.1.2. Gradientes geométrico creciente escalonado

Estos gradientes los identificamos porque presentan una serie de pagos que permanecen constantes durante un periodo de tiempo, los cuales aumentan cierto porcentaje o tasa finalizado ese periodo.

La figura 8-39 ilustra muy bien este tipo de serie escalonada.

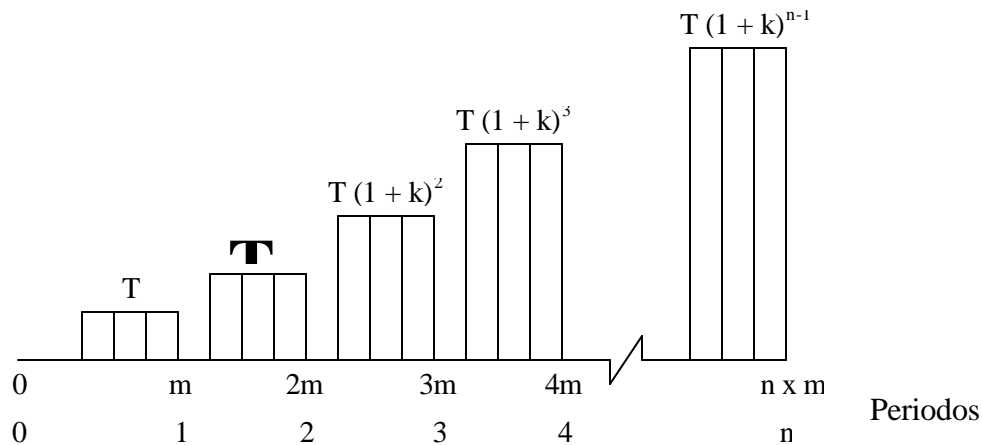


Figura 8-39. Estructura de un gradiente geométrico escalonado creciente

Donde:

$n$  = Número de periodos del plazo que constituyen el gradiente.

$m$  = Número de cuotas fijas que hay en un periodo del plazo.

$i$  = Tasa de interés equivalente al periodo que permanece constante

$k$  = Tasa de interés de la negociación.

### Relación de equivalencia entre un Valor Presente y un Gradiente Geométrico Escalonado Creciente

Esta relación nos permitirá convertir el gradiente escalonado en un valor presente ubicado en la posición cero. La figura 8-40 ejemplariza esta relación.

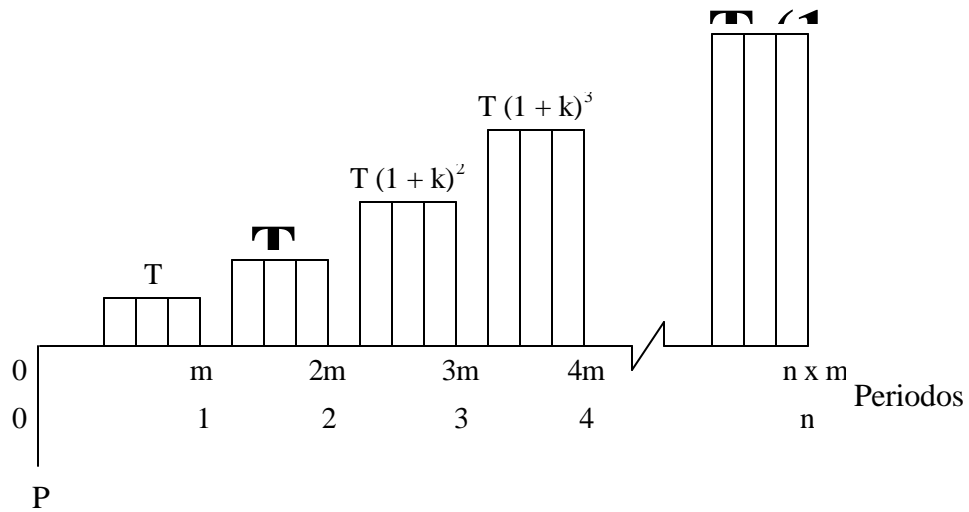


Figura 8-40. Relación valor presente y gradiente geométrico escalonado

Una manera de representar este gradiente es mediante la figura 8-41

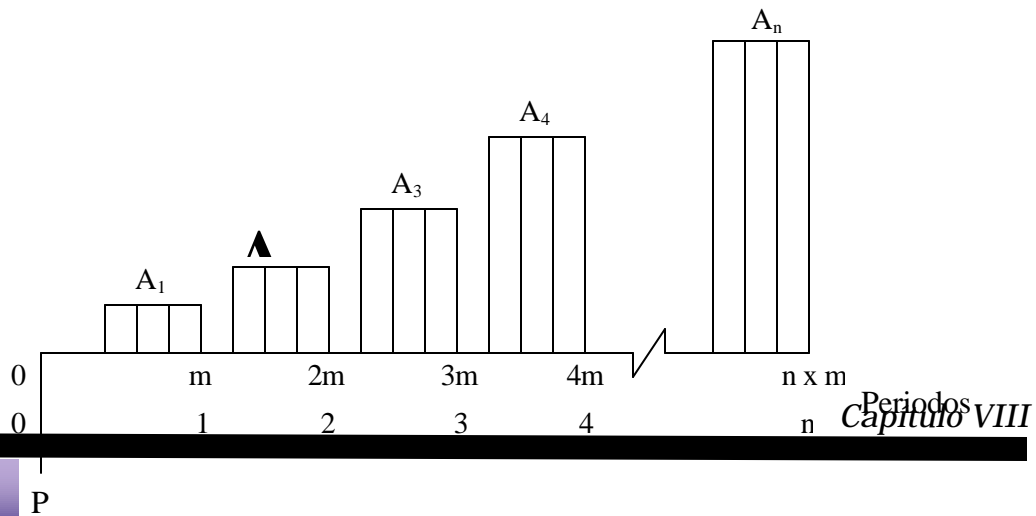


Figura 8-41. Gradiente escalonado expresado en anualidades

Determinemos ahora el valor futuro correspondiente a cada anualidad, es decir:



$$F_1 = A_1 (F/A, i\%, n)$$

$$F_2 = A_2 (F/A, i\%, n)$$

$$F_3 = A_3 (F/A, i\%, n)$$

El valor correspondiente a los futuros de cada anualidad se pueden representar en la figura 8-42.

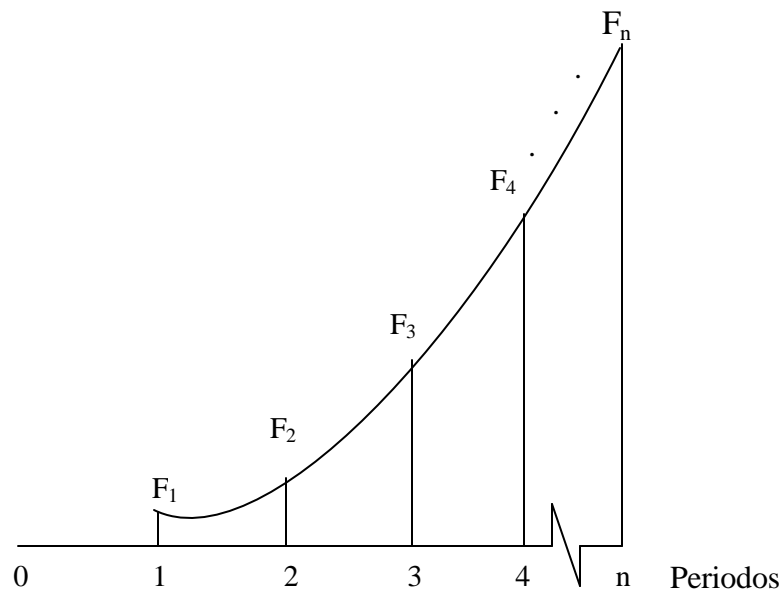


Figura 8-42. Relación valor presente y futuro de los subperiodos del gradiente geométrico

Como podemos notar al observar la figura 8-42, se ha formado un gradiente geométrico creciente como el estudiado en la sección, *Relación de equivalencia entre el valor presente y un gradiente geométrico creciente finito*, por tal motivo necesitaríamos de un valor inicial y un porcentaje de crecimiento para determinar el presente de este gradiente escalonado.

El valor inicial es el correspondiente a T, que en este caso sería equivalente a F<sub>1</sub>.

Para determinar el valor del porcentaje de crecimiento deberemos dividir un valor futuro entre el valor inmediatamente anterior, a fin de conocer la razón a la cual se incrementa el valor de la anualidad periodo a periodo.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{T (1+k) (F/A, i\%, n)}{T (F/A, i\%, n)} = (1+k)$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{T (1+k)^2 (F/A, i\%, n)}{T (1+k) (F/A, i\%, n)} = (1+k)$$

Como nos damos cuenta la razón de crecimiento es equivalente a (1 + k). Ahora falta determinar el valor inicial del gradiente escalonado; si observamos la figura 8-41 y 8-42 notamos que el valor de F<sub>1</sub> corresponde al valor de T, es decir, F<sub>1</sub> es igual al valor inicial del gradiente.

Hecho esto debemos reemplazar los valores encontrados en la ecuación 8-30b, obteniendo lo siguiente:

$$P = T (F/A, i_m\%, m) (P/T, i\%, k\%, n)$$

Ecuación 8-36a

La ecuación 8-36a, la podemos expresar de forma matemática mediante la ecuación 8-36b

$$P = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{1-k} \right]$$

Ecuación 8-36b  
Capítulo VIII

Para  $i \neq k$

$$P = \frac{Tn}{1+i} \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right]$$

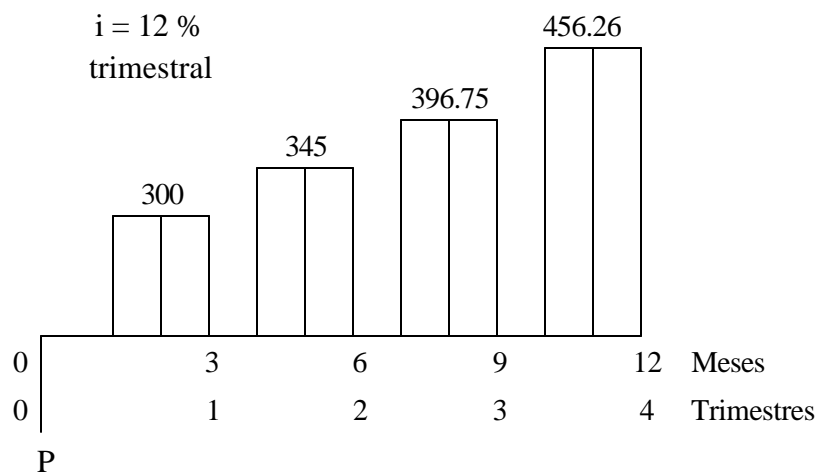
Ecuación 8-37

Para  $i = k$

La ecuación 8-37 la emplearemos en caso de vernos envueltos en una situación donde el interés ( $i$ ) sea igual al porcentaje de crecimiento ( $k$ ).

### *Ejercicio Práctico*

Determinar el valor presente del siguiente gradiente



Encuentre primero el interés equivalente al mes

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$i_m = (1+0.12)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$i_m = 3.85\% \text{ mensual}$$

Ahora se emplea la ecuación 8-36b para darle solución al ejercicio.

$$P = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i - k} \right]$$

$$P = 300 \left[ \frac{(1+0.0385)^3 - 1}{0.0385} \right] \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+0.15}{1+0.0385} \right)^4}{0.0385 - 0.15} \right]$$

$$P = 4.224$$

**Relación de equivalencia entre el Valor Futuro y un Gradiente Geométrico Escalonado Creciente**

El objetivo de esta relación es convertir un gradiente geométrico escalonado en un valor ubicado en la posición n igual al final del periodo de la negociación. Se ilustra gráficamente en la figura 8-43:

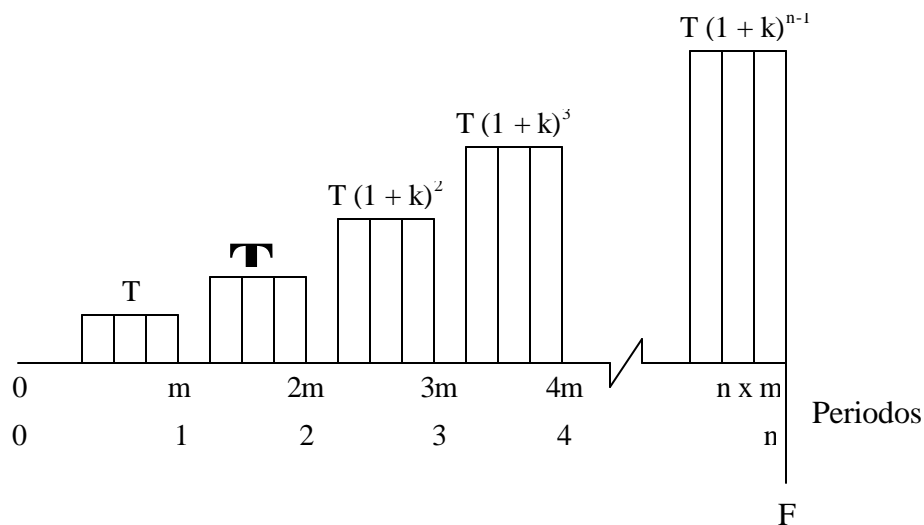


Figura 8-43. Relación valor futuro y gradiente geométrico escalonado creciente

Para llegar a la expresión matemática de esta relación debe tomar como base la ecuación 8-36b que es equivalente a un valor presente el cual convertiremos en un valor futuro como se ha hecho en capítulos anteriores.

$$F = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i} \right] \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i-k} \right] (1+i)^n$$

Capítulo VIII

Podemos ampliar los términos con el fin de visualizar mejor los factores que se pueden simplificar

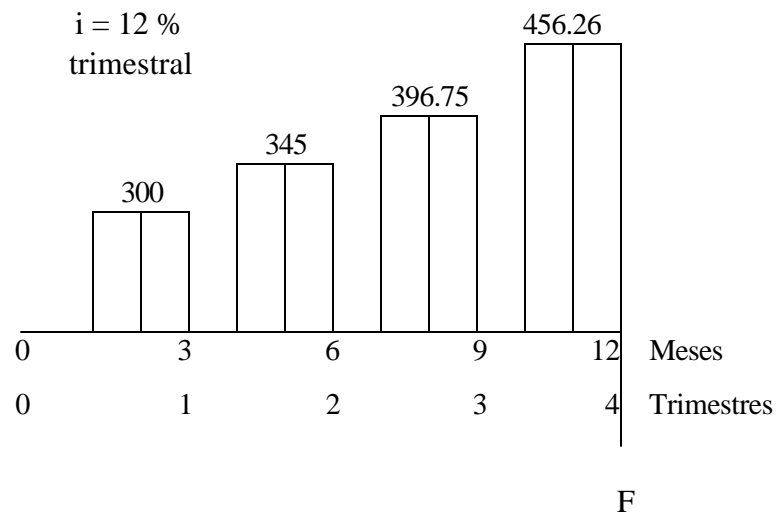
$$F = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{1 - \frac{(1+k)^n}{(1+i)^n}}{i-k} \right] (1+i)^n$$

Esto nos permite obtener la siguiente ecuación:

$$F = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i-k} \right] \quad \text{Ecuación 8-38}$$

**Ejercicio Práctico**

Calcular el valor futuro equivalente del siguiente flujo de caja



$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 = (1+0.12)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$i_m = 3.85\% \text{ mensual}$$

$$F = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i-k} \right]$$

$$F = 300 \left[ \frac{(1+0.0385)^3 - 1}{0.0385} \right] \left[ \frac{(1+0.12)^4 - (1+0.15)^4}{0.12 - 0.15} \right]$$

$$F = 5.470$$

### *Relación de equivalencia entre el Valor Anual y un Gradiente Geométrico Escalonado Creciente*

El propósito de esta relación es brindar una ecuación que permita determinar un valor anual durante  $n$  períodos que sea equivalente al gradiente geométrico en estudio. La siguiente figura (8-44) ilustra esta situación.

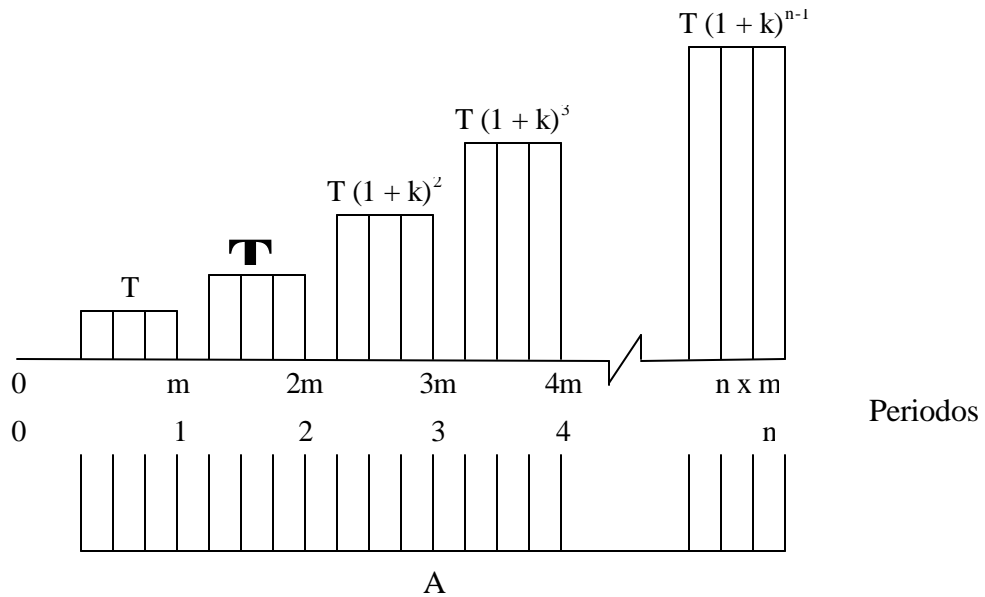


Figura 8-44. Relación valor anual y gradiente geométrico escalonado creciente

Para determinar la ecuación característica de esta relación es necesario basarnos en la ecuación 8-38, a la cual se le calculará el valor anual equivalente a lo largo del periodo; todo esto para llegar a la ecuación 8-39.

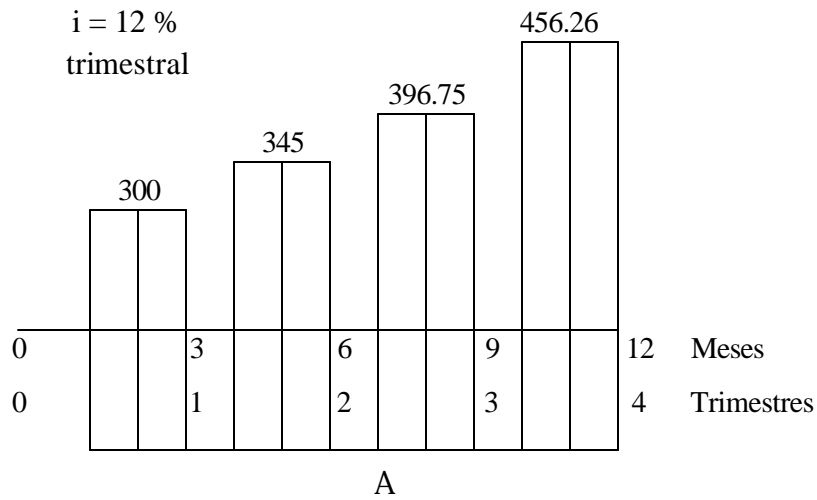
$$A = T \left[ \frac{(1 + i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1 + k)^n - (1 + i)^n}{k - i} \right] \left[ \frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right]$$

Ecuación 8-39



Ejercicio Práctico

Calcular el valor anual equivalente a los flujos de cajas presentes en el siguiente diagrama



$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 = (1+0.12)^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$i_m = 3.85\% \text{ mensual}$$

$$A = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1+k)^n - (1+i)^n}{k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 300 \left[ \frac{(1+0.0385)^3 - 1}{0.0385} \right] \left[ \frac{(1+0.15)^4 - (1+0.12)^4}{0.15 - 0.12} \right] \left[ \frac{0.12}{(1+0.12)^4 - 1} \right]$$

$$A = 1.144$$

8.2.2. Gradiente geométrico decreciente

Los gradientes geométricos decrecientes son series de flujos de caja que disminuyen un porcentaje constante por periodos consecutivos con relación al pago inmediatamente anterior. Lo único que diferencia a este gradiente del creciente es que la tasa de crecimiento ( $k$ ) es negativa. Este gradiente posee una ley de formación similar a la observada en la figura 8-32.

La figura 8-45 ilustra esta clase de gradiente.

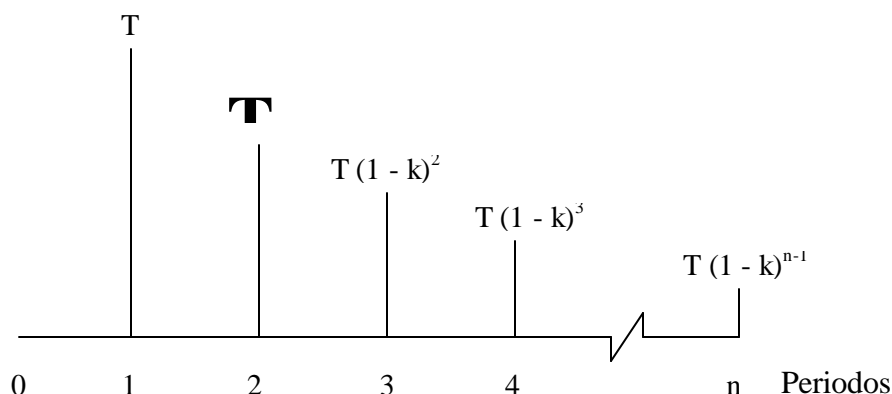


Figura 8-45. Estructura del gradiente geométrico decreciente

### 8.2.2.1. Gradiente geométrico decreciente uniforme

Este gradiente es muy similar al visto en la sección 8.2.1.1., con la diferencia que la tasa de crecimiento ( $s$ ) es negativa, lo que produce que el primer pago sea el mayor y a partir de este vayan disminuyendo hasta completar el periodo de pago.

representación gráfica de este gradiente escalonado decreciente es la siguiente:

### Relación de equivalencia entre un Valor Presente y un Gradiente Geométrico Decreciente

Esta relación permitirá encontrar un valor equivalente al gradiente geométrico decreciente en la posición cero, considerando una tasa de interés  $i\%$ .

La figura 8-46 representa gráficamente esta relación.

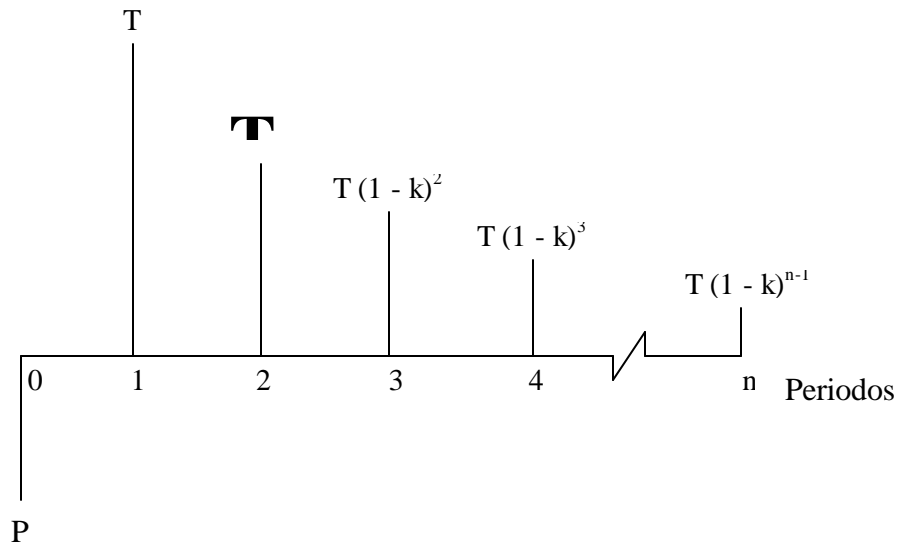


Figura 8-46. Relación valor presente y gradiente geométrico decreciente

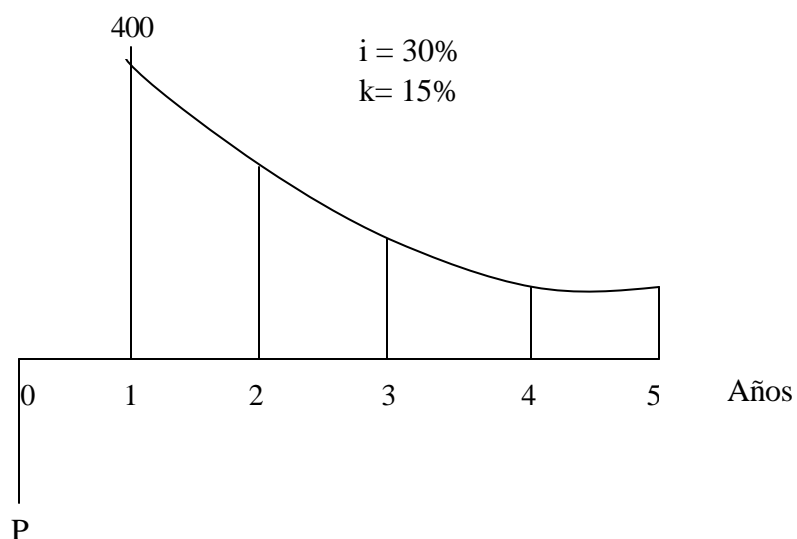
El procedimiento a seguir para la deducción de la fórmula es similar al aprendido en la sección 8.2.1.1., con la diferencia que el porcentaje de variación ( $k$ ) es negativo. Al final se llega a la siguiente ecuación.

$$P = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-k}{1+i} \right)^n}{i+k} \right] \quad \text{Ecuación 8-40}$$

*Capítulo VIII*

*Ejercicio Práctico*

Determine el valor presente de la siguiente serie de pagos



$$P = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-k}{1+i} \right)^n}{i+k} \right] = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-0.15}{1+0.31} \right)^5}{0.31+0.15} \right]$$

$$P = 1.384,43$$

### Relación de equivalencia entre un Valor Futuro y un Gradiente Geométrico Decreciente

El objetivo de esta relación es proporcionarnos un medio que haga posible que un gradiente geométrico decreciente sea equivalente a un valor futuro en la posición n, contando con una tasa de interés de i%.

Gráficamente se representa mediante la figura 8-47

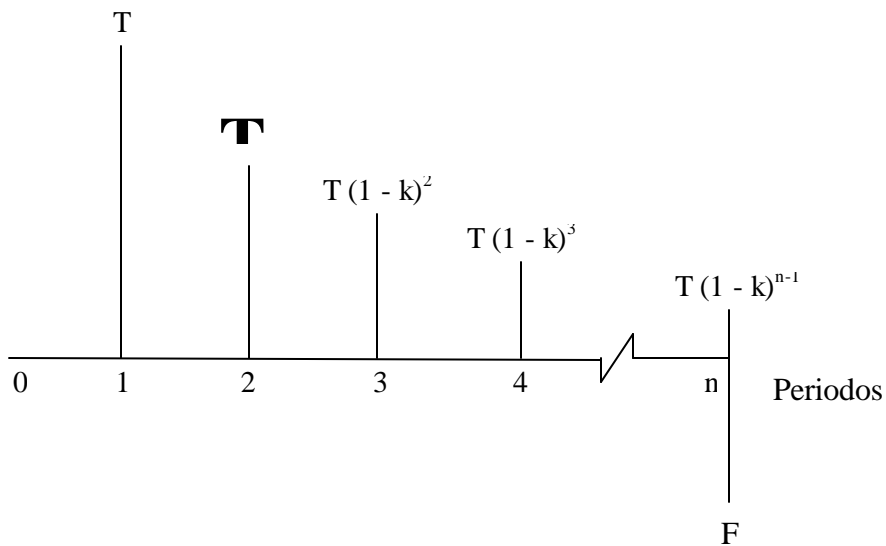


Figura 8-47. Relación valor futuro y un gradiente geométrico decreciente

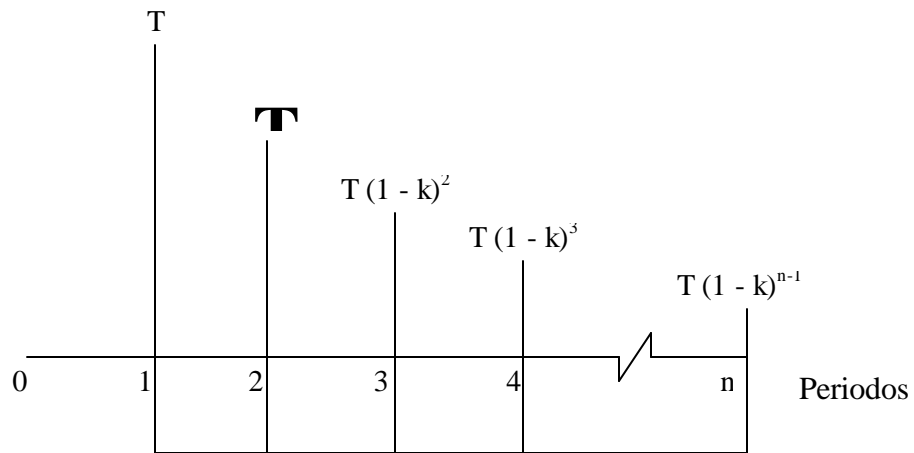
Para llegar a la ecuación característica de esta relación será necesario llevar a futuro la ecuación 8-40; obteniendo el siguiente resultado.

$$F = T \left[ \frac{(1+i)^n - (1-k)^n}{i+k} \right] \quad \text{Ecuación 8-41}$$

**Relación de equivalencia entre el Valor Anual y un Gradiente Geométrico Decreciente**

Esta relación permitirá determinar el valor anual que a lo largo del periodo de pago será equivalente a un gradiente geométrico decreciente.

La relación en estudio se ilustra gráficamente a continuación:



A

Figura 8-48. Relación valor anual y gradiente geométrico decreciente

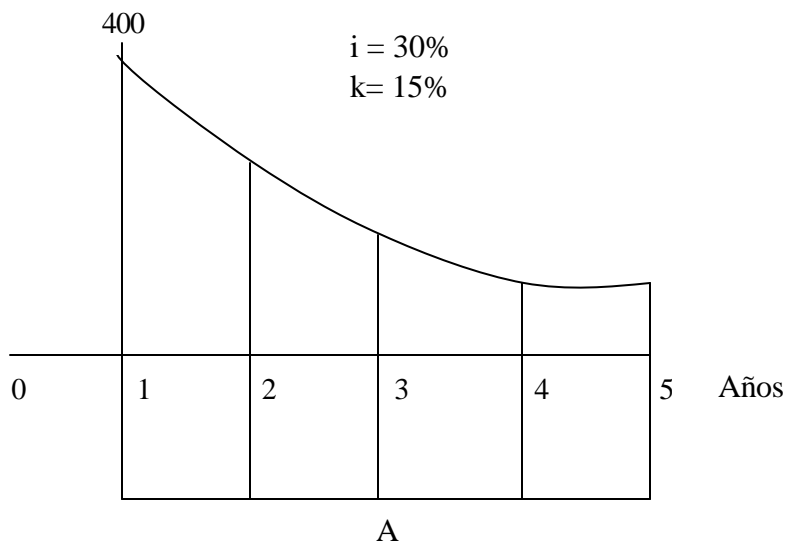
La ecuación de esta relación se obtiene determinando el valor anual de la ecuación 8-41, para llegar a:

$$A = T \left[ \frac{(1-k)^n - (1+i)^n}{-k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Ecuación 8-42

Ejercicio Práctico

Determine el valor anual del siguiente gradiente



$$A = T \left[ \frac{(1-k)^n - (1+i)^n}{-k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 400 \left[ \frac{(1-0.15)^5 - (1+0.3)^5}{-0.15-0.3} \right] \left[ \frac{0.3}{(1+0.3)^5 - 1} \right]$$

$$A = 321.35$$

### 8.2.2.2. Gradiente geométrico decreciente escalonados

Estos gradientes son similares a los estudiados en la sección 8.2.1.2., con la diferencia que la tasa de crecimiento es negativa permitiéndose formar un gradiente escalonado que disminuye cada periodo, considerando una tasa de interés de  $i\%$ .

La gráfica característica de esta relación se muestra a continuación.

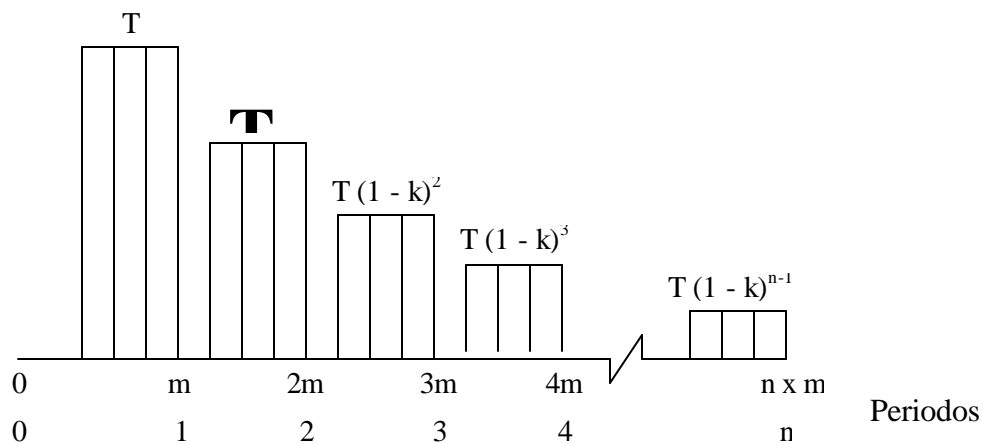


Figura 8-49. Estructura de un gradiente geométrico escalonado decreciente

### Relación de equivalencia entre el Valor Presente y un Gradiente Geométrico Decreciente Escalonado

Esta relación permitirá encontrar el valor equivalente a un gradiente decreciente escalonado en la posición cero teniendo en cuenta una tasa de interés  $i\%$ .



Se ilustra gráficamente mediante la figura 8-50.

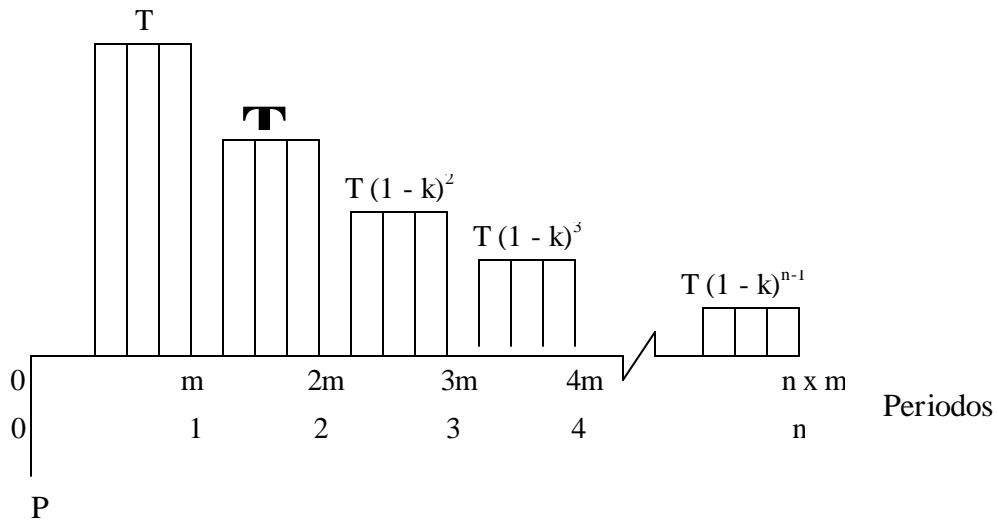


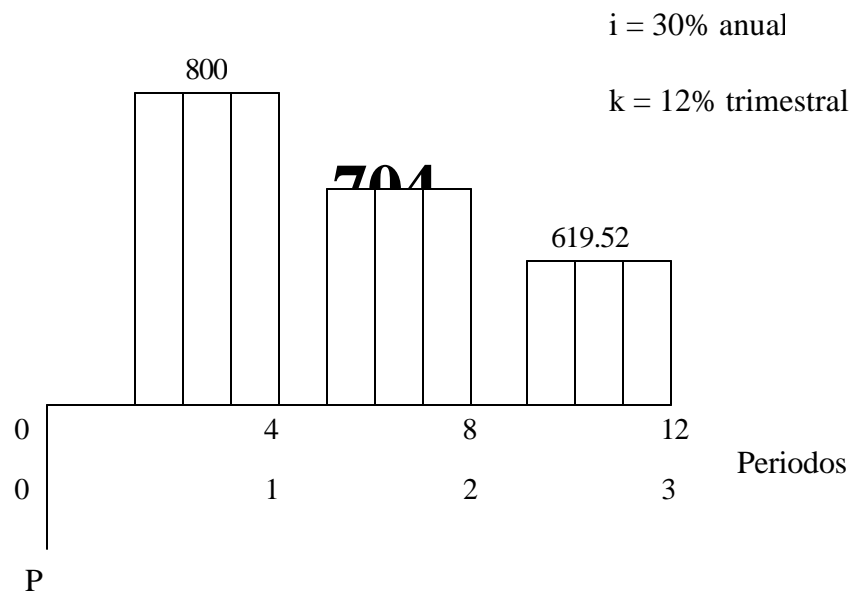
Figura 8-50. Relación valor presente y gradiente geométrico decreciente

Ya sabemos como llegar a la ecuación de esta relación, por tal motivo sólo se traerá a colación.

$$P = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-k}{1+i} \right)^n}{i+k} \right] \quad \text{Ecuación 8-43}$$

### Ejercicio Práctico

Calcular el valor presente equivalente al siguiente gradiente geométrico.



$$i_m = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1 = (1 + 0.12)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$i_m = 2.87\% \text{ Trimestral}$$

$$P = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-k}{1+i} \right)^n}{i+k} \right] = 800 \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-0.12}{1+0.30} \right)^3}{0.30+0.12} \right]$$

$$P = 1.313,94$$

**Relación de equivalencia entre el Valor Futuro y un Gradiente Geométrico Escalonado Decreciente**

El objetivo de esta relación es encontrar un valor futuro equivalente al gradiente en estudio teniendo en cuenta una tasa de interés  $i\%$ .

Su descripción gráfica, es la siguiente:

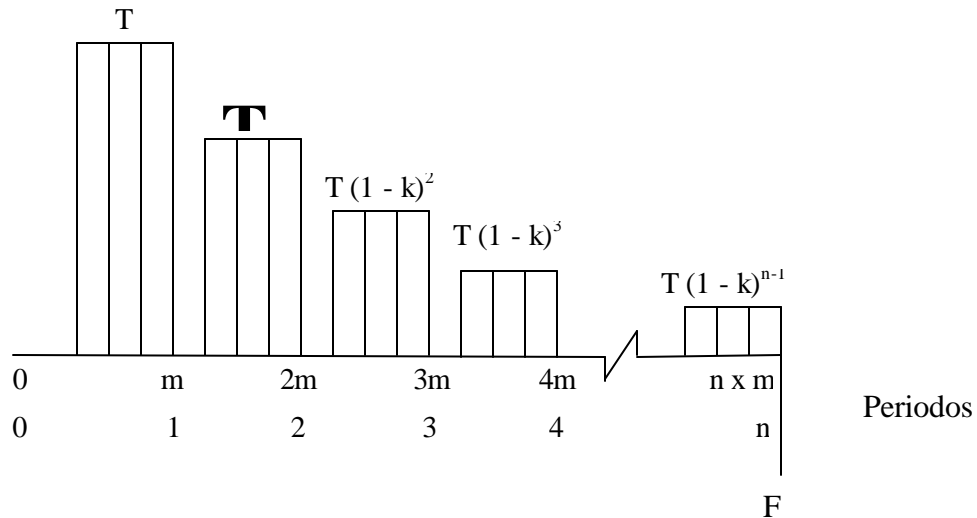


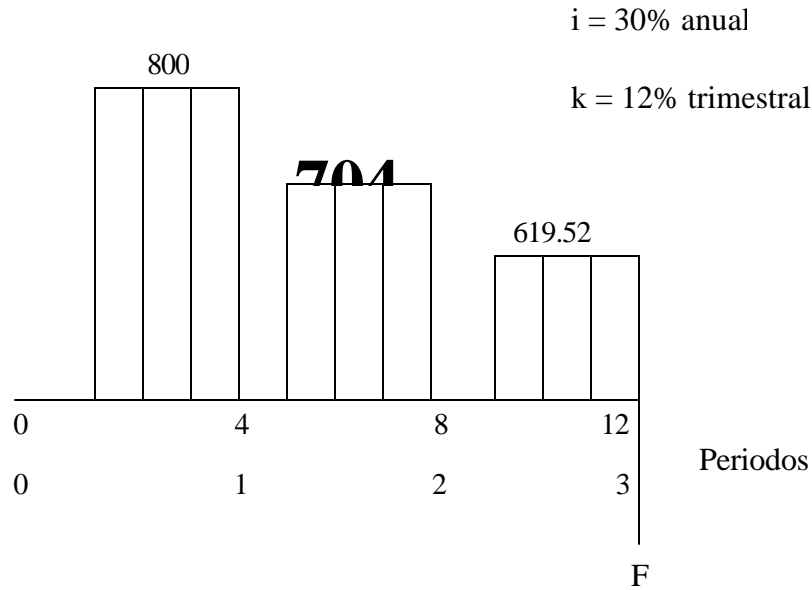
Figura 8-51. Relación valor futuro y gradiente geométrico escalonado

Para la deducción de esta ecuación bastará convertir el presente de la ecuación 8-43 en una futuro.

$$F = T \left[ \frac{(1 + i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1 + i)^n - (1 - k)^n}{i + k} \right] \quad \text{Ecuación 8-44}$$

**Ejercicio Práctico**

Calcule el valor futuro de la siguiente serie de flujo.



$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 = (1+0.12)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$i_m = 2.87\% \text{ Trimestral}$$

$$F = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1+i)^n - (1-k)^n}{i+k} \right]$$

$$F = T \left[ \frac{(1+0.0287)^{12} - 1}{0.30} \right] \left[ \frac{(1+0.30)^3 - (1-0.12)^3}{0.30+0.12} \right]$$

$$F = 40.667,1568$$

**Relación de equivalencia entre el Valor Anual y un Gradiente Geométrico Escalonado Decreciente**

Esta relación nos permitirá encontrar el valor anual equivalente a un gradiente escalonado que disminuye periodo a periodo.

La figura 8-52 lo representa gráficamente.

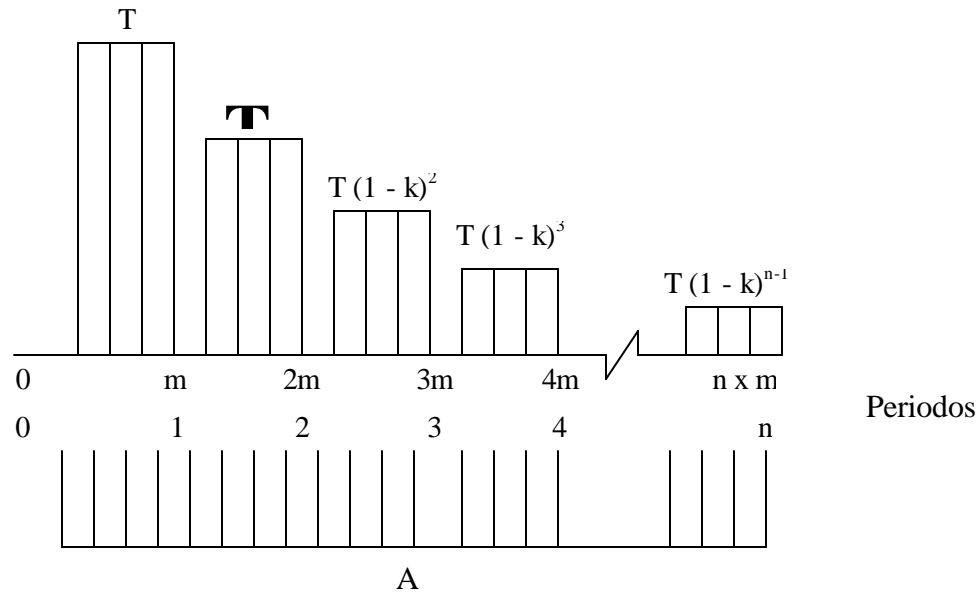


Figura 8-52. Relación valor anual y gradiente escalonado decreciente

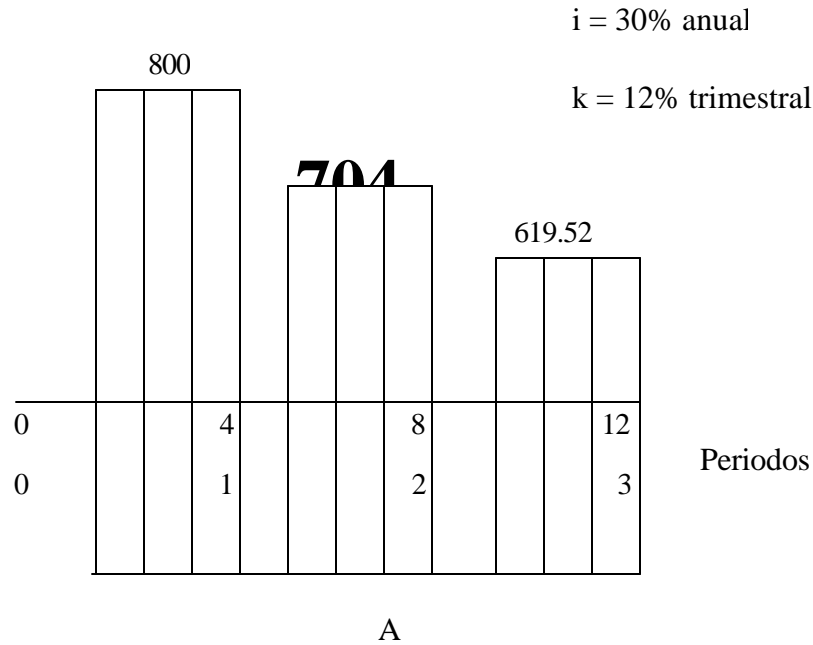
La ecuación matemática que lo representa es la 8-45

$$A = T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1-k)^n - (1+i)^n}{-k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Ecuación 8-45

### Ejercicio Práctico

Calcule el valor anual equivalente al siguiente diagrama de flujo



Para la solución de este problema emplee la ecuación 8-45

$$A = 800 \left[ \frac{(1 + 0.0287)^{12} - 1}{0.0287} \right] \left[ \frac{(1 - 0.12)^3 - (1 + 0.30)^3}{-0.12 - 0.30} \right] \left[ \frac{0.30}{(1 + 0.30)^3 - 1} \right]$$

$$A = 17.681,3725$$

### 8.3 RESUMEN DE FÓRMULAS

Seguidamente podrá recordar todas las fórmulas o ecuaciones vistas en el transcurso de este capítulo, facilitando de esta manera la consecución de cada una de ellas al momento de enfrentarse a una situación determinada.

**RESUMEN DE LAS FÓRMULAS DE LOS GRADIENTES ARITMÉTICOS**

	P/G	F/G	A/G
Creciente Uniforme Finito	$B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$	$B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$	$B + G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right)$
Creciente Uniforme Infinito	$\frac{B}{i} + \frac{G}{i^2}$		
Creciente Escalonado	$\left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ B \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + G \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i^2(1+i)^n} - \frac{n}{i(1+i)^n} \right) \right]$	$\left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \right\}$	$\left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B + G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right) \right\}$
Decreciente Uniforme	$B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$	$B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$	$B - G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right)$
Decreciente Escalonado	$\left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ B \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - G \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i^2(1+i)^n} - \frac{n}{i(1+i)^n} \right) \right]$	$\left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \right\}$	$\left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left\{ B - G \left( \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right) \right\}$

Figura 8-53. Resumen de fórmulas de los gradientes aritméticos

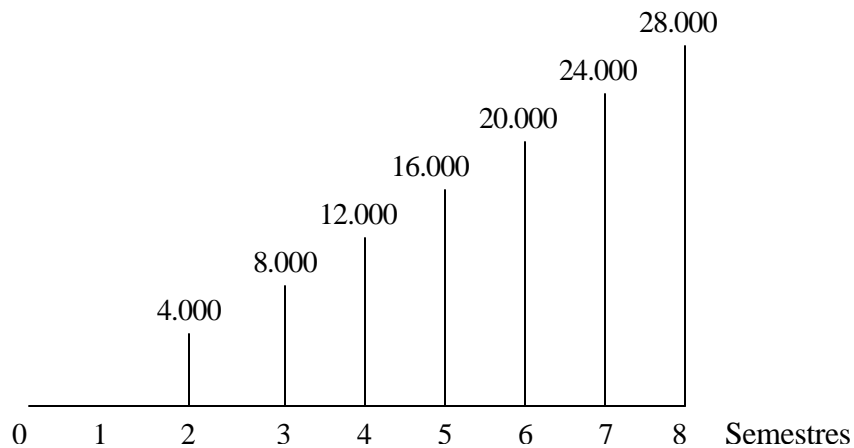
<b>RESUMEN DE LAS FÓRMULAS DE LOS GRADIENTES GEOMÉTRICOS</b>			
	P/T	F/T	A/T
Creciente Uniforme Finito	$T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i-k} \right]$	$T \left[ \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i-k} \right]$	$T \left[ \frac{(1+k)^n - (1+i)^n}{k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$
Creciente Uniforme Infinito	$\frac{T}{i-k}$		
Creciente Escalonado	$T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i-k} \right]$	$T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i-k} \right]$	$T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1+k)^n - (1+i)^n}{k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$
Decreciente Uniforme	$T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-k}{1+i} \right)^n}{i+k} \right]$	$T \left[ \frac{(1+i)^n - (1-k)^n}{i+k} \right]$	$T \left[ \frac{(1-k)^n - (1+i)^n}{-k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$
Decreciente Escalonado	$T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-k}{1+i} \right)^n}{i+k} \right]$	$T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1+i)^n - (1-k)^n}{i+k} \right]$	$T \left[ \frac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} \right] \left[ \frac{(1-k)^n - (1+i)^n}{-k-i} \right] \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$

Figura 8-54. Resumen de fórmulas de los gradientes geométricos



### 8.4. EJERCICIO RESUELTOS

1. Se espera que ciertos ahorros operativos sean cero al final de los primeros seis meses, \$ 4.000 al final del segundo semestre y después aumenten \$ 4.000 al final de cada semestre durante un total de cuatro años. Se desea encontrar un monto uniforme equivalente, al final de cada uno de los ocho periodos cada uno de seis meses. Si la tasa es del 28% anual compuesto semestralmente.



$r = 28\%$  anual compuesto semestralmente

$$i_p = \frac{r}{t} = \frac{28\%}{2}$$

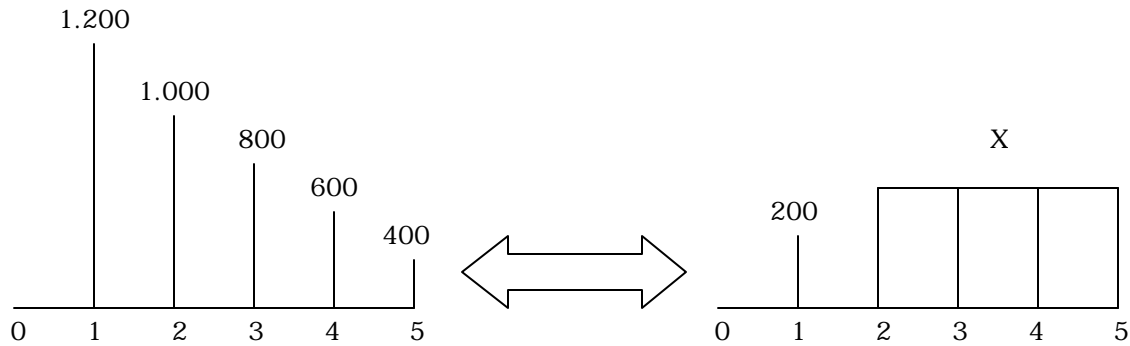
$$i_p = 14\% \text{ semestral}$$

$$A = G (A/G, 14\%, 8)$$

$$A = \$4.000 (2.824570)$$

$$A = \$ 11.298,28$$

2. Determinar el valor de X, de tal forma que los dos diagramas de flujo sean equivalentes, cuando la tasa es del 12% anual capitalizable mensualmente



$r = 12\%$  anual capitalizable mensualmente

$$E = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1 = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12} - 1$$

$$E = 12.68\% \text{ anual}$$

$$1.200 + 1.000 (P/A, 12.68\%, 4) - 400 (P/G, 12.68\%, 4) = 200 + X (P/A, 12.68\%, 4)$$

El valor de los factores puede ser hallado por medio de la interpolación o de la ecuación matemática

$$1.200 + 1.000 (2.944212) - 400 (4.049707) = 200 + X (2.944212)$$

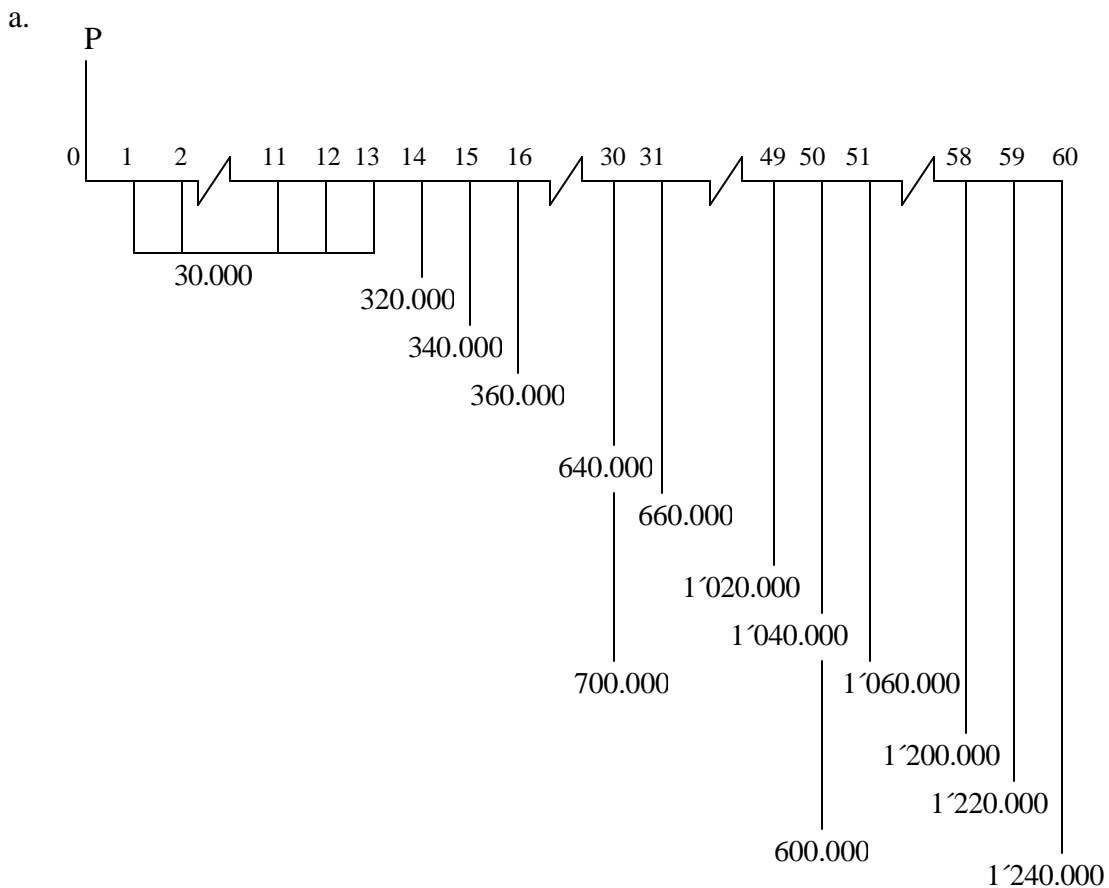
$$X = 789,4571451$$

3. Se cancela un préstamo a cinco años de la siguiente manera:

- 13 cuotas mensuales de \$ 300.000
- A partir de la cuota 14 (incluyendo ésta), estas se incrementan en \$ 20.000 hasta el mes sesenta.
- Cuotas extras de \$ 700.000 y \$ 600.000 en los meses 30 y 50.

Si la tasa de interés es del 36% anual capitalizable mensualmente, se pide:

- ¿Cuánto es el dinero prestado?
- ¿Cuál es el saldo del préstamo luego de pagar la cuota 49?
- De la cuota 50 cuanto corresponde a capital y cuanto corresponde a intereses



$$i_p = \frac{r}{t} = \frac{36\%}{12}$$

$$i_p = 3\% \text{ mensual}$$

$$P_0 = 300.000 (P/A, 3\%, 12) + 700.000 (P/F, 3\%, 30) + 600.000 (P/F, 3\%, 50) + [300.000 (P/A, 3\%, 48) + 200.000 (P/G, 3\%, 48)] (P/F, 3\%, 12)$$

$$P_0 = 300.000 (9.954004) + 700.000 (0.411987) + 600.000 (0.228107) + [300.000 (25.245344) + 200.000 (454.7412)] (0.701380)$$

$$P_0 = 15'102.357,77$$

b.

$$P_{49} = 1'040.000 (P/A, 3\%, 11) + 20.000 (P/G, 3\%, 11) + 600.000 (P/F, 3\%, 1)$$

$$P_{49} = 1'040.000 (9.252624) + 20.000 (43.533) + 600.000 (0.970874)$$

$$P_{49} = 11'075.913,36$$

c.

Si el saldo hasta la cuota 49 es de \$11'075.913,36 y sobre este valor se calculará los intereses a los que se incurrirá del periodo 49 al 50

$$\text{Interés} = 11'075.913,36 * 0.03$$

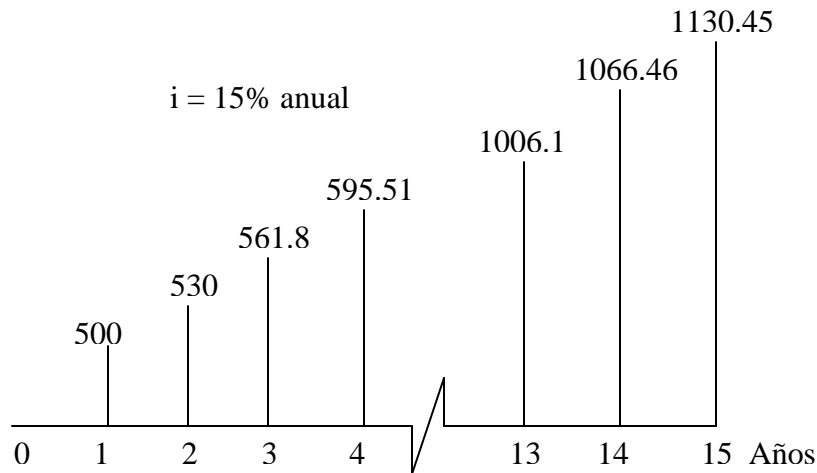
$$\text{Interés} = 332.277,4$$

$$\text{Cuota } 50 = 1'040.000 + 600.000 = 1'640.000$$

$$\text{Abono al capital} = \text{Cuota} - \text{Interés} = 1'640.000 - 332.277,4$$

$$\text{Abono al capital} = 1'307.722,6$$

4. En el siguiente diagrama se muestra un gradiente geométrico que aumenta 6% anual durante 15 años. La tasa de interés anual es de 15%. ¿Cuál es el valor presente de este gradiente?

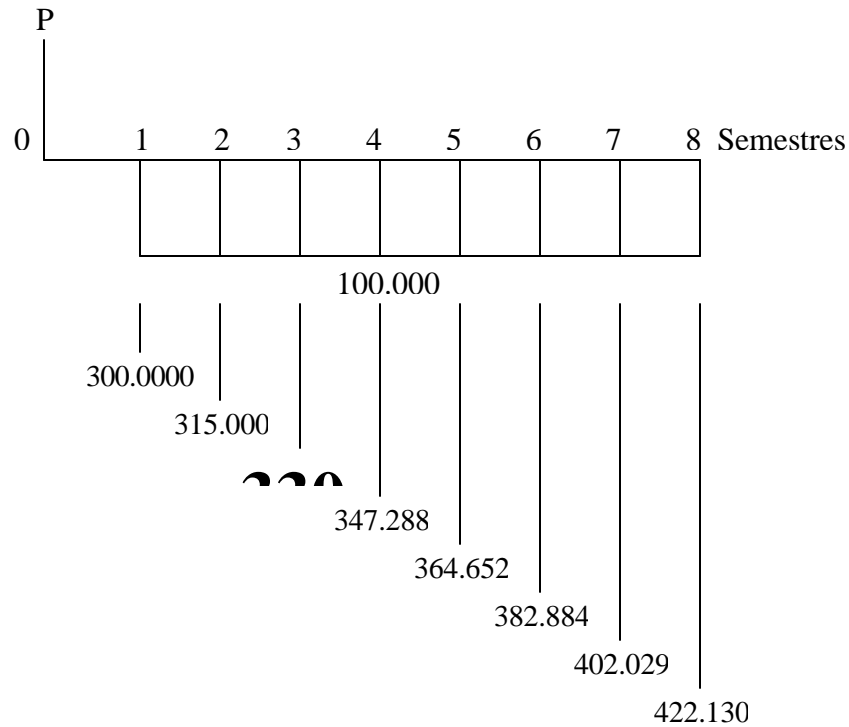


$$P = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i - k} \right]$$

$$P = 500 \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+0.06}{1+0.15} \right)^{15}}{0.15 - 0.06} \right]$$

$$P = 3.919,31$$

5. Se desea realizar un viaje a Canadá durante cuatro años con el fin de estudiar inglés. Este viaje se hará a través de la agencia "Vuela - Vuela" la cual presenta un paquete que incluye los tiquetes de ida y vuelta, la estadía y la alimentación. Dicho paquete tiene la siguiente forma de pago: Una base de \$ 1'000.000 semestral, más \$300.000 por servicios que se incrementan cada periodo en el 5% semestral. ¿Por cuánto sale el viaje a Canadá, si cobran una tasa del 12% anual capitalizable mensualmente?



$r = 12\%$  anual capitalizable mensualmente

$$i_p = \frac{r}{t} = \frac{12\%}{12}$$

$$i_p = 1\% \text{ mensual}$$

$$E = (1 + i_p)^t - 1 = (1 + 0.01)^6 - 1$$

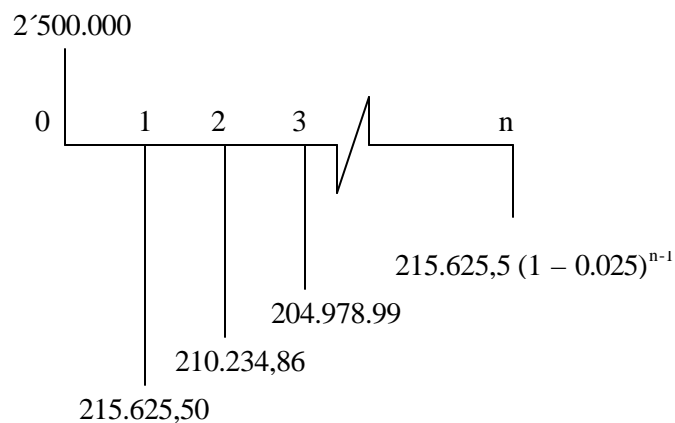
$$E = 6.15\% \text{ semestral}$$

$$P = A (P/A, i\%, n) + T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i - k} \right]$$

$$P = 500.000 (P/A, 6.15\%, 8) + 300.000 \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+0.05}{1+0.0615} \right)^8}{0.0615 - 0.05} \right]$$

$$P = 8'351.073,273$$

6. ¿Cuánto tiempo necesitará para cancelar una deuda de \$ 2'500.000 que disminuye cada mes un 25%. Sabiendo que la tasa de interés a la cual se tomó es de 3.2% mensual si la primera cuota es de \$215.625,50?



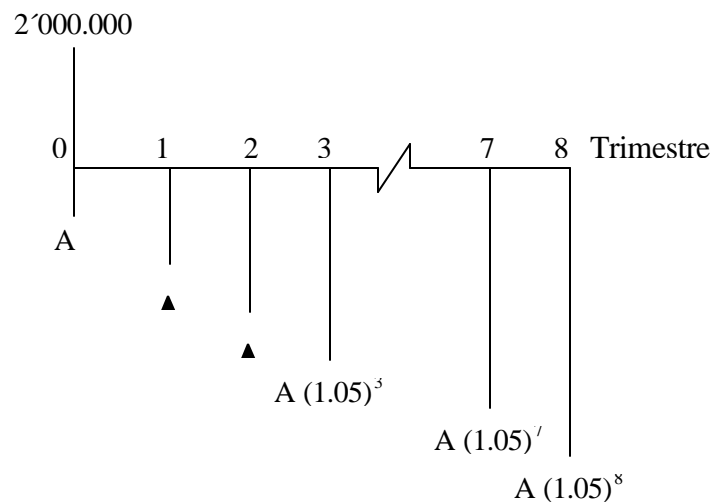
$$P = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-k}{1+i} \right)^n}{i+k} \right]$$

$$2'500.000 = 215.625,50 \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-0.025}{1+0.032} \right)^n}{0.032 + 0.025} \right]$$

$$0.3391 = 0.9448^n$$

$$n = \frac{\log(0.3391)}{\log(0.9448)} = 19 \text{ meses}$$

7. La financiera "Gana Mucho" debe cancelarle \$2'000.000 producto del buen uso de su dinero, el cual se compromete cancelárselo en dos años con cuotas trimestrales que aumentan en el 5% cada trimestre y con una tasa de interés del 9% trimestral ¿Cuánto dinero recibirá en la primera cuota?





$$P = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-k}{1+i} \right)^n}{i+k} \right]$$

$$2'000.000 = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1-0.05}{1+0.09} \right)^n}{0.09+0.05} \right]$$

$$T = 309.945,88$$

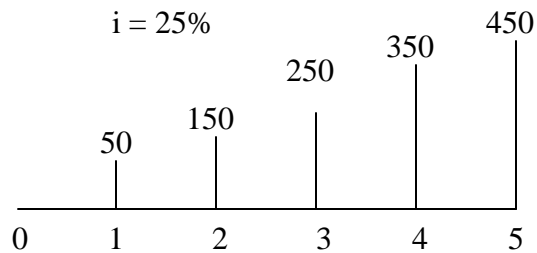
Como T queda en un periodo antes del periodo cero será necesario llevarlo a este haciendo uso de la relación P/F así:

$$A = 309945,88 (P/F, 9\%, 1)$$

$$A = 284.377,97$$

### 8.5. EJERCICIO PROPUESTOS

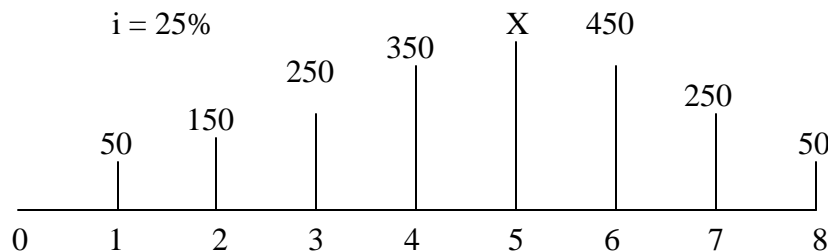
1. Encontrar el futuro del siguiente flujo de caja



2. ¿Cuál es el equivalente de las utilidades ganadas por el señor Indulfo durante 10 años si el primer año fueron de \$500.000 y estas aumentan un 15% anual a una tasa del 5% trimestre anticipado?

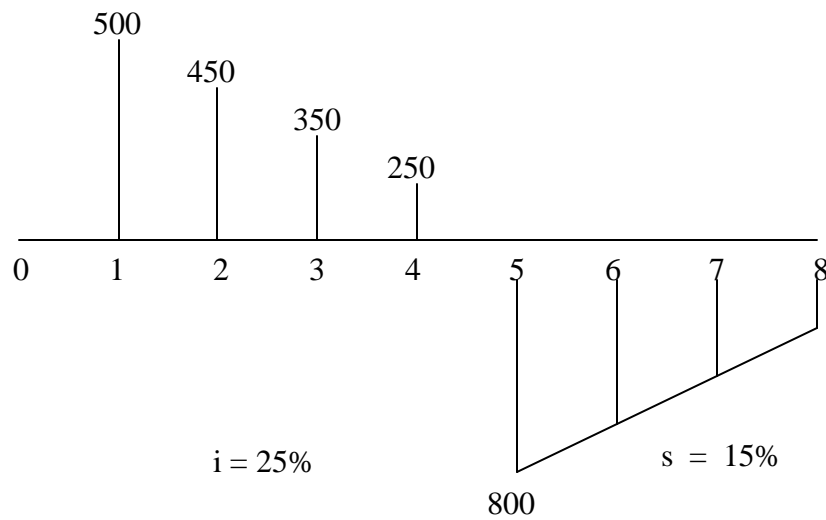
3. ¿Cuál sería el pago número sexto que tendría que hacer el señor Gómez al banco, si este le presto la suma de \$ 35'000.000 para ser cancelado al cabo de 10 años, si estas se incrementan un 10% anual a una interés del 25% efectivo anual?

4. ¿Cuál es el valor correspondiente a X, sabiendo que  $i = 20\%$ ?



5. Juan posee una cuenta de ahorro en el Banco Bogotá de \$ 100'000.000 para pagar la universidad. El banco le paga intereses del 9% anual ¿Cuánto tendrá Juan al cabo de 5 años si cada semestre saca de la cuenta \$1'500.000?

6. ¿Cuál es el valor de x en el siguiente flujo de caja?



## 8.6. RESUMEN

Como se pudo establecer en las decisiones de inversión y financiación existen muchas formas de pago, diferentes a una cuota fija o a una anualidad; dando origen a otros esquemas denominado gradientes o series variables, que de una u otra forma pueden llegar a ser equivalentes si se tienen en cuenta los principios de la ingeniería económica.

En este capítulo se dedujeron las fórmulas básicas que le permitirán resolver cualquier situación de pago o cobro que se ajuste a ellas. Teniendo en cuenta que en el gradiente lineal el incremento o disminución es un valor constante mientras que en el gradiente geométrico su variación es porcentual.

Adicional a estos tipos de gradientes clásicos existe el gradiente escalonado, que no es más que una anualidad que va aumentando lineal o geoméricamente pero formando escalones, pues mantiene su valor constante durante ciertos subperiodos dentro de los periodos fijados.

## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por si mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a si mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, **FELICITACIONES**, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.

## AUTOEVALUACIÓN VIII

1. ¿Qué es un gradiente?
2. ¿Cuántos tipos de gradiente hay?
3. ¿Por qué los gradientes escalonados reciben ese nombre?
4. ¿Cuál es la principal característica de los gradientes infinitos?
5. ¿Cuál es la característica principal de los gradientes aritméticos y geométricos?
6. Resuelva el siguiente ejercicio: Se ha calculado que una fotocopidora puede sacar 25.000 fotocopias al mes a un precio de \$40 cada una durante el primer año, de \$45 cada una durante el año siguiente y de \$50 cada una durante el tercer año, y así sucesivamente. Sin un mantenimiento mayor puede durar cinco años. Hallar el valor presente de los ingresos para una tasa de oportunidad del 36% anual para ese período de tiempo.
7. Demuestre la ecuación que representa la relación entre el valor presente y gradiente escalonado finito.
8. Obtenga paso a paso la fórmula que caracteriza a la relación entre el valor presente y un gradiente escalonado creciente.

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO

## ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Realice todos los ejercicios de gradiente que encuentra en su libro de preferencia.
2. Investigue en los bancos cuales son la situación más comunes en las que se apliquen el gradiente.
3. Responde cada una de las preguntas que hacen parte del banco de preguntas que creó en las actividades previas al capítulo.

## BIBLIOGRAFÍA

BACA, Gabriel. Fundamentos de ingeniería Económica. México. McGrawHill. 1994.

CORREDORES ASOCIADOS S.A. Manual para el Cálculo de Rentabilidades. Colombia. 1994.

DEGARMO, Paul. Ingeniería Económica. México. Prentice Hall. 1998.

GARCIA, Jaime. Matemáticas Financieras con Ecuaciones Diferenciales.

PORTUS, Lincoyán. Matemáticas Financieras. McGrawHill. Colombia. 1997.

RAMÍREZ, Eugenio. Ingeniería Económica “ Caso Colombiano”. Colombia: Universidad Eafit. 1960.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Proyectos de Inversión. Grupo Editorial Iberoamericana S.A. Colombia. 1997.





*INFLACIÓN*

# **Y DEVALUACIÓN**

Una buena inversión vale tanto  
como toda una vida de trabajo.

[Wyatt Blassingame]

C

A

P

I

T

U

L

O

**IX**

## OBJETIVOS

### *Objetivo General*

Conocer los factores que influyen en las diferentes situaciones económicas y como éstos afectan las decisiones de inversión y financiación proporcionando un marco más real de las aplicaciones de la ingeniería Económica.

### **Objetivos Específicos**

- Entender el concepto de inflación.
- Comprender el concepto de devaluación y su impacto en la economía del país.
- Diferenciar correctamente los conceptos de devaluación y revaluación.
- Relacionar estos conceptos con el fin de determinar la verdadera rentabilidad de la inversión.

## CONDUCTA DE ENTRADA

**E**l siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.

- e. La Inflación hace referencia al aumento del valor del peso con relación a una moneda extranjera. ( )
- f. La devaluación es un fenómeno interno del país, pues se presenta por la disminución en la capacidad de compra. ( )
- g. La Inflación se puede presentar en forma plena o en forma no generalizada. ( )
- h. Un proyecto se puede evaluar en pesos constantes o en pesos corrientes. ( )

2. Marque con una equis (X) la respuesta correcta.

- f. Evaluar un proyecto en precios constantes significa:
  - Excluir la inflación en el análisis del proyecto
  - Incluir la inflación en el análisis del proyecto
  - Excluir la devaluación en el análisis del proyecto
  - Incluir la devaluación en el análisis del proyecto
- g. Una tasa deflactada es:
  - Una tasa que tiene en cuenta el efecto inflacionario y la devaluación.
  - Una tasa que no tiene en cuenta el efecto de la devaluación
  - Una tasa que tiene sólo en cuenta la inflación
  - Una tasa que no tiene en cuenta la inflación.

# RESPUESTAS CORRECTAS

1.

- a. F
- b. F
- c. V
- d. V

2.

- a. Precio constante: Excluir la inflación en el análisis del proyecto
- b. Tasa deflactada: Una tasa que no tiene en cuenta la inflación.

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

## ACTIVIDADES PREVIAS

1. Investigar todo lo concerniente a la inflación y devaluación y el efecto en los proyectos de inversión y financiación.
2. Realizar un mapa conceptual donde se expongan el porqué se presenta la inflación y la devaluación, así como sus causas y sus efectos.
3. Investigar los índices de Precios al Consumidor de los tres últimos años, en el país.
4. Leer el artículo "Invertir en dólares" de la revista Finanzas Personales No. 110, página 20.
5. Desarrollar un test de inquietudes relacionadas con la inflación y la devaluación que se pueda desarrollar y aclarar a medida que se avanza en el estudio de estos temas.

## 9. INFLACIÓN Y DEVALUACIÓN

Muchas veces nos enfrentamos a situaciones financieras las cuales se ven influenciadas por muchos fenómenos económicos como la inflación (aumento general de los precios), devaluación de la moneda (disminución del valor de la moneda con relación a la moneda de otro país), la variación en los costos de la canasta familiar, la fluctuación en los precios de la gasolina, la variación en los costos de la educación, entre muchos otros; lo que hace necesario asegurar de una manera más rigurosa el riesgo que se corre al invertir o prestar dineros. La seguridad de ese dinero se lleva a cabo mediante la variación de las tasas de interés; lo cual es algo nuevo para nosotros ya que se había venido trabajando con los valores de tasas de interés uniforme a lo largo de los periodos.

### 9.1. INFLACIÓN

Como no todos los precios varían en igual proporción es necesario contar con una medida ponderada de bienes y servicios que permitan estandarizar y calcular el aumento promedio de los productos; para esto se utiliza la denominada canasta familiar, la cual está compuesta por un paquete básico de consumo que se supone, incluye los productos y servicios mínimos que una familia de clase media necesita para vivir. Esta canasta Familiar se evalúa mensualmente y se compara con el del mes anterior y con un periodo base para medir su evolución. La comparación con el periodo base, que generalmente es 100, genera un coeficiente numérico que se denomina Índice de Precio al Consumidor (IPC). Este es un parámetro que muestra los cambios presentados en el precio de nuestra economía y por tanto nos da una estimación de la Inflación general de precios; entonces la inflación hace referencia a la disminución de la capacidad de compra de los bienes y servicios ocasionada por la pérdida del poder adquisitivo de la moneda nacional, es decir, hay una reducción en el volumen de compra de los individuos.

Nuestra economía se ve influenciada por la inflación, ésta debe ser analizada, ya que si no se tiene en cuenta dentro de la negociación afectará al prestamista pues este percibe una disminución real de sus capitales, situación que favorecería al deudor del dinero, ya que este devuelve la cantidad prestada pero con una disminución del poder adquisitivo.

La inflación puede ser de dos tipos:

- a. *Plena*: Cuando los precios aumentan y afectan a todos los sectores económicos en igual proporción.
- b. *No Generalizada*: Cuando se presentan fluctuaciones diferentes en el precio de los bienes y servicios de los sectores económicos. Cuando se presenta este tipo de inflación se recomienda en el análisis financiero de proyectos utilizar tasas de inflación específicas para cada sector.

Es básico en el análisis de proyectos de inversión considerar el impacto de la inflación, pues esta puede disminuir la rentabilidad de los mismos. En Ingeniería Económica se puede analizar los problemas de toma de decisiones económicas, bajo dos enfoques:

- *Análisis que excluye la inflación*

Cuando se pretende tomar decisiones sobre la conveniencia o no de un proyecto de inversión o financiación sin tener en cuenta el efecto inflacionario es considerada una proyección en términos constantes, reales o duros, pues se asume que los precios y los costos permanecen constantes en el tiempo, por no estar sujetos a la existencia de la inflación, claro está que como inversionistas se desea un crecimiento real del dinero invertido por tanto se asume que la tasa de interés solicitada o cobrada compensa la pérdida inflacionaria del dinero y a su vez gana un rendimiento extra por su riesgo.

Como el flujo de caja está dado en precio constantes, el análisis del proyecto debe hacerse con una tasa que no contenga la inflación y a esta tasa se le conoce como tasas deflactada o tasa real de interés que se expresa como una tasa nominal que sólo tiene en cuenta el poder de ganancia del dinero a través del tiempo.

En este análisis las proyecciones se hacen en términos corrientes, es decir, se tiene en cuenta el componente inflacionario, por consiguiente los precios y los costos en una devaluación debe hacerse con una tasa que incluya la inflación que generalmente se conoce como tasa inflada o tasa de interés combinada, que se expresa como una tasa nominal que incluye la tasa de inflación y el rendimiento real adicional esperado.

### 9.1.1. Cálculo de la tasa real de interés o tasa deflactada

Para el cálculo de la tasa deflactada se debe excluir el efecto inflacionario, por eso frecuentemente y en forma errónea esta es calculada utilizando una operación matemática elemental como es la resta.

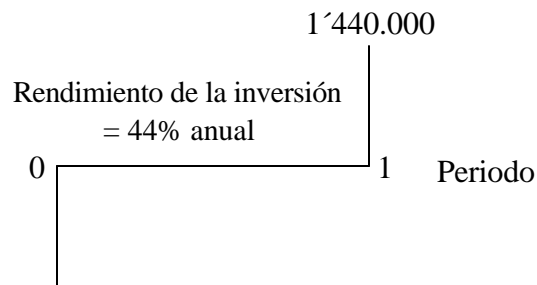
$$i_{\text{deflactada}} = i\% - i_f \quad \text{Esto es un error}$$

$i$  = Tasa e interés nominal del rendimiento del proyecto

$i_f$  = Tasa de inflación

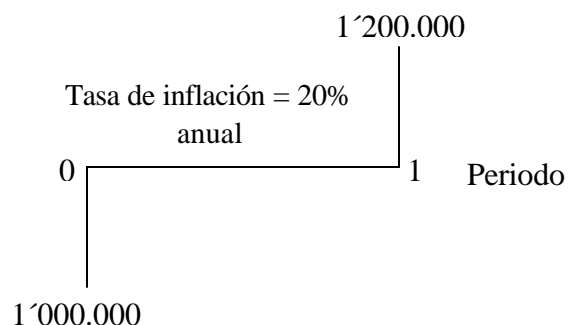
Fórmula que no da un verdadero valor del rendimiento en la inversión pues si se invierte \$ 1'000.000 con una tasa del 44% anual se obtendrá al final del periodo \$1'440.000, pero si durante este mismo periodo se genera una tasa de inflación del 20%, quiere decir que para adquirir los mismos bienes o servicios que se pudieron comprar al principio del período se necesitan un 20% adicional de unidades monetarias, en otras palabras si con \$1'000.000 se podía adquirir 100 unidades al inicio del período cada una a un costo de \$10.000, al final de este se necesitara \$12.000 para comprar el mismo artículo debido a la inflación.

Diagrama de flujo de la inversión



Capítulo IX

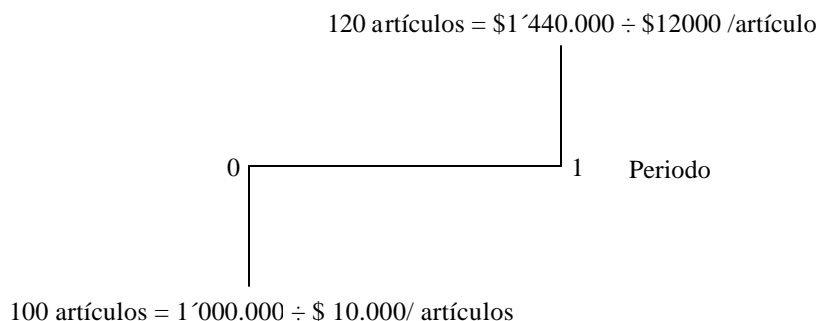
Diagrama de flujo de la inflación.





Sería errado decir que la tasa real de inversión es  $44\% - 20\% = 24\%$

Para verificar que esta tasa real no es la correcta, convirtamos el capital disponible en artículos, es decir, convertir los pesos en bienes y servicios.



Lo anterior nos permite concluir que la verdadera rentabilidad de la inversión se incrementó en 20 artículos que representa una tasa real del 20%.

Todo esto nos lleva a buscar una forma más efectiva de hallar la tasa deflacta ( $i_{def}$ ) o tasa real ( $i$ ), donde se permita relacionar la tasa inflación ( $i_f$ ), la tasa real de rendimiento ( $i$ ) y la tasa deflactada ( $i_{def}$ ), para esto supongamos que se invierte  $P$  pesos hoy a una tasa de interés nominal  $i$  a la cual nos generará dentro de un año  $F = P(1 + i)$ . Pero como sabemos el peso pierde

capacidad adquisitiva, debido a una tasa de inflación  $i_f$ , lo que quiere decir que con  $P$  pesos hoy, se podrá comprar lo mismo que  $F = \frac{P(1+i)}{(1+i_f)}$  al cabo de un año, es decir con  $P$

pesos de hoy deflactados a una tasa  $i_{def}$  anual se tendrá al cabo de un año una capacidad de compra equivalente a  $P(1+i_{def})$  pesos de hoy; por tanto:

$$P(1+i_{\text{def}}) = \frac{P(1+i)}{(1+i_f)}$$

$$i_{\text{def}} = \frac{(1+i)}{(1+i_f)} - 1$$

$$i_{\text{def}} = \frac{(i-i_f)}{(1+i_f)} \quad \text{Ecuación 9-1}$$

Según el ejemplo anterior tenemos:

$$i_{\text{def}} = \frac{(i-i_f)}{(1+i_f)} = \frac{(0.44-0.20)}{(1+0.20)}$$

$$i_{\text{def}} = 20\%$$

Los que nos lleva a pensar que la rentabilidad real o tasa deflecionada es 20% y no el 24% como se podría pensar erróneamente ya que la inflación ocasiona una pérdida de la capacidad de compra del capital y a su vez de los intereses generados por éste durante  $n$  periodos.

### Ejercicio Práctico

### Capítulo IX

Supongamos que nos suscribimos a la revista "Invierte" por cinco años, la suscripción costará sólo el porcentaje de la tasa de inflación la cual se tiene proyectada en un 25% anual y al realizar la suscripción tendremos una tasa de descuento o de oportunidad del 40% anual y el primer pago es de \$100.000 por adelantado. Se pide hacer un cuadro donde se muestre el precio corriente y constante, así como el valor presente de estos flujos.

AÑO	PRECIO CORRIENTE *	PRECIO CONSTANTE **	VALOR PRESENTE EN PRECIOS CORRIENTES ***	VALOR PRESENTE EN PRECIOS CONSTANTE ****

0	100.000	100.000	100.000	100.000
1	125.000	100.000	89.285,70	89.285,70
2	156.250	100.000	79.719,40	79.719,40
3	195.312,50	100.000	71.178	71.178
4	244.140,625	100.000	63.551,80	63.551,80
TOTAL	VALOR	PRESENTE	203.734,90	203.734,90

- Para el cálculo del precio corriente se toma en cuenta la tasa de inflación que es del 25% anual, como ésta tasa tiene el comportamiento de una tasa compuesta se calcula sobre el precio inmediatamente anterior.

$$100.000 * (1 + 0.25) = 125.000$$

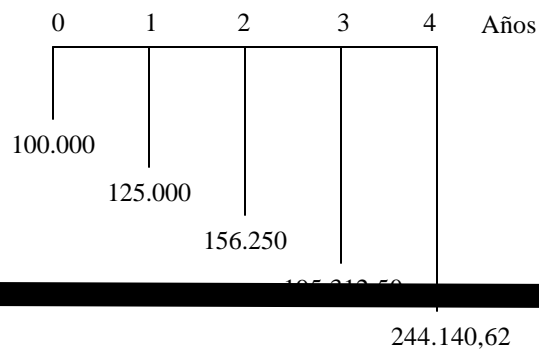
$$125.000 * (1 + 0.25) = 156.250$$

$$156.250 * (1 + 0.25) = 195.312,50$$

$$195.312,50 * (1 + 0.25) = 244.140,625$$

\*\* En el precio constante el valor no se altera debido a que el único factor que la hace variar es la inflación y en el análisis constante la inflación no es tomada en cuenta.

\*\*\* En el cuadro del valor presente en pesos corrientes, se tiene en cuenta la tasa nominal que en este caso es 40% la cual se supone está incluida la tasa de inflación.



Capítulo IX

$$P_0 = 100.000$$

$$P_1 = F (P/F, 40\%, 1) = 125.000 (0.714286) = 89.285,7$$

$$P_2 = F (P/F, 40\%, 2) = 156.250 (0.510204) = 79.719,4$$

$$P_3 = F (P/F, 40\%, 3) = 195.312,50 (0.364431) = 71.178$$

$$P_4 = F (P/F, 40\%, 4) = 244.140,62 (0.260308) = 63.551,8$$

\*\*\*\* Para obtener valor presente en pesos constantes recordamos que se debe excluir la tasa de inflación por tanto se utiliza la tasa deflactada para su cálculo.

$$i = 40\%$$

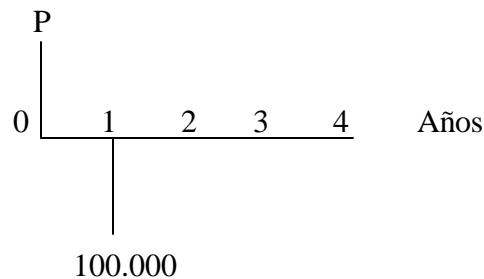
$$i_f = 20\%$$

$$i_{\text{def}} = \frac{(i - i_f)}{(1 + i_f)} = \frac{(0.44 - 0.25)}{(1 + 0.25)}$$

$$i_{\text{def}} = 12\%$$

Valor presente para el periodo cero =  $P_0 = \$100.000$

Valor presente para el periodo uno



Capítulo IX

$$P_1 = F (P/F, 12\%, 1) = 100.000 (0.892857) = 89.285,70$$

$$P_2 = F (P/F, 12\%, 2) = 100.000 (0.797194) = 79.719,40$$

$$P_3 = F (P/F, 12\%, 3) = 100.000 (0.711780) = 71.178$$

$$P_4 = F (P/F, 12\%, 4) = 100.000 (0.635518) = 63.551,80$$

## 9.2. DEVALUACIÓN

En algunas ocasiones es imprescindible involucrar el proyecto en el mercado internacional, generando inquietudes sobre la conveniencia o no de esta alternativa, debido a la presencia de una moneda diferente a la nacional que interviene en el negocio. ¿Qué pasará si nos encontramos en un ambiente de devaluación?, es decir que la moneda local experimente una pérdida o deterioro de su valor frente a la moneda extranjera, o dicho de otra forma, que tengamos que dar más moneda local por una unidad de moneda extranjera en un período de tiempo dado; o que sencillamente pase lo contrario que estemos en una situación donde la moneda nacional se revalúe respecto a la moneda internacional. ¿Cuál de estos dos ambientes económicos nos favorece?. Sólo se podrá dar respuesta a estas preguntas si se calcula el verdadero costo de la financiación o la verdadera rentabilidad de la inversión teniendo en cuenta estos factores y el interés generado por el proyecto.

### 9.2.1. Rentabilidad real en presencia de devaluación

Para el cálculo de la rentabilidad real en presencia de la devaluación hay que tener en cuenta que se están combinando dos tasas diferentes como son la tasa de interés y la tasa de devaluación por consiguiente no se pueden sumar algebraicamente, como ya se demostró con la tasa real deflactada, pues su resultado sería errado, entonces lo que se trata de hacer es estimar una tasa equivalente, para ello supongamos que se hace un préstamo de \$Q en moneda extranjera ( dólar, yen, marcos u otra moneda dura), por el cual se va a cancelar un interés  $i_1$ % anual, en esa moneda, por consiguiente dentro de un año debemos cancelar  $F = Q(1 + i_1)$ , pero nuestra moneda está perdiendo peso o devaluándose a una tasa de  $i_2$ % anual, lo que quiere decir que los \$Q en moneda extranjera, equivalen a \$P en moneda local de hoy, pero dentro de un año hay quedar  $\$P(1 + i_2)$  por cada unidad de moneda extranjera, entonces en moneda nacional dentro de un año se tendrá que cancelar  $F = \$P(1 + i_2)(1 + i_1)$ .

Diagrama de Flujo en moneda extranjera

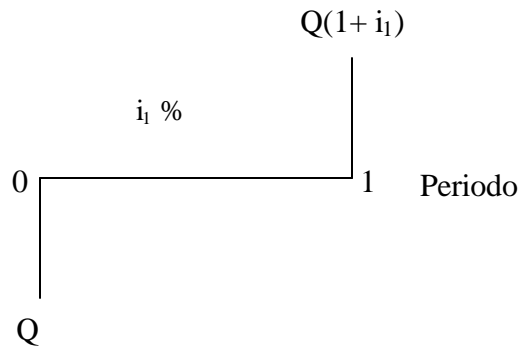
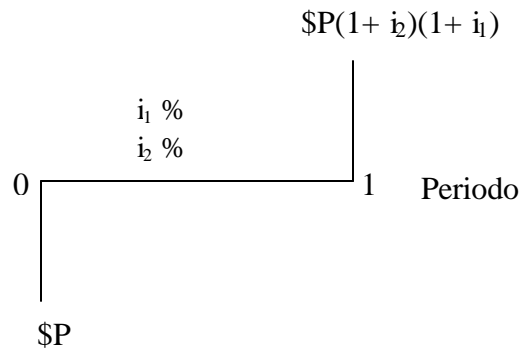


Diagrama de flujo en moneda nacional



Si igualamos  $\$P(1 + i_1)(1 + i_2) = \$P(1 + E)$

Donde

E = Tasa efectiva corriente cobrada por una inversión en el extranjero.

$$(1 + i_1)(1 + i_2) = (1 + E)$$

$$E = (1 + i_1)(1 + i_2) - 1$$

$$E = 1 + i_1 + i_2 + i_1 * i_2 - 1$$

$$E = i_1 + i_2 + i_1 * i_2$$

En el análisis de esta fórmula cada término puede representar:

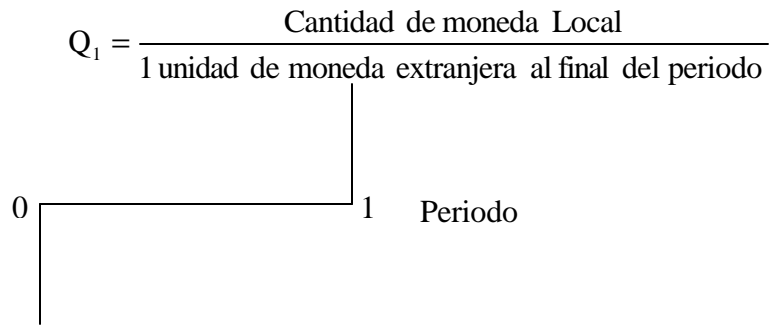
- $i_1 =$  {
- Tasa de interés sobre préstamos o inversiones en moneda extranjera ( $i_{ex}$  %)
  - Rentabilidad real de un proyecto ( $i_R$  %)

- $i_2 =$  {
- Tasa de devaluación entre la moneda nacional y la moneda extranjera ( $i_{dev}$  %)
  - Tasa de Inflación ( $i_f$  %)

Luego podemos decir que la Tasa efectiva corriente de un préstamo o inversión en el exterior es igual:

$$E = (1 + i_{ex})(1 + i_{dev}) - 1 \quad \text{Ecuación 9-2}$$

Donde la Tasa de devaluación es igual a:



$$Q_0 = \frac{\text{Cantidad de Moneda Local}}{1 \text{ unidad de moneda extranjera al inicio del periodo}}$$

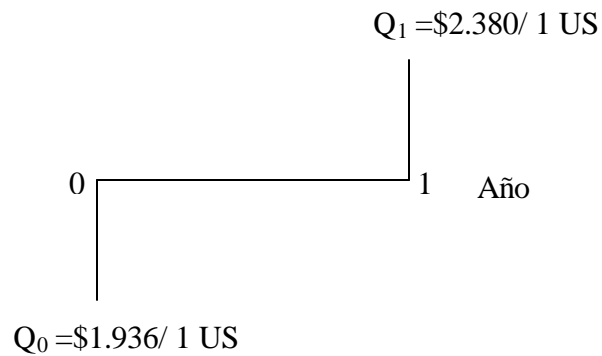
$$i_{\text{dev}} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

Ecuación 9-3

Pero  $i_{\text{dev}}$  es positiva (+) o cero (0) para que sea un comportamiento de devaluación.

### Ejercicio Práctico

¿Cuál es la tasa de devaluación si hace un año por un dólar se cancelaba \$1.936 y hoy un dólar se paga \$2.380?



$$i_{\text{dev}} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

$$i_{\text{dev}} = \frac{\$2.380 - \$1.936}{\$1.936} = 22,93\% \text{ anual}$$



### 9.3. CÁLCULO DE LAS TASAS DE INTERÉS

#### 9.3.1. Fórmula de la rentabilidad real

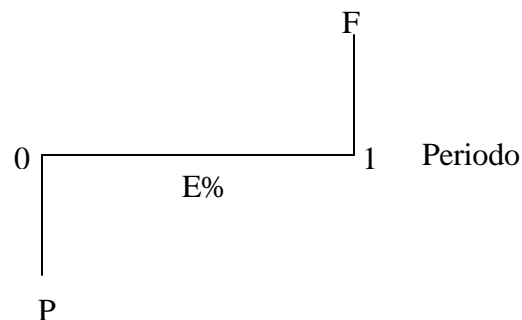
Si lo que se desea es calcular la rentabilidad real (deflactada) del proyecto de inversión, utilizamos:

$$E = (1 + i_R)(1 + i_f) - 1$$

$$i_R = \frac{E - i_f}{1 + i_f} \quad \text{Ecuación 9-4}$$

#### 9.2.3. Fórmula de la rentabilidad corriente

Si se desea es calcular la rentabilidad corriente (tienen en cuenta la inflación) del proyecto de inversión, utilizamos:



$$F = P(1 + E)$$

$$E = \frac{F - P}{P} \quad \text{Ecuación 9-5}$$

### 9.3.3. Fórmula de la tasa de dineros invertidos en el extranjero

Si lo que se quiere es calcular la tasa sobre los dineros invertidos o prestados en el extranjero, se apela a:

$$E = (1 + i_{ex})(1 + i_{dev}) - 1$$

$$i_{ex} = \frac{E - i_{dev}}{1 + i_{dev}}$$

Ecuación 9-6

#### *Ejemplo práctico*

1. Si hoy recibimos un préstamo de US \$10.000 a un año, a una tasa de interés del 10% anual. Calcular el verdadero costo del crédito si hoy un dólar cuesta \$2.380 y en un año se tiene calculado que cueste \$2.550.

$$i_{ex} = 10\% \text{ anual}$$

$$i_{dev} = ?$$

$$E = ?$$

$$i_{dev} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

$$i_{dev} = \frac{\$2.550 - \$2.380}{\$2.380} = 7,14\% \text{ anual}$$

$$E = (1 + i_{ex})(1 + i_{dev}) - 1$$

$$E = (1 + 0.10)(1 + 0.0714) - 1$$

$$E = 17,85\% \text{ anual}$$

2. Deseamos calcular el rendimiento de algunos dólares invertidos en Colombia que están ganando un 35% anual, si el peso ha perdido valor frente al dólar en un 20% anual.

$$E = 36\% \text{ anual}$$

$$i_{\text{dev}} = 20\% \text{ anual}$$

$$i_{\text{ex}} = \frac{E - i_{\text{dev}}}{1 + i_{\text{dev}}}$$

$$i_{\text{ex}} = \frac{0.36 - 0.20}{1 + 0.20} = 13,33\% \text{ anual}$$

3. ¿Cuál es el costo de un crédito pactado en dólares si están cobrando un 11% anual más cuatro puntos?. La devaluación del peso llegó al 27% anual.

$$i_{\text{ex}} = 11\% + 4 \text{ puntos} = 15\% \text{ anual}$$

$$i_{\text{dev}} = 27\% \text{ anual}$$

$$E = ?$$

$$E = (1 + i_{\text{ex}})(1 + i_{\text{dev}}) - 1$$

$$E = (1 + 0.15)(1 + 0.27) - 1$$

$$E = 46,05\% \text{ anual}$$

## 9.4. REVALUACIÓN

Como ya se mencionó anteriormente la revaluación tiene un efecto contrario al de la devaluación, pues la Moneda Local adquiere poder frente a una Moneda Extranjera, por consiguiente la deducción de las fórmulas es la misma, sólo cambiará los signos de ésta así:

$$E = (1 + i_{ex})(1 - i_{rev}) - 1 \quad \text{Ecuación 9-7}$$

Donde  $i_{rev}$  es igual a:

$$Q_1 = \frac{\text{Cantidad de moneda Local}}{1 \text{ unidad de moneda extranjera al final del periodo}}$$

$$Q_0 = \frac{\text{Cantidad de Moneda Local}}{1 \text{ unidad de moneda extranjera al inicio del periodo}}$$

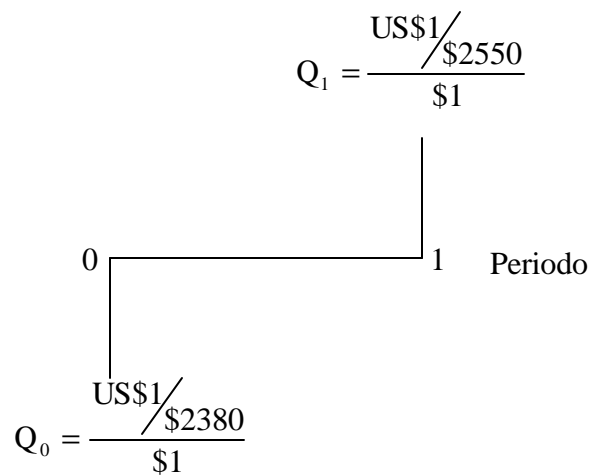
$$i_{rev} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} \quad \text{Ecuación 9-8}$$

Pero  $i_{rev}$  es negativa (-) para que sea un comportamiento de la revaluación.

**Ejemplo práctico**

Un extranjero necesita US\$10.000 y solicita en un Banco colombiano, a una tasa del 40% anual por un año, la tasa de cambio presente es de US\$1 por \$2.380 y la tasa de cambio futura es de US\$1 por \$2.550. ¿Cuál es la tasa de interés real cobrada?

$$i_{ex} = 40\% \text{ anual}$$



$$i_{rev} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

$$i_{rev} = \frac{\frac{\text{US\$1}}{\$2380} - \frac{\text{US\$1}}{\$2550}}{\frac{\text{US\$1}}{\$2550}}$$

$$i_{rev} = -6.66\%$$

$$E = (1 + i_{ex})(1 - i_{rev}) - 1$$

$$E = (1 + 0.40)(1 - 0.066) - 1$$

$$E = 30,68\% \text{ anual}$$

## 9.5. RESUMEN DE FÓRMULAS

tasa real de interés o tasa deflactada	$i_{\text{def}} = \frac{(i - i_f)}{(1 + i_f)}$
Tasa efectiva corriente de un préstamo o inversión en el exterior en presencia de devaluación	$E = (1 + i_{\text{ex}})(1 + i_{\text{dev}}) - 1$
Tasa de devaluación	$i_{\text{dev}} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$
la rentabilidad real (deflactada) del proyecto de inversión	$i_R = \frac{E - i_f}{1 + i_f}$
Tasa de interés sobre los dineros invertidos o prestados en el extranjero	$i_{\text{ex}} = \frac{E - i_{\text{dev}}}{1 + i_{\text{dev}}}$

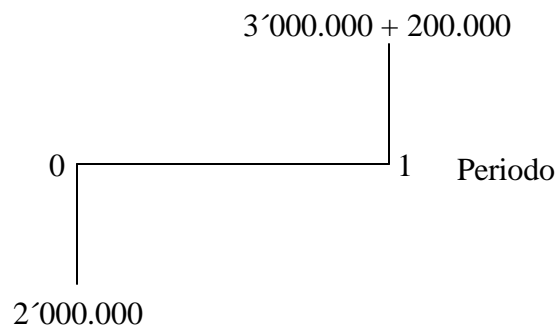
## 9.6. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Fruto del ahorro durante un semestre de Prácticas Empresariales, José Minero, ha reunido \$2.000.000=, los cuales desea invertir. Para buscar alternativas realizó una investigación en el mercado económico y obtuvo las siguientes opciones:
  - a. Comprar títulos en la empresa “Buena Marcha” por el precio de \$200 cada una. Esta empresa paga anualmente dividendos de \$20 por título al final del año, y le garantiza que al cabo de este tiempo la puede vender en \$300 cada uno.
  - b. Comprar Eurodólares que se cotizan a \$1000/Eurodólar para invertir en Italia al 42% anual. Se calcula que al año el Eurodólar tendrá un costo de \$1200/Eurodólar.
  - c. Colocar el dinero al 48% anual compuesto trimestralmente y por anticipado.
  - d. Invertir en un negocio que le ofrece ingresos de \$150.000 el primer mes, creciendo en \$50.000 cada mes hasta el 6 mes inclusive, luego ~~Capítulo IX~~ \$100.000 mensuales hasta el mes 12.
  - e. Colocar el dinero al 40% anual compuesto diariamente.
  - f. Prestar el dinero a un amigo para que al final de cada uno de los semestres le de \$1.500.000
  - g. Comprar Plata en Italia cuyo valor actual es de la \$40 Liras por onza y cada Lira tiene un costo de \$2000. Al final del año la Plata se cotiza en L\$ 45 por onza y

la Lira a \$2500. El almacenamiento de la Plata tiene un costo del 2% en Plata, pagadero al final del año.

¿Cuál será la mejor opción para invertir?

- a. Con los \$2.000.000 que se poseen se pueden comprar 10.000 títulos los cuales recibirán \$200.000 por concepto de dividendos dentro de un año. Estas acciones a su vez pueden ser vendidas por \$3.000.000. Quedando el diagrama de flujo así:



$$2'000.000 = 3'200.000 (P/F, i\%, 1)$$

$$0.625 = (P/F, i\%, 1)$$

Interpolando

i%	P/F
50%	0.666667
?%	0.625
70%	0.588235

$$i\% = 60.63\% \text{ anual}$$

- b. Para calcular la rentabilidad real se debe tener en cuenta que se está trabajando con tasas compuestas por consiguiente la fórmula a utilizar es:

$$E = (1 + i_{ex}) (1 + i_{dev}) - 1$$

Donde:

$$i_{ext} = 42\% \text{ anual}$$

$$i_{dev} = ?$$

$$E = ?$$

$$Q_1 = \frac{\$1.200}{1 \text{ eurodolar}}$$

$$Q_0 = \frac{\$1.000}{1 \text{ eurodolar}}$$

$$i_{dev} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

$$i_{dev} = \frac{\frac{\$1200}{1 \text{Eurodolar}} - \frac{\$1000}{1 \text{Eurodolar}}}{\frac{\$1000}{1 \text{Eurodolar}}}$$

$$i_{dev} = \frac{\frac{\$200}{\text{Eurodolar}}}{\frac{\$1000}{\text{Eurodolar}}} = 0.2 = 20\%$$

$$E = (1 + i_{ex}) (1 + i_{dev}) - 1$$

$$E = (1 + 0.42) (1 + 0.2) - 1$$

$$E = 70,4\% \text{ anual}$$



c.

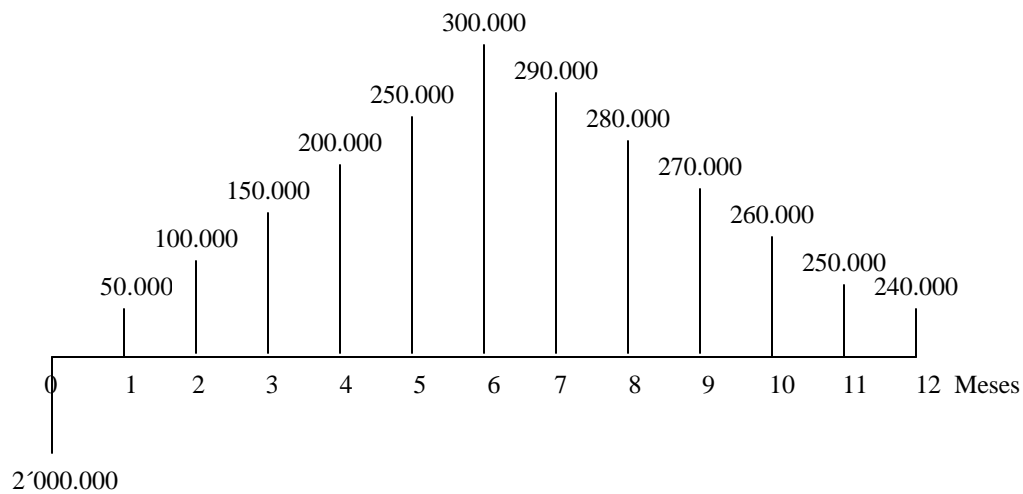
$r_a = 48\%$  anual compuesto trimestralmente y por anticipado

$$E = \left(1 - \frac{r_a}{t}\right)^{-t} - 1$$

$$E = \left(1 - \frac{0.48}{4}\right)^{-4} - 1$$

$E = 66.75\%$  efectivo anual

d. Para resolver esta alternativa es necesario hacer el diagrama de flujo



$$2'000.000 = 50.000 (P/F, i\%, 1) + 100.000 (P/F, i\%, 2) + 150.000 (P/F, i\%, 3) + 200.000 (P/F, i\%, 4) + 250.000 (P/F, i\%, 5) + 300.000 (P/F, i\%, 6) + 290.000 (P/F, i\%, 7) + 280.000 (P/F, i\%, 8) + 270.000 (P/F, i\%, 9) + 260.000 (P/F, i\%, 10) + 250.000 (P/F, i\%, 11) + 240.000 (P/F, i\%, 12)$$

Para calcular el  $i\%$  se realiza por tanteo e interpolación

i%	Valor
4%	1'990.032,03
?	2'000.000
3%	2'130.834,13

$i = 3.93\%$  efectivo mensual

Pero necesita calcular es el interés efectivo anual

$$E = (1 + i_p)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.0393)^{12} - 1$$

$E = 58.81\%$  efectivo anual

e.

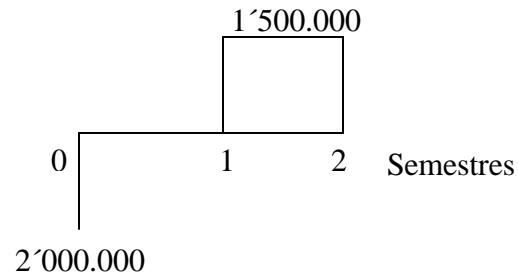
$r = 40\%$  anual compuesto diariamente

$$E = \left(1 - \frac{r}{t}\right)^{-t} - 1$$

$$E = \left(1 - \frac{0.40}{360}\right)^{-360} - 1$$

$E = 49.15\%$  efectivo anual

f.



$$2'000.000 = 1'500.000 (P/A, i\%, 2)$$

$$1'333.333 = (P/A, i\%, 2)$$

I%	P/A
30%	1.360947
?	1.333.333
35%	1.289438

$$i = 31.93\% \text{ Efectivo semestral}$$

Para calcular el interés efectivo anual utilizamos la siguiente fórmula:

$$E = (1 + i_p)^t$$

$$E = (1 + 0.2157)^2 - 1$$

$$E = 47.79\% \text{ Efectivo anual}$$

g. Primero debemos calcular la cantidad de plata que se puede comprar

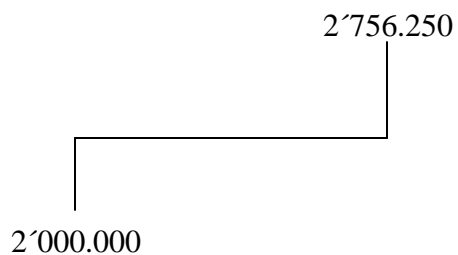
$$\$2'000.000 * \frac{1 \text{ Lira}}{\$2.000} * \frac{1 \text{ Onza}}{40 \text{ Lira}} = 25 \text{ Onzas}$$

Y al final del año debemos descontar el 2% por concepto de almacenaje

$$25 \text{ onzas} * 0.98 = 24,5 \text{ onzas}$$

En pesos equivaldría a:

$$24.5 \text{ Onzas} * \frac{45 \text{ Lira}}{1 \text{ Onza}} * \frac{\$2.500}{1 \text{ Lira}} = \$2'756.250$$



$$2'000.000 = 2'315.250 (P/F, i\%, 1)$$

$$0.725624 = (P/F, i\%, 1)$$

I%	P/F
35%	0.740741
?	0.725624
40%	0.714286

$$i = 37.8\% \text{ efectivo anual}$$

Otra alternativa de solución

Podría solucionarse a través de la fórmula que permite calcular la tasa efectiva corriente cuando se hacen inversiones en moneda extranjera agregando la tasa correspondiente al almacenaje de la plata así:

Pero,

$$E = (1 + i_{\text{ext}}) (1 + i_{\text{dev}}) (1 - i_{\text{almacenaje}}) - 1$$

$$i_{\text{dev}} = \frac{\frac{\$2.500}{1\text{Lira}} - \frac{\$2.000}{1\text{Lira}}}{\frac{\$2.000}{1\text{Lira}}} = 25\% \text{ anual}$$

$$i_{\text{ext}} = \frac{\frac{\text{US}\$45}{1\text{Onza}} - \frac{\text{US}\$40}{1\text{Onza}}}{\frac{\text{US}\$40}{1\text{Onza}}} = 12.5\% \text{ anual}$$

$$E = (1 + 0.125) (1 + 0.25) (1 - 0.02) - 1$$

$$E = 37.8\% \text{ efectivo anual}$$

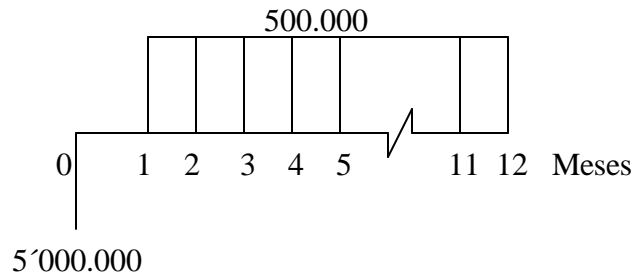
La mejor opción es la compra de eurodólares para invertir en Italia con un rendimiento del 70.4% efectivo anual.

2. Luego de un año de iniciado su negocio Pedro Buena idea ha ahorrado \$5'000.000 los cuales desea multiplicar, para ello necesita estudiar diferentes formas de inversión. ¿Cuál opción cree usted que escogió el señor Buena Idea de las siguientes alternativas; si el plazo para incrementar su capital es de un año?

- a. Abrir una cuenta que le ofrece el 36% anual compuesto trimestralmente y por adelantado.
- b. Prestar el dinero a Juan Buenapaga, quien le dará \$500.000 mensuales.
- c. Invertir en el país de Argelia, negocio que le producirá 2.400 Dinares mensuales. El dinar se cotiza hoy a 10 dinares/dólar y el dólar a \$ 2.000. Se cree que al final del año se pagarán 12 dinares/dólar y el dólar costará \$ 2.500.
- d. Prestar el dinero al 9% trimestre anticipado.
- e. Invertir en un negocio que cada trimestre le dará \$ 1'250.000, y una comisión del 5% sobre la inversión original. Además paga un interés trimestral por adelantado sobre saldo a comienzo del trimestre, equivalente al 36% anual vencido.

a.  $r_a = 36\%$  anual capitalizado trimestralmente y por adelantado.

b.



$$5'000.000 = 500.000 (P/A, i\%, 12)$$

$$10 = (P/A, i\%, 12)$$

Interpolando

i%	P/A
2.5%	10.257765
?	10
3.0%	9.954004

$$i = 2.92\% \text{ mensual}$$

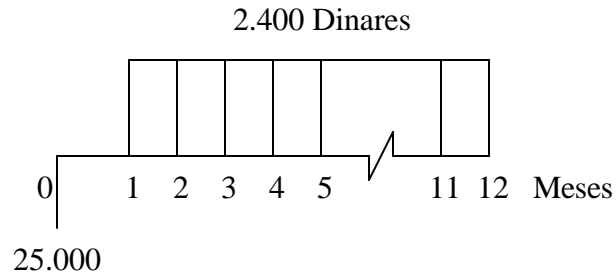
$$E = (1 + i)^t - 1$$

$$E = (1 + 0.00292)^{12} - 1$$

$$E = 41.25\% \text{ efectivo anual}$$

- b. Primero se debe calcular cuantos dinares se pueden comprar con los \$ 5'000.000 y obtener así el interés ganado por la inversión en Argelia

$$\$5'000.000 * \frac{\text{US\$1}}{\$2.000} * \frac{10 \text{ Dinares}}{\text{US\$1}} = 25.000 \text{ Dinares}$$



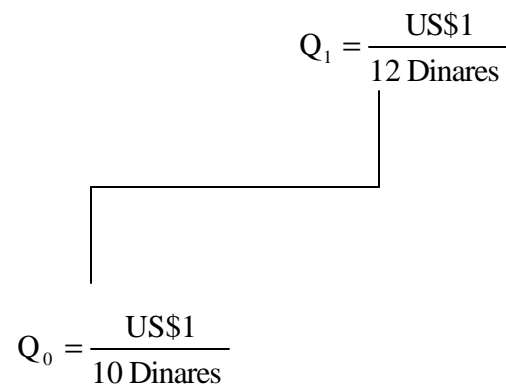
$$25.000 = 2.400 (P/A, i\%, 12)$$

$$10.416667 = (P/A, i\%, 12)$$

i%	P/A
2.5%	10.257765
?	10.416667
2.0%	10.575341
i% = 2.25% efectivo mensual	

$E = (1 + i_p)^t = 30.61\%$  efectivo anual que gana en la inversión Argelia

Ahora hay que calcular la revaluación de los dinares frente al dólar para obtener el interés de la inversión



$$i_{\text{rev}} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

$$i_{\text{rev}} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{10}}{\frac{1}{10}}$$

$$i_{\text{rev}} = -0.1667 = 16.67\% \text{ en revaluación}$$

$$E = (1 + i_{\text{ext}}) (1 + i_{\text{rev}}) - 1$$

$$E = (1 + 0.3061) (1 + 0.1667) - 1$$

$$E = 8.83\% \text{ Efectivo anual al traerlo a EUA}$$

Para terminar se debe calcular la devaluación del peso frente al dólar y obtener así la rentabilidad real.

$$Q_1 = \frac{\$2.500}{\text{US\$1}}$$

$$Q_0 = \frac{\$2.000}{\text{US\$1}}$$



$$i_{\text{dev}} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0}$$

$$i_{\text{dev}} = \frac{2.500 - 2.000}{2.000}$$

$$i_{\text{dev}} = 0.25 = 25\% \text{ efectivo anual de devaluación}$$

$$E = (1 + i_{\text{ext}}) (1 + i_{\text{dev}}) - 1$$

$$E = (1 + 0.083) (1 + 0.25) - 1$$

$$E = 35,38\% \text{ efectivo anual}$$

d.

$i_a = 9\%$  Trimestral anticipado  
 $t = 4$

$$E = (1 - i_a)^{-t} - 1$$

$$E = (1 - i_a)^{-4} - 1$$

$$E = 45.83\% \text{ efectivo anual}$$

e.

$i_c = 5\%$   
 $E = 36\%$  anual vencido

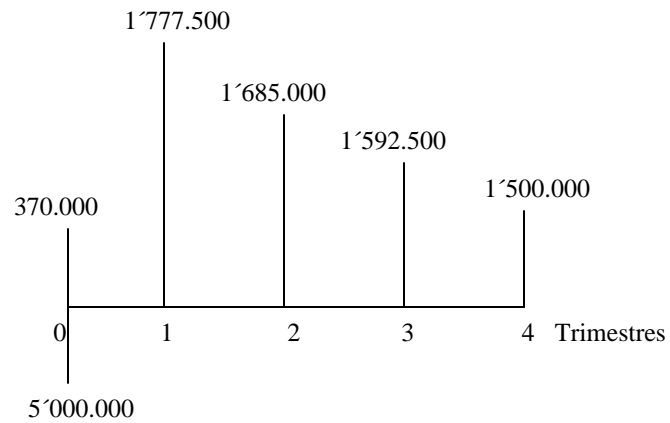
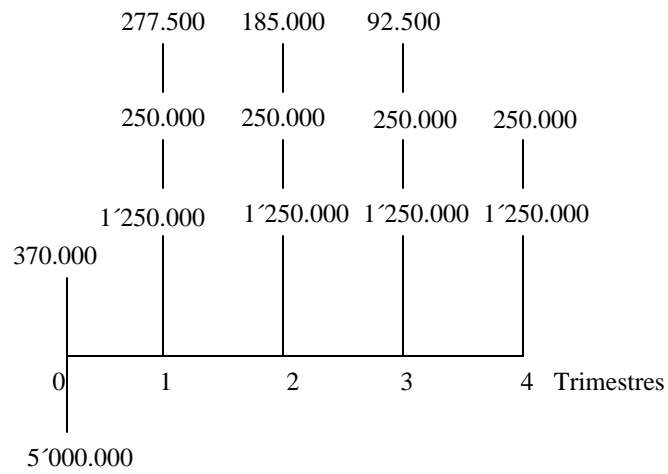
Hay que convertir el interés anual en trimestral y por anticipado

$$i_a = 1 (E + 1)^{-1/t}$$

$$i_a = 1 - (0.36 + 1)^{-1/4}$$

$$i_a = 7.4\% \text{ trimestre anticipado}$$

El diagrama de flujo quedará



$$5'000.000 - 370.000 = 1'777.500 (P/F, i\%, 1) + 1'685.000 (P/F, i\%, 2) + 1'592.500 (P/F, i\%, 3) + 1'500.000 (P/F, i\%, 4)$$

Calculando i por tanteo

i%	P/F
16%	4'633.241,67
?	4'630.000
18%	4'459.425

$i\% = 16.04\%$  efectivo trimestral

$$E = (1 + i_p)^t - 1 = 81.31\% \text{ efectivo anual}$$

3. Debido a la inflación general de los precios en nuestra economía el poder de compra del peso disminuye con el paso del tiempo. Si se espera que la tasa de inflación general de precios promedio sea del 8% por año en el futuro previsible. ¿Cuántos años tomará al poder de compra del peso ser la mitad del que tiene ahora?. Es decir ¿En qué momento en el futuro costará \$ 2 comprar lo que puede comprar hoy por \$1?

Diagrama de flujo de la inflación

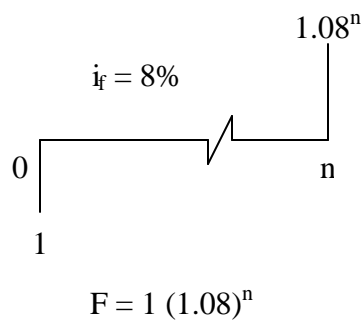
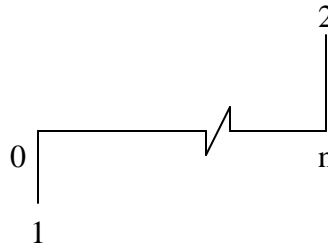


Diagrama de flujo de la inversión



$$F = 2; \text{ por tanto, } 2 = (1.08)^n$$

Entonces:

$$\text{Log } 2 = n \text{ Log } 1.08$$

$$n = 9 \text{ años}$$

4. Un nuevo empresario piensa que dentro de 25 años se puede retirar del ámbito de los negocios, para disfrutar de su esfuerzo, al cabo de ese tiempo desea tener ahorros por \$20'000.000, con el poder de compra de hoy. Supone que la inflación esperada durante este tiempo es del 9.5% promedio anual y que con su ahorro abrirá una cuenta que le ofrece el 12,8% anual. Su salario actual es de \$1'200.000 y supone que aumentará un 12% anual. Su primer ahorro lo hace a finales de este año. ¿Qué porcentaje de su salario debe ahorrar para que su idea de retiro se haga realidad?.

Para la solución de este ejercicio nos apoyaremos en la hoja de cálculo de EXCEL, donde se realizarán las operaciones necesarias según los requerimientos del problema.

Cuando se dice que se desea tener \$20'000.000 con el poder de compra de hoy, hace referencia a que este valor presente no tiene incluida la inflación y como se quiere afectar a 25 años teniendo en cuenta la inflación (convertir precios constantes a precios nominales), el cálculo del valor futuro es similar al del interés compuesto, por tanto para calcular el valor futuro con una inflación constante, decimos:

$$F = P (1 + i_f)^n$$

$$F = 20'000.000 (1 + 0.95)^{25}$$

$$F = 193'367.274,1$$

Este valor es el que se debe obtener dentro de 25 años con el ahorro programado.

Para la elaboración de la hoja de EXCEL se tuvo en cuenta las siguientes operaciones:

Casilla      C17 : C16\*(1+ \$C\$2)  
              D17 : C17\*\$F\$3  
              E17 : E16\*(1+ \$C\$3)+D17  
              F4  : C5\*POTENCIA( 1 + C4; 25)  
              F5  : E34  
              F3  : Se hace por tanteo hasta que la casilla F4 y F5 sean semejantes.

Microsoft Excel - Imágen

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

Arial 9 N

000 +000 +000

75%

G37 =

	A	B	C	D	E	F	G
1	Salario Inicial año 0		\$ 1.200.000				
2	Aumento Anual de Salario		12,00%				
3	Tasa de interés de los ahorros		12,80%	Calculo de la tasa de ahorro		33,30%	
4	Tasa de inflación promedio		9,50%	Monto deseado en el 25		193367274	
5	Monto deseado en 25 años		\$ 20.000.000	Saldo del banco en el año 25		193333204	
7			Monto Salario	Tasa de ahorro	Saldo en Banco		
8		Año					
9		0	\$ 1.200.000	\$ 399.600	\$ 399.600		
10		1	1.344.000	\$ 447.552	\$ 898.301		
11		2	1.505.280	\$ 501.258	\$ 1.514.542		
12		3	1.685.914	\$ 561.409	\$ 2.269.812		
13		4	1.888.223	\$ 628.778	\$ 3.189.126		
14		5	2.114.810	\$ 704.232	\$ 4.301.566		
15		6	2.368.587	\$ 788.740	\$ 5.640.906		
16		7	2.652.818	\$ 883.388	\$ 7.246.331		
17		8	2.971.156	\$ 989.395	\$ 9.163.256		
18		9	3.327.695	\$ 1.108.122	\$ 11.444.275		
19		10	3.727.018	\$ 1.241.097	\$ 14.150.239		
20		11	4.174.260	\$ 1.390.029	\$ 17.351.498		
21		12	4.675.171	\$ 1.556.832	\$ 21.129.322		
22		13	5.236.192	\$ 1.743.652	\$ 25.577.527		
23		14	5.864.535	\$ 1.952.890	\$ 30.804.340		
24		15	6.568.279	\$ 2.187.237	\$ 36.934.533		
25		16	7.356.472	\$ 2.449.705	\$ 44.111.858		
26		17	8.239.249	\$ 2.743.670	\$ 52.501.846		
27		18	9.227.959	\$ 3.072.910	\$ 62.294.993		
28		19	10.335.314	\$ 3.441.660	\$ 73.710.412		
29		20	11.575.552	\$ 3.854.659	\$ 87.000.003		
30		21	12.964.618	\$ 4.317.218	\$ 102.453.221		
31		22	14.520.372	\$ 4.835.284	\$ 120.402.517		
32		23	16.262.817	\$ 5.415.518	\$ 141.229.557		
33		24	18.214.355	\$ 6.065.380	\$ 165.372.321		
34		25	20.400.077	\$ 6.793.226	\$ 193.333.204		

Hoja1 / Hoja2 / Hoja3 /

Listo NUM

### 9.7. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si se desea que las inversiones rindan una tasa real del 15% y la inflación se estima en el 25% ¿A qué tasa se debe invertir?
2. Para iniciar su nueva empresa necesita de \$20.000.000 y las instituciones financieras le han ofrecido las siguientes alternativas. Indique cuál de todas es la más conveniente.
  - a. Préstamo con dos cuotas semestrales a capital con un interés del 36% anual compuesto mensualmente y por adelantado y una comisión adelantada, por una sola vez del 3%.
  - b. El préstamo será en metros cuadrados de construcción al 10% semestral compuesto bimensual. El valor del m<sup>2</sup> de construcción hoy es de \$50.000 y se espera que crezca a una tasa anual equivalente al 0.8% mensual.
  - c. Préstamo en cruzeiros (12 cruzeiros = 1 peso hoy) el cual pagará un interés del 18% anual y se cancelará en un año, actualmente 8 cruzeiros = 1 peso.
  - d. El préstamo se hará en “Poco pesos” cuyo costo anual es de 8,5% anual, sujetos a una tasa de revaluación del 32% anual respecto al peso.
  - e. El préstamo será en onzas de oro, a un interés del 5% anual, la onza de Oro hoy cuesta US\$620 y los pronósticos para dentro de un año, momento en el cual hay que pagar US\$650 por la onza. La devaluación del peso respecto al dólar es del 12% anual.
3. Determine cuál es la mejor opción para invertir \$3.000.000 que tiene ahorrados.
  - a. Invertir en la bolsa de Hamburgo, comprando Futuros. Se estima que el Kilo de lo que hoy compra en 10 Marcos se venderá dentro de un año en 12 Marcos. Hoy el Marco cuesta US\$15 y se espera que en un año cueste US\$18,38. El dólar tiene hoy un precio de \$2.380 y se espera que en un año valga \$2.550. Tanto en la compra como en la venta se debe pagar 1% por comisión.
  - b. Comprar acciones en la empresa “El Aguijón”, las cuales están a \$50 por acción. Esta empresa estima el pago de dos cuotas de dividendos, el primero al final del primer semestre de \$5 por acción y el segundo al final del año de \$11 por acción. Al final del año, la acción se puede vender en \$80 la acción. La comisión por venta de las acciones es del 3%.
  - c. Colocar el dinero en el Japón que pago el 19,5% anual en yenes. El yen ha estado revaluándose respecto al dólar a una tasa del 15% anual y el peso se ha estado devaluando respecto al dólar en un 23,5% anual.
  - d. Invertir en una actividad productiva que ofrece una tasa de interés del 36% semestral capitalizado mensualmente.

4. Para su nueva empresa necesita adquirir unos equipos y tiene dos ofertas para la adquisición, ¿cuál seleccionaría usted?
- a. Oferta de Leasing “La Solución”
    - Valor del Equipo = \$5.000.000
    - Tasa en pesos = DTF + 8 puntos
    - DTF = 29,69% Trimestre anticipado
    - Plazo = 36 meses
    - Opción de Compra = 10% del valor de adquisición (efectiva al final del mes 36)
  - b. Oferta de XEROS
    - Valor del Equipo = US\$ 1.270
    - US\$1 hoy = \$2.380
    - Devaluación esperada = 25% anual
    - Cuota fija en dólares = US \$50 mensual
    - Plazo = 36 meses
    - Opción de compra = US\$ 127 dólares (al final del mes 36)
5. Debido a la recesión económica presentada por Argentina, se han propuesto las siguientes alternativas de inversión para reactivar su economía.
- a. Invertir en finca raíz, específicamente en casas de 120 m<sup>2</sup> las cuales requieren una inversión de US\$18.000 cada una, los bancos argentinos le ofrecen un crédito del 70% del valor de la casa, a dos años, para cancelarlos en cuotas mensuales a una tasa equivalente del 12,5% semestral compuesto mensualmente y por anticipado en Australes. Los pagos a capital serán uniformes. Se reciben además ingresos de \$5.000 australes mensualmente y al final de los dos años la propiedad tendrá un costo de US\$18.000.
  - b. Invertir en una empresa en la cual se obtiene una rentabilidad del 30% anual en Australes, pero se desea saber ¿Cuál es la rentabilidad real de la inversión, si se espera el 8 % anual en dólares?.

Información adicional:

	Hoy	Al Cabo de 2 años
\$/US	\$2380	\$3.000
Austral/US\$	5	10



## 9.8. RESUMEN

Como se ha podido establecer hay variaciones del poder adquisitivo del dinero, que forman parte de una realidad económica de la cual no se aparta las inversiones o financiaciones que se pretenden hacer, por eso las matemática financieras estudian el efecto en la rentabilidad real de la inflación y la devaluación de la moneda local.

Sabiendo que inflación, es un fenómeno interno de un país debido al aumento general de precios, y que la devaluación es la pérdida del poder adquisitivo de la moneda nacional frente a una moneda extranjera, por consiguiente es un fenómeno externo a este.

Para poder evaluar una alternativa de inversión se puede realizar incluyendo o excluyendo la inflación, es decir realizando el estudio en precios corrientes o precios constantes, pero que al final nos llevarán al mismo resultado.

## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por si mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a si mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o exámen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.

## AUTOEVALUACIÓN IX

7. Explique en qué consiste la devaluación y la inflación.
8. ¿Cuál es el parámetro que se tiene en cuenta para estimar la inflación?
9. ¿En qué consiste el estudio o evaluación de un proyecto a precios constantes?
10. ¿En qué consiste el estudio o evaluación de un proyecto a precios corrientes?
11. ¿Para calcular la rentabilidad real en una economía inflacionaria sólo hay que restar esta tasa de la tasa efectiva solicitada?
12. ¿Qué nombre recibe el efecto económico donde la moneda local adquiere poder frente a una moneda extranjera?
13. ¿Qué es una tasa deflactada?

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO

## ACTIVIDADES DE REFUERZO

1. Enumere diferencias entre la tasa efectiva de interés y la tasa real de interés.
2. ¿Por qué razón la tasa real de interés no se encuentra restando de la tasa efectiva la tasa de inflación?
3. Investigar si los bancos tienen en cuenta estos efectos económicos en las tasas de interés ofrecidas.
4. Consultar las variaciones de las tasas bancarias y su relación con el índice de precios.
5. Informese sobre la relación entre los índices de precios y los aumentos salariales.
6. Analizar la influencia de la Inflación y devaluación en la economía del país.
7. Investigar si la revaluación de la moneda tiene efectos contrarios al de la devaluación.
8. Investigar si las empresas tienen en cuenta el efecto de la inflación y la devaluación en el momento de invertir o solicitar financiación.
9. ¿Por qué es importante tener en cuenta el efecto inflacionario en la evaluación de alternativas de inversión o financiación?

## BIBLIOGRAFÍA

BACA, Gabriel. Fundamento de Ingeniería Económica. México: McGraw-Hill, 1994.

DEGARMO, Paul. Ingeniería Económica. México: Prentice Hall, 1998.

INFANTE, Arturo. Evaluación financiera de Proyectos de inversión. Colombia: Grupo Editorial Norma, 1997.

MARULANDA, Luis. Decisiones Financieras y Costo del Dinero en Economías Inflacionarias. Colombia: Editorial norma, 1985.

PORTUS, Lincoyán. Matemáticas Financieras. Colombia: McGraw- Hill, 1997.

RAMIREZ, Eugenio. Ingeniería Económica, “Caso Colombiano”. Colombia: Universidad Eafit, 1984.

TARQUIN, Anthony. Ingeniería Económica, Colombia: McGraw – Hill, 1999.

THUESEN, H. Ingeniería Económica. Colombia: Prentice Hall, 1999.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones. México: McGraw-Hill, 1997.

00

VILLALOBOS, José Luis. Matemáticas financieras. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.



# **AMORTIZACIÓN Y CAPITALIZACIÓN**

**El éxito es ese  
viejo trío:  
Habilidad.**

**C  
A  
P  
I  
T  
U  
L  
O  
X**

## *OBJETIVOS*

### **Objetivo General**

Reconocer, definir y aprender a manejar los principales sistemas de amortización y capitalización, así como crear nuevas formas de efectuar estas operaciones, con el fin de aplicarlas para obtener un mejor rendimiento económico y financiero en proyectos empresariales o personales.

### **Objetivos Específicos**

- Afianzar los conceptos de anualidad y gradiente anteriormente estudiados.
- Comprender el concepto de amortización y capitalización.
- Identificar las clases de amortización .
- Diferenciar conceptos de amortización y capitalización.
- Aprender la terminología que se emplea en las operaciones de amortización y capitalización.

## *CONDUCTA DE ENTRADA*

**E**l siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee acerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

5. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.
  - h. Abonar a capital o amortizar es pagar los intereses más el capital de una deuda. ( )
  - i. La cuota a pagar de la deuda es sinónima de abonar a capital. ( )
  - j. El saldo insoluto es el capital vivo o que falta por pagar de un préstamo. ( )
  - k. Los derechos adquiridos son una cesión de derechos sobre el bien que realiza el vendedor. ( )
  - l. Una tabla de amortización muestra con exactitud los intereses, el abonado a capital y el saldo insoluto de cualquier periodo. ( )
  - m. Capitalización es ahorro periódico que no gana intereses. ( )
  - n. Una forma de capitalizar es comprar dólares. ( )
6. ¿Qué es la amortización y qué es capitalización?
7. ¿La amortización es antónimo de capitalización?



## ***RESPUESTAS CORRECTAS***

1.
  - a. F
  - b. F
  - c. V
  - d. V
  - e. V
  - f. F
  - g. V
  
2. Amortizar o abonar a capital es el proceso financiero mediante el cual se extingue una deuda y sus intereses, a través de pagos periódicos, los cuales pueden ser iguales y diferentes.

*La capitalización es una actividad financiera utilizada para acumular una cantidad de dinero mediante pagos periódicos o no, que devengan intereses, de tal forma que en determinado número de periodos o plazo, se logre obtener una cantidad previamente fijada.*
  
3. Se cree que la capitalización es contraria al abono a capital, ya que en esta última los pagos realizados no ganan intereses, por el contrario son utilizados simplemente para cancelar un préstamo y los intereses causados, mientras que la capitalización hace depósitos que ganan intereses, los cuales se reinvierten y vuelven a ganar intereses y así sucesivamente, hasta crecer el total ahorrado o acumulado en el futuro.

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

## *ACTIVIDADES PREVIAS*

1. Repasar los conceptos y fórmulas expuestas en los capítulos VII y VIII de anualidad y gradientes, respectivamente.
2. Indagar sobre los tipos de conocimientos necesarios para el desarrollar de planes de amortización o abonos a capital y capitalización.
3. Visitar una entidad financiera o comercial e investigar algunos de los sistemas de amortización que la entidad utiliza para el abono a capital de los préstamos.
4. Investigar en las Corporaciones de ahorro los sistemas que existen de ahorro programado para la adquisición de vivienda.
5. Investigar en que consisten y como se programan los Fondos de Pensión.
6. Realice un ensayo sobre la importancia del ahorro en Colombia.
7. Ingresar en un buscador de Internet con el fin de indagar sobre la amortización y capitalización.
8. Desarrollar un test de inquietudes relacionadas con la Amortización y Capitalización que se pueda desarrollar y aclarar a medida que se avanza en el estudio de estos temas.

## **10. AMORTIZACIÓN Y CAPITALIZACIÓN**

**E**n los tiempos actuales todo el mundo aspira tener un máximo beneficio de la inversión o financiación de los recursos. Es necesario contar con herramientas útiles que nos permitan ver la evolución de esta adquisición u otorgamiento de préstamo y seleccionar la forma óptima para su extensión gradual. Por tanto en este capítulo se darán orientaciones para efectuar cálculos financieros que nos permitan amortizar, deudas o capitalizar dineros para su utilización en un futuro.

### **10.1. AMORTIZACIÓN**

**E**n algún momento las personas u organizaciones se ven en la necesidad de solicitar préstamos que puede cancelar con un pago único al final del plazo o mediante pagos periódicos cuyo monto y plazo varía, situación que se debe estudiar para determinar como influyen los recargos y seleccionar la mejor forma de amortización, ya que esto puede representar un ahorro, si tenemos en cuenta que Amortizar es el proceso financiero mediante el cual se extingue una deuda y sus intereses, a través de pagos periódicos, los cuales pueden ser iguales y diferentes.

Es importante tener bien definidos los conceptos: cuota a pagar y amortización o abono a capital, que generalmente se tiende a confundir considerando estos términos sinónimos, pero que su diferencia radica que en el primero es el pago que el deudor hace al acreedor cada periodo, el cual incluye los intereses que se generan y el segundo es la parte del abono que se destina a disminuir o reducir el capital vivo de la deuda.

$$\text{Cuota a pagar} = \text{Abono a capital} \text{ ó } \text{Amortización} + \text{Intereses}$$

### 10.1.1. Sistemas de amortización

Los sistemas que se tratarán son los más comunes, aunque no son los únicos que existen, ya que cada persona u organización puede crear su propio sistema de amortización teniendo en cuenta la disponibilidad de recursos, la inflación, devaluación, el riesgo, la rentabilidad y el plazo, entre otros.

#### ***Amortización Constante o Abonos iguales a capital***

Como su nombre lo indica mantiene constante el valor de la amortización ó abonos a capital durante todos y cada uno de los periodos, generando cuotas o pagos mayores al inicio debido a los intereses causados; estas cuotas a pagar se van reduciendo progresivamente debido a que los intereses disminuyen al bajar la deuda.

#### **Amortización Gradual**

Es el sistema de amortización más general y utilizado, dado que se maneja como una anualidad, pues las cuotas a pagar son iguales, al igual que los intervalos de tiempo.

#### **Amortización con pagos crecientes**

Es un sistema donde las cuotas crecen o se incrementan más rápidamente que en la amortización gradual, este tipo de amortización se maneja como un gradiente aritmético o geométrico creciente.

#### **Amortización decreciente**

Contrario al anterior este sistema inicia con cuotas altas al comienzo del préstamo, las cuales van presentando una disminución en el valor de las misma, ya que el factor de variación es negativo.

Este tema se caracteriza por que cada determinado número de pagos incluye un pago extraordinario, modificando las condiciones de la amortización.

### **Amortización incrementada con cuotas interperiodos constantes**

El comportamiento de este sistema es similar al gradiente escalonado, ya que los incrementos se presentan luego de cierto número de periodos, permaneciendo las cuotas constantes entre los cambios.

Adicional a estos existen muchos sistemas de amortización de deudas, pero que no se pueden agrupar bajo un diseño único preestablecido, ya que las situaciones varían de un caso a otro, aunque al final estas sean equivalentes. Por eso se cree que el éxito en el desarrollo de sistemas de amortización sólo depende del buen criterio y creatividad del financista quien debe interpretar todas las condiciones del mercado para que al final pueda seleccionar la que mejor se adapte a su flujo de caja.

### **10.1.2. Cálculo de las cuotas a pagar**

El cálculo de las cuotas a pagar, para los sistemas de amortización, no es un tema nuevo para el estudiante ya que durante los capítulos VII y VIII correspondientes a Anualidad y Gradientes respectivamente, se han manejado este tipo de sistemas de pago o capitalización, por ello simplemente se traerá a colación cada una de las fórmulas obtenidas anteriormente, con el objetivo de reafianzar su aplicación y conceptualización, en aras de aprovechar los conocimientos adquiridos para obtener así un mejor aprendizaje.

#### **1. Sistema de amortización constante o abonos iguales al capital**

Supóngase que quiere conocer el valor de las cuotas que se deben pagar por un préstamo de \$P realizado hoy, y que se cancelará en  $n$  cuotas periódicas, donde cada cuota amortizará la misma cantidad a capital periodo tras periodo, con un interés  $i$  % por periodo vencido.

Como se explicó en la definición de Amortización constante, este es un sistema donde las cuotas no son uniformes, ya que los intereses generados están variando periodo tras periodo, por consiguiente no se puede tratar como una serie uniforme, lo que nos lleva a

generar otro tipo de estrategia para conocer el valor de la cuota en un periodo determinado t. Para obtener esta fórmula nos apoyaremos en la figura 10-1.

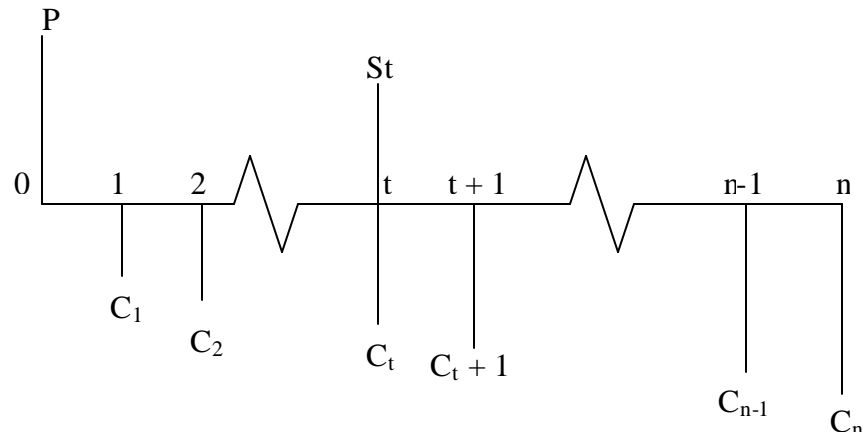


Figura 10-1. Amortización constante

Donde  $C_t$  y  $C_{t+1}$  representan las cuotas o abonos en los periodos  $t$  y  $t+1$  respectivamente, y  $S_t$  el saldo al final del periodo  $t$  una vez pagada la cuota respectiva.

Recuerde que las cuotas a pagar están conformados por la amortización a capital más los intereses, por consiguiente denotaremos el valor de la amortización como  $R$ , cuyo monto se calcula dividiendo el valor total del préstamo ( $P$ ) entre el número de periodos o cuotas ( $n$ ) a efectuar.

$$R = \frac{P}{n}$$

Los intereses del periodo  $t + 1$  serán:

$$i_{t+1} = i S_t$$

Luego la cuota o abono en el periodo  $t + 1$  será igual a:

$$C_{t+1} = \frac{P}{n} + i S_t$$



El saldo en el periodo t +1 será equivalente a:

$$S_{t+1} = S_t + i S_t - \left[ \frac{P}{n} + i S_t \right]; \quad \text{Con } S_0 = P$$

Que al simplificar el factor  $i S_t$ , en transforma en:

$$S_{t+1} = S_t - \frac{P}{n} \quad \text{Con } S_0 = P$$

Pero el saldo en el periodo t ( $S_t$ ) será igual al valor inicial del préstamo menos el valor constante de la amortización por el periodo t, siendo t el número de cuotas canceladas.

$$S_t = P - \frac{P}{n} t \quad \text{Ecuación 10-1}$$

Por tanto el valor de la Cuota en el periodo t, es igual a:

$$C_t = \frac{P}{n} + i S_{t-1} \quad \text{Ecuación 10-2}$$

y

$$S_{t-1} = P - \frac{P}{n} (t-1) \quad \text{Ecuación 10-3}$$

Si reemplazamos la ecuación 10.3. en la ecuación 10.2 obtendremos el valor de la cuota en el periodo t.

$$C_t = \frac{P}{n} + i \left[ P - \frac{P}{n} (t-1) \right]$$

Eliminando los corchetes de la ecuación obtendremos

$$C_t = \frac{P}{n} + iP - \frac{iPt}{n} + \frac{iP}{n}$$

Al tomar como factor común P, la expresión anterior quedará mejor agrupada, y se podrá tomar como ecuación base para el cálculo del valor de la cuota con amortización o abono a capital constante en un periodo determinado t.

$$C_t = P \left[ \frac{1}{n} + i + \frac{i}{n} \right] - \frac{iPt}{n} \quad \text{Ecuación 10-4}$$

Pero también ocurre el caso donde se quiere conocer el valor de las cuotas que se deben pagar por un préstamo de \$P realizado hoy, y que se cancelará en n cuotas periódicas, donde cada cuota amortizará la misma cantidad a capital periodo tras periodo, pero con un interés i % por periodo anticipado.

Ante esta situación el saldo en el periodo  $S_{t+1}$  sería:

$$S_{t+1} = S_t - \frac{P}{n} \quad \text{Con } S_0 = P$$

Y la cuota en el periodo t será equivalente a:

$$C_t = \frac{P}{n} + i_a S_t$$



$$C_t = P \left( \frac{1}{n} + i \right) - i_a \left( \frac{P}{n} \right) t \quad \text{Ecuación 10-5}$$

Donde  $t = 1, 2, \dots, n$ .

Sabiendo que la cuota para el punto 0 y el punto n, son:

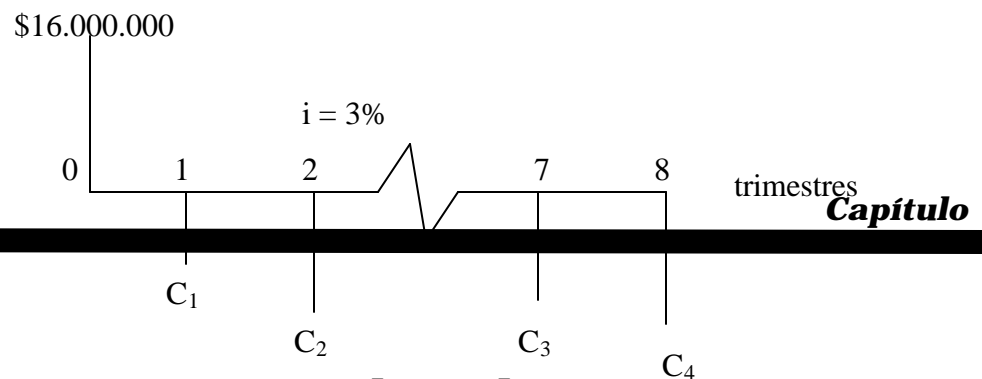
$$C_0 = i_a P \quad \text{y} \quad C_n = P/n$$

Ya que en el punto 0 sólo se cancelan los intereses del Préstamo y en el punto n, se cancela sólo la amortización o abono a capital sin los intereses.

### Ejercicio Práctico

1. La empresa "Nueva Era", compra una nueva maquinaria por valor de \$16'000.000, financiada a 2 años, con pagos trimestrales, tales que la amortización a capital sea la misma en todas las cuotas, si el interés cobrado es del 3% trimestral. Hallar el valor de las dos primeras cuotas y las dos últimas cuotas a cancelar.

$P = \$16.000.000$   
 $n = 2 \text{ años} = 8 \text{ trimestres}$   
 $i = 3\% \text{ trimestral}$



$$C_t = P \left[ \frac{1}{n} + i + \frac{i}{n} \right] - \frac{i P t}{n}$$

Para  $t = 1$

$$C_1 = 16.000.000 \left[ \frac{1}{8} + 0.03 + \frac{0.03}{8} \right] - \frac{0.030 * 16.000.000 * 1}{8}$$

$$C_1 = \$2.480.000$$

Comprobación

El valor constante correspondiente a la amortización trimestral es:

$$R = \frac{P}{n} = \frac{16.000.000}{8} = \$2.000.000$$

El interés de la primera cuota es =  $P * i = 16.000.000 * 0.03 = \$480.000$

El costo total de la cuota a pagar es

Cuota a pagar = Abono a capital o amortización + Intereses

$$\text{Cuota a pagar} = \$2.000.000 + \$480.000 = \$2.480.000$$

Para  $t = 2$

$$C_2 = 16.000.000 \left[ \frac{1}{8} + 0.03 + \frac{0.03}{8} \right] - \frac{0.030 * 16.000.000 * 2}{8}$$

$$C_2 = \$2.420.000$$

**Capítulo**

Para  $t = 7$

$$C_7 = 16.000.000 \left[ \frac{1}{8} + 0.03 + \frac{0.03}{8} \right] - \frac{0.030 * 16.000.000 * 7}{8}$$

$$C_7 = \$2'120.000$$

Para  $t = 8$

$$C_8 = 16.000.000 \left[ \frac{1}{8} + 0.03 + \frac{0.03}{8} \right] - \frac{0.030 * 16.000.000 * 8}{8}$$

$$C_8 = \$2.060.000$$

2. Resolver el ejercicio anterior, suponiendo que el interés es del 3% trimestral anticipado.

*El primer pago corresponde sólo a los intereses cobrados anticipadamente, por tanto la fórmula a utilizar es:*

$$C_0 = i_a P$$

$$C_0 = 0.03 * 16.000.000$$

$$C_0 = 480.000$$

Para la primera cuota incluyendo amortización utilizamos la ecuación 10-5, con  $t = 1$

$$C_t = P \left( \frac{1}{n} + i \right) - i_a \left( \frac{P}{n} \right) t$$

$$C_1 = 16.000.000 \left( \frac{1}{8} + 0.03 \right) - 0.03 \left( \frac{16.000.000}{8} \right) t$$

$$C_1 = \$2.420.000$$

Para  $t = 2$

$$C_2 = 16.000.000 \left( \frac{1}{8} + 0.03 \right) - 0.03 \left( \frac{16.000.000}{8} \right)^2$$

$$C_2 = \$2.360.000$$

Para  $t = 7$

$$C_7 = 16.000.000 \left( \frac{1}{8} + 0.03 \right) - 0.03 \left( \frac{16.000.000}{8} \right)^7$$

$$C_7 = \$2.060.000$$

Para  $t = 8$

Correspondiente a la última cuota; no se tienen en cuenta los intereses ya que estos han sido cancelados anticipadamente.

$$C_8 = \frac{P}{n} = \frac{16.000.000}{8}$$

$$C_8 = \$2.000.000$$

## B. Sistema de amortización gradual o amortización de cuota fija.

El cálculo de la cuota en el sistema de amortización gradual, es más simple dado que se maneja como una serie uniforme, ya que las cuotas a pagar son iguales, al igual que los intervalos de tiempo. La siguiente gráfica hace alusión a este tipo de amortización, donde  $P$  es igual al valor presente,  $i$  es el interés del periodo y  $A$  es la cuota a pagar.

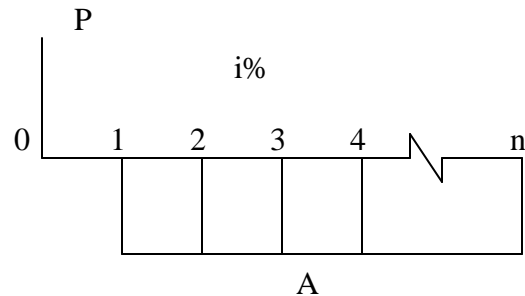


Figura 10-2. Amortización gradual

Por tanto la expresión matemática utilizada es:

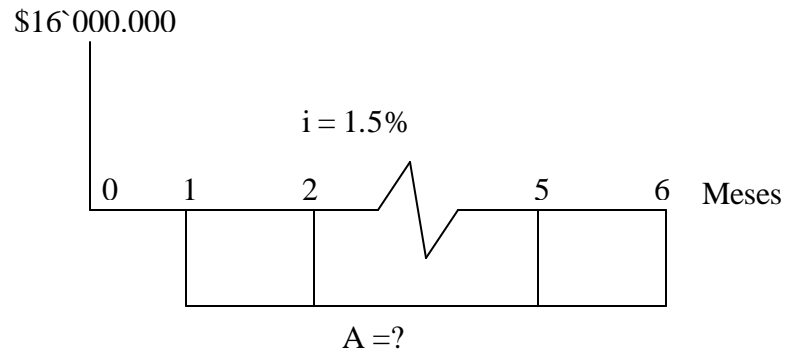
$$A = P \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

La deducción de esta fórmula la podrán encontrar en el numeral 5.3.3. del capítulo V Interés Compuesto.

### ***Ejercicio Práctico***

Un estudiante universitario solicitó un préstamo por valor de \$1'800.000 para cubrir el costo del semestre, los cuales se comprometió a cancelar con cuotas mensuales iguales durante 6 meses. Si la entidad le cobra un interés del 1.5% mensual, ¿De cuánto serán los pagos mensuales que debe realizar?.

- P = \$1'800.000
- n = 6 meses
- i = 1.5% mensual



$$A = P \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 1.800.000 \left[ \frac{0.015 (1+0.015)^6}{(1+0.015)^6 - 1} \right]$$

$$A = \$315.945,38$$

Este resultado se puede reforzar si se construye la tabla de amortización, como se muestra a continuación.

TABLA DE AMORTIZACIÓN				
Periodo	Cuotas	Intereses	Amortización	Saldo Insoluto
0				1.800.000
1	315.945	27.000	288.945	1.511.055
2	315.945	22.666	293.279	1.217.776
3	315.945	18.267	297.678	920.098
4	315.945	13.801	302.144	617.954
5	315.945	9.269	306.676	311.278
6	315.945	4.667	311.278	-



### C. Sistema de amortización con pagos crecientes

Es un sistema donde las cuotas a pagar crecen o se incrementan más rápidamente que en la amortización gradual, y tienen un comportamiento como los gradientes aritméticos o geométricos crecientes, estudiados anteriormente.

#### Gradiente Aritmético creciente

Supóngase que quiere conocer el valor de las cuotas que se deben pagar por un préstamo de \$P realizado hoy, y que se cancelará en n cuotas periódicas, donde cada cuota aumentará un valor constante \$G, periodo tras periodo, con un interés i % por periodo vencido.

Al observar nuevamente la figura 8-6, del gradiente aritmético creciente, se nota que cada cuota ( C ) está conformada por el valor constante (B) más el gradiente (G), por lo cual se obtiene el siguiente cuadro.

Cuadro 10-1. Cuotas a pagar del sistema con pagos crecientes.

$C_1$	=	B		
$C_2$	=	$B + G$	=	$C_1 + G$
$C_3$	=	$B + 2G$	=	$C_1 + 2G$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$C_t$	=	$B + (t - 1) G$	=	$C_1 + (t - 1) G$
$C_{t+1}$	=	$B + tG$	=	$C_1 + t G$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$C_n$	=	$B + (n - 1) G$	=	$C_1 + (n - 1) G$

Donde el Valor de la primera cuota ( $C_1$ ) se puede calcular despejando la variable B de la ecuación 8-7a, así:

$$B = \frac{P - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]}{\left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right]}$$

Por tanto el valor de la cuota  $t$  de un sistema de amortización Aritmético creciente está dado por:

$$C_t = \frac{P - \frac{G}{i} \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]}{\left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n i} \right]} + (t-1)G \quad \text{Ecuación 10-6a}$$

O cuando es conocido  $C_1$ , podemos determinar el valor de la cuota en cualquier posición de tiempo, por ejemplo en el tiempo  $t$ .

$$C_t = C_1 + (t-1)G \quad \text{Ecuación 10-6b}$$

Donde la cuota para el periodo 1 es:

$$C_1 = B = \text{Valor Constante}$$

**Ejercicio Práctico**

Un Ingeniero Industrial adquiere un Automóvil cuyo costo es de \$16'000.000 con una cuota inicial del 30% y el saldo a dos años de plazo con cuotas mensuales, crecientes en forma aritmética, y un interés del 3% mensual. Hallar las tres primeras y tres últimas cuotas, si:

- a) La primera cuota es de \$380.000
- b) La primera cuota cubre exactamente los intereses

$P = \$16.000.000$   
 $c.i. = \$4.800.000$   
 $n = 2 \text{ años} = 24 \text{ meses}$   
 $i = 3\% \text{ mensual}$

a) Donde  $C_1 = \$380.000$

Se aplica la ecuación de equivalencia para obtener el valor constante con el cual crece la cuota o gradiente.

$$\$16.000.000 - \$4.800.000 = \$380.000 (P/A, 3\%, 24) + G (P/G, 3\% ,24)$$

$$G = \$27.867,25$$

Conocido el Gradiente aplicamos la fórmula para obtener los valores de las cuotas, así:

$$C_t = C_1 + (t - 1) G$$

Para  $t = 2$

$$C_2 = \$380.000 + (1)27.867,25$$

$$C_2 = \$407.867,25$$

$$C_3 = \$380.000 + (2)27.867,25$$

$$C_3 = \$435.734,5$$

Para  $t = 23$

$$C_2 = \$380.000 + (22)27.867,25$$

$$C_2 = \$993.079,5$$

Para t = 24

$$C_2 = \$380.000 + (23)27.867,25$$

$$C_2 = \$1'020.946,75$$

b) Donde  $C_1 = i ( P \cdot 0.07 ) = \$336.000 =$

Como el valor constante se varió hay que calcular nuevamente el gradiente, utilizando la ecuación de equivalencia

$$\$11.200.000 = \$336.000 (P/A, 3\%, 24) + G (P/G, 3\%, 24)$$

$$G = \$51.878,11$$

Para t = 2

$$C_2 = \$336.000 + (1) 51.878,11$$

$$C_2 = \$387.878,11$$

Para t = 3

$$C_2 = \$336.000 + (2) 51.878,11$$

$$C_2 = \$439.756,22$$

Para t = 23

$$C_2 = \$336.000 + (22)51.878,11$$

$$C_2 = \$1'477.318,42$$

Para t = 24

$$C_2 = \$336.000 + (23)51.878,11$$

$$C_2 = \$1'529.196,53$$

### ***Gradiente Geométrico creciente***

Para conocer el valor de las cuotas que se deben pagar por un préstamo de \$P hoy, que se cancelará en n cuotas periódicas, donde cada cuota aumentará un porcentaje k %, periodo tras periodo, con un interés i % periodo vencido. Nuevamente apelamos a la figura 8-32 correspondiente a un gradiente geométrico creciente, donde las cuotas están formadas así:

Cuadro 10-2. Cuotas a pagar del sistema con pagos geométricos.

$C_1$	=	$T$		
$C_2$	=	$T * (1+k)$	=	$C_1 * (1+k)$
$C_3$	=	$T * (1+k)^2$	=	$C_1 * (1+k)^2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$C_t$	=	$T * (1+k)^{t-1}$	=	$C_1 * (1+k)^{t-1}$
$C_{t+1}$	=	$T * (1+k)^t$	=	$C_1 * (1+k)^t$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$C_n$	=	$T * (1+k)^{n-1}$	=	$C_1 * (1+k)^{n-1}$

Donde el Valor de la primera cuota ( $C_1 = T$ ) se puede calcular despejando la variable T (Factor constante) de la ecuación 8-30a, así:

$$T = \frac{P}{\left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{i - k} \right]}; \quad i \neq k$$

Luego el valor de la cuota  $t$  de un sistema de amortización geométrico creciente está dado por:

$$C_t = \left[ \frac{P*(i-k)}{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n} \right] * (1+k)^{t-1} \quad \text{Ecuación 10-7}$$

Donde la cuota para el periodo 1 es:

$$C_1 = \frac{P(i-k)}{\left[ 1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n \right]} \quad \text{Ecuación 10-8}$$

$i > k$

### *Ejercicio Práctico*

Un estudiante de Ingeniería compra una enciclopedia por un costo de \$1'500.000 financiada a 6 cuotas que crecen un 5% mensualmente, con un interés mensual del 2% por el crédito. ¿A cuánto asciende cada cuota?

- P = \$1'500.000
- n = 6 meses
- k = 5% mensual
- i = 2% mensual

Con la ecuación de equivalencia hallamos la primera cuota  $C_1$

$$C_1 = \frac{P(i-k)}{\left[1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n\right]}$$

$$C_1 = \frac{1.500.000 (0.02 - 0.05)}{\left[1 - \left(\frac{1+0.05}{1+0.02}\right)^6\right]}$$

$$C_1 = 236.883,77$$

Si sabemos que  $C_t = C_1 * (1+k)^{t-1}$ , entonces las cuotas quedarán de:

Para  $t = 2$

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 * (1 + 0.05)^1 \\ C_2 &= 236883,77 (1.05)^1 \\ C_2 &= 248.727,95 \end{aligned}$$

Para  $t = 3$

$$\begin{aligned} C_2 &= 236883,77 (1.05)^2 \\ C_2 &= 261.164,35 \end{aligned}$$

Para  $t = 4$

$$\begin{aligned} C_2 &= 236883,77 (1.05)^3 \\ C_2 &= 274.222,57 \end{aligned}$$

Para  $t = 5$

$$\begin{aligned} C_2 &= 236883,77 (1.05)^4 \\ C_2 &= 287.933,70 \end{aligned}$$

Para  $t = 6$

$$\begin{aligned} C_2 &= 236883,77 (1.05)^5 \\ C_2 &= 302.330,38 \end{aligned}$$

## **D. Otros sistemas de amortización**

Los sistemas de amortización decreciente, con cuotas extraordinarias y con cuotas interperiodicas constantes, no son más que una modificación de los anteriores sistemas de amortización, los cuales se han trabajado en capítulos anteriores, por tal motivo no se hará mayor alusión a las operaciones matemáticas, pero se recomienda estudiar nuevamente el capítulo VIII referente a Gradientes, ya que en este encontrarán toda la información necesaria para el desarrollo de estos tipos de amortización.

### **10.1.3. Saldos insolutos**

Generalmente las amortizaciones se crean de tal forma que la deuda disminuya con los pagos o abonos efectuados periódicamente, pero existen operaciones financieras, como los préstamos a través de las Corporaciones de Ahorro y Vivienda, donde los saldos van creciendo en la primera parte del tiempo pactado y luego se van amortizando hasta llegar a cero, por eso conocer o proyectar el saldo de la deuda es muy importante ya que esto puede en algún momento afectar económica, fiscal y patrimonialmente a una persona u organización.

A esa cantidad o suma que falta por amortizar luego de transcurrido un tiempo, o capital vivo de la deuda, en el que todavía hay un valor que se está debiendo, se le conoce como saldo insoluto.

Para obtener el valor del saldo insoluto se pueden utilizar diferentes métodos, tales como:

- Utilizando una tabla o cuadro de amortización de la deuda, que sería poco práctico si la deuda se proyecta a un número grande de periodos.
- Empleando herramientas tales como las calculadoras financieras, hojas de cálculo, entre otros, que por su rapidez y confiabilidad son muy efectivas en el momento de efectuar los cálculos.
- Aplicando los conocimientos adquiridos y utilizando las expresiones simbólicas, ya que el saldo en cualquier momento puede ser igual a:

**Capítulo**

- El valor futuro en ese momento de la deuda original menos el valor futuro de las cuotas canceladas hasta ese momento
- El valor presente en ese momento, de las cuotas que aún faltan por pagar
- Utilizando fórmulas matemáticas y expresiones simbólicas simultáneamente como la que se desarrollará a continuación.



## A. Con un sistema de amortización constante

Como se explicó anteriormente este es un sistema de amortización muy utilizado, donde la cantidad correspondiente a la amortización o abono del capital es constante, variando únicamente el monto de los intereses y por consiguiente el valor total del abono o cuota periódica. Pero para determinar el saldo insoluto en un sistema de Amortización Constante, se apelan a la ecuación 10-1.

### Ejercicio Práctico

El primer abono trimestral para amortizar de forma constante un préstamo es del \$425.000, los intereses del crédito son del 6% trimestral y el plazo 3 años.

- 1) ¿Cuál es el valor del préstamo?
- 2) ¿Cuál es el saldo insoluto luego de hacer el pago número 7?

1)

$$C_1 = \$425.000$$

$$i = 6\% \text{ trimestral}$$

$$n = 3 \text{ años} = 12 \text{ trimestres}$$

$$P = ?$$

De la ecuación 10-4 se despeja P para obtener el valor del préstamo.

$$P = \frac{C_t}{\left( \frac{1}{n} + i + \frac{i}{n} - \frac{i t}{n} \right)}$$

Sabiendo que se conoce el valor de la cuota uno, tenemos:

$$P = \frac{425.000}{\left(\frac{1}{12} + 0.06 + \frac{0.06}{12} - \frac{0.06 * 1}{12}\right)}$$

$$P = \$2'965.116,28$$

2)

$$S_t = P - \frac{P}{n} t$$

$$S_7 = 2.965.116,28 - \left(\frac{2.965.116,28}{12}\right) 7$$

$$S_7 = \$1.235.465,11$$

Compruebe la respuesta construyendo la tabla de amortización.

TABLA DE AMORTIZACIÓN				
Periodo	Cuota	Intereses	Amortización	Saldo Insoluto
0	-	-	-	2.965.116
1	425.000	177.907	247.093	2.718.023
2	410.174	163.081	247.093	2.470.930
3	395.349	148.256	247.093	2.223.837
4	380.443	133.430	247.093	1.976.744
5	365.698	118.605	247.093	1.729.651
6	350.872	103.779	247.093	1.482.558
7	336.047	88.954	247.093	1.235.465

**B. Con un sistema de amortización gradual.**

Supóngase que se quiere saber el saldo en el periodo  $t$  de una deuda original  $P_0$ , con un interés del  $i$  % por periodo y con un sistema de amortización con  $n$  pagos periódicos, donde  $C_t$  será el pago o abono en el periodo  $t$ .

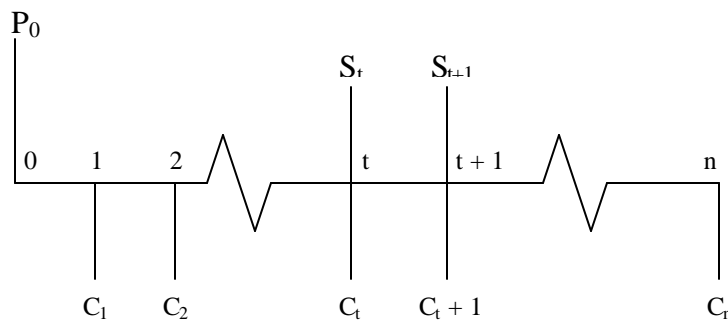


Figura 10-3. Cuotas del sistema de amortización gradual

Donde  $S_t$  y  $S_{t+1}$  representan los saldos en los periodos  $t$  y  $t + 1$  respectivamente, luego de realizado los pagos  $C_t$  y  $C_{t+1}$ , donde:  $C_1 = C_2 = C_t = C_{t+1}$ .

Por tanto el saldo  $S_{t+1}$  si  $S_0 = P_0$  será igual a:

$$S_{t+1} = S_t + iS_t - C_{t+1}$$

$$S_{t+1} = (1+i)S_t - C_{t+1}$$

Ecuación 10-9

Esta fórmula es la general para el cálculo de los saldos, en cualquier periodo  $t$ , la cual se particulariza dependiendo del sistema de amortización a utilizar.

Partiendo del concepto de sistema de amortización gradual se dice que todos los pagos son iguales, por tanto  $C_t = A$ , luego la Ecuación 10-9 quedará

$$S_{t+1} = (1+i)S_t - A$$

Si se quiere conocer el saldo de una deuda cancelada con pagos periódicos iguales pero aplicando la ecuación de equivalencia, tenemos:

$$S_t = P_0 (F/P, i \%, t) - A(F/A, i \%, t) \quad \text{Ecuación 10-10a}$$

Que representado mediante expresión matemática es:

$$S_t = P_0 (1+i)^t - A \left[ \frac{(1+i)^t - 1}{i} \right]$$

Pero si suponemos que  $t = 0$ , entonces  $S_0 = P_0$  y si  $t = n$ , entonces  $S_n = 0$ , lo cual genera una anualidad traída a presente donde  $P_0 = A (P/A, i \%, n)$ , expresión que se sustituye en la Ecuación 10-10a

$$S_t = A (P/A, i \%, n) (F/P, i \%, t) - A (F/A, i \%, t)$$

Lo cual nos genera una expresión más reducida equivalente igual a:

$$S_t = A (P/A, i \%, n - t) \quad \text{Ecuación 10-10b}$$

Demostración:

$$(P/A, i \%, n) (F/P, i \%, t) - (F/A, i \%, t) = (A/P, i \%, n - t)$$

Si

$$(P/A, i\%, n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$(F/P, i\%, t) = (1+i)^t$$

$$(F/A, i\%, t) = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$(A/P, i\%, n-t) = \frac{(1+i)^{n-t} - 1}{i(1+i)^{n-t}}$$

$$(P/A, i\%, n)(F/P, i\%, t) = \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] [1+i]^t = \frac{(1+i)^t (1+i)^n - (1+i)^t}{i(1+i)^n}$$

$$(P/A, i\%, n) (F/P, i\%, t) - (F/A, i\%, t) = \frac{(1+i)^t (1+i)^n - (1+i)^t}{i(1+i)^n} - \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$(P/A, i\%, n)(F/P, i\%, t) - (F/A, i\%, t) = \frac{(1+i)^t (1+i)^n - (1+i)^t - (1+i)^t (1+i)^n + (1+i)^n}{i(1+i)^n}$$

$$\frac{\cancel{(1+i)^t (1+i)^n} - (1+i)^t - \cancel{(1+i)^t (1+i)^n} + (1+i)^n}{i(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{i(1+i)^n}$$

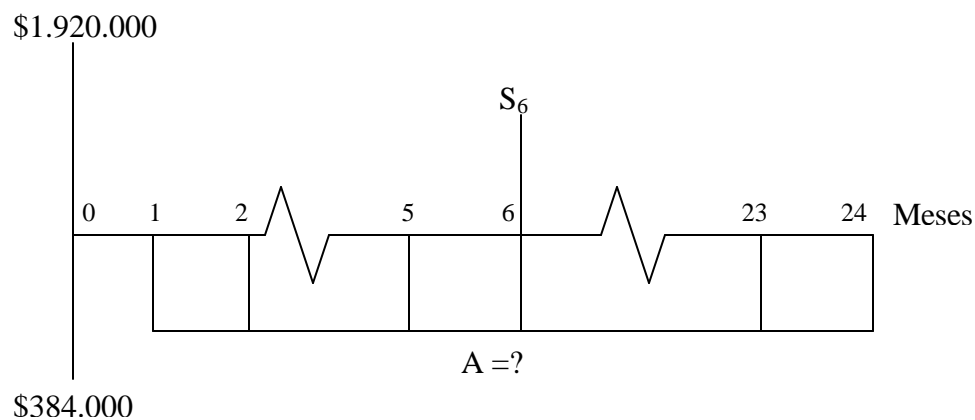
Si dividimos toda la expresión en  $(1+i)^t$  obtenemos:

$$\frac{\frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{i(1+i)^n}}{(1+i)^t} = \frac{\frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n} - \frac{(1+i)^t}{i(1+i)^n}}{(1+i)^t} = \frac{\frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^n}}{(1+i)^t} = (P/A, i\%, n-t)$$

Ejercicio Práctico

La Señora Plata, compró una nevera de \$1'920.000 por la cual canceló el 20% de cuota inicial y el saldo financiado a dos años con cuotas mensuales iguales y un interés del 2% mensual. Al cabo de 6 cuotas canceladas, ¿Cuánto debe pagar la Señora Plata para cancelar totalmente la deuda?

$P = \$1.920.000$   
 $C.I. = \$384.000$   
 $n = 2 \text{ años} = 24 \text{ meses}$   
 $i = 2\% \text{ mensual}$



$$A = (A/P, i \%, n)$$

$$A = (1'920.000 - 384.000) (A/P, 2\%, 24)$$

$$A = \$81.209,85$$

Luego el saldo luego de cancelada la cuota seis es:

$$S_t = A (P/A, i \%, n - t)$$

$$S_6 = 81.209,85 (P/A, 2 \%, 18)$$

$$S_6 = \$ 1'217.496,24$$

**Capítulo**

### C. Sistema de amortización con pagos crecientes

### Gradiente Aritmético

En este sistema de amortización las cuotas aumentarán una cantidad \$G constante cada periodo, lo cual nos lleva de decir que  $C_{t+1} = G \cdot t + A$ , siendo A, el valor de la primera cuota.

Al reemplazar ésta expresión en la fórmula general obtenida, Ecuación 10-9, tenemos:

$$S_{t+1} = (1+i)S_t - (G \cdot t + A)$$

Al igual que en el numeral anterior si se quiere conocer el saldo en el periodo t de una deuda original  $P_0$ , con un interés del i % por periodo y con un sistema de amortización con pagos periódicos que aumenta un valor constante \$G, durante n pagos periódicos, donde  $P_t$  será el pago o abono en el periodo t, se recurre a la ecuación de equivalencia.

$$S_t = P_0 (1+i)^t - [A (F/A, i\%, t) + G (F/G, i\%, t)] \quad \text{Ecuación 10-11a}$$

Pero si suponemos que  $t = 0$ , entonces  $S_0 = P_0$  y si  $t = n$ , entonces  $S_n = 0$ , lo que genera un gradiente traído a presente donde  $P_0 = A (P/A, i\%, n) + G (P/G, i\%, n)$ , expresión que se sustituye en la Ecuación anterior así:

$$S_t = [A (P/A, i\%, n) + G (P/G, i\%, n)](1+i)^t - [A (F/A, i\%, t) + G (F/G, i\%, t)]$$

Expresión que se reduce a:

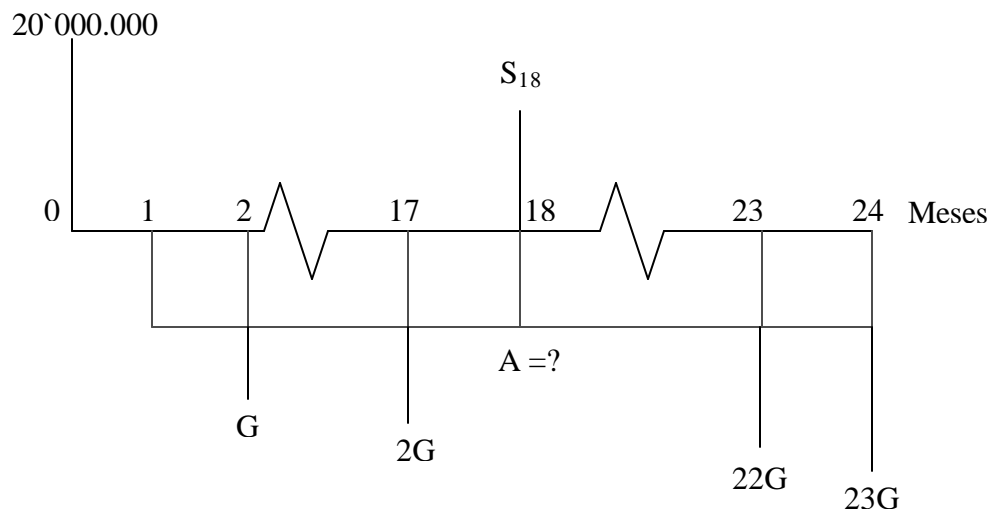
$$S_t = (A + tG) (P/A, i\%, n-t) + G(P/G, i\%, n-t) \quad \text{Ecuación 10-11b}$$

*Ejercicio Práctico*

**Capítulo**

El Señor Bueno ha recibido un préstamo de \$20'000.000 para cancelarlos en 2 años, con un interés del 2% mensual y con cuotas mensuales que aumenten \$50.000 cada mes. ¿Cuál es el saldo insoluto luego de 18 abonos a la deuda?.

$P = \$20'000.000$   
 $n = 2 \text{ años} = 24 \text{ meses}$   
 $i = 2\% \text{ mensual}$   
 $G = \$50.000 \text{ mensual}$   
 $t = 18 \text{ meses}$



Calculamos el valor de la anualidad haciendo uso de la ecuación de equivalencia

$$P = A (P/A, i \%, n) + G (P/G, i\%, n)$$

$$20'000.000 = A (P/A, 2\%, 24) + 50.000(P/G, 2\%, 24)$$

$$A = \$529.687,80$$



Ahora se aplica la ecuación 10-11b para calcular el saldo insoluto

$$S_t = (A + tG) (P/A, i \%, n-t) + G(P/G, i \%, n - t)$$

$$S_{18} = [529.687,80 + (18*50.000)] (P/A, 2\%, 6) + 50.000(P/G, 2\%, 6)$$

$$S_{18} = \$8\ 692.302,58$$

### Gradiente Geométrico

Este es un sistema en el cual la amortización se realiza a través de cuotas variables que aumentan cada mes en una tasa constante de k%.

Entonces

$$C_{t+1} = T (1+k)^t$$

Donde T es el factor constante y el valor de la primera cuota. Al reemplazar esta fórmula en la ecuación 10-9, tenemos:

$$S_{t+1} = (1+i)S_t - T (1+k)^t$$

Pero si se quiere conocer el saldo en el periodo t de una deuda original  $P_0$ , con un interés del i % por periodo y con un sistema de amortización con pagos periódicos que aumenta una tasa constante k, durante n pagos periódicos, donde  $C_t$  será el pago o abono en el periodo t, y recurriendo a la ecuación de equivalencia, tenemos:

$$S_t = P_0 (1+i)^t - \frac{T}{1-k} [(1+i)^t - (1+k)^t] \quad \text{Ecuación 10-12}$$

Si se supone que  $t = 0$ , entonces  $S_0 = P_0$  y si  $t = n$ , entonces  $S_n = 0$ , lo cual genera un gradiente geométrico traído a presente donde.

$$P_0 = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{1-k} \right]$$

Expresión obtenida en el capítulo de gradientes; la cual se sustituye en la ecuación 10-12, quedando de la siguiente forma

$$S_t = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{1-k} \right] (1+i)^t - \frac{T}{1-k} [(1+i)^t - (1+k)^t] \text{ Ecuación 10-13a}$$

Expresión que se puede resumir en la ecuación 10-13b.

$$S_t = \frac{T(1+k)^t}{i-k} \left[ 1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^{n-t} \right] \text{ Ecuación 10-13b}$$

Demostración:

$$S_t = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{1-k} \right] (1+i)^t - \frac{T}{1-k} [(1+i)^t - (1+k)^t]$$

$$S_t = T \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n}{1-k} \right] (1+i)^t - \frac{T(1+i)^t}{1-k} + \frac{T(1+k)^t}{i-k}$$

Simplificamos la expresión utilizando el factor común  $\frac{T(1+i)^t}{i-k}$ , obteniendo lo siguiente.

$$S_t = \frac{T(1+i)^t}{i-k} \left[ 1 - \frac{(1+k)^n}{(1+i)^n} - 1 + \frac{(1+k)^t}{(1+i)^t} \right]$$

$$S_t = \frac{T(1+i)^t}{i-k} \left[ \frac{(1+k)^t}{(1+i)^t} - \frac{(1+k)^n}{(1+i)^n} \right]$$

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los factores simplificados

$$S_t = \frac{T(1+i)^t}{i-k} \left[ \frac{(1+k)^t(1+i)^n - (1+k)^n(1+i)^t}{(1+i)^n(1+i)^t} \right]$$

Se cancela el factor  $(1+i)^t$  en la ecuación.

$$S_t = \frac{T}{i-k} \left[ \frac{(1+k)^t(1+i)^n - (1+k)^n(1+i)^t}{(1+i)^n} \right]$$

multiplicamos por  $\frac{(1+k)^t}{(1+k)^t}$

$$S_t = \frac{T(1+k)^t}{(i-k)} \left[ \frac{(1+k)^t (1+i)^n - (1+k)^n (1+i)^t}{(1+i)^n (1+k)^t} \right]$$

Simplificamos la ecuación

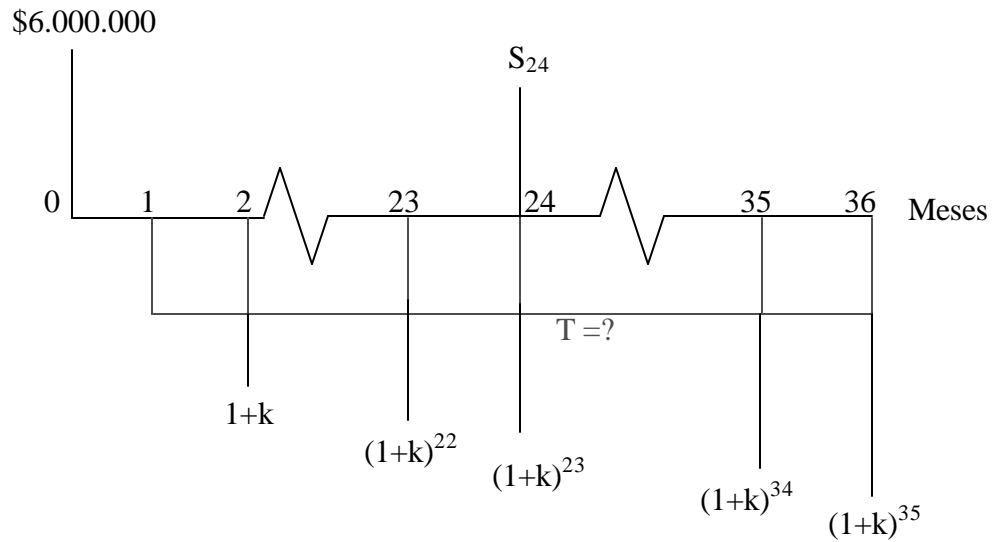
$$S_t = \frac{T(1+k)^t}{(i-k)} \left[ 1 - \frac{(1+k)^n (1+i)^t}{(1+i)^n (1+k)^t} \right]$$

$$S_t = \frac{T(1+k)^t}{(i-k)} \left[ 1 - \frac{(1+k)^{n-t}}{(1+i)^{n-t}} \right]$$

### *Ejercicio Práctico*

Se debe cancelar un préstamo de \$6'000.000 en 3 años con pagos mensuales que aumentan cada mes el 3 %. La tasa de interés cobrada es del 2,5% mensual. Hallar el saldo insoluto luego de cancelar la cuota 24.

- P = \$6'000.000
- n = 3 años = 36 meses
- k = 3% mensual
- i = 2.5% mensual
- t = 24 meses



Primero se halla el valor del factor constante

$$P = \frac{T}{i-k} \left[ 1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^n \right]$$

$$6.000.000 = \frac{T}{0.025 - 0.03} \left[ 1 - \left( \frac{1+0.03}{1+0.025} \right)^{36} \right]$$

$$T = \$156.687,39$$

Ya conocido el factor constante se calcula el saldo insoluto

$$S_t = \frac{T(1+k)^t}{i-k} \left[ 1 - \left( \frac{1+k}{1+i} \right)^{n-t} \right]$$

$$S_{24} = \$3.830.624-52$$

#### D. Otros sistemas de amortización

Los saldos insolutos de los sistemas de amortización constante, decreciente, con cuotas extraordinarias y con pagos Interperíodos, se pueden calcular modificando de acuerdo a la necesidad los sistemas anteriores, por ejemplo el saldo insoluto del sistema de amortización decreciente se puede calcular empleando la Ecuación 10-11a para el sistema de amortización creciente aritmético, pero cambiando el signo positivo (+) del crecimiento del gradiente por un signo negativo (-) que representa la disminución del mismo, así:

Saldo insoluto del sistema de amortización creciente (Aritmético)

$$S_t = P_0 (1+i)^t - [A (F/A,i\%,t) + G (F/G,i\%,t)]$$

Saldo insoluto del sistema de amortización decreciente (Aritmético)

$$S_t = P_0 (1+i)^t - [A (F/A,i\%,t) - G (F/G,i\%,t)]$$

#### 10.1.4. Derechos adquiridos

Todo derecho de propiedad sobre un bien comprado a crédito se adquiere cuando se ha cancelado la última cuota, pero esto no quiere decir que el comprador no tenga derecho sobre este bien, más aun cuando ha realizado cierto número de pagos o abonos; para evitar estos inconvenientes de los derechos sobre el bien, se ha planteado la necesidad de determinar que parte le corresponden al comprador y cual al vendedor, sabiendo que este último transfiere los derechos sobre el bien desde el momento mismo de recibir el primer abono, esta cesión de derechos depende del sistema de amortización utilizado en el pago de bien o deuda, teniendo en cuenta que:

$$\text{El precio de Venta} = \text{Parte Amortizada} + \text{Saldo Insoluto}$$

Por tanto la parte amortizada es equivalente al derecho que posee el comprador sobre el bien, y el saldo insoluto al derecho del vendedor sobre este mismo bien.

$$\text{Precio de Venta} = \text{Derechos del comprador} + \text{Derechos del vendedor}$$

Ecuación 10-14

#### 10.1.5. Tablas de amortización

Con el objetivo de saber cómo varia cada abono o pago, cuánto de esa cuota o pago corresponde a intereses y cuánto a amortización, para conocer el saldo insoluto de la deuda en determinado periodo, y para saber cuánto en total se paga por intereses, se hace necesario recurrir a una tabla de amortización o cuadro de amortización, ya que en este se puede observar en un momento dado y con exactitud cada uno de los montos que intervienen (periodo, abono, intereses, amortización, y saldo insoluto), datos que son necesarios conocer en cualquier periodo, ya que ello puede dar una visión más clara del desarrollo y comportamiento de la deuda hasta su extinción.

Como mínimo una tabla de amortización debe estar conformada por los siguientes datos:

Cuadro 10-3. Elementos de una tabla de amortización.

PERIODO	CUOTA A PAGAR	INTERESES	AMORTIZACIÓN O ABONO A LA DEUDA	SALDO INSOLUTO
0				P
1	$Pi + \frac{P}{n}$	Pi	$\frac{P}{n}$	$P - \frac{P}{n}$
2	$\frac{P(i n - i + 1)}{n}$	$\frac{P i (n - 1)}{n}$	$\frac{P}{n}$	$\frac{P (n - 2)}{n}$
3	$\frac{P(i n - 2 i + 1)}{n}$	$\frac{P i (n - 2)}{n}$	$\frac{P}{n}$	$\frac{P (n - 3)}{n}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n-1	$\frac{P(2i+1)}{n}$	$\frac{2 P i}{n}$	$\frac{P}{n}$	$\frac{P}{n}$
n	$\frac{P(i+1)}{n}$	$\frac{P i}{n}$	$\frac{P}{n}$	0

Cuando el número de cuotas o abonos es muy grande, es aconsejable recurrir a las hojas de cálculo, ya que en ellas se puede obtener estos datos con mayor rapidez, pero si lo que necesita saber es el saldo insoluto puede apoyarse en las fórmulas obtenidas para tal fin en el numeral 10.1.3.



**Ejercicio práctico**

Se amortiza una hipoteca de \$12`000.000 con abonos mensuales iguales durante 10 años, con un interés del 1.5% mensual. Elaborar la tabla de amortización de las seis primeras cuotas

$P = \$12`000.000$   
 $n = 10 \text{ años} = 120 \text{ meses}$   
 $i = 1.5\% \text{ mensual}$

Para saber el valor de la cuota se utiliza la ecuación de equivalencia.

$$\$12`000.000 = A (P/A, 1.5\%, 120)$$

$$A = 216.222,23$$

El interés de la primera cuota es =  $\$12.000.000 * 0.015 = \$180.000$

El valor Amortizado o Abono a capital = Cuota – Intereses

Abono a capital =  $\$216.222,23 - \$180.000 = \$36.222,23$

De igual forma se calcula cada uno de los otros valores, para obtener la siguiente tabla de amortización

PERIODO	CUOTA	INTERÉS	AMORTIZACIÓN	SALDO INSOLUTO
0				\$12`000.000,00
1	\$ 216.222,23	\$ 180.000,00	\$ 36.222,23	\$11`963.777,77
2	\$ 216.222,23	\$ 179.456,66	\$ 36.765,57	\$11`927.012,20
3	\$ 216.222,23	\$ 178.905,18	\$ 37.317,05	\$11`889.695,15
4	\$ 216.222,23	\$ 178.345,42	\$ 37.876,81	\$11`851.818,34
5	\$ 216.222,23	\$ 177.777,27	\$ 38.444,96	\$11`813.373,38
6	\$ 216.222,23	\$ 177.200,60	\$ 39.021,63	\$11`774.356,24
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

## 10.2. CAPITALIZACIÓN O FONDO DE AMORTIZACIÓN

La capitalización es una actividad financiera utilizada para acumular una cantidad de dinero mediante pagos periódicos o no, que devengan intereses, de tal forma que en determinado número de periodos o plazo, se logre obtener una cantidad previamente fijada.

Se cree que la capitalización es contraria a la amortización, ya que en esta última los pagos realizados no ganan intereses, por el contrario son utilizados simplemente para cancelar un préstamo y los intereses causados, mientras que la capitalización hace depósitos que ganan intereses, los cuales se reinvierten y vuelven a ganar intereses y así sucesivamente, hasta crecer el total ahorrado o acumulado en el futuro.

En la actualidad los inversionistas tienen muchas formas de capitalizar, actividad que puede realizar a través de:

- Depósitos iguales o no, periódicos o no, en entidades que ofrezcan una determinada tasa de interés.
- Invirtiendo en finca raíz.
- Adquiriendo Papeles financieros.
- Comprando dólares, eurodólares, yen, o en cualquier otra moneda fuerte
- Comprando otros activos cuyo valor se aumente con el tiempo, entre otros.

Además la Capitalización no tiene una finalidad única ya que esta puede ser utilizada para:

- Acumular una determinada cantidad de dinero para cubrir un gasto futuro
- Disponer de cierto capital para reposición de maquinaria y equipo
- Compra de activos como edificios, vehículos, etc.
- Garantizar el mantenimiento y adecuación futura de un activo
- Poder disfrutar de una pensión en el futuro
- O simplemente para poder cancelar una deuda que se ha contraído.

Entre las ventajas de la capitalización podemos mencionar:

- El poder pagar de contado, lo cual puede generar un descuento del bien o servicio comprado.
- Evadir los intereses por compras a crédito.
- Y sobre todo crear el hábito del ahorro.

Para crear un fondo de amortización o capitalizar no sobresa una fórmula básica o general, pues existen muchas formas de hacerlo, ya que sólo depende de la creatividad del inversionista. Pero aun así estamos en capacidad de resolver cualquier problema de capitalización, los cuales consisten en hallar el valor futuro de cualquier clase de flujo de caja.

Es aconsejable en los posible realizar tablas de capitalización, las cuales son similares a las empleadas en la Amortización, con la única diferencia que en lugar de obtenerse los saldos insolutos se obtienen Valores Acumulados.

Cuadro 10-4. Tabla de capitalización

PERIODO	APORTE	INTERESES	CAPITALIZACIÓN	VALOR ACUMULADO
1				0
2	P	0	P	P
3	P	P i	P + P i	P (2 + i)
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n-1	P	P i (n - 3 + i)	P + P i (n - 3 + i)	P (n - 2 + i)
n	P	P i (n - 2 + i)	P + P i (n - 3 + i)	P (n - 1 + i)

**Ejercicio Práctico**

Una empresa contrae una deuda de \$50`000.000 para cancelar dentro de 4 años. El Gerente Financiero de la empresa decide hacer reservas anuales iguales, con el objetivo de cancelar la deuda en la fecha de su vencimiento. si el dinero puede invertirse ganando **Capítulo**

F = \$50`000.000  
n = 4 años

$i = 8\%$  anual.

Para conocer el valor de las cuotas a capitalizar utilizamos la ecuación de equivalencia

$$A = F (A/F, i\%, n)$$

$$A = \$50'000.000 (A/F, 12\%, 4)$$

$$A = \$11096.000$$

PERIODO	APORTES	INTERÉS	CAPITALIZACIÓN	VALOR ACUMULADO
0				0
1	11.096.000	0	11.096.000	11.096.000
2	11.096.000	887.680	11.983.680	23.079.680
3	11.096.000	1.846.374	12.942.374	36.022.054
4	11.096.000	2.881.764	13.977.764	49.999.819

### 10.3. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Elabore una tabla de Amortización donde se especifique los datos de las seis primeras cuotas y la última, de un préstamo de \$20'000.000 que se cancelará en 6 años, con cuotas mensuales donde las dos primeras cuotas cubran solamente los intereses. El interés cobrado por la financiación es del 3% mensual. Además determinar el monto total que se paga por concepto de intereses.

$P = \$20'000.000$

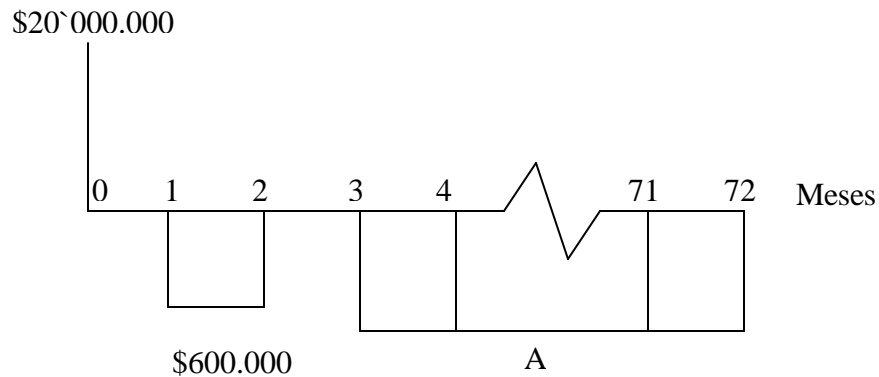
**Capítulo**

6 años = 72 meses

$i = 3\%$  mensual

Como las dos primeras cuotas cubren sólo los intereses tenemos que:

$$C_1 = C_2 = P * i = \$20'000.000 * 0.03 = \$600.000$$



Con la ecuación de equivalencia se calcula el valor de la anualidad

$$20\,000.000 = \$600.000 (P/F, 3\%, 2) + A (P/A, 3\%, 70) (P/F, 3\%, 2)$$

$$A = 666.730.44$$

La columna de intereses en la tabla de Amortización se obtiene multiplicando el saldo insoluto del periodo inmediatamente anterior por la tasa de interés así:

$$\text{Periodo 3} = 20\,000.000 * 0.03 = \$600.000$$

$$\text{Periodo 5} = 19.864.538 * 0.03 = \$ 595.936$$

Por lo tanto, la amortización se calcula teniendo en cuenta que

**Capítulo**

$$\text{Amortización} = \text{Abono} - \text{Intereses}$$

Por tanto

$$\text{Periodo 3} = \$666.730 - \$600.000 = \$ 66.730$$

$$\text{Periodo 5} = \$666.730 - \$595.936 = \$70.794$$

PERIODO	CUOTA	INTERÉS	AMORTIZACIÓN	SALDO INSOLUTO
0				\$20`000.000
1	\$ 600.000	\$ 600.000	-	\$20`000.000
2	\$ 600.000	\$ 600.000	-	\$20`000.000
3	\$ 666.730	\$ 600.000	\$ 66.730	\$19.933.270
4	\$ 666.730	\$ 597.998	\$ 68.732	\$19.864.538
5	\$ 666.730	\$ 595.936	\$ 70.794	\$19.793.744
6	\$ 666.730	\$ 593.812	\$ 72.918	\$19.720.826
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
71	\$ 666.730			*\$ 647.310
72	\$ 666.730	*\$ 19.420	*\$ 647.310	0

- \* Para conocer los valores correspondientes a los intereses y Amortización de la última cuota, se hace necesario conocer el saldo insoluto de la cuota inmediatamente anterior

$$S_t = A ( P/A, i\%, n-t)$$

$$S_{71} = 666.730 ( P/A, 3\%, 1)$$

$$S_{71} = 647.310$$

Para conocer el total de los intereses pagados, se calcula la diferencia entre el total que se paga y lo que se prestó, así:

### Capítulo

$$I = \$29.204.560$$

2. El primer pago mensual en la amortización de una deuda de \$8`000.000 es de \$400.000. Obténgase el plazo y los primeros 6 renglones de la tabla de amortización, suponiendo que se paga un interés del 36% anual capitalizable mensualmente y que la amortización es constante.

$$\begin{aligned}
 P &= \$8'000.000 \\
 C_1 &= \$400.000 \\
 r &= 25\% \text{ anual capitalizable mensualmente}
 \end{aligned}$$

$$i_p = \frac{r}{t} = \frac{0.25}{12} = 3\% \text{ Mensual}$$

Si  $C_1 = \frac{P}{n} + Pi$ , se puede despejar n para obtener el plazo

$$n = \frac{P}{C_1 - Pi}$$

$$n = \frac{\$8'000.000}{\$400.000 - \$240.000}$$

$$n = 50 \text{ Meses}$$

La amortización es igual a:

$$R = \frac{P}{n} = \$160.000$$

Luego la tabla de amortización queda conformada de la siguiente manera

PERIODO	CUOTA	INTERÉS	AMORTIZACIÓN	SALDO INSOLUTO
0				\$8`000.000
1	\$ 400.000,00	\$ 240.000,00	\$ 160.000,00	\$7`840.000
2	\$ 395.200,00	\$ 235.200,00	\$ 160.000,00	\$7`680.000
3	\$ 390.400,00	\$ 230.400,00	\$ 160.000,00	\$7`520.000
4	\$ 385.600,00	\$ 225.600,00	\$ 160.000,00	\$7`360.000
5	\$ 380.800,00	\$ 220.800,00	\$ 160.000,00	\$7`200.000
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

3. Con el objetivo de desarrollar la Pequeña y mediana industria se conceden préstamos de fomento con el siguiente plan de amortización a 5 años:

- Cuotas semestrales iguales y con una tasa del 4% semestral.
- En los dos primeros años se amortiza el 20% de la deuda
- En los últimos tres años el 80% restante.

Elabore la Tabla de amortización, si el préstamo es de \$5`000.000

$$P = \$5`000.000$$

$$i = 4\% \text{ semestral}$$

$$n = 5 \text{ años} = 10 \text{ semestres}$$

Capital a amortizar en los dos primeros años =  $\$5`000.000 * 20\% = \$1`000.000$

El valor de las cuotas del \$1`000.000 que se va a amortizar con pagos iguales, es de:

$$A = P (A/P, i \%, n)$$

$$A = \$1`000.000 ( A/P, 4\%, 4)$$

$$A = \$275.490$$



A este valor hay que adicionarle los intereses correspondientes del saldo no amortizado (\$4'000.000) el cual es igual a  $\$4'000.000 * 0.04 = \$160.000$ , lo cual genera que las cuotas durante los dos primeros años sean de:  $\$275.490 + \$160.000 = \$435.490$

Capital a amortizar en los tres últimos años =  $\$5'000.000 * 80\% = \$4'000.000$

Las cuotas iguales serán de:

$$A = P (A/P, i\%, n)$$

$$A = \$4'000.000 (A/P, 4\%, 6)$$

$$A = \$763.044$$

La Tabla de amortización quedará:

PERIODO	CUOTA	INTERÉS	AMORTIZACIÓN	SALDO INSOLUTO
0				\$ 5.000.000
1	\$ 435.490	\$ 200.000	\$ 235.490	\$ 4.764.510
2	\$ 435.490	\$ 190.580	\$ 244.910	\$ 4.519.600
3	\$ 435.490	\$ 180.784	\$ 254.706	\$ 4.264.894
4	\$ 435.490	\$ 170.596	\$ 264.894	\$ 4.000.000
5	\$ 763.044	\$ 160.000	\$ 603.044	\$ 3.396.956
6	\$ 763.044	\$ 135.878	\$ 627.166	\$ 2.769.790
7	\$ 763.044	\$ 110.792	\$ 652.252	\$ 2.117.538
8	\$ 763.044	\$ 84.702	\$ 678.342	\$ 1.439.196
9	\$ 763.044	\$ 57.568	\$ 705.476	\$ 733.719
10	\$ 763.044	\$ 29.349	\$ 733.719	0

- Un préstamo de \$2'000.000 con una tasa del 12% semestral, se debe amortizar en tres años mediante pagos semestrales iguales. Hallar el valor de las cuotas. Al efectuar el segundo pago el deudor hace un abono extraordinario de \$600.000. Hallar el nuevo valor de las cuotas para cancelar en el plazo previsto el saldo insoluto y elaborar la Tabla de amortización de la deuda.

$$P = \$2'000.000$$

$$i = 12\%$$

$$n = 3 \text{ años} = 6 \text{ semestres}$$

$$A = P (A/P, i\%, n)$$

$$A = \$ 2'000.000 (A/P, 12\%, 6)$$

$$A = \$ 486.450$$

Al realizar el segundo pago el saldo insoluto es de:

$$S_t = A (A/P, i \%, n-t)$$

$$S_t = 2'000.000 (A/P, 12 \%, 6)$$

$$S_t = \$1'477.519$$

Al realizar el abono extra de \$600.000 el nuevo saldo será de \$877.519, que se amortizara con cuotas periódicas iguales

$$A = P (A/P, i\%, n)$$

$$A = \$877.519 (A/P, 12\%, 4)$$

$$A = \$288.909$$

PERIODO	CUOTA	INTERÉS	AMORTIZACIÓN	SALDO INSOLUTO
0				\$ 2.000.000
1	\$ 486.450	\$ 240.000	\$ 246.450	\$ 1.753.550
2	\$ 1.086.450	\$ 210.426	\$ 876.024	\$ 877.526
3	\$ 288.909	\$ 105.303	\$ 183.606	\$ 693.920
4	\$ 288.909	\$ 83.270	\$ 205.639	\$ 488.282
5	\$ 288.909	\$ 58.594	\$ 230.315	\$ 257.966
6	\$ 288.909	\$ 30.956	\$ 257.953	\$ 0

## 10.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Este problema debe desarrollarse utilizando una hoja de cálculo y consiste en elaborar las tablas de amortización de un crédito de \$30'000.000 y un plazo de 5 años con cuotas trimestrales y planes diferentes así:
  - a) Cuotas uniformes proyectadas para los 5 años. Pero en el año dos hace un pago adicional equivalente al 30% del saldo en esa fecha. El nuevo saldo se refinancia en cuotas uniformes por el resto del tiempo. La tasa de interés es del 32,5% anual capitalizable trimestralmente.
  - b) Cuotas iguales durante los dos primeros años y de allí en adelante aumentarán el 8% cada trimestre. La tasa de interés será del 42% anual.
  - c) Cuotas iguales durante el primer año y allí en adelante con cuotas que disminuirán un 10% cada trimestre. La tasa de interés es del 36% anual.
  - d) Con cuotas que aumenten el 9,5 % cada trimestre durante los dos primeros años, de allí en adelante permanecerán constantes. La tasa de interés es del 38,5% anual.
  - e) Cuotas iguales durante 3 años y luego aumentarán en \$60.000 cada trimestre. La tasa de interés será del 39% anual capitalizable mensualmente.
  - f) Cuotas que disminuyan en \$100.000 cada trimestre durante 6 cuotas y luego permanezcan constantes. La tasa de interés es del 39% anual capitalizable trimestralmente.
  
2. Gracias al Tratado de Libre Comercio, un empresario puede comprar una maquinaria para su fábrica, teniendo tres alternativas que le ofrecen la misma factibilidad y calidad. Decidir cuál de las tres es más conveniente.
  - a) En Canadá la consigue sin cuota inicial, con 15 pagos mensuales vencidos de \$14.500 dólares canadienses e intereses del 13,2% anual capitalizable mensualmente.
  - b) En Estados Unidos se la dan con una cuota inicial de US\$18.000 y 10 cuotas bimestrales vencidas del mismo valor y un interés del 15% anual capitalizable bimensualmente.
  - c) En Colombia se la venden de contado por \$520'000.000.

Desarrolle teniendo en cuenta que:

- i. Hoy un dólar estadounidense tiene un costo de \$2.754 y \$2.162 el dólar Canadiense.

ii. El dólar Canadiense aumenta su valor en un 0.4% c/mes, mientras que el dólar Estadounidense lo hace 0.1 peso por día. En Colombia el costo se incrementa un 0.7% en total.

*Supóngase que la compra se hará dentro de 5 meses partir de hoy.*

3. Un estudiante universitario recibe un préstamo de una entidad oficial, que consta de 10 pagos iguales cada año, durante los meses de febrero a noviembre y durante los 5 años de estudio de la carrera. El primer año recibe \$180.000 mensuales; después de cada año se incrementa el 15%. Durante este tiempo, la institución cobre el 1.5% mensual. Una vez terminada la carrera, el nuevo profesional debe empezar a amortizar la deuda con pagos mensuales iguales y durante 5 años. Si para el tiempo de amortización la tasa de interés es del 2,5% mensual. Hallar el saldo existente al cabo de 3 años de estar amortizando la deuda.
  
4. El Señor Campos, recibe un préstamo del Banco Campesino, con el fin de aumentar su producción de leche. El crédito es por \$15`000.000 y las condiciones estipuladas en el documento firmado por las partes son:
  - a) Plazo total de 5 años, de los cuales los dos primeros son de gracia.
  - b) Intereses del 28,5% anual capitalizable mensualmente por anticipado.
  - c) Durante los dos años de gracia solamente se pagan intereses.
  - d) Las cuotas de amortización a capital son trimestrales vencidas e iguales.
  - e) En caso de mora en una cuota se cobra un interés de mora sobre el saldo de capital del 3% trimestre vencido. Si el Señor Campos, en la sexta cuota de los cuatro últimos años, sólo pago intereses, ¿Cuál debe ser el desembolso total que debe hacer en el séptimo de estos trimestres, para volver a quedar dentro del plan original de financiación?
  
5. Usted como inversionista decide capitalizar comprando un CDT, con las siguientes condiciones:

Tiempo de inversión	= 180 días
Cantidad depositada	= \$5`000.000
Tasa de Interés	= 26 % efectivo anual
Forma de liquidación	= mes vencido
Retención sobre intereses	= 6,5%

Si los intereses se liquidan cada mes, se les debe hacer la retención correspondiente y este valor neto resultante se deposita cada mes en una corporación de ahorro que paga el 27% efectivo anual. ¿Cuánto tendrá usted acumulado dentro de seis meses?

2. La familia Bueno, compra un apartamento de \$50'000.000 con una cuota inicial del 30% y 120 mensualidades que se incrementan un 12% cada trimestre. Calcular el valor de los 10 primeros pagos y el total pagado por el apartamento si le cargan intereses del 27% anual capitalizable mensualmente.
3. Diga que plan es más conveniente para el comprador de una camioneta, cuyo precio de lista es de \$35'000.000. Supóngase que por financiación cobran el 46% anual.
  - b. De contado con un descuento del 8%
  - c. Con 24 cuotas mensuales iguales de \$1'900.000
  - d. Mediante 18 pagos mensuales que crecen en \$100.000, el primero de los cuales es por \$2'300.000
  - e. Con una cuota inicial del 30% y 36 mensualidades que crecen \$50.000 en cada pago y la primera por \$950.000
  - f. Con una cuota inicial del 50% y 20 pagos mensuales que se incrementen en un 5% mensual, siendo el primer pago por \$650.000.
4. Obtenga los datos necesarios para completar la siguiente tabla.

	CAPITAL	CUOTA	INTERÉS (ANUAL)	PERIODO DE CAPITALIZACIÓN	PLAZO
1	\$2'700.000,00	\$ 125.000,00	24%	mensual	?
2	?	\$ 50.000,00	26%	semanal	1,5 años
3	\$ 750.000,00	?	18%	mensual	2 años
4	\$ 5.750.000,00	\$ 275.000,00	?	mensual	1,5 años
5	\$ 9.875.000,00	?	54%	trimestral	2 años
6	\$ 7.500.000,00	?	21%	trimestral	3 años
7	?	\$ 980.000,00	19,50%	trimestral	2,5 años
8	?	\$ 175.000,00	27%	semanal	0.75 años
9	\$ 6.350.000,00	\$ 450.000,00	?	mensual	1,25 años

9. ¿En cuanto tiempo se acumulan \$5'000.000 en un fondo con depósitos mensuales, que crecen en un 10% cada trimestre, el primer depósito es de \$125.000 y se ganan intereses del 25% anual capitalizado mensualmente?. Elaborar la tabla de capitalización.
10. ¿Con qué cantidad de dinero debe iniciar el Ingeniero Zapata, sus depósitos mensuales crecientes anticipados en un fondo que le genera un 18% de interés efectivo anual, si pretende acumular \$8'000.000 en dos años y los incrementa en \$50.000 cada tres meses?

11. Una persona que puede obtener préstamos bancarios especula de la siguiente forma: obtiene un préstamo bancario de \$1'000.000 a un año de plazo con pago de intereses por semestre anticipado a una tasa del 7% semestral. Presta el dinero al 6% trimestral, amortizable con cuotas trimestrales iguales, con pagos de interés anticipado; deposita las sumas recibidas trimestralmente en un fondo de capitalización que abona el 10%. Hallar la ganancia obtenida.

## 10.5. RESUMEN

**E**n este nuevo siglo donde prima la globalización, las personas o las empresas, buscan nuevas formas de integración que le permitan mantenerse en este mundo competitivo. Por ello en algunas oportunidades se ven en la necesidad de recurrir a préstamos que irán amortizando de acuerdo a sus capacidades, facultades de pago que van variando de persona a persona o de empresa en empresa, generando una amplia gama de sistemas para extinguir una deuda, entre los que podemos destacar la amortización constante, la amortización gradual, la amortización creciente o decreciente, la amortización con cuotas extras, amortización incrementada, entre otras.

Pero la aplicación sólo de formulas dependiendo del sistema de amortización no dará una visión más general de la situación por eso es importante recurrir a las Tablas de Amortización, ya que en ellas se muestra el comportamiento de cada uno de estos abonos y como estos influyen en la extinción de la deuda con el fin tomar medidas que nos permitan reducir los impactos negativos que puedan tener en nuestra economía.

Aunque los préstamos es una buena forma de conseguir capital, no son siempre la mejor opción, ya que con ellos generamos gastos adicionales como son bs intereses, por esto algunas personas o entidades recurren a los fondos de capitalización, con los cuales se programan ciertos depósitos que les generará intereses, los cuales se reinvierten y vuelven a ganar intereses y así sucesivamente, hasta formar un capital a través del ahorro en el futuro.

## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por sí mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a sí mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo.

*AUTOEVALUACIÓN X*

2. Defina el concepto de saldo insoluto
3. Explique brevemente la diferencia entre saldo insoluto y derechos adquiridos por el deudor.
4. ¿Qué utilidades presta una Tabla de Amortización?
5. Enumere la característica principal de los sistemas de amortización gradual, constante y de pagos crecientes.
6. Enumere algunas ventajas de la capitalización
7. Responda Falso o Verdadero según corresponda.
  - d. En general las cuotas a pagar y la amortización o abonos a capital son iguales. ( )
  - e. En la amortización gradual, las cuotas a pagar son constantes. ( )
  - f. En la amortización constante, los abonos a capital son crecientes. ( )
  - g. Cuando la amortización es constante los abonos a capital son constantes. ( )
  - h. Si las cuotas a pagar son iguales, entonces las amortizaciones son crecientes. ( )
  - i. El saldo insoluto y los derechos adquiridos por el deudor son numéricamente iguales. ( )
  - j. En la amortización de una deuda los pagos se relacionan con su valor presente, mientras que en un fondo se relacionan con su valor acumulado al final del plazo o valor futuro ( )

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO



*ACTIVIDADES DE REFUERZO*

10. Crear un sistema de amortización diferente a los anteriormente utilizados para préstamos a mediano y largo plazo.
11. Investigar si existen entidades que ayuden a la creación de empresa.
12. ¿Por qué es importante tener un hábito de ahorro?
13. Investigar como elaboran las tablas de amortización y capitalización las entidades bancarias o empresas privadas.
14. Investigar cuáles son los programas o herramientas utilizadas en las matemáticas financieras que faciliten el desarrollo de tablas de amortización.
15. Investigar cuáles son los tipos de amortización más utilizados y ¿por qué?.

## **BIBLIOGRAFÍA**

ARBUNES, M. Eduardo, Ingeniería Económica

BACA, Guillermo. Ingeniería Económica. Colombia: Fondo Educativo Panamericano, 2000

LOPEZ, LEAUD, Evaluación Económica

PORTUS, Lincoyán. Matemáticas Financieras. Colombia: McGraw- Hill, 1997.

TARQUIN, Anthony. Ingeniería Económica, Colombia: McGraw – Hill, 1999.

THUESEN, H. Ingeniería Económica, Colombia: Prentice Hall, 1999.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones. México: McGraw-Hill, 1997.

VILLALOBOS, José Luis. Matemáticas financieras. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.



# SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS

Un hombre inteligente es aquel  
que sabe ser tan inteligente  
como para contratar gente más  
inteligente que él.

[Jhon Fritzgerald Kennedy]

C  
A  
P  
I  
T  
U  
L  
O

*XI*

## OBJETIVOS

### *Objetivo General*

Permitir que el lector de este capítulo esté en la capacidad de evaluar económicamente la conveniencia de diversas alternativas o proyectos que se le presente a lo largo de su vida.

### *Objetivos Específicos*

- Conocer el significado de alternativa.
- Identificar los diversos tipos de alternativas.
- Saber que son criterios decisorios.
- Aprender las características de los criterios decisorios.
- Diferenciar el costo de capital de la TMAR.
- Conocer los grupos de criterios decisorios que existen.
- Establecer las características que diferencian a un criterio decisorio de otro.
- Identificar que criterio decisorio emplear dependiendo de la situación.

## CONDUCTA DE ENTRADA

**E**l siguiente test tiene como objetivo principal identificar el grado de conocimiento que posee a cerca del tema que se tratará a continuación.

Deberá contestar sólo aquellas preguntas donde esté completamente seguro de su respuesta; si no conoce la respuesta, no se preocupe ya que la conocerá a lo largo del capítulo.

1. Responda las siguientes preguntas.
  - a. ¿Qué entiende por alternativas mutuamente excluyentes?
  - b. ¿Qué entiende por alternativas complementarias?
  - c. ¿Qué son los criterios decisorios?
  - d. ¿Qué diferencias hay entre el costo de capital y la tasa mínima atractiva de rentabilidad?
  - e. ¿Por qué no se aconseja emplear la TIR para analizar la conveniencia económica de proyectos caracterizados porque hay que inyectarle capital adicional al invertido al inicio de este?
  
2. Diga si las siguientes afirmaciones son Falsas o Verdaderas.
  - a. La TIR es equivalente a la rentabilidad que espera obtener el inversionista en cualquier proyecto. ( )
  - b. La TIR mide la rentabilidad sobre la inversión no amortizada y no sobre la inversión inicial. ( )
  - c. Los criterios decisorios con base en la evaluación de los costos son aplicables cuando las alternativas operacionales son mutuamente excluyentes. ( )
  - d. Si al analizar la conveniencia de diversas alternativas mediante los criterios decisorios basados en la evaluación de los ingresos y egresos, obtenemos el siguiente resultado:  $VPN = 0$ , esto quiere decir que el proyecto es rentable y que debemos invertir en él. ( )
  - e. La tasa de retorno incremental (TRI) nos permite visualizar las cantidades de dinero adicional que produciría un proyecto si invertimos nuestros dineros en él. ( )

## ***RESPUESTAS CORRECTAS***

1.
  - a. Son aquellas alternativas que la escogencia de una de ellas implica el descarte inmediato de las demás.
  - b. Son aquellas alternativas que el realizarlas en forma simultanea permiten obtener mayor rentabilidad o disminuir el riesgo de fracaso.
  - c. Son normas que permiten conocer el verdadero valor que posee el dinero a través del tiempo, con el fin de tomar una decisión acertada.
  - d.

	<b><i>COSTO DE CAPITAL</i></b>	<b><i>TMAR</i></b>
e	<i>Se emplea en los proyectos de financiación</i>	<i>Se emplea en los proyectos de inversión</i>
	<i>Es la tasa de interés que el acreedor desea recibir por prestar su dinero a terceros</i>	<i>Es la tasa de interés que desea percibir el inversionista por el riesgo que corre al colocar su dinero en el proyecto.</i>

aconseja porque la TIR basa su cálculo en el VPN y este se obtiene a partir de un polinomio de grado n, cuyas raíces dependen de su grado y de los cambios de signos que este presente; por tanto si las alternativas requieren de por lo menos una inversión adicional este presentará dos cambios de signos, lo cual daría como resultado dos raíces para el polinomio traduciéndose esto en dos valores para la TIR, situación que no tiene explicación económica.

2.
  - a. F
  - b. V
  - c. V
  - d. F
  - e. F

Si todas sus respuestas fueron acertadas lo felicitamos y le aconsejamos que revise el contenido del capítulo, ya que este le servirá para repasar los conceptos adquiridos.

Si se equivocó en alguna de las respuestas deberá estudiar de manera cuidadosa este capítulo.

*ACTIVIDADES PREVIAS*

1. Ingresa en internet al buscador de su preferencia para que investigue sobre los criterios decisorios o los métodos de selección de alternativas y lea las páginas que este le ofrezca.
3. Escoge 2 ó 3 libros de tu lista bibliográfica de esta materia y lee lo referente a los tipos de criterios decisorios.
4. Elabora un banco de preguntas que reflejen las dudas que le quedaron luego de leer sobre los criterios decisorios.
5. Investiga en que situaciones de la vida cotidiana usted puede apoyarse en los criterios decisorios para seleccionar la mejor alternativa.
6. Elabora un mapa conceptual de los tipos de criterios decisorios encontrados en las lecturas anteriores, identificando de esta manera las diferencias entre cada uno de ellos.

## 11. SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS

Hasta el momento se ha aprendido que la ingeniería económica se basa en el estudio del valor del dinero a través del tiempo, así mismo, la manera de calcular flujos de caja mediante la determinación de una tasa de interés efectiva; por tal motivo usted ya está preparado para analizar económicamente una o más alternativas dependiendo de los requerimientos establecidos. Este capítulo le permitirá comparar diferentes alternativas económicas a fin de elegir la mejor de acuerdo a sus expectativas.

### 11.1. PERO, ¿QUÉ ES UNA ALTERNATIVA?

Recordemos que una alternativa es la opción que tenemos en una situación determinada.

En adelante se hablará de alternativas buenas cuando estas se caractericen por poseer beneficios o ganancias mayores a los costos. Sabiendo que un beneficio es todo aquello que represente satisfacción de los requerimientos del inversionista y costos aquellos recursos que deben ser sacrificados con el fin de obtener ganancias.

Existen varios tipos de alternativas para las cuales haremos la clasificación que se puede observar en la figura 11-1: (Clasificación usada por el doctor Rodrigo Varela)

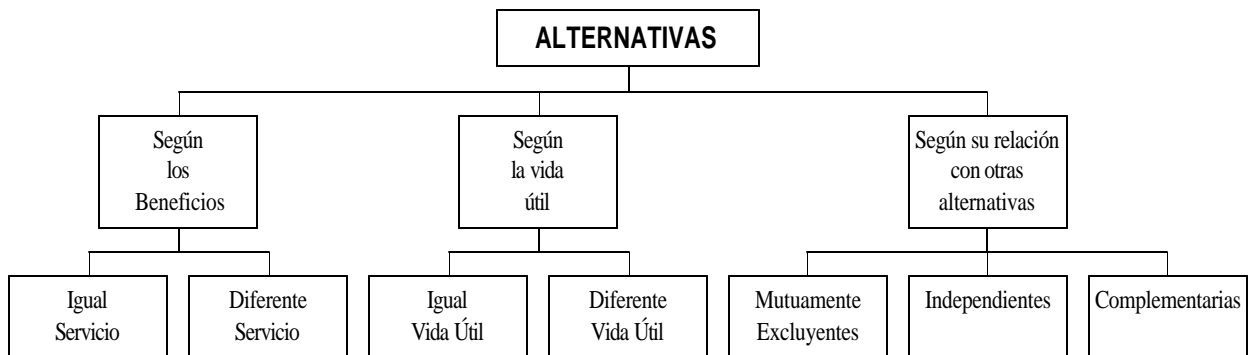


Figura 11-1. Clasificación de las alternativas



- *Alternativas de igual servicio*

*Estas se caracterizan porque generan beneficios totalmente iguales, por ejemplo, las alternativas producen un número igual de unidades, generan los mismos ingresos, consumen la misma cantidad de energía, etc. Este tipo de alternativas por lo general se presentan cuando los proyectos son operacionales. Entendiendo por proyectos operacionales aquellas que se relacionan directamente con la producción de la compañía.*

- *Alternativas de diferente servicio*

*Estas alternativas se identifican porque su naturaleza es diferente, por ejemplo, usted actualmente tiene cierto capital que no desea gastar sino multiplicar, por tanto deberá decidirse entre colocarlo en un CDT en el banco, comprar un taxi ó invertirlo en la bolsa de valores; como puede observar cada alternativa posee naturalezas distintas lo cual permite que sus vidas útiles sean diferentes.*

- *Alternativas de igual vida útil*

Son aquellas que poseen la misma duración, es decir, que la vida de servicio de cada una de las alternativas o proyectos es igual.

- *Alternativas de diferente vida útil*

Se presentan cuando los proyectos poseen vidas de servicios o duraciones diferentes, por ejemplo, se debe decidir entre comprar una máquina cortadora de láminas de acero cuya vida útil es de 5 años u otra con vida útil 20 años.

- *Alternativas mutuamente excluyente*

*Esta situación se presenta cuando la escogencia de una alternativa descarta inmediatamente a las demás. Por lo general las alternativas de igual servicios son excluyentes, porque son proyecto encaminados a la solución de un problema de carácter operacional en el cual hacer más de una sería redundante; por ejemplo, usted debe comprar un repuesto para su automóvil y luego de hacer sus averiguaciones obtuvo cuatro alternativas de compra; al decidir usted por una de esas alternativas implica que las demás son descartadas o excluidas.*

- *Alternativas independientes*

*Son aquellas que se caracterizan porque su escogencia no afecta la selección de otras alternativas, por ejemplo, usted tiene cierto capital, el cual desea invertir para incrementar su rentabilidad, es por eso que usted coloca parte de ese dinero en la bolsa de valores, lo cual no quiere decir que usted no pueda abrir un CDT o una cuenta de ahorro o invertir en otros proyectos.*

- *Alternativas complementarias*

En este tipo de alternativas agrupamos aquellas que al realizarlas en forma paralela o simultaneas se logra percibir mayor rentabilidad, por ejemplo, si usted tiene opción de montar un almacén de repuestos para carros o un taller para reparar vehículos, quizás el resultado que obtendría al colocar alguno de los dos negocios sería inferior al que obtendría que si colocara ambos en marcha, ya que juntos lograrían una mayor ganancia o rentabilidad, o por lo menos disminuiría el riesgo de fracaso de cada alternativa.

## 11.2. CRITERIOS DECISORIOS

Antes de realizar o involucrarse en un proyecto es necesario que este se evalúe financieramente, con el fin de saber de antemano si es o no conveniente participar en él. Esa evaluación se puede llevar a cabo mediante la utilización de ciertos criterios decisorios.

Los criterios decisorios de validez universal son normas que nos permiten conocer el verdadero valor que posee el dinero a través del tiempo, con el fin de tomar una decisión acertada.

Los criterios decisorios se caracterizan porque deben poseer como mínimo los siguientes requisitos:

- Ser confiable, es decir, que conduzca a la misma decisión.
- Ser generales, esto es, que sean flexible, que acepte ventajas y desventajas de cada una de las alternativas.

... considerar el valor del dinero en el tiempo  
... lo más sencillo posible.

Es fundamental que antes de estudiar los diferentes criterios decisorios, se tengan muy claro los conceptos de costos de capital y TMAR; los cuales se exponen a continuación.

## *Costo de capital*

A lo largo del texto hemos agrupado los proyectos en dos grandes clases: los de inversión y los de financiación. Sabemos que proyectos de inversión son aquellos que representan una utilidad o una pérdida al colocar nuestro dinero en un proyecto determinado con el fin de aportar en el desarrollo económico de este; en este tipo de proyectos el inversionista aspira siempre a ser recompensado por el riesgo que asume al invertir su dinero; esta recompensa se le conoce con el nombre de *TMAR (Tasa Mínima Atractiva de Rendimiento)*. Los proyectos de financiación son aquellos en los cuales nosotros recibimos dineros de organizaciones ó entidades diferente a la nuestra con el fin de permitir el desarrollo económico de nuestro proyecto o negocio. Las personas prestadoras de estos dineros se aseguran del riesgo a perderlo mediante la existencia de una tasa de interés que para este tipo de proyecto llamaremos *Costo de Capital*.

El costo de capital lo podemos ver como el costo en el cual incurrimos para obtener los fondos que se necesitan al llevar a cabo un proyecto, por ejemplo la constitución de una empresa, construcción de un edificio, entre otros.

El cálculo del costo de capital depende de las fuentes de financiación escogida. A continuación estudiaremos cada una de ellas.

- *Financiación a base de deuda*

Esta financiación consiste en obtener los fondos necesarios a partir de préstamos hechos a terceros, ya sean entidades financieras, familiares, entre otras posibilidades.

- *Financiación a base de capital propio*

Este tipo de financiación se da cuando los accionistas o dueños del proyecto lo financian con dineros propios.

...ensa que los proyectos deben manejar de una manera equilibrada **Capital** los dos  
...propio y en parte con capital de terceros. Esto es lo que se conoce como una  
... con una adecuada estructura financiera.

*TMAR*

Cualquier persona natural o jurídica desea ser recompensado por el capital que va a invertir en cualquier proyecto, ya que está corriendo el riesgo de perder su dinero. Esa recompensa es conocida como *La Tasa Mínima Atractiva de Rendimiento (TMAR)*.

La TMAR es la mínima tasa de interés que el inversionista desea recibir por su inversión, la cual será referencial o básica para estudiar o evaluar los proyectos.

Si el análisis del proyecto arroja que su Tasa Interna de Retorno es menor o inferior a la TMAR el proyecto será rechazado, si por el contrario es igual o mayor a esta debe ser aceptado.

Para determinar la TMAR se debe tener en cuenta los siguientes aspectos:

- *La TMAR debe ser mayor que la inflación*

Si al fijar la TMAR esta es igual a la inflación, su riqueza no crecerá, simplemente su dinero mantendrá su poder adquisitivo. Si es inferior perderá dinero porque no recuperará lo deseado y lo que obtendrá poseerá un poder adquisitivo inferior al que tuvo cuando lo invirtió; por tal razón la TMAR debe ser mayor que la tasa de la inflación con el fin de que su dinero crezca realmente.

- *La TMAR no debe ser calculada tomando como referencia las tasas ofrecida por los bancos.*

No se recomienda que para determinar el valor de su TMAR tome como única referencia las tasas bancarias, ya que éstas en muchos casos son inferiores a la tasa de inflación, por tanto usted no obtendrá de su inversión lo que ha planeado. Aún siendo las tasas de captación mayores que la inflación, no siguen siendo un parámetro atractivo de rentabilidad, ya que por su alto grado de inseguridad es poca la compensación por el riesgo.

- *La TMAR se debe calcular teniendo en cuenta la inflación y el riesgo por la prestación del dinero.*

Una manera más acertada de calcular la TMAR es sumar la tasa de inflación más una compensación por el riesgo que corre al invertir en un proyecto de inversión.

$$\text{TMAR} = \text{Tasa de inflación} + \text{Compensación}$$

El cálculo de la compensación depende de la seguridad que brinda el proyecto, por ejemplo, si el proyecto en el cual se va a invertir está ubicado en el sector de alimentos el cual posee una demanda estable y una oferta segura; el riesgo que usted toma al invertir su dinero es muy bajo, por tanto su compensación debe ser proporcional a esto, es decir, baja; pero si

por el contrario va a invertir en un mercado cuya demanda es fluctuante o inestable con muchos oferentes como competencia, su porcentaje debe ser mucho mayor, ya que es más alto el riesgo que corre el dinero invertido.

- *La TMAR debe ser proporcional al sector productivo donde se ubique el proyecto.*

Si el crecimiento del sector al cual pertenece el proyecto es muy bajo, pero nota que en dicho sector hay una empresa que posee un crecimiento elevado; usted no deberá tomar como referencia el crecimiento de ésta, sino el del sector en general, ya que el desarrollo de esa empresa puede deberse a su antigüedad, al good will, u otros aspectos, que permitirá elegir una TMAR muy desviada de la realidad.

- *La TMAR deber ser mayor que la tasa ofrecida por un banco en los certificados de depósitos a término fijo.*

Cuando usted vaya a invertir un dinero en un proyecto productivo, este debe generarle mayor utilidades que si lo tuviera depositado en el banco en un CDT, ya que en él, tiene ganancias seguras corriendo un mínimo de riesgo

- *La TMAR debe ser igual o mayor que la tasa de interés de oportunidad.*

Cuando se vaya a decidir por una TMAR cualquiera, es esencial tener muy presente que esta debe cubrir el costo de oportunidad, el cual se ve representado por aquello que deja de ganar si retira su dinero de una inversión segura; por ejemplo, suponga que usted posee un almacén de ropa informal el cual le permite percibir un ingreso semanal de \$1´400.000 en promedio y Trian Sport (reconocida tienda de ropa ) le ofrecen comprar el negocio. Si por algún motivo decide aceptar la propuesta de Trian Sport, usted deberá exigir una cantidad de dinero tal que le represente un ingreso semanal igual o superior a los \$1´400.000 que ganaba con su tienda; de esta manera usted esta teniendo en cuenta la tasa de interés de oportunidad para el calculo de la TMAR.

Los criterios de evaluación de alternativas pueden clasificarse formando ciertos grupos como se muestra en la figura 11-2.

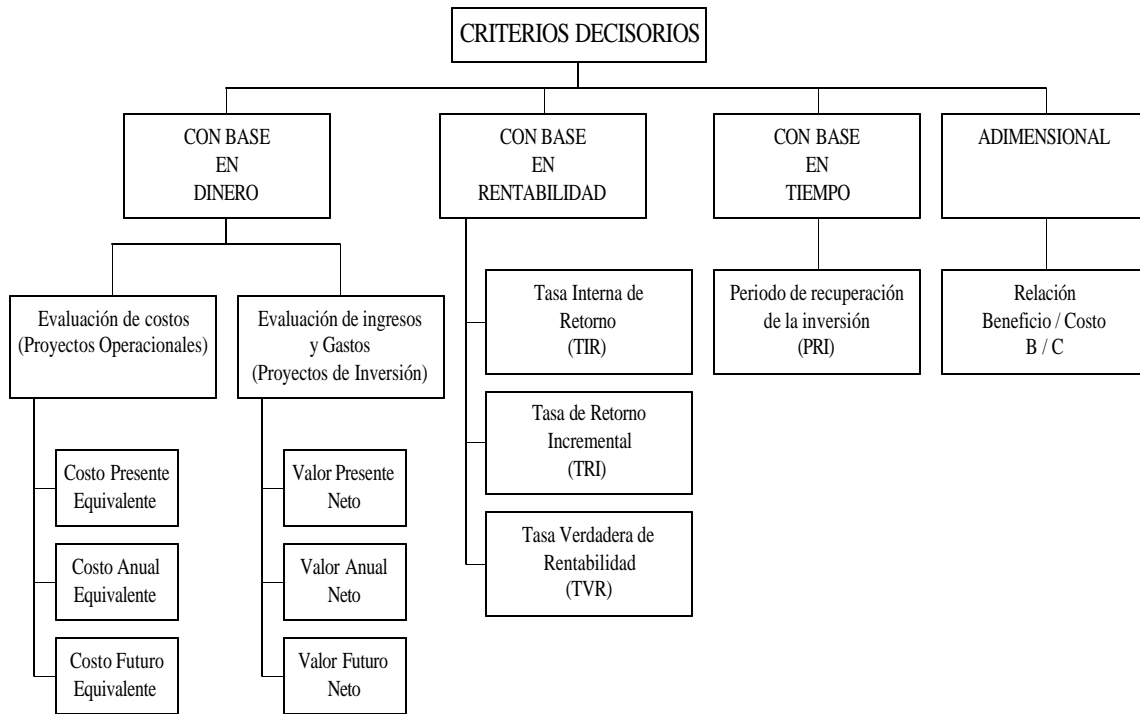


Figura 11-2. Criterios decisivos para la selección de alternativas

### 11.2.1. Criterios decisivos con base en dinero

Este grupo de criterios se basa en el análisis de los ingresos o egresos generados por el proyecto a lo largo de su vida de servicio.

### 11.2.1.1. Evaluación de costos

Este tipo de criterio nos permite evaluar aquellos proyectos en donde no es fundamental los ingresos producidos y por el contrario son importantísimos los flujos correspondientes a los costos, por ejemplo, la compra de un equipo o maquinaria es un proyecto que no tiene unos ingresos directamente asociados o identificados, más sin embargo, si implican costos como son los de adquisición, administración, mantenimiento, operación, entre otros; es por esto que su mayor aplicación es el estudio de proyectos o alternativas operacionales.

El objetivo principal de los índices basados en los costos es la minimización de los mismos. Este índice nos servirá como herramienta de análisis cuando contemos con alternativas operacionales mutuamente excluyentes con igual o diferentes vida útil. El análisis de este criterio aplica siempre y cuando contemos con dos o más alternativas.

Estos costos se pueden estudiar en cualquier ubicación puntual en el tiempo como se verá en las siguientes secciones. Para llegar a determinar el costo de cierta alternativa deberemos restar los egresos menos los ingresos que generaría esta en la posición de tiempo deseada, es decir, si necesitamos calcular el Costo Presente Equivalente (CPE) en el que se incurriría si nos decidiéramos por una alternativa en particular tendremos que restar el costo presente de todos los egresos ( $CP_E$ ) menos el costo presente de todos los ingresos ( $CP_I$ ). De igual forma se haría si deseáramos calcular el futuro o valor anual equivalente al costo de la alternativa, como se mostrará a continuación.

$$CPE = CP_E - CP_I$$

$$CFE = CF_E - CF_I$$

$$CAE = CA_E - CA_I$$

Para este análisis en particular se asumirán los costos como flujos positivos y los ingresos como negativos.

**A. Costo Presente Equivalente (CPE)**

El CPE nos indica la cantidad de dinero que debemos pagar o recibir hoy por involucrarnos en un proyecto determinado. Este valor se obtiene determinando el costo equivalente en la posición cero de la diferencia entre los egresos y ingresos futuros en los que incurrirá esa alternativa.

**Ejercicio Práctico**

La panadería “Don Pepe” ha bajado la calidad de su productos desde hace un mes debido a que su mezcladora industrial esta muy obsoleta y averiada; por tanto Don Pepe a decidido adquirir una mezcladora nueva para lo cual debe decidirse entre las tres alternativas siguientes:

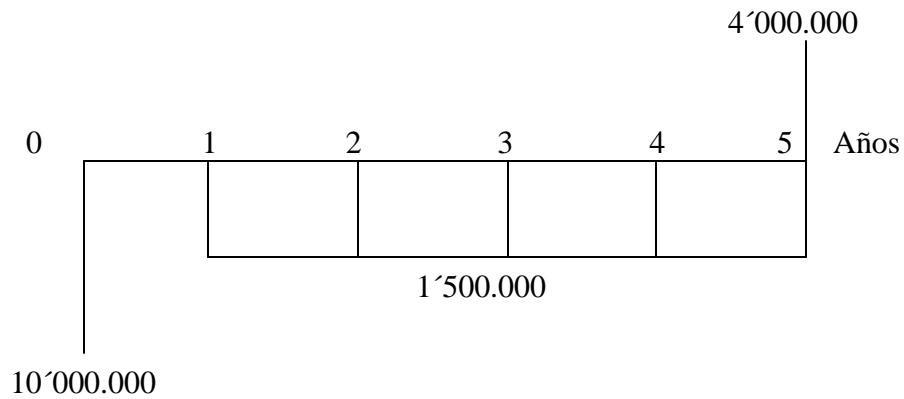
	A	B	C
Inversión inicial	10'000.000	15'000.000	8'000.000
Costo anual por mantenimiento	1'500.000	500.000	700.000
Valor de salvamento	4'000.000	8'000.000	2'000.000
Vida de servicio	5	5	5

¿Cuál de las tres alternativas es la más conveniente si Don Pepe desea percibir una rentabilidad del 18% anual?

Para comparar las alternativas empleando el criterio CPE debemos hallar el valor actual o presente equivalente a cada uno de los diagramas de flujos que representan la respectiva alternativa.



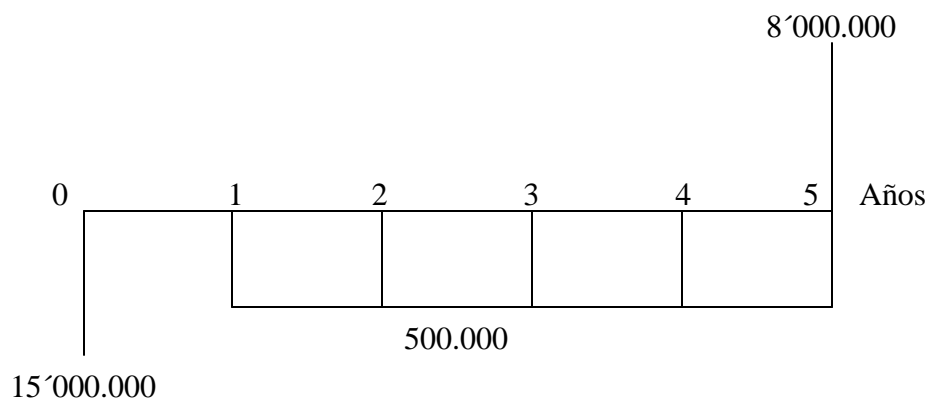
*ALTERNATIVA A*



$$CPE_A = 10'000.000 + 1'500.000 (P/A, 18\%, 5) - 4'000.000 (P/F, 18\%, 5)$$

$$CPE_A = 12'942.321$$

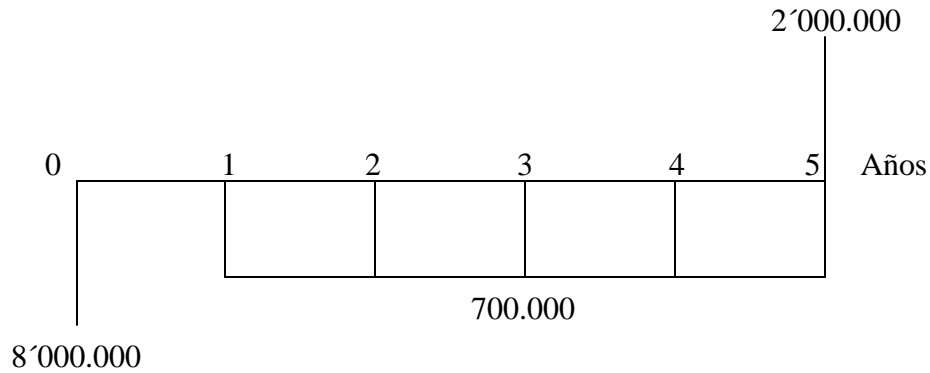
*ALTERNATIVA B*



$$CPE_B = 15'000.000 + 500.000 (P/A, 18\%, 5) - 8'000.000 (P/F, 18\%, 5)$$

$$CPE_B = 13'066.713$$

ALTERNATIVA C



$$CPE_C = 8'000.000 + 700.000 (P/A, 18\%, 5) - 2'000.000 (P/F, 18\%, 5)$$

$$CPE_C = 9'314.802$$

Según el criterio decisorio CPE se debe comprar la mezcladora C ya que esta es la que incurre en menos costos

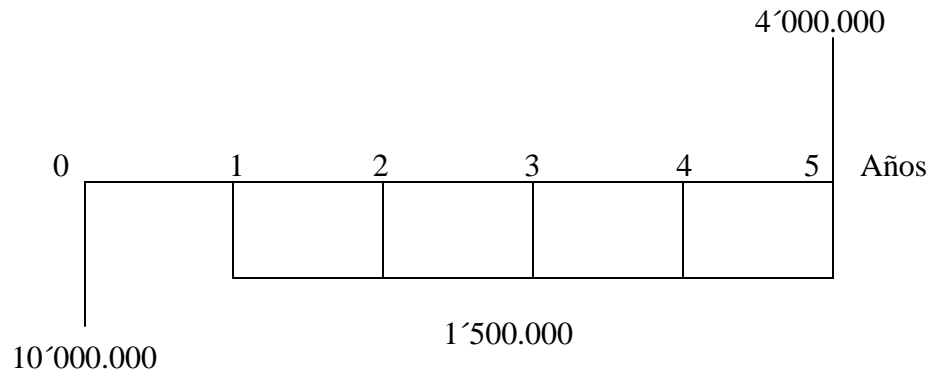
**B. Costo Anual Equivalente (CAE)**

El CAE nos indica el costo anual en el que se incurre al involucrarnos en un proyecto específico. Dicho costo se obtiene reduciendo todos los flujos de caja del proyecto a una serie de pagos anuales (anualidad).

**Ejercicio Práctico**

Decida cuál de las tres posibles mezcladoras analizadas en la anterior sección debe elegirse si se apoya del criterio CAE.

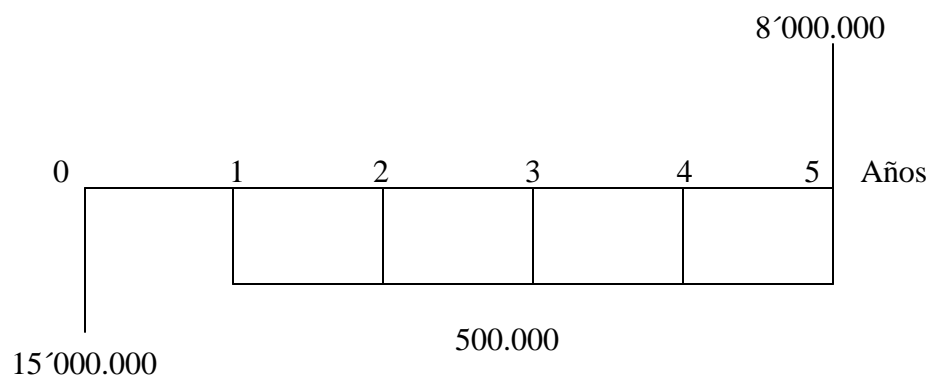
ALTERNATIVA A



$$CAE_A = 10'000.000 (A/P, 18\%, 5) + 1'500.000 - 4'000.000 (A/F, 18\%, 5)$$

$$CPE_A = 4'138.668$$

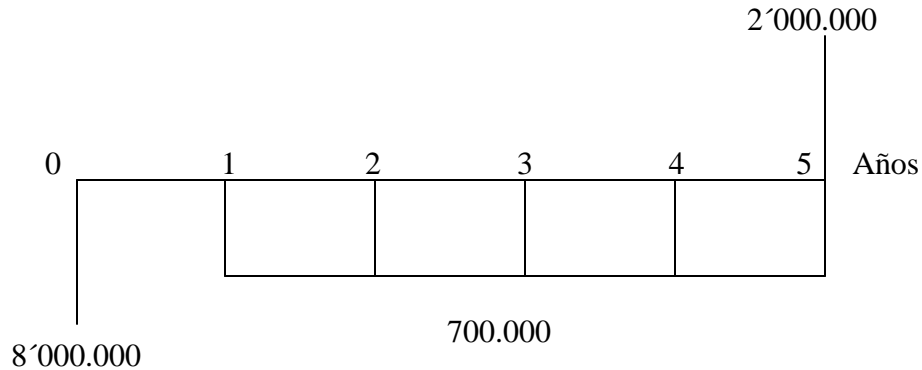
*ALTERNATIVA B*



$$CAE_B = 15'000.000 (A/P, 18\%, 5) + 500.000 - 8'000.000 (A/F, 18\%, 5)$$

$$CAE_B = 4'178.446$$

ALTERNATIVA C



$$CAE_C = 8'000.000 (A/P, 18\%, 5) + 700.000 - 2'000.000 (A/F, 18\%, 5)$$

$$CAE_C = 2'978.668$$

Si utilizamos el criterio CAE para evaluar la conveniencia de las alternativas este sugiere que se deje escoger la alternativa C ya que es la que genera menos costos anualmente.

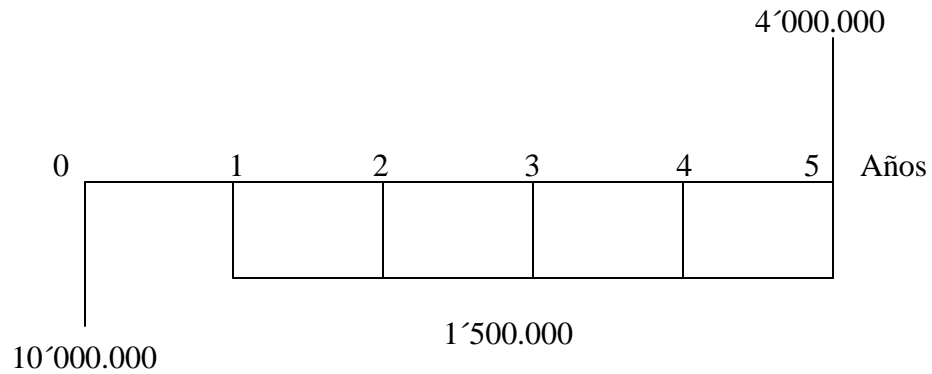
**C. Costo Futuro Equivalente (CFE)**

Costo futuro equivalente se le llama a aquel criterio decisorio que se basa en el análisis de costos del proyecto al final de la vida de servicio de este. El CFE se determina hallando el valor presente de todos los flujos de caja de del proyecto como aprendió en el capítulo del interés compuesto.

**Ejercicio Práctico**

Escoja la mejor mezcladora basándose en los datos dados en las anteriores secciones con el apoyo del criterio decisorio CFE.

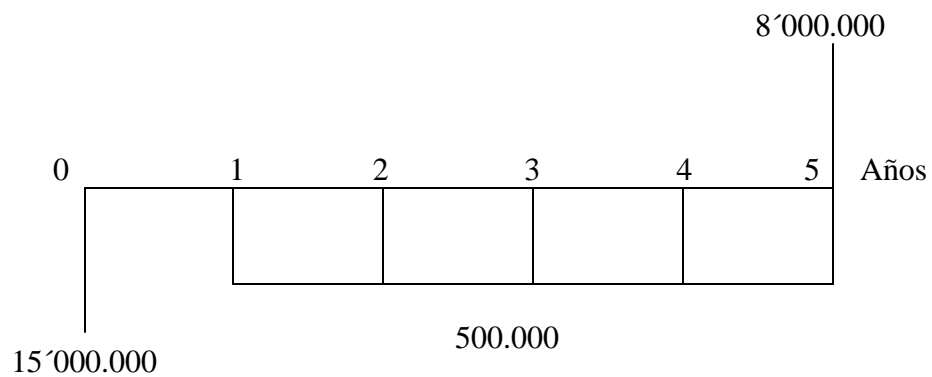
ALTERNATIVA A



$$CFE_A = 10'000.000 (F/P, 18\%, 5) + 1'500.000 (F/A, 18\%, 5) - 4'000.000$$

$$CFE_A = 29'608.895$$

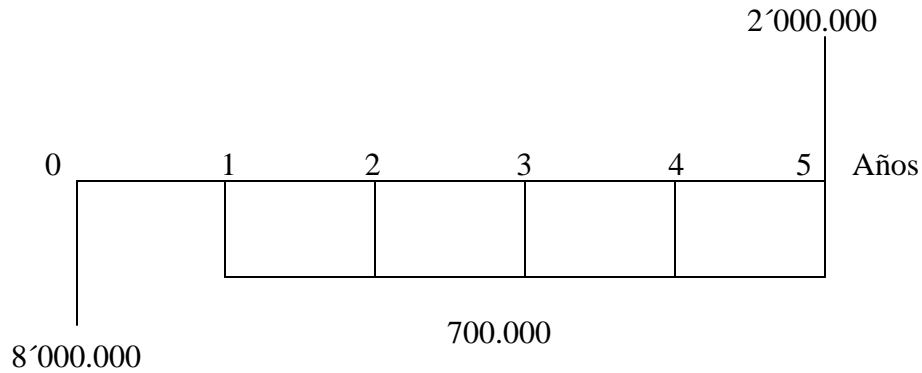
ALTERNATIVA B



$$CFE_B = 15'000.000 (F/P, 18\%, 5) + 500.000 (F/A, 18\%, 5) - 8'000.000$$

$$CFE_b = 29'893.475$$

ALTERNATIVA C



$$CFE_C = 8'000.000 (F/P, 18\%, 5) + 700.000 (F/A, 18\%, 5) - 2'000.000$$

$$CFE_C = 21'310.011$$

Al igual que con los dos criterios anteriores CFE nos aconseja decidimos por la alternativa C ya que al cabo de los cinco años es la que menos costos generará.

Como se pudo observar los anteriores índices conllevan a la misma respuesta o resultado. Los criterios de evaluación de costos son considerados equivalentes, ya que al conocer uno de ellos se pueden calcular los otros dos.

11.2.1.2. Evaluación de ingresos y gastos mediante el uso de los valores netos

Este criterio es muy similar al visto en la sesión 11.2.1.1, con la diferencia que este analiza los ingresos y gastos. Este criterio retoma la convención de los signos empleada a lo largo del texto, es decir, ingresos positivos y egresos negativos.

mente para nosotros. Este criterio es aplicable en el análisis de una o más vas.

Estos criterios están basados en los valores netos, lo cual quiere decir que, ya no trabajaremos con costos, ingresos o egresos, sino con los valores producto de la resta de los ingresos menos los egresos, o dicho de otra forma, para estos criterios cada flujo de caja

representará la utilidad o pérdida del periodo en cuestión; por tanto el empleo de los criterios de evaluación de ingresos y egresos nos permitirá visualizar las ganancias o pérdidas que obtendríamos si nos decidimos por determinada alternativa.

El valor neto que caracteriza a determinada alternativa, puede ser hallado en cualquier posición puntual del tiempo, empleando los valores netos correspondientes a cada periodo; o rentando los egresos de los ingresos en la posición deseada, así:

$$VPN = VP_I - VP_E$$

$$VF_N = VF_I - VF_E$$

$$VAN = VA_I - VA_E$$

### ***A. Valor Presente Neto (VPN)***

El VPN es la utilidad o pérdida económica que arroja el proyecto a una TMAR en la posición cero. También podemos afirmar que el VPN no es más que el valor del proyecto en pesos de hoy.

Este VPN se obtiene mediante la sumatoria de los valores equivalentes de los ingresos y egresos (flujos de caja) del proyecto a una TMAR en la posición cero, en otras palabras, es determinar el valor presente del flujo de caja que represente al proyecto como lo aprendió en el capítulo de interés compuesto.

Los resultados que obtenga luego de hallar el valor presente neto de las alternativas se analizarán así:

- *Resultado negativo ( $VPN < 0$ )*

Si VPN es negativo debe entenderse que no es conveniente invertir en el proyecto en estudio, ya que este no dará la ganancia esperada, y lo que ganará no será suficiente para recuperar la inversión hecha en él.

- *Resultado igual a cero ( $VPN = 0$ )*

Al VPN ser igual a cero se debe entender que el proyecto permitirá recuperar la inversión con la rentabilidad que se esperaba, ya que el proyecto es capaz de ofrecerle la TMAR que usted demanda y en este caso se presenta una situación de indiferencia.

- *Resultado positivo ( $VPN > 0$ )*

Si VPN es un valor positivo cualquiera, quiere decir que los ingresos del proyecto podrán cubrir los egresos que este generará y además percibirá una ganancia adicional igual al valor neto que este arroje en la posición cero.

### Ejercicio Práctico

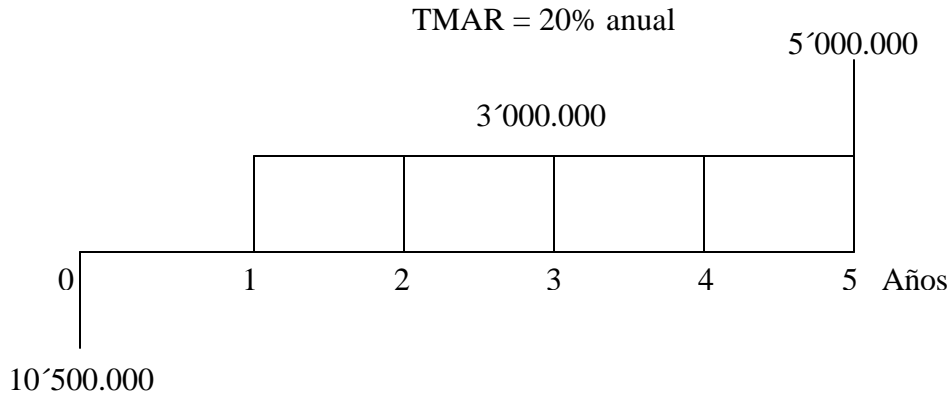
1. Se esta considerando la compra de un taxi por \$10'500.000, para obtener una entrada de dinero diferente a la generada por su trabajo cotidiano. Mediante una serie de encuestas usted descubrió que el servicio de taxi genera en promedio una utilidad después de gastos de \$3'000.000 anuales y que al cumplir éste cinco años de uso, los gastos de mantenimiento se incrementan demasiado, por lo que usted proyecta venderlo al cabo de este tiempo por \$5'000.000. ¿Sería conveniente hacer realidad la compra si se espera un rendimiento mínimo del 25%?

$$P = 10'500.000$$

$$TMAR = 20\%$$

$$VPN = ?$$





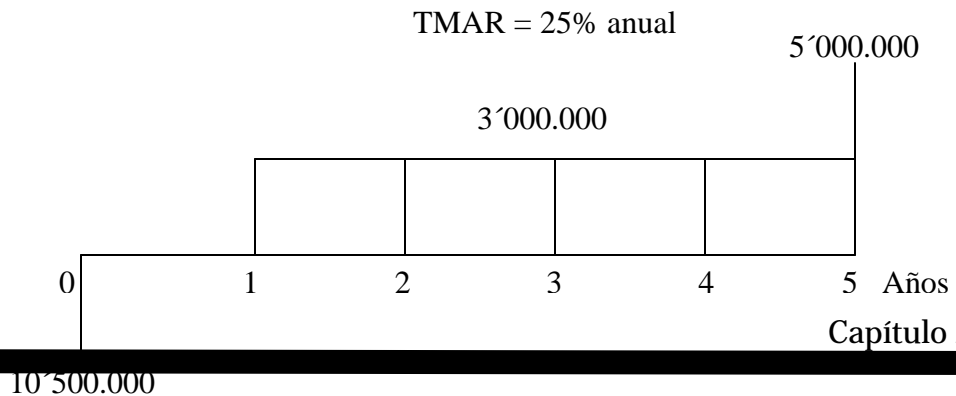
$$VPN = -10'500.000 + 3'000.000 (P/A, 20\%, 5) + 5'000.000 (P/F, 20\%, 5)$$

$$VPN = -10'500.000 + 3'000.000 (2.990612) + 5'000.000 (0.401878)$$

$$VPN = 481.226$$

Este resultado nos quiere decir que es conveniente invertir en comprar el taxi ya que además de recuperar los \$10'500.000 que se invierten en su compra y obtener el rendimiento deseado se conseguirá una ganancia adicional de 481.226 anualmente.

2. ¿Cuál sería el análisis si el comprador se dejará seguir por sus deseos ambiciosos deseado un rendimiento del 25%?



$$VPN = -10'500.000 + 3'000.000 (P/A, 25\%, 5) + 5'000.000 (P/F, 25\%, 5)$$

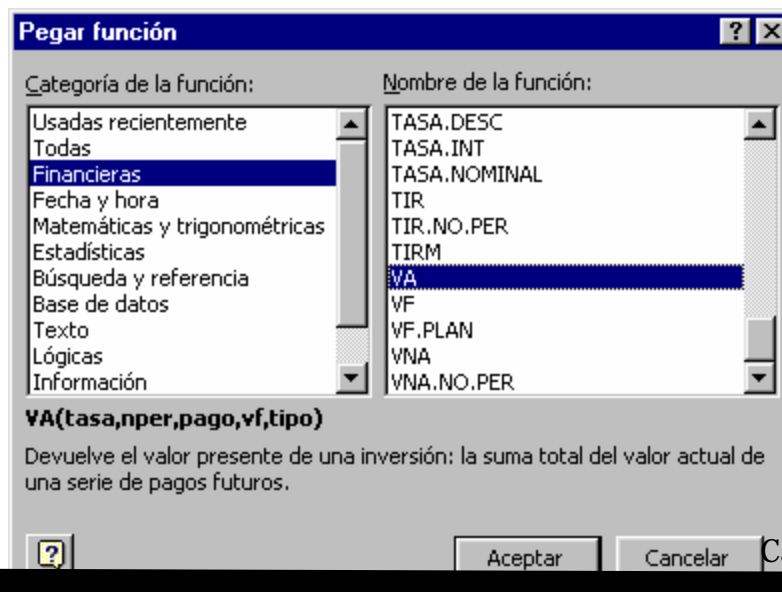
$$VPN = -10'500.000 + 3'000.000 (2,689280) + 5'000.000 (0,327680)$$

$$VPN = -793.760$$

Si el comprador deseará un rendimiento anual del 25% no sería conveniente para el invertir en la compra del taxi ya que este negocio no alcanzaría a generarlo y por el contrario la persona dejaría de percibir \$793.760 si invirtiera en algún otro proyecto o negocio.

Este criterio puede ser determinado de igual manera si nos apoyamos en el programa de cálculo Excell, si se sigue el procedimiento que se mencionará a continuación. Para ejemplarizar este procedimiento se tomará el segundo ejercicio.

- a. Abra la hoja de cálculo, busque la función  $fx$ , seleccione en la columna de la *Categoría de la función* aquella llamada *Financiera* y de la columna de Nombre de la función seleccione VA (Valor actual o presente). Usará esta función cuando cuente con series uniformes de pago (anualidades)



- b. Introduzca los datos del ejercicio

VA

Tasa	0.25	= 0.25
Nper	5	= 5
Pago	3000000	= 3000000
Vf	5000000	= 5000000
Tipo		= número

= -9706240

Devuelve el valor presente de una inversión: la suma total del valor actual de una serie de pagos futuros.

**Vf** es el valor futuro o saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago.

Resultado de la fórmula = -9706240

Aceptar Cancelar

Este valor que nos arroja el cuadro de dialogo es igual al valor presente equivalente al valor futuro y a la anualidad; por tanto ese valor debe ser sumado con el valor ubicado en la posición cero correspondiente a la inversión inicial. Recuerde que el valor da negativo porque todos los datos que se introdujeron son positivos y para guardar la relación ingresos igual a egresos toma ese signo. Por tanto se asume positivo ya que en nuestro análisis la anualidad y el futuro son positivos.

$$VPN = -10'500.000 + 9'706.240$$

$$VPN = - 793.760$$

**B. Valor Futuro Neto (VFN)**

El valor futuro neto (VFN) representa la utilidad económica o la pérdida económica que se pagará o recibirá en la posición n, si la alternativa ofreciera la rentabilidad que el inversionista exige.

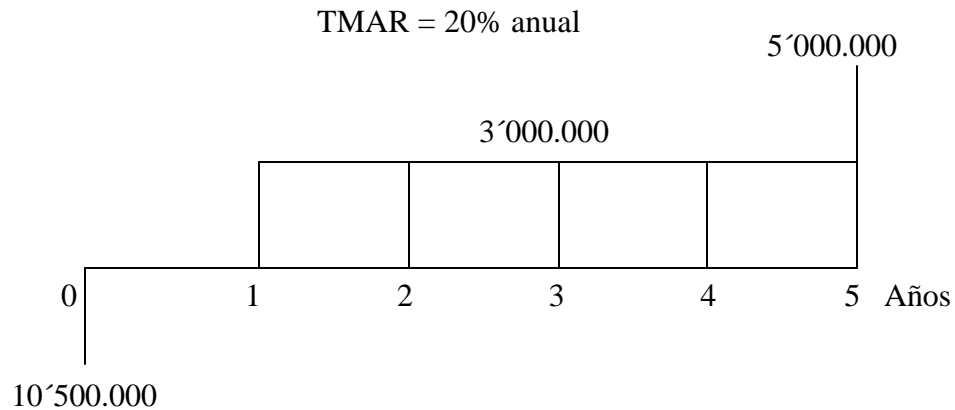
El VFN se calcula determinando el valor futuro de los flujos de caja que caracterizan al proyecto, empleando la TMAR exigida por la persona que invertirá su dinero en él.

El análisis del VFN es igual al visto en la sesión A, para el VPN.

**Ejercicio Práctico**

Determine si es conveniente o no, invertir en las situaciones mencionadas en la anterior sesión empleando el criterio del VFN

- 1. VFN = ?  
TMAR = 20%



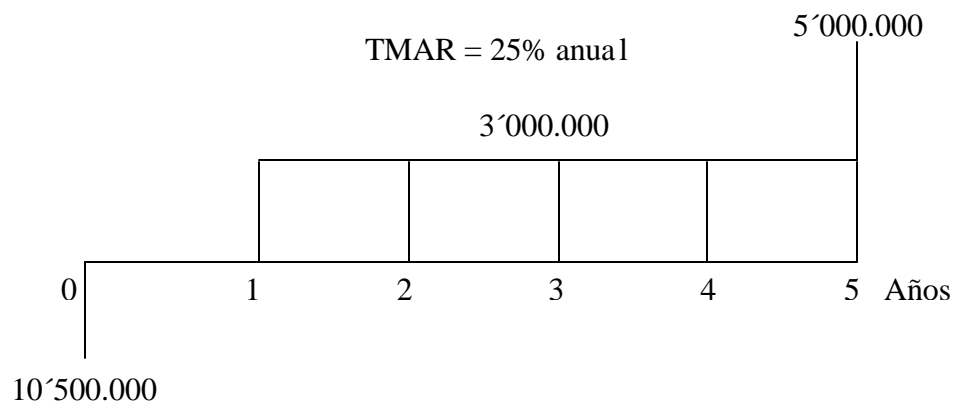
$$VFN = -10'500.000 (F/P, 20\%, 5) + 3'000.000 (F/A, 20\%, 5) + 5'000.000$$

$$VFN = -10'500.000 (2.488320) + 3'000.000 (7.441600) + 5'000.000$$

$$VFN = 1'197.440$$

Si se emplea el criterio del Valor Futuro Neto (VFN), nuestra decisión debería ser comprar el taxi ya que se recupera el dinero invertido en su compra además de ganarse una cantidad adicional de 1'197.440 al final de los cinco años.

2. VFN = ?  
 TMAR = 25%



$$\text{VFN} = - 10'500.000 (\text{F/P}, 25\%, 5) + 3'000.000 (\text{F/A}, 25\%, 5) + 5'000.000$$

$$\text{VFN} = - 10'500.000 (3.051758) + 3'000.000 (8.207031) + 5'000.000$$

$$\text{VFN} = - 2'422.366$$

Si se aumenta la TMAR a un 25% no sería conveniente comprar el taxi ya que el negocio no generaría tantos ingresos que permitieran recuperar la inversión y producirle al dueño del taxi el rendimiento que el desea y por el contrario dejaría de ganar 2'422.366 si hubiese invertido en algún otro negocio.

Para resolver este ejercicio con la ayuda de Excell debe seguir los pasos descritos en la anterior sección con la diferencia que tendrá que seleccionar la función VF en la columna *nombre de la función*.

*Valor Anual Neto (VAN)*

El VAN ilustra la utilidad o pérdida económica que usted deberá recibir o pagar durante los n periodo del proyecto si este se analiza teniendo en cuenta la TMAR que usted desea.

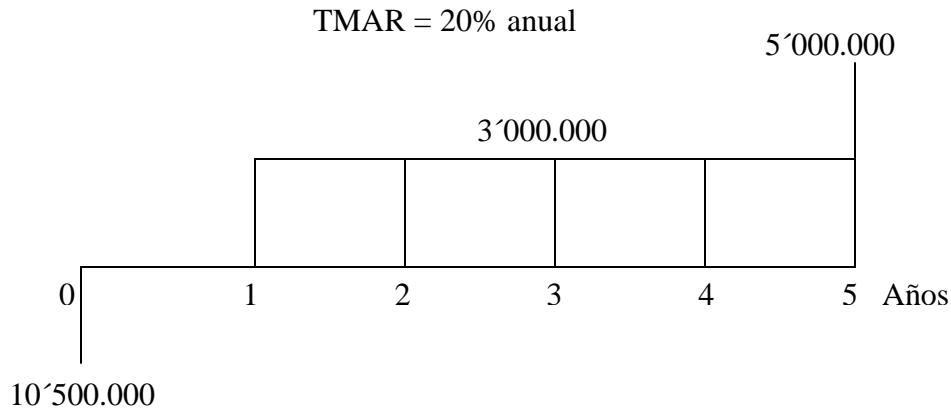
Su cálculo es sencillo ya que se obtiene determinando el valor de la serie uniforme equivalente a cada ingreso o egreso que poseerá el proyecto durante los n periodos de vida.

El análisis del VAN es igual al del VPN y el VFN, estudiados en la sesión A y B.

**Ejercicio Práctico**

Analice la conveniencia de las situaciones tratadas en la sesión del VPN empleando el criterio VAN

1.



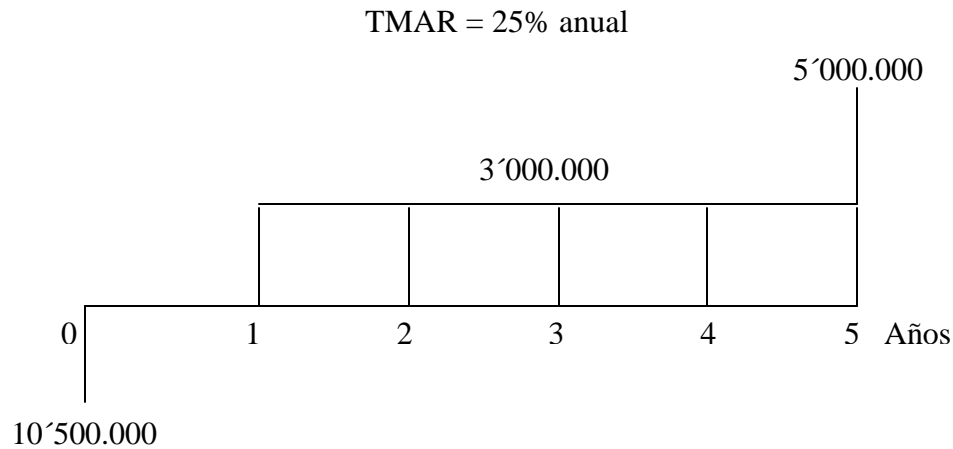
$$VAN = -10'500.000 (A/P, 20\%, 5) + 3'000.000 + 5'000.000 (A/F, 20\%, 5)$$

$$VAN = -10'500.000 (0.334380) + 3'000.000 + 5'000.000 (0.134380)$$

$$VAN = 160.910$$

Este valor quiere decir que debemos invertir en comprar el taxi, ya que se recupera la inversión y se obtiene el rendimiento deseado del 20%; además ganaría un adicional anual de \$160.910.

2.



$$VAN = -10'500.000 (A/P, 25\%, 5) + 3'000.000 + 5'000.000 (A/F, 25\%, 5)$$

$$VAN = - 10'500.000 (0.371847) + 3'000.000 + 5'000.000 (0.121847)$$

$$VAN = -295.158$$

Si se desea obtener un rendimiento del 25% anual no es aconsejable que compre el taxi ya que dejaría de recibir anualmente una cantidad adicional a su rendimiento del \$ 295.158.

Como pudo notar si emplea cualquiera de los criterios decisorios basados en la evaluación de ingresos y egresos cuando desee saber si es conveniente o no invertir en un proyecto se decidirá por la misma alternativa.

Al igual que los criterios de evaluación de costos estos tres índices son equivalentes, ya que al conocer uno de ellos se pueden calcular los otros dos

### 11.2.2. Criterios decisorios con base en rentabilidad

A diferencia de los criterios antes vistos este grupo basa la conveniencia de un proyecto no en sus ingresos o egresos sino en lo rentable que resulta para el inversionista.

Estos criterios arrojan su resultado en forma porcentual y no como valores que representen cantidades de dinero.

#### ***A. Tasa Interna de Retorno (TIR)***

La tasa interna de retorno es una tasa de interés que representa la rentabilidad propia de un proyecto, es decir, permite al inversionista visualizar o conocer que tan bueno o rentable es un proyecto al cual se le inyecta dinero en el periodo cero solamente, de igual forma la TIR podrá decir si un proyecto puede sostenerse por sí solo.

La TIR permite igualar a cero todos los flujos de caja (ingresos y egresos) a lo largo del proyecto; lo cual implica que:

$$VPN = 0$$

También se puede interpretar la TIR como la tasa de interés que logra que la suma de los flujos futuros traídos a presente sea igual a la inversión inicial, es decir:

$$VP_{\text{Ingresos}} = VP_{\text{Egresos}}$$

En otras palabras, la TIR es la rentabilidad (expresada en porcentaje) que genera el proyecto a partir de la inversión no amortizada durante la vida de este, lo cual es independiente de la TMAR. La TIR también es conocida como “El método del inversionista”, “Índice de rentabilidad” ó “Método de flujo de efectivo de descuento”.

Cabe aclarar que la TIR mide el rendimiento sobre la inversión no amortizada y no sobre la inversión inicial, es decir, toma en cuenta sólo el capital que permanece comprometido en el proyecto, por tanto si en algún periodo se reparten dividendos, por ejemplo, la TIR cambia ya que ella asume que los dineros no salen sino permanecen dentro del proyecto.



Tenga presente que entre mayor sea la TIR característica de un proyecto, mayor será la conveniencia de invertir en él.

Desventajas del empleo de la TIR como criterio a tener en cuenta para la decisión de invertir o no en un proyecto.

- En el cálculo de la TIR se supone que todas las ganancias del proyecto son reinvertidas en él a la misma TIR; lo cual muchas veces no es cierto ya que en algunos periodos se tendrá que repartir dividendos a los socios.
- Al calcularse la TIR con base en el VPN se obtiene un polinomio de  $n$  grado; y como sabemos un polinomio tiene raíces dependiendo del grado y de los cambios de signos. Por lo general en la mayoría de los flujos de caja de proyectos de inversión sólo se presenta un cambio de signo en los flujos de caja. Pero existe la posibilidad que en algún periodo se presente cierta situación que hace que los costos empleados en el desarrollo del proyecto sean mayores que la ganancia que se genera en dicho periodo; por tanto se obtendrá un flujo negativo, presentándose de esta manera un cambio en el signo adicional al representado por la inversión inicial, por esta razón existirán dos cambios en el flujo del proyecto; es por esto que al calcular la TIR esta poseerá dos tasas reales positivas, lo cual no tiene explicación económica; si se presenta esta situación no es aconsejable apoyarse en este índice para tomar decisiones.

Análisis de los resultados que arroja el cálculo de la TIR

- *TIR negativa*

Esto querrá decir que los egresos o salidas de dineros son mucho mayor que los ingresos por tanto no es recomendable.

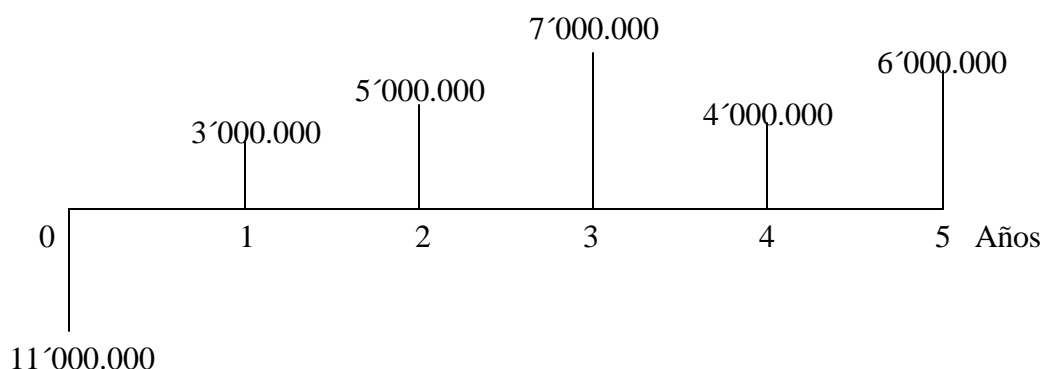
- *Si  $TIR < TMAR$*

Si esto sucede usted deberá rechazar el proyecto, ya que este no generará tantas ganancias para pagar lo que usted demanda

es la situación, usted no debe pensarlo tanto para invertir en ese proyecto, ya que el proyecto es rentable.

## Ejercicio Práctico

¿Cuál es el rendimiento de un proyecto que posee los siguientes ingresos y egresos a lo largo de su vida?



Como se había dicho anteriormente el rendimiento de un proyecto es equivalente a la TIR, la cual se determina hallando el VPN e igualándolo a cero con el fin de calcular el valor de  $i\%$ .

$$\text{VPN} = 0 = -11'000.000 + 3'000.000 (P/F, i\%, 1) + 5'000.000 (P/F, i\%, 2) + 7'000.000 (P/F, i\%, 3) + 4'000.000 (P/F, i\%, 4) + 6'000.000 (P/F, i\%, 5)$$

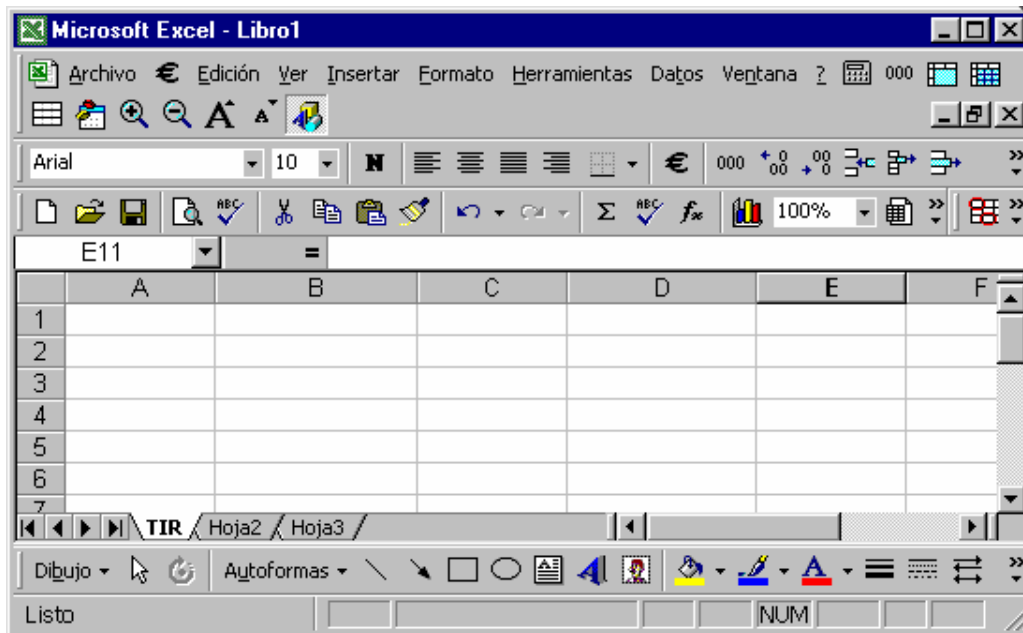
Como ya sabemos se debe hacer uso del método de ensayo y error para determinar el valor de  $i\%$ , el cual es 32.10%; por tanto:

$$\text{TIR} = 32 \%$$

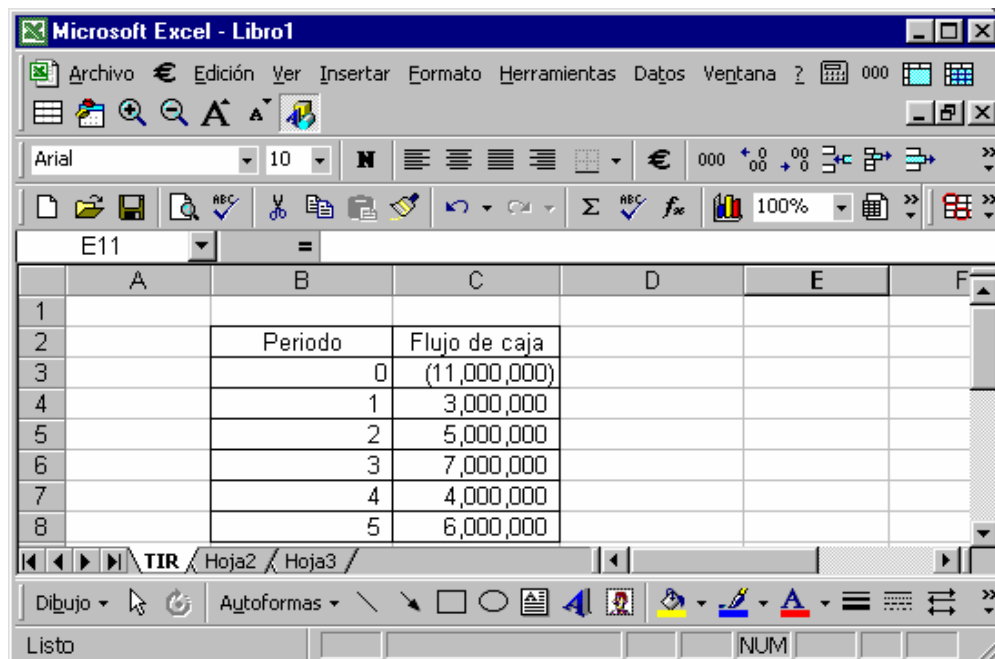
Esto quiere decir que el proyecto arroja una rentabilidad de 32 % asumiendo que todas las utilidades de este se reinvierten en el mismo. Para que el proyecto sea atractivo para usted la TIR debe ser inferior a la rentabilidad que usted desea obtener, es decir usted debe establecer una TMAR mayor que la TIR hallada.

Para determinar el valor de este índice nos podemos apoyar en la herramienta de cálculo Excell con el objeto de obtener un valor más rápido y sin tantas operaciones matemáticas; siempre y cuando siga los pasos que se describen a continuación.

1. Abra la hoja de cálculo

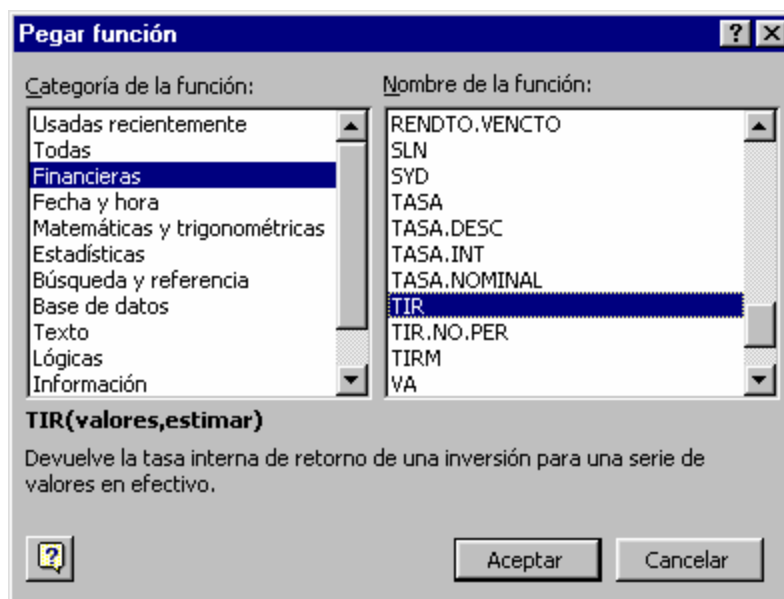


2. Organice en ella los datos que le ofrece el ejercicio.

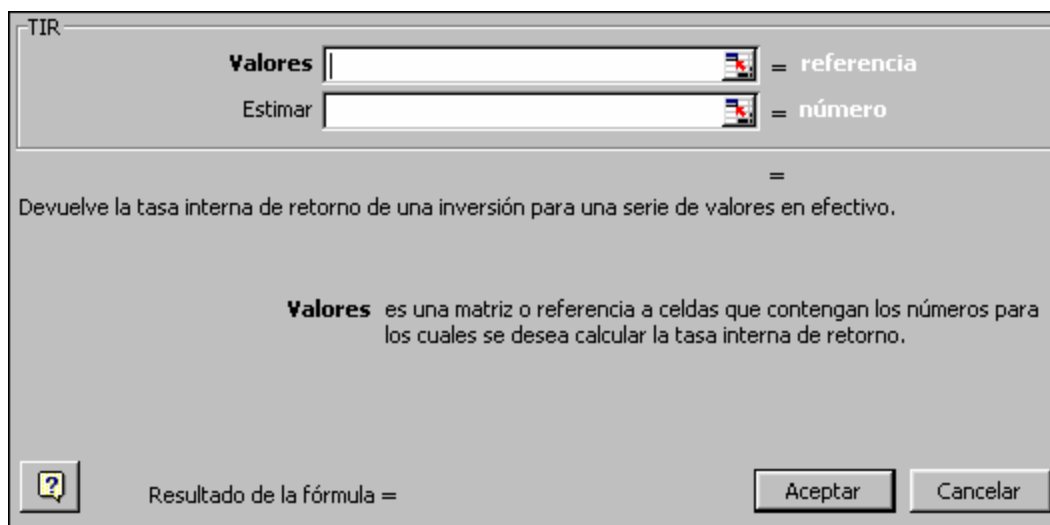


Recuerde que los egresos son negativos y los ingresos positivos

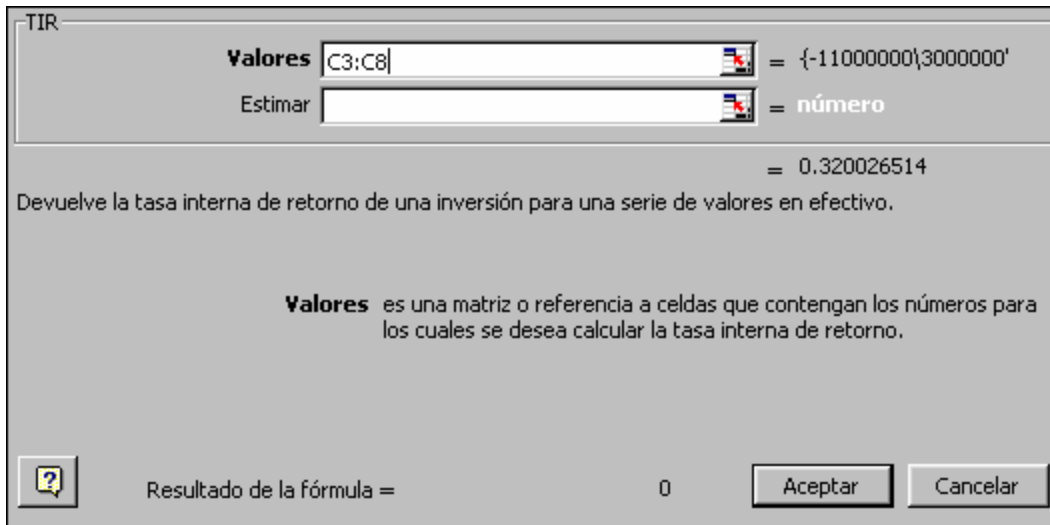
3. Deberá buscar el comando *fx* para que este le despliegue el siguiente cuadro de dialogo en el cual usted elegirá en la columna de *Categoría de la función* aquella llamada *Financiera* de la columna Nombre de la función escogerá *TIR*. Esta función se servirá cuando posea unos flujos de caja no uniformes.



4. Luego de aceptar esa elección aparecerá el siguiente cuadro



En la casilla de valores introducirá los datos del paso No.2 para que este le arroje el resultado deseado, o sea, el valor de la TIR



Como puede observar el programa arroja un valor para TIR del 32 %

### ***B. Tasa de Retorno Incremental (TRI)***

La tasa de retorno incremental también es llamada TIRI (Tasa Interna de Retorno Incremental).

Este método o criterio es útil cuando debemos analizar la conveniencia de diversas alternativas las cuales requieren de diferentes inversiones de capital, permitiéndonos así conocer si las diferencias existentes entre una inversión y otra son proporcionales a las ganancias.

Para emplear este índice como base para decidirse por la mejor alternativa es esencial que estas se analicen con un número de periodos de servicio igual.

Si las alternativas poseen igual vida de servicio se deberá restar los flujos que caracterizan a la alternativa de mayor inversión inicial menos la de menor inversión inicial. Si por el contrario las alternativas tiene diferentes vida de servicio no es aconsejable usar este método por la aparición de múltiples tasas de retorno.

El análisis de la TRI se basa en la comparación de esta con la TMAR de la siguiente manera:

- $TRI < TMAR$

No se justifica la inversión incremental, por esto se recomienda que deberá elegir la alternativa con menor inversión entre las que están siendo estudiadas.

- $TRI > TMAR$

Se justifica la inversión incremental, es decir, deberá decidirse por el proyecto de mayor inversión.

Este concepto será más fácil de comprenderlo con la ayuda del siguiente ejercicio práctico.

**Ejercicio Práctico**

La empresa “Aceros Ltda.” necesita cambiar su máquina cortadora No. 2 ya que esta produciendo cortes de baja calidad; por tal motivo están estudiando la posibilidad de comprar una nueva. Luego de estudiar muchas alternativas deben decidirse entre las siguientes dos. En el cuadro se muestran las características de cada una de las alternativas.

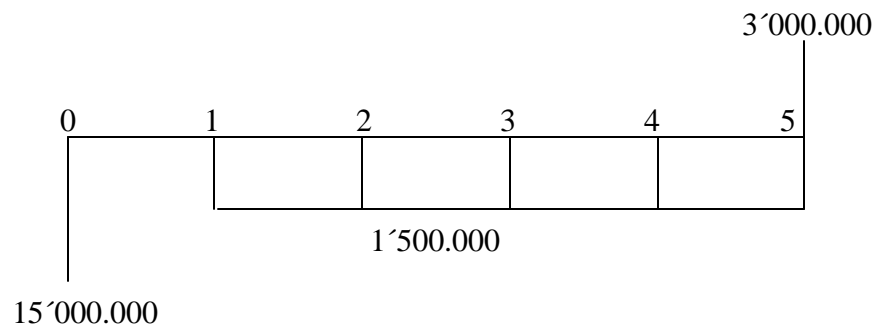
	ALTERNATIVAS	
	A	B
INVERSIÓN INICIAL	15'000.0000	25'000.000
COSTO DE MANTENIMIENTO	1'500.000	500.000
VALOR DE SALVAMENTO	3'000.000	10'000.000
VIDA DE SERVICIO	5	5

Si la TMAR que desea la empresa es de 12%. ¿Cuál es la alternativa que representa mayor economía para Aceros Ltda.?

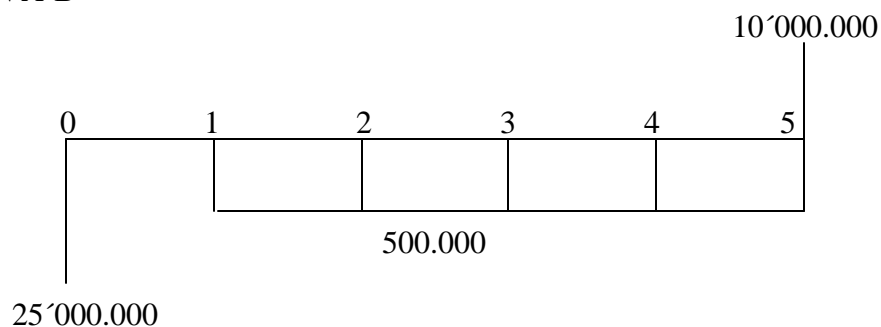
El criterio en estudio plantea el siguiente análisis: ¿Se justifica hacer la inversión adicional al pasar del proyecto de menor inversión inicial al de mayor inversión inicial por los beneficios adicionales que se generan respecto a los ingresos o ahorros?

Para dar respuesta a los interrogantes deberemos antes que nada graficar la situación, como se hará a continuación.

#### ALTERNATIVA A



#### ALTERNATIVA B



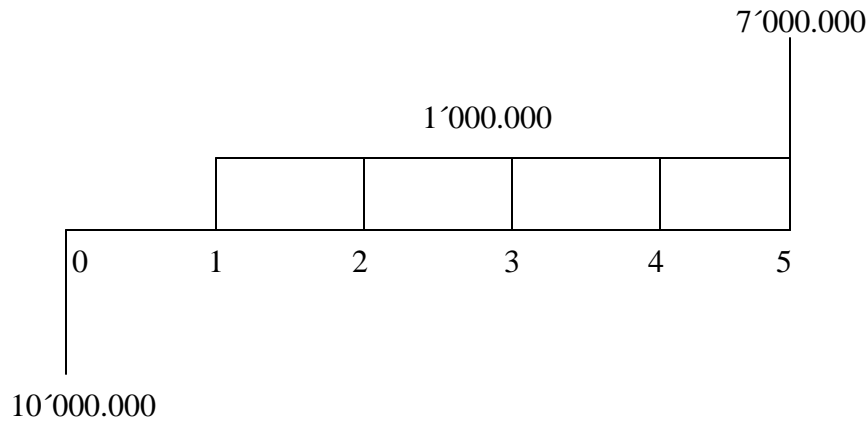
#### Capítulo XI

Este método nos permite determinar cuál es más conveniente de los dos proyectos, a fin de partir pocos dineros en su mantenimiento anual ahorrándose así 1'000.000 cada año y a final de su vida de servicio 7'000.000 más en el valor del mercado.

Para iniciar el análisis se deberá elaborar el *diagrama de tiempo incremental*; el cual se obtiene restando los flujos de la alternativa con mayor inversión inicial menos la alternativa de menor capital inicial, es decir,

### La alternativa B – La alternativa A = Proyecto Incremental

Para obtener lo siguiente:



Al pasar del proyecto A al proyecto B hay que invertir \$ 10'000.000 adicional y se obtienen unos ingresos adicionales o ahorro de \$ 1'000.000 durante cinco años y \$ 7'000.000 al final del año cinco ¿Se justificará pasar del proyecto A al B?

Hecho esto se procede a determinar la tasa correspondiente a esta nueva alternativa (TRI). La TRI se determina de igual manera que la TIR, lo cual aprendió en la anterior sección. Por tanto afirmamos que el valor de la TRI es:

$$TRI = 4.5 \%$$

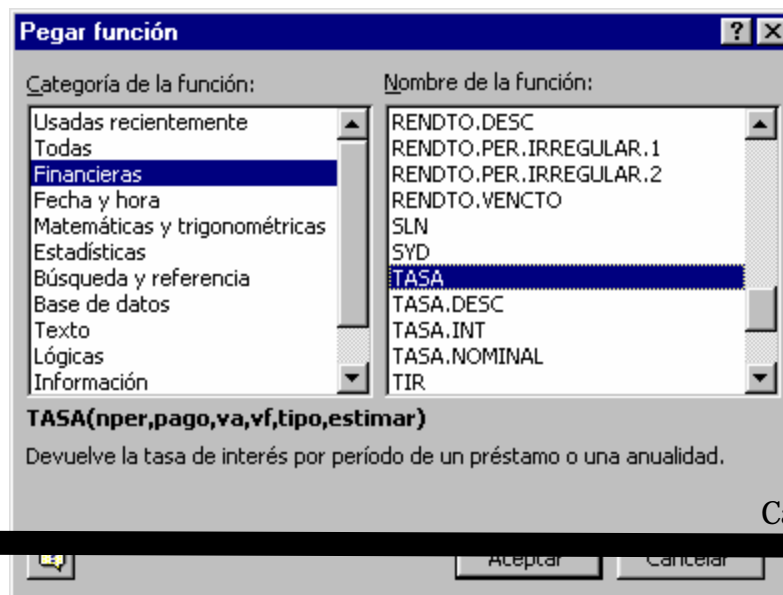
Como se puede observar la tasa de esta alternativa no cumple para nada con los requerimientos de la empresa ya que ella desea percibir un rendimiento de  $12\%$ . Por lo tanto, no es recomendable adquirir la cortadora A, e invertir los \$10'000.000 de diferencia con ella en la otra alternativa en cualquier otro proyecto, con el fin de que este dinero produzca intereses.

Este método también puede resolverse con la ayuda de Excell así:

1. Determine el diagrama de tiempo incremental



2. Abra ahora una hoja de cálculo seleccione la función  $fx$  y elija en la columna uno la función *Financiera* y de la columna dos escoja la función *Tasa*.



La función Tasa le devolverá el valor de la tasa de interés del proyecto. Usted deberá utilizar esta función cuando el proyecto posee flujos de caja uniformes de lo contrario empleará la función TIR.

3. Introduzca los valores que le proporciona el ejercicio.

TASA

Nper 5 = 5

Pago 1000000 = 1000000

Va -10000000 = -10000000

Vf 7000000 = 7000000

Tipo = número

= 0.045182501

Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una anualidad.

Vf es el valor futuro o saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago. Si se omite, se usa VA = 0.

Resultado de la fórmula = 0

Aceptar Cancelar

Recuerde que los ingresos son positivos y los egresos son negativos. El resultado que se obtiene si se sigue este procedimiento es el mismo que el obtenido mediante ensayo y error; cabe aclarar que estos valores puede que no sean exactamente iguales por causa de la aproximación y el redondeo.

### C. Tasa Verdadera de Rentabilidad (TVR)

#### Capítulo XI

La tasa verdadera de rentabilidad (TVR) es aquella tasa de interés que combina las características o requerimientos del proyecto con las características propias del proyecto, es decir, es una tasa que toma en cuenta la TIR y la TMAR para su análisis.

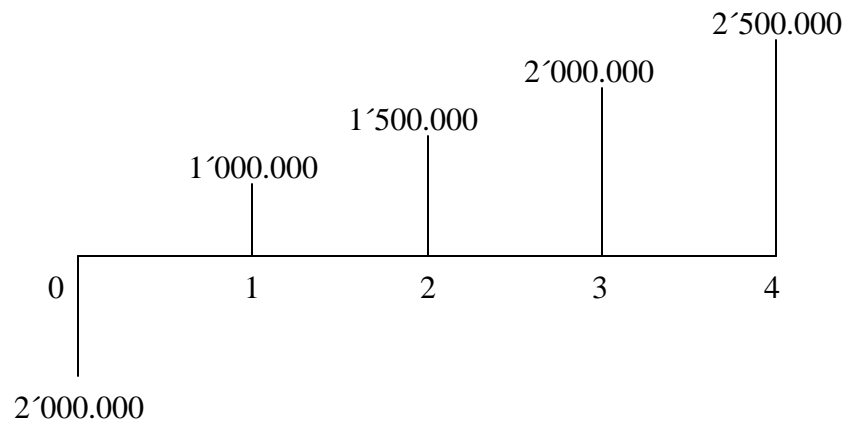
Cuando el proyecto reinvierte los excedentes a una tasa igual a la TIR del proyecto entonces la TVR será igual a la TIR.

Cuando analizamos varias alternativas deberemos elegir aquella con mayor TVR.

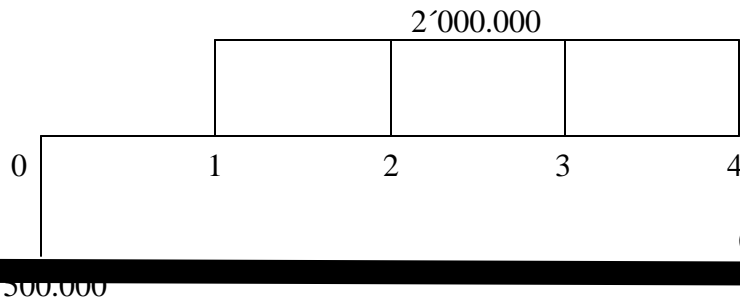
#### Ejercicio Práctico

Cuál de los siguientes proyectos es el mejor evaluándolo de acuerdo al criterio TVR y sabiendo que existe un interés de oportunidad del 20%.

Proyecto A



Proyecto B



Capítulo XI

Como ya sabemos la TVR combina la tasa del proyecto con la tasa de oportunidad del inversionista; por tanto para determinar el valor de ella hagamos lo siguiente:

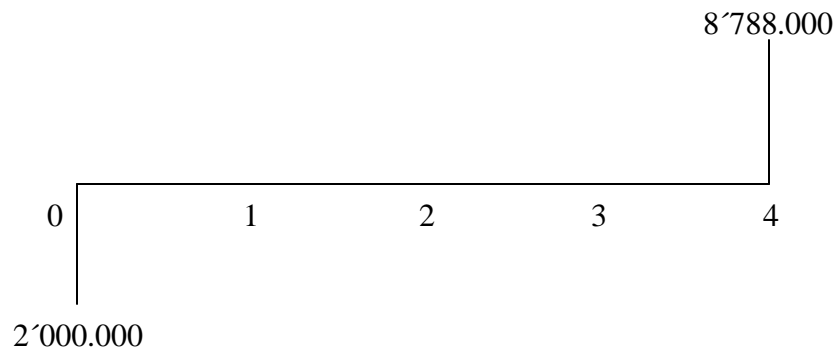
- a. Calcule la cantidad de dinero total que se acumulará al cabo de los cuatro años si el excedente generado por el proyecto en cada periodo se reinvierte a la TMAR establecida.

En este punto deberemos tomar todos los flujos de caja (a partir del periodo uno) que caractericen al proyecto, y determinar su equivalente al final de los cuatro años pensando en que usted lo invirtió en otra actividad a la TMAR establecida.

La determinación del futuro de los flujos de caja del proyecto A es sencilla, ya que como pudo haber notado estos forman un gradiente, figura que usted ya maneja. Por tanto podemos afirmar que el futuro de esos flujos es el siguiente:

$$F_A = 8'788.000$$

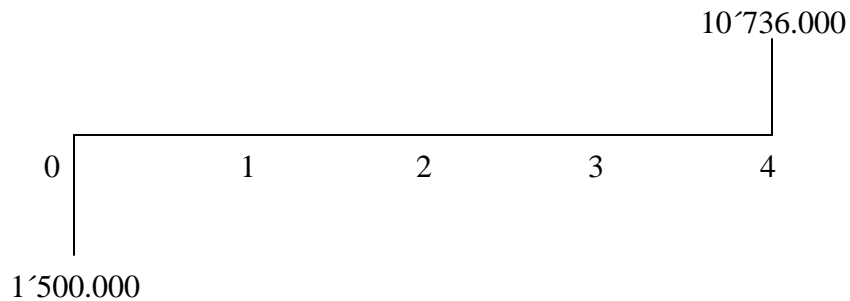
De esta manera el diagrama de flujo del proyecto A queda reducido a lo siguiente:



Para el proyecto B contamos con una anualidad a la cual se le determinará su valor equivalente en el futuro; obteniendo:

$$F_B = 10'736.000$$

El nuevo diagrama de flujo para el proyecto B será:



b. Ahora deberemos hallar la TIR de cada uno de los proyectos representados en los diagramas anteriores en los que se tuvo en cuenta la TMAR, y determinar así una rentabilidad verdadera (TVR) que combine lo producido directamente por el proyecto con las posibilidades de inversión.

TVR del proyecto A es: 44.78%

TVR del proyecto B es: 63.56%

Por tanto el proyecto a elegir será B, ya que es el que mayor tasa de rentabilidad verdadera nos ofrece.

### 11.2.3. Criterio decisorio con base en tiempo

Este grupo de criterios decisorios como su nombre lo indican, basa su análisis en el estudio del tiempo necesario para recuperar la inversión hecha en el proyecto. Estos permiten analizar la conveniencia de una o más alternativas, una vez que se comparen con el tiempo en el cual el inversionista espera recuperar su capital invertido.

### ***A. Periodo de Recuperación de la Inversión (PRI)***

A este criterio también se le conoce con el nombre de vida útil ó vida depreciable, refiriéndose al tiempo que debe transcurrir para que usted recupere el capital que invirtió en el proyecto, es decir, si por ejemplo invierte \$ 200.000 en un proyecto, el cual le generara \$ 50.000 anuales durante 10 años el periodo de recuperación de su inversión (PRI) será igual a 4 años luego de este periodo lo demás es ganancia.

El método PRI es llamado de igual manera método de liquidación simple o método del periodo de reembolso.

Un proyecto se acepta con apoyo de este índice cuando el inversor considera que el tiempo de recuperación del dinero es razonable, de lo contrario se rechazará; pero si se compara con varias alternativa se elegirá la que arroje un PRI menor a las demás.

Este índice guarda una relación estrecha con el VPN, ya que si este es positivo la inversión se recuperará en un tiempo inferior a la vida de servicio del proyecto, por tanto entre mayor sea el VPN más rápido se recuperará el capital invertido.

La recuperación de la inversión realizada al inicio del proyecto será más tardía entre mayor sea la TMAR del inversionista. Cuando la TMAR es igual a la TIR, el PRI será igual a la vida de servicio del proyecto.

Una de las desventajas de este indicador es que no toma en cuenta el valor del dinero a través del tiempo ni los flujos que se generan luego de recuperada la inversión.

#### ***11.2.4. Criterio decisorio adimensional***

Estos criterios adimensionales son llamados de esta manera ya que son el resultado de una división entre dos cantidades cuyas unidades son iguales.

### A. *B/C (Relación Beneficio / Costo)*

Este es uno de los criterios más utilizados cuando se trata de analizar proyectos sociales. Como su nombre lo indica, este índice no es más que una relación entre los beneficios y los costos que caracterizan la alternativa o proyecto. Entendiendo por beneficios todos los flujos de caja netos del proyecto y por costos todos los egresos que se tienen que hacer.

Este índice se obtiene dividiendo los beneficios sobre los costos, o los ingresos sobre los egresos. Debemos saber que existen beneficios positivos y negativos. Los beneficios positivos son aquellos relacionados con ingresos que se perciben con el proyecto y los beneficios negativos son las desventajas que se presentan cuando el proyecto se ha puesto en marcha, por ejemplo cuando se compra un terreno adicional para los animales de la empresa, ya que no los pueden vender hasta que estos no crezcan decisión de la que no se obtiene ningún beneficio, esto se asume como una pérdida o un beneficio negativo; por consiguiente la fórmula que representa la relación Beneficio/Costo es:

$$B/C = \frac{\text{Beneficios Positivos} - \text{Beneficios Negativos}}{\text{Costos}}$$

Este criterio se analiza de la siguiente manera:

- $B/C \geq 1$

Si este es el caso entonces debemos aceptar el proyecto ya que se va a ganar más de lo que cuesta realizarlo.

- $B/C < 1$

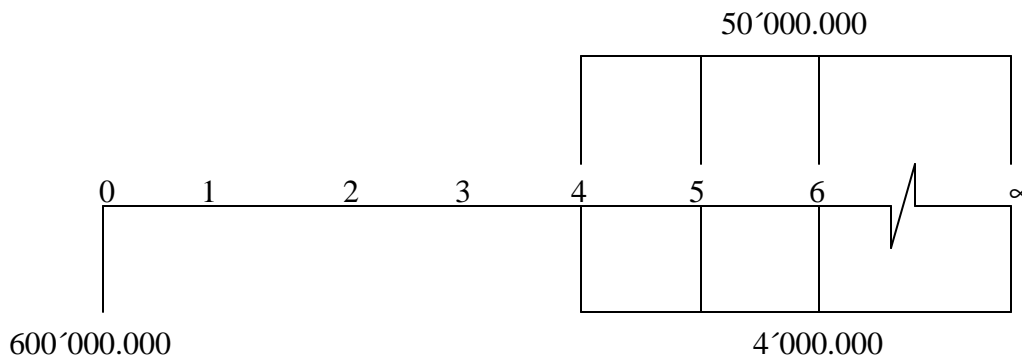
Si el resultado se ubica en este ítem debemos rechazar el proyecto ya que este no será tan rentable como para recuperar la inversión.

**Ejercicio Práctico**

Se está pensando en la construcción de una carretera que comunique en forma directa a Cali con la costa Atlántica con el fin de que los artesanos puedan comercializar sus productos en esta zona, pues se ha descubierto que el mejor mercado para la venta de las artesanías caleñas es esta región. Se estima que la construcción de la carretera durará 3 años y costará \$ 600'000.000 de pesos y requiere \$ 4'000.000 anuales para mantenimiento. Esta carretera reducirá tanto el tiempo entre una ciudad y otra, que se convertirá en paso obligatorio, para lo cual, se colocará un peaje que permitirá percibir unos ingresos anuales promedio de \$ 50'000.000. Si los precusores del proyecto desean percibir una rentabilidad del 6%, ¿ Sería conveniente o no llevarlo a cabo?. Para su respuesta apóyese en el criterio B/C

Para resolver este ejercicio deberá seguir los siguientes pasos:

1. Realice un diagrama de flujo que ilustre la situación.



2. Convierta los beneficios y los costos en valores presentes

Beneficios:

$$P = \frac{50'000.000}{0.06} = 833'333.333$$

Costos de mantenimiento:

$$P = \frac{4'000.000}{0.06} = 66'666.668$$

3. Hecho esto se procederá a reemplazar los valores en la ecuación de Beneficios/ Costos.



$$B/C = \frac{\text{Beneficios}}{\text{Costos}}$$

$$B/C = \frac{833.333.333}{600'000.000 + 66'666.666}$$

$$B/C = 1.25$$

El valor que toma B/C nos quiere decir que es conveniente realizar el proyecto ya que además de cubrir los costos en los cuales se incurre se obtiene una ganancia adicional.

### 11.3. EJERCICIOS RESUELTOS

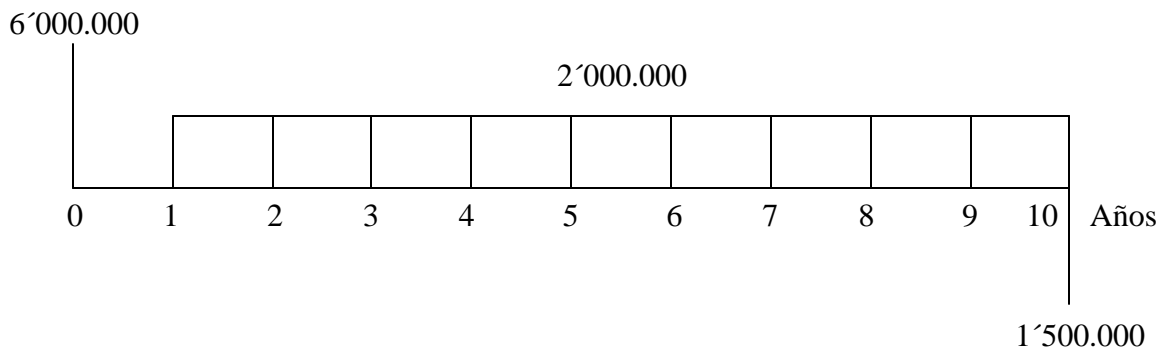
1. El señor Fajardo desea obsequiar a su esposa un carro, pero no sabe por cual decidirse; por tanto solicita a usted ayuda para elegir aquel que sea más económico. Para esto le brinda la siguiente información sobre los vehículos, recordándole que la tasa mínima que desea es de 30%.

	<i>RENAULT 4</i>	<i>CHEVROLET SWIFT</i>	<i>MAZDA ALLEGRO</i>
<i>Valor del vehículo</i>	6'780.000	19'350.000	25'790.000
<i>Costo anual de mantenimiento</i>	3'000.000	1'500.000	800.000
<i>Valor de salvamento</i>	2'000.000	9'000.000	12'000.000
<i>Vida útil</i>	10	10	10

### Capítulo XI

... de evaluación de costos, utilizando el CPE.

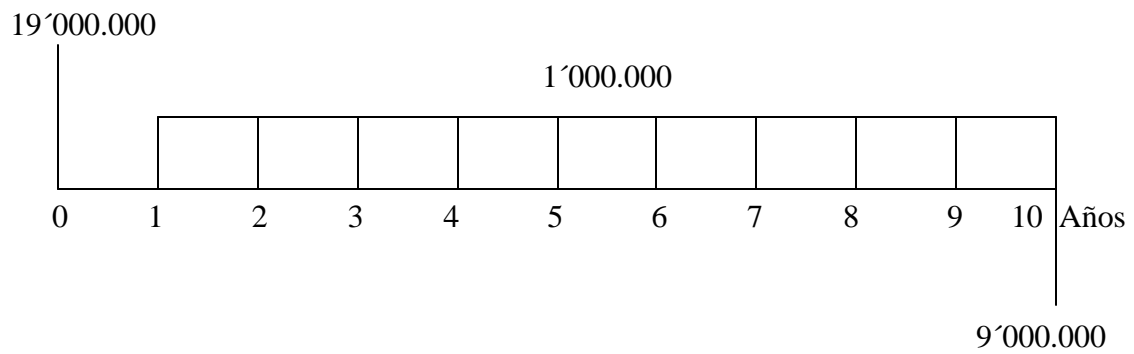
RENAULT 4



$$CEP = 6'000.000 + 2'000.000 (P/A, 30\%, 10) - 1'500.000 (P/F, 30\%, 10)$$

$$CPE = 12'291.885$$

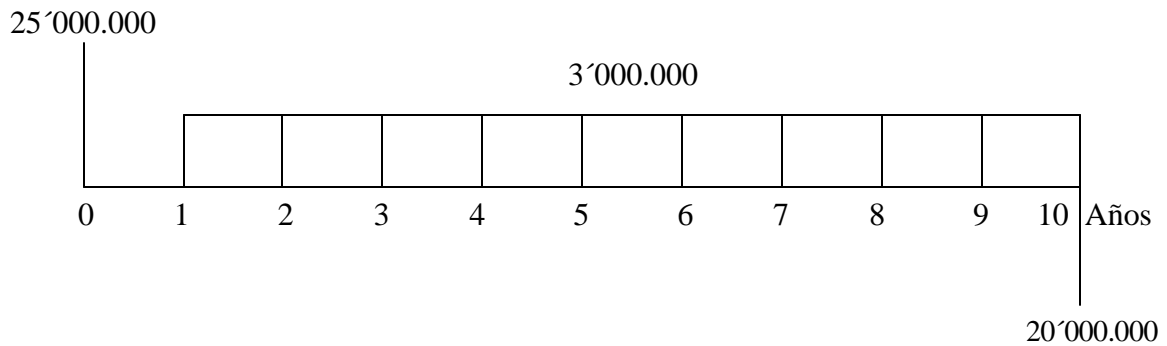
#### CHEVROLET SWIFT



$$CPE = 19'000.000 + 1'000.000 (P/A, 30\%, 10) - 9'000.000 (P/F, 30\%, 10)$$

$$CPE = 21'438.688$$

MAZDA ALLEGRO



$$CPE = 25'000.000 + 3'000.000 (P/A, 30\%, 10) - 20'000.000 (P/F, 30\%, 10)$$

$$CPE = 42'098.472$$

Por tanto si el señor Fajardo desea regalar el carro más económico de los tres seleccionados deberá elegir el Renault 4.

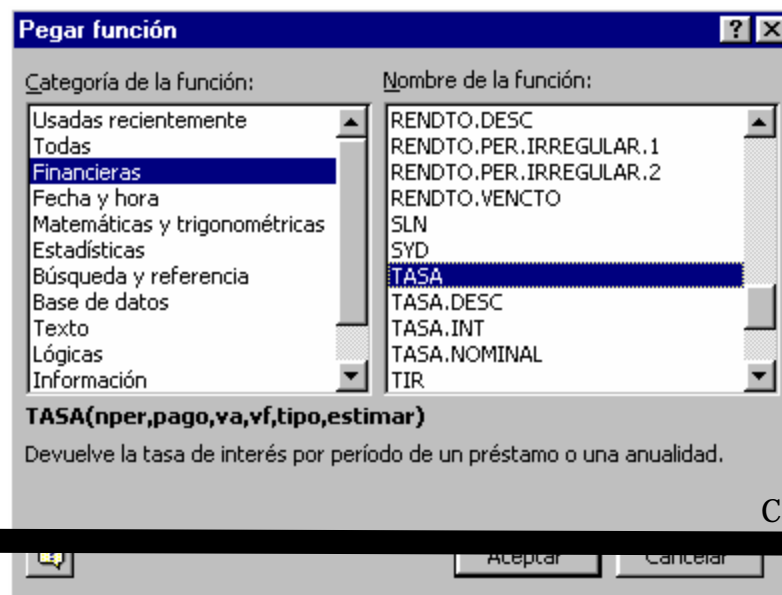
2. Una academia de baile piensa invertir \$ 13.500.000 en la compra de una máquina de cocer, ya que piensa fabricar uniformes para la institución y venderlos entre los profesores y alumnos. Los precursores del proyecto hicieron un cálculo de producción de 1.000 uniformes durante el año; se pronostica que al final del año no habrá existencias en el inventario. Cada uniforme tiene un valor de \$ 30.000 con un costo de fabricación de \$ 25.000. Calcule la TIR del proyecto de la academia durante un periodo de cinco años teniendo en cuenta que al final de este la maquinaria adquirida tendría un valor de salvamento de \$ 1'000.000.

- Unidades vendidas anualmente = 1.000
- Precio de venta = \$ 30.000
- Costo de fabricación = \$ 25.000
- Utilidad = \$ 5.000
- Ganancias anuales = \$ 5.000 \* 1.000 = 5'000.000

$$13'500.000 = 5'000.000 (P/A, i\%, 5) + 1'000.000 (P/F, i\%, 5)$$

Esta ecuación puede resolverse de tres formas:

- Por medio de tanteo como aprendió en capítulos pasados.
- Por medio de la función TASA en el programa de Excel que se muestra a continuación.



Al dar *Aceptar* aparecerá una nueva ventana donde debe ingresar los valores que éste le solicita como se ilustra a continuación.

TASA

Nper	5	= 5
Pago	5000000	= 5000000
Va	-13500000	= -13500000
Vf	1000000	= 1000000
Tipo		= número

= 0.259650164

Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una anualidad.

**Vf** es el valor futuro o saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago. Si se omite, se usa VA = 0.

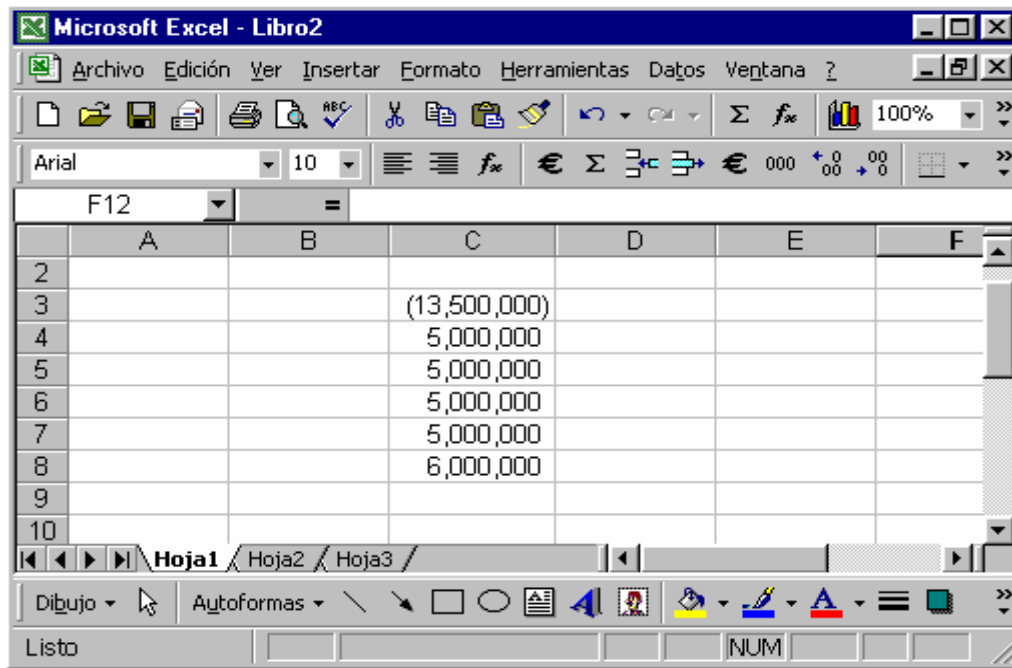
Resultado de la fórmula = 0.259650164

Aceptar Cancelar

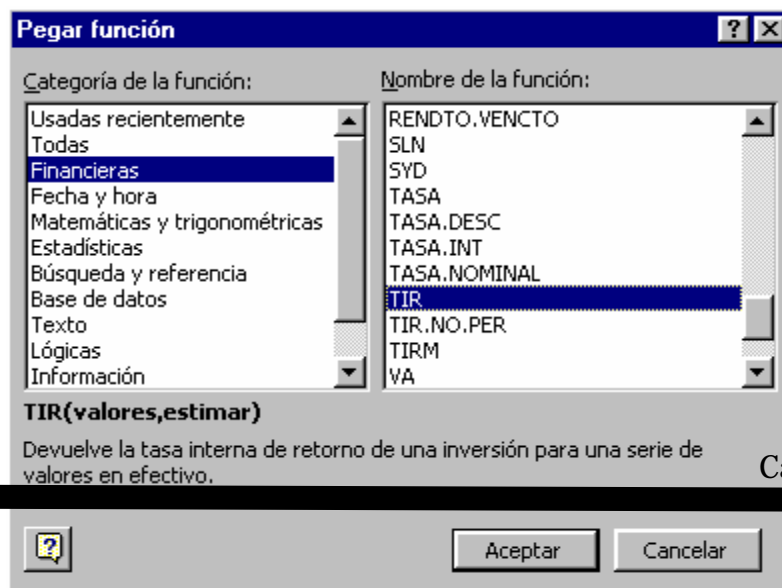
Al Aceptar la dará el resultado, que en este caso es:

$$\text{TIR} = 25.96\% \text{ anual}$$

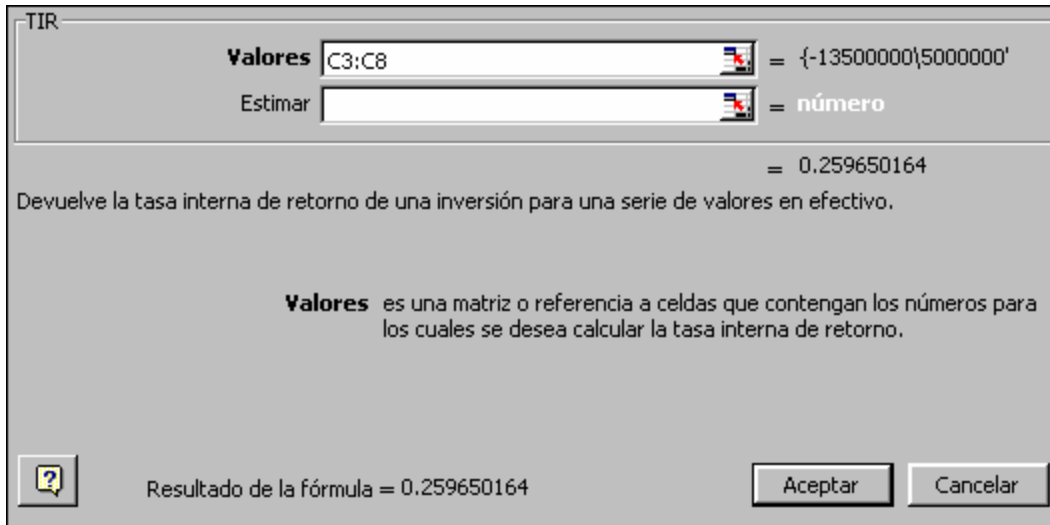
c. Por medio de la función TIR. Para emplear esta función debe colocar en la hoja de cálculo del programa Excel los valores correspondientes a los flujos de caja de cada periodo así.



Recordemos que los egresos son negativos y los ingresos son positivos. Como se puede observar en el flujo de caja, el último periodo es de \$ 6'000.000, esto se debe a que se sumaron los flujos que había en este periodo. Hecho esto busque la función TIR.



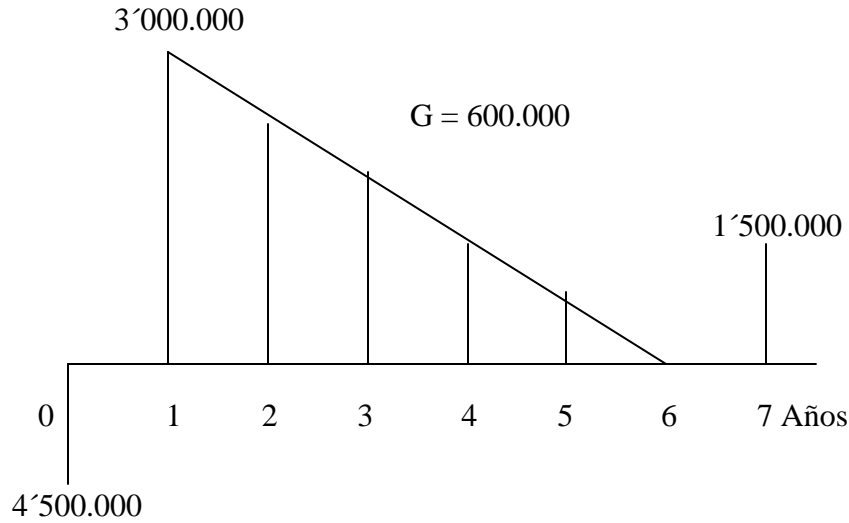
Una vez pulse el botón de *Aceptar*, introduzca los valores a la ventana que este le despliega.



De esta manera obtiene el mismo resultado.

$$\text{TIR} = 25.96\% \text{ anual}$$

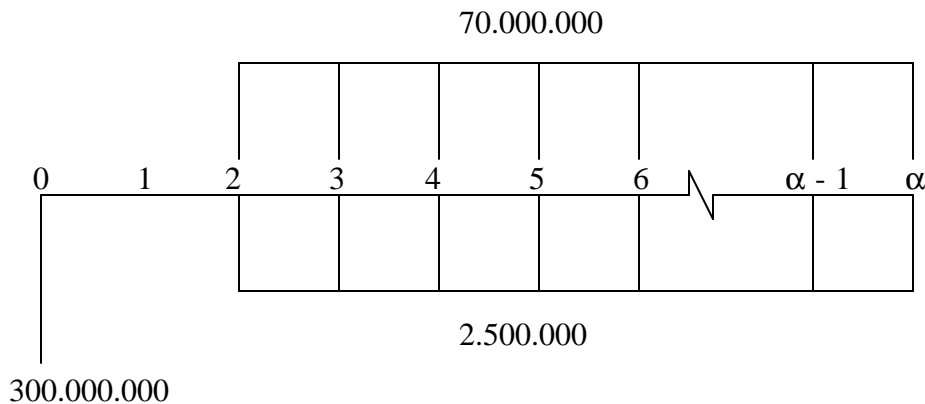
3. El señor Jorge tenía un capital de \$ 4'500.000, el cual decidió invertir en la creación de una funeraria en San Vicente del Caguan (Zona de altos combates guerrilleros). El negocio debido a la zona en la cual se ubicó se le auguraba un excelente futuro, lo cual fue acertado en el primer año ya que se obtuvieron ganancias de \$ 3'000.000, pero esto no se mantuvo debido a los tratados de paz firmados entre el gobierno y la guerrilla, por tal motivo las ganancias disminuyeron en \$ 600.000 año tras año, hasta llegar a cero en el año sexto, por eso Don Jorge decidió vender la empresa en \$ 1'500.000. ¿Cuál será el valor presente neto de la inversión?, si don Jorge espera una TMAR del 15%.



$$VPN = - 4'500.000 + 3'000.000 (P/A, 15\%, 6) - 600.000 (P/G, 15\%, 6) + 1'500.000 (P/F, 15\%, 7)$$

$$VPN = 2'655.150$$

4. Se ha visto la oportunidad de construir en el barrio “muchu agüita” una cuneta a fin de permitir el desagua rápido y eliminar la permanecía de las aguas negras en la carretera. El proyecto costará \$ 300.000.000, más \$ 2.500.000 anual correspondiente al mantenimiento de esta. La alcaldía estima que se podrían obtener beneficios anuales por \$ 70.000.000 una vez construida la cuneta, sabiendo que su construcción demora un año. ¿Qué tan conveniente es este proyecto, cuando sabemos que este es un proyecto para toda la vida? La tasa es de 15% anual.





Beneficios anuales

$$P = \frac{70.000.000}{0.15} = 466.666.666$$

Costo de mantenimiento anual

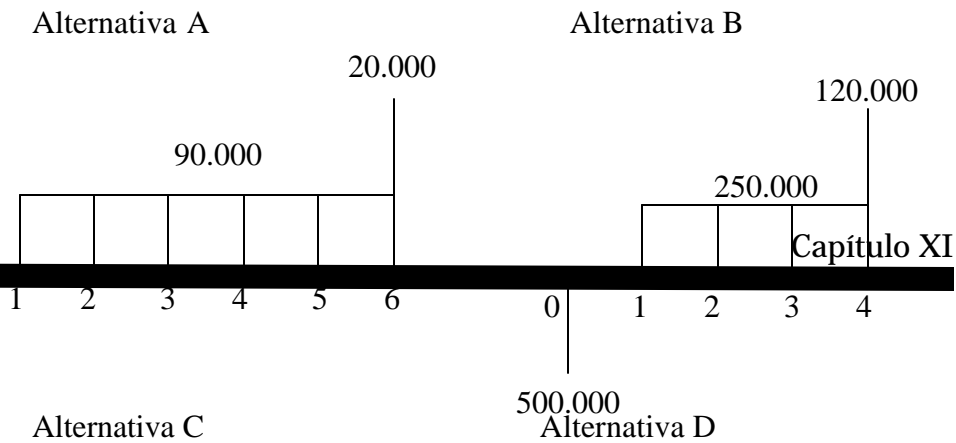
$$P = \frac{2.500.000}{0.15} = 16.666.666$$

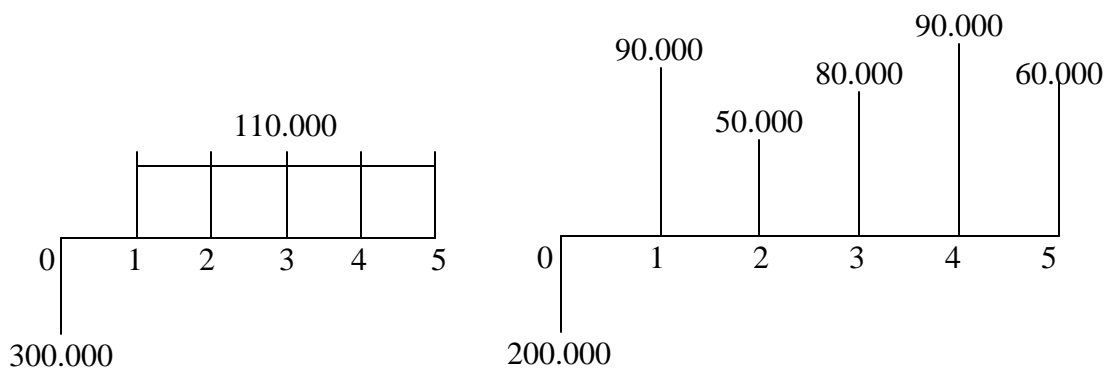
Relación Beneficio / Costo

$$B/C = \frac{466.666.666}{300.0000.000 + 16.666.666} = 1.47$$

El análisis que se ha hecho al proyecto nos da un resultado positivo lo cual es conveniente. por tanto es beneficioso invertir en la puesta en marcha del proyecto.

5. Don Martín Martínez acaba de heredar \$ 500.000, los cuales ha pensado invertir en algún proyecto antes de guardarlos en un banco o gastárselos; por tal motivo fue donde un comisionista de bolsa quien le aconsejó no invertir en una sola alternativa, por lo cual le ofreció varias opciones dentro de un portafolio de acciones que él manejaba. Dichas acciones se ven representadas en los flujos de caja que se muestran seguidamente.





¿En que acciones cree usted, le aconsejaría el comisionista invertir a Don Martín, si su TMAR es del 20% anual?

Como podemos notar estas alternativas pertenecen al grupo de las independientes, ya que necesitaremos escoger varias y la elección de una es independiente a la de otra.

Cuando nos enfrentamos a alternativas de este tipo debemos seguir los siguiente pasos para llegar a una respuesta acertada donde se escoja la combinación óptima.

a. Determine el VPN de cada una de las alternativas.

$$VPN_A = -100.000 + 90.000 (P/A, 20\%, 6) + 20.000 (P/F, 20\%, 6)$$

$$VPN_A = 205.994$$

$$VPN_B = -500.000 + 250.000 (P/A, 20\%, 4) + 120.000 (P/F, 20\%, 4)$$

$$VPN_B = 205.054$$

$$VPN_C = -300.000 + 110.000 (P/A, 20\%, 5)$$

$$VPN_C = 28.976$$

$$VPN_D = -500.000 + 250.000 (P/A, 20\%, 4) + 120.000 (P/F, 20\%, 4) + 60.000 (P/F, 20\%, 5)$$

$$VPN_D = 23.534$$

Al mirar los resultados podremos notar que todas las opciones son convenientes ya que todos los VPN son positivos, y podemos pensar que se debería invertir en la alternativa A y

B pues son las que mayor VPN arrojaron, pero debemos tener presente que hay una limitante correspondiente al capital inicial ya que solo se cuenta con \$ 500.000 y para invertir en A y B se necesita por lo menos \$ 600.000.

b. Establezca las posibles combinaciones.

Al ser todas las opciones factibles podemos establecer todas las combinaciones posibles entre ellas.

Combinaciones:

A + B = Esta combinación no es posible necesitamos un capital inicial de \$ 600.000 y solo contamos con \$ 500.000

B + C = Esta combinación no es posible, ya que si observa sólo la alternativa B absorbe totalmente la disponibilidad del capital inicial.

C + D = Esta combinación si es posible

A + C = Esta combinación si es posible

A + D = Si es posible

B + D = No es posible

Si resumimos solo contamos con la combinación C + D, A + C y A + D.

c. Totalicemos ahora los valores netos presentes para cada una de las combinaciones de la siguiente manera:

<i>COMBINACIÓN</i>	<i>VALOR PRESENTE TOTAL</i>
C + D	52.510
A + C	234.970
A + D	229.528

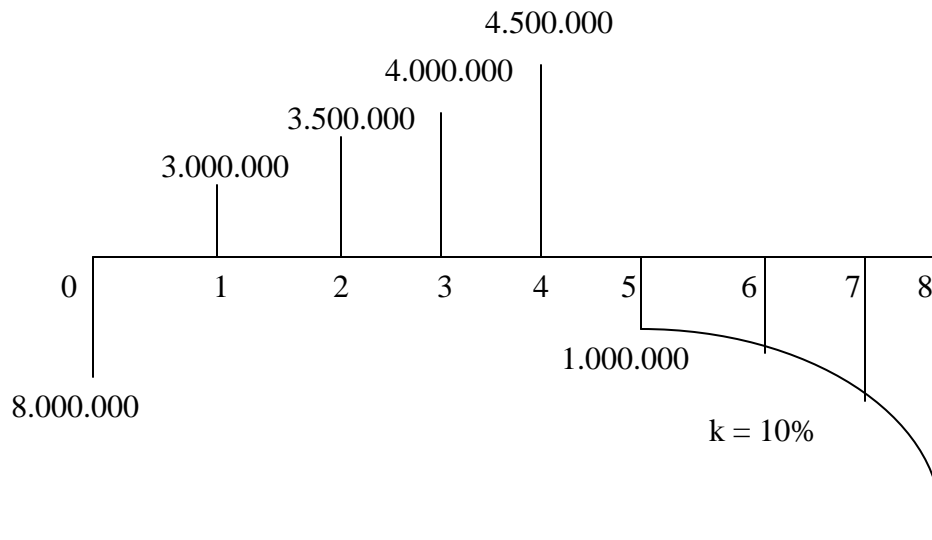
Capítulo XI

Combinación más óptima es aquella que posea mayor valor presente neto que para este caso es la combinación A + C. Por tal razón el comisionista de bolsa debería aconsejar a Don Martín que invierta en la opción A y en la C.

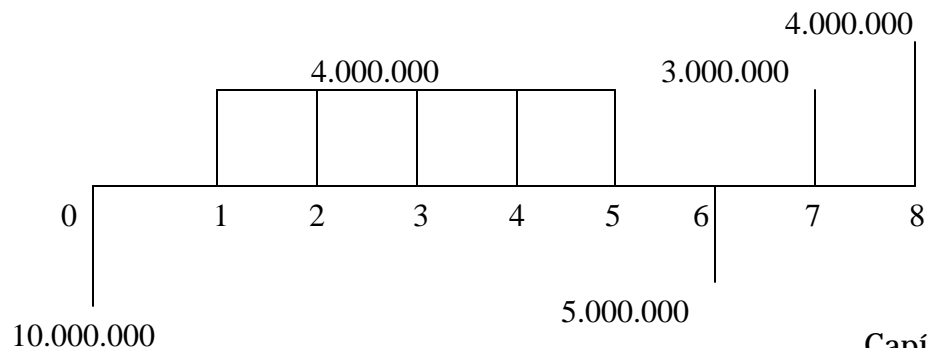
## 11.4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. A continuación se muestran los flujos de cajas que caracterizan dos proyectos muy importantes, de los cuales deberemos escoger aquel que sea más rentable para nosotros como inversionista.  $TMAR = 15\%$

PROYECTO A



PROYECTO B

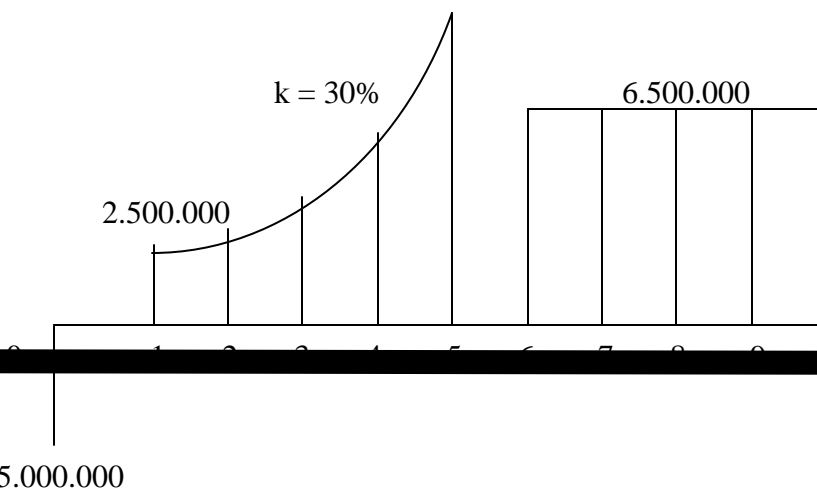


2. Juanita desea comprar un jean para ir al colegio ya que comienzan las clases y no tiene que colocarse. A Juanita le restan dos años de estudio todavía, por tanto desea saber cual de los siguientes jeans le es más económico.

	DIESEL	CLASSIC JEANS
PRECIO	120.000	30.000
VIDA ÚTIL (AÑOS)	2	1
VALOR DE SALVAMENTO	25%	10%
TINTURADAS AL AÑO	1	2
VALOR DE LA TINTURADA	20.000	5.000
INCREMENTO ANUAL DE LA TINTURADA	15%	5%

Todo jean que Juanita considere que no le sirve se lo vende a una modista que elabora maletines con la tela de estos pantalones y esta le paga un porcentaje el valor del jean.  
¿Cuál de los dos jeans le aconsejarías a Juanita comprar?

3. Al señor Gabriel Gaviria le han propuesto invertir en un proyecto en el cual exportarían la fruta Noni al continente africano, ya que se han dado cuenta que esta fruta cura todos los males incluyendo la desnutrición. Si el capital de inversión que posee el señor Gaviria, está depositado en una cuenta en el banco la cual le deja una rentabilidad del 15%. El señor Gabriel desea estar muy seguro de la decisión de inversión en el proyecto para lo cual solicita a usted le diga cual es la verdadera rentabilidad de este. El flujo de caja característico del proyecto se muestra a continuación.



Capítulo XI

## 11.5. RESUMEN

**E**n este capítulo aprendimos diversas formas de determinar si una alternativa o proyecto es o no conveniente económicamente; para lo cual empleamos ciertos criterios decisorios dependiendo de la situación.

Entre los criterios decisorios encontramos los que se basan en la evaluación de los costos los cuales son aplicables en los proyectos operacionales, es decir, aquellos que solo generan costos y no ingresos, como la compra de un equipo, maquinaria, etc.

Los criterios de evaluación de ingresos y egresos nos sirven para analizar la conveniencia de los proyectos de inversión.

Entre los criterios basados en la rentabilidad encontramos: La TIR que permite conocer la rentabilidad propia del proyecto; la TRI que hace posible conocer si la diferencia entre las inversiones hechas en los proyectos son justificables; y La TVR que combina la TIR con la Tasa de oportunidad del inversionista (TMAR). Además existen el criterios con base en el tiempo y criterios basados en el análisis de los costos y beneficios generados por el proyecto.

## AUTOEVALUACIÓN

**S**on pruebas diseñadas con el fin de evaluar el logro de los objetivos; de esta forma se puede comprobar, por si mismo, si ha aprendido determinados conceptos y si puede continuar.

Las autoevaluaciones son pruebas que se deberán desarrollar o responder en forma individual y sin engañarse a si mismo. El análisis o corrección posterior de la prueba puede hacerlo en grupo si así lo desea.

Cada autoevaluación tendrá al final del texto la tabla respuesta, de tal forma que se pueda hacer su comprobación inmediata y le permita decidir si avanza o repasa algunos contenidos anteriores.

### IMPORTANTE

- Si después de confrontar las respuestas, usted verifica que cometió errores o tuvo dificultades, no se preocupe ni se desanime.
- Recorra nuevamente al contenido del capítulo y repase los conceptos necesarios, o solicite ayuda a su profesor.
- Repita la autoevaluación y no continúe con el próximo capítulo hasta tanto no haya comprendido todo y logrados los objetivos de este capítulo.
- Si usted respondió satisfactoriamente toda la prueba, FELICITACIONES, ha logrado los objetivos que se plantearon.
- Inicie su preparación para la evaluación escrita o examen parcial, tome como referencia las actividades de refuerzo contenidas en este capítulo

## AUTOEVALUACIÓN XI

14. ¿Cuáles clases de alternativas de inversión o financiación existen?
15. ¿Cómo son las clasificaciones de los criterios decisorios?
16. ¿En qué tipos de proyectos se deben emplear los criterios de evaluación de costos?
17. ¿Qué particularidad tiene la TVR con respecto a los demás métodos empleados para evaluar la conveniencia de cada una de las alternativas?
18. ¿Qué resultados se obtiene al utilizar el método de la TIR?
19. ¿En qué consiste el método de la TRI?
20. ¿Qué resultados se obtiene al emplear el método de PRI?

COMPARE SUS RESPUESTAS CON LAS QUE APARECE AL  
FINAL DEL TEXTO



### *ACTIVIDADES DE REFUERZO*

10. Sus compañeros de clases no entendieron el concepto de costo de capital ni el de TMAR. ¿Cómo lo podría explicar usted?.
11. Realiza la mayoría de los ejercicios correspondiente a este capítulo que encuentre en el libro de preferencia.
12. Crea ejercicios con situaciones cotidianas, donde tengas que decidir entre diversas alternativas económicas y darle solución.
13. Comparte con tus compañeros de clases la solución de los ejercicios propuestos en el capítulo anterior.

## BIBLIOGRAFÍA

BACA, Gabriel. Fundamentos de Ingeniería Económica. México: McGraw-Hill, 1994.

BACA Guillermo, Ingeniería Económica, Colombia: Fondo Educativo Panamericano, 2000.

INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR, Metodología y Estrategias de la educación Superior Abierta y a Distancia, UIS, Bogotá: ICFES, 1983.

THUESEN, H. G., Ingeniería Económica, Colombia: Prentice Hall Internacional, 1981.

VARELA, Rodrigo. Evaluación Económica de Inversiones, México: McGraw-Hill, 1997.

SMITH, Gerald. Ingeniería Económica Análisis de los Gastos de Capital, Limusa, 1987.



# SECCIÓN DE RESPUESTAS

Dígame y yo olvidaré,  
Muéstreme y yo recordaré,  
Déjeme participar y yo  
entenderé.  
[Confusio]

C  
A  
P  
I  
T  
U  
L  
O

XII

## AUTOEVALUACIÓN I

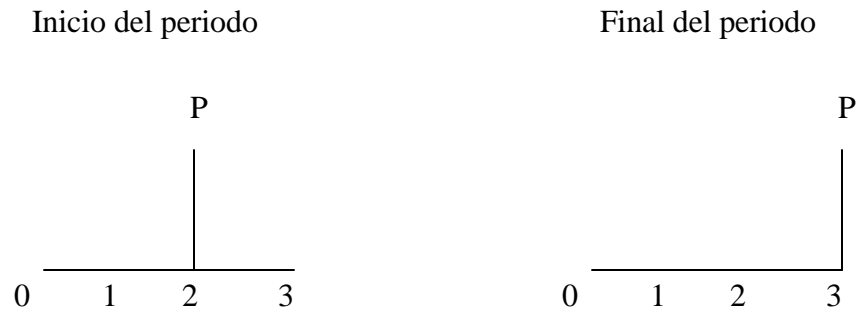
1. La importancia de la Ingeniería Económica radica en diversos aspectos, entre los cuales se encuentra la relación que busca al optimizar aspectos técnicos, recursos humanos, físicos y económicos, en aras de proveer bases que permitan determinar una mejor alternativa para lograr la adquisición o retiros de los bienes de capital entre otros.
2. Ingeniería Económica: Es un conjunto de conceptos y técnicas matemáticas que empleamos para obtener una aproximación racional y significativa que permita evaluar y comparar aspectos económicos de las alternativas propuestas.
3. Una alternativa es una opción para una situación dada.
4. Un análisis en Ingeniería Económica conduce a determinar cual es el mejor punto de vista económico entre las alternativas que se tienen en consideración.
5. La Ingeniería Económica recibe otros nombres tales como Matemáticas Financieras, Administración de inversiones, análisis de inversiones, etc.
6. La Ingeniería Económica tiene diversas aplicaciones, entre las cuales se pueden mencionar el uso en el Mercado Financiero, Gobierno, Actividades Productivas, Vida Privada, Sociedad, entre otras.

## AUTOEVALUACIÓN II

1. Mercado financiero es el lugar, mecanismo o sistema en el cual se compra o vende cualquier activo financiero y la bolsa de valores es un mercado en el cual se negocian valores previamente invertidos en el mercado primario.
2.
  - a. F
  - b. V
  - c. F
  - d. V
  - e. V

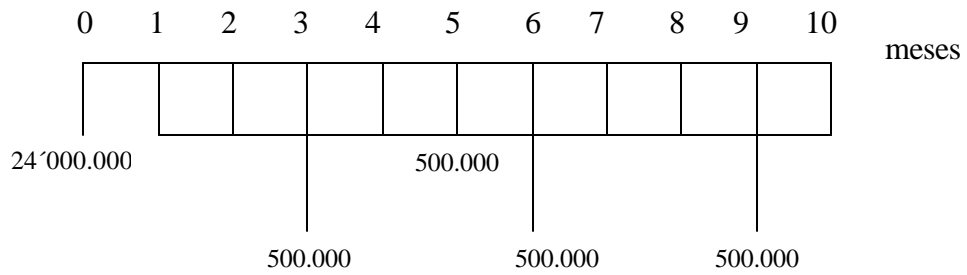
### AUTOEVALUACIÓN III

1.

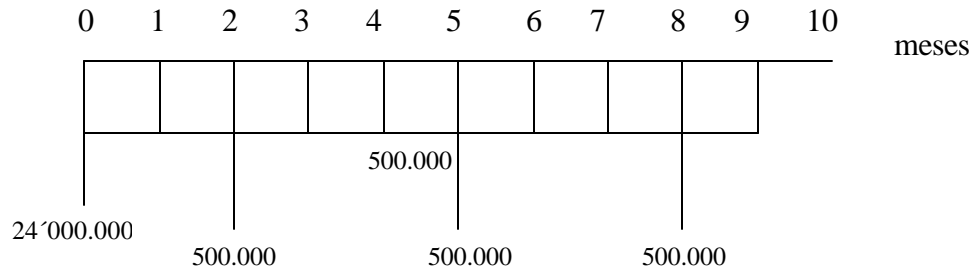


2. a. F  
 b. V  
 c. V

3. a.

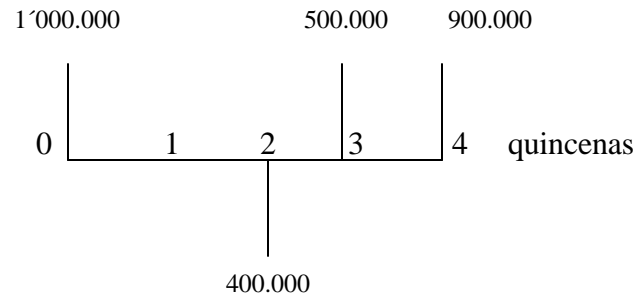


b.

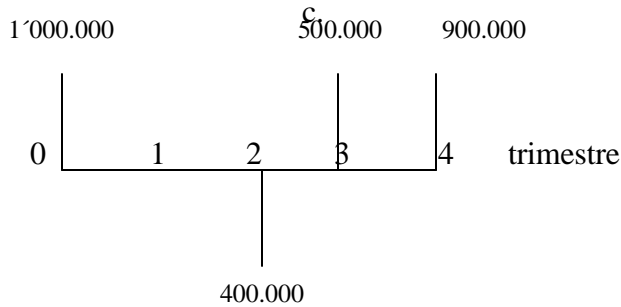
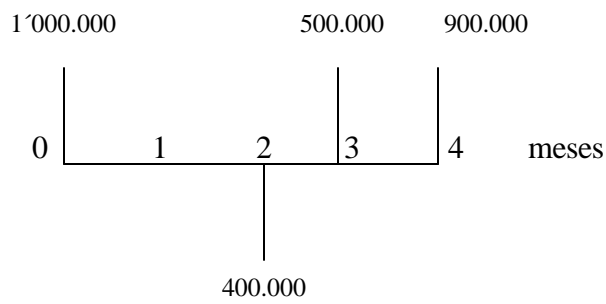


4.

a.



b.



## AUTOEVALUACIÓN IV

1. Interés simple es aquel que sólo genera intereses sobre el capital inicial del préstamo o inversión
2. Mediante la fórmula: 
$$i = \frac{F - P}{nP}$$
3.
  - Se calcula siempre sobre el capital inicial.
  - La retribución económica causada y pagada no se reinvierte.
  - Es igual para cada uno de los periodos del plazo del préstamo.
  - Es proporcional al número de periodos de tiempo en los cuales se tiene el dinero en préstamo.
4. Se calcula considerando el año de 360 días
5. Se calcula considerando el año calendario (365 días) o el año bisiesto (366 días)

## AUTOEVALUACIÓN V

1. Es aquel interés obtenido a partir del capital y los intereses ganados en periodos anteriores.
2. Es el intervalo convenido en la obligación, para capitalizar los intereses.
3. La principal diferencia es que el interés simple se calcula siempre sobre el capital inicial de la inversión ó el préstamo, mientras que el interés compuesto se calcula sobre el capital obtenido al inicio de cada periodo.
4. Entre mayor sea la frecuencia de capitalización mayor será la cantidad de dinero a obtener.

5. a.  $(F/P, i\%, n)$   
 b.  $(P/A, i\%, n)$

## AUTOEVALUACIÓN VI

1.

<b>Interés Nominal</b>	<b>Interés Efectivo</b>
Se considera una tasa de referencia o aparente	Es considerada una tasa real
No tiene en cuenta el valor del dinero en el tiempo	Tiene en cuenta el valor del dinero en el tiempo
Siempre es menor que el interés efectivo	Es siempre mayor que el interés nominal

2. a. F  
 b. V  
 c. F  
 d. F

3. c

## AUTOEVALUACIÓN VII

1. Son pagos, depósitos o retiros fijos al igual que los intervalos de tiempo
2. Las Anualidades reciben también el nombre de rentas uniformes, series uniformes o pagos periódicos.
3. En las anualidades inmediatas su primer pago o cobro se hace al inicio o final del primer periodo, mientras las anualidades diferidas su primer pago se efectúa algunos

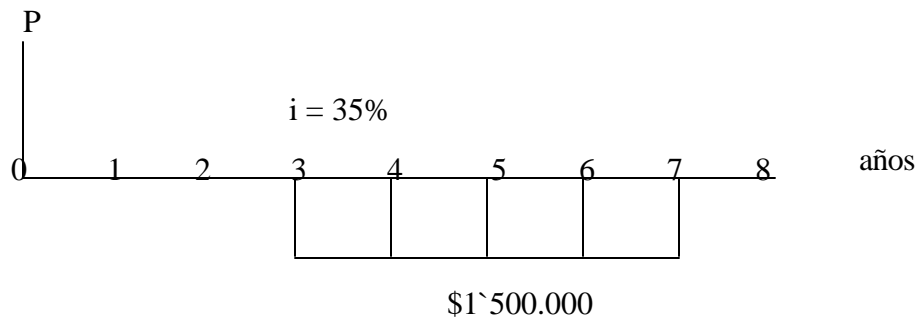


periodos después de formalizada la operación financiera, y la anualidad perpetua son pagos o cobros inmediatos o diferidos que se realizan sin límite de tiempo.

4. En las anualidades ciertas se conoce la fecha de iniciación y terminación de la serie de pagos, situación contraria ocurre con las anualidades contingentes las cuales desconoce las dos fechas o alguna de ellas (la inicial o la final de los pagos).
5. Las anualidades anticipadas realizan los pagos al inicio de cada periodo, mientras las anualidades vencidas los ingresos o egresos se efectúan al final del periodo.
6. Solución del problema

a)

- n = 5 años
- k = 3 años
- A = \$1`500.000
- i = 35% anual
- P = ?



$$P = A (P/A, i \%, n) (P/F, i \%, k - 1)$$

$$P = \$1`500.000 (P/A, 35\%, 5) (P/F, 35\%, 2)$$

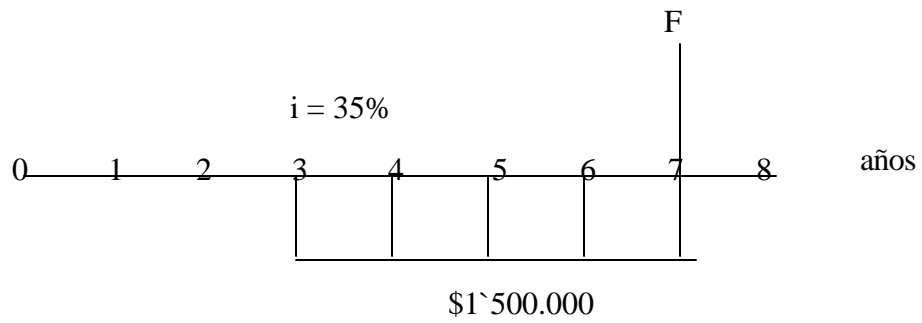
$$P = \$1`500.000 (2.219961)(0.548696)$$

$$P = 1`827.125,58$$

b)

- n = 5 años
- k = 3 años

A = \$1`500.000  
 i = 35% anual  
 F = ?



$$F = A (F/A, i \%, n)$$

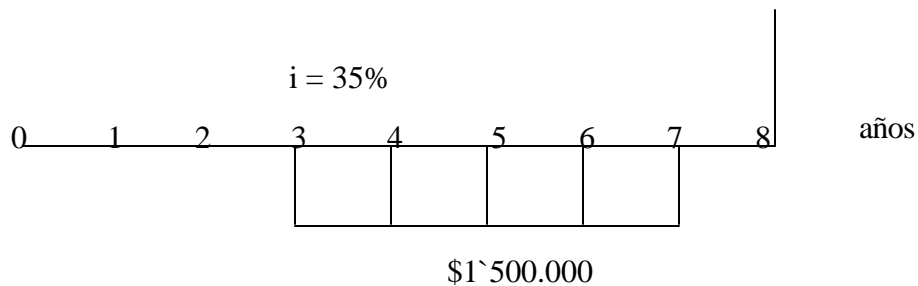
$$F = \$1`500.000 (F/A, 35\%, 5)$$

$$F = \$1`500.000 (9.954381)$$

$$F = 14`931.571,50$$

c)

n = 5 años  
 k = 3 años  
 A = \$1`500.000  
 i = 35% anual  
 F = ?



$$F = A (F/A, i \%, n) (F/P, i \%, 1)$$

$$F = \$1\,500.000 (F/A, 35\%, 5) (F/P, 35\%, 1)$$

$$F = \$1\,500.000 (9.954381)(1.350000)$$

$$F = 20\,157.621$$

Otra forma

$$F = A [(F/A, i \%, n + 1) - 1]$$

$$F = \$1\,500.000 [(F/A, 35\%, 6) - 1]$$

$$F = \$1\,500.000 [(14.438414) - 1]$$

$$F = 20\,157.621$$

## AUTOEVALUACIÓN VIII

1. Es una serie de flujos de caja, ya sean ingresos o egresos que cambian en la misma cantidad o en un mismo factor cada periodo.
2. Hay dos tipos de gradiente: Aritméticos y Geométricos.

3. Los gradientes escalonados son llamados de esa manera ya que su conformación adopta cierta figura similar a unos escalones.
4. La principal característica de los gradientes infinitos es que poseen un número de periodos infinitos o demasiado grande que se pueden asumir infinito o simplemente se desconoce.
5. Los gradientes aritméticos están constituidos por una base y un valor constante que aumenta o disminuye periodo a periodo mientras el geométrico no posee base sino un valor inicial el cual varía cierto porcentaje constante periodo a periodo.
6.  $P = 142.784.456,6$
7. La demostración de la ecuación que representa a la relación entre el valor presente y el gradiente creciente finito la encuentra de manera detallada en la 8.1.1.1 en el literal A.
8. La demostración de esta ecuación la podrá visualizar en la sección 8.1.1.2.

## AUTOEVALUACIÓN IX

1. Devaluación: Pérdida o deterioro de la moneda nacional frente a alguna moneda extranjera.  
Inflación: Pérdida del poder adquisitivo de la moneda nacional.
2. La inflación se puede estimar utilizando los cambios presentados en los precios de la canasta familiar, específicamente utilizando el Índice de Precios al Consumidor.
3. El analizar un proyecto a precios constantes quiere decir que no se tiene en cuenta el efecto de la inflación en su flujo de caja.
4. Cuando el estudio es a precios corrientes se incluye este efecto en el cálculo de los ingresos y egresos del proyecto.
5. Para calcular la verdadera rentabilidad no se puede efectuar una resta algebraica, tiene que realizarse su cálculo teniendo en cuenta las tasas compuestas.
6. Revaluación

7. Una tasa deflactada, es una tasa efectiva de la cual se ha excluido el efecto inflacionario.

### ***AUTOEVALUACIÓN X***

1. Saldo Insoluto es la cantidad o suma que falta por amortizar luego de transcurrido un tiempo, es decir es el capital vivo de la deuda.
2. La parte amortizada o abonos hechos a capital son equivalente al derecho que posee el comprador sobre el bien, y el saldo insoluto es el derecho del vendedor sobre este mismo bien.
3. La Tabla de amortización permite ver en cualquier momento como vario cada abono, la porción que se amortiza al capital, la magnitud de los intereses y el saldo insoluto que se adeuda.
4. Amortización Gradual: Las cuotas a pagar son iguales, pero la parte amortizada crece gradualmente, mientras que los intereses disminuyen.  
*Amortización Constante: Las cuotas a pagar no son iguales, pero la parte amortizada es igual en todos los pagos.*  
*Amortización Creciente: Las cuotas a pagar son creciente, por consiguiente la porción amortizada va aumentando más rápidamente que el sistema de amortización gradual.*
5.
  - El poder pagar de contado, lo cual puede generar un descuento en bien o servicio comprado
  - Evadir los intereses por compras a crédito
  - Y sobre todo crear el hábito del ahorro.
6. Respuesta
  - a. F
  - b. V
  - c. F
  - d. V
  - e. V
  - f. F
  - g. V

## AUTOEVALUACIÓN XI

1. Igual y diferentes servicios, igual y diferentes vida útil, mutuamente excluyentes, independientes y complementarias
2. Los criterios decisorios se clasifican según el dinero, la rentabilidad, el tiempo y por último un grupo denominado adimensional.
3. Se deben emplear para evaluar proyectos operacionales.
4. El método de la TVR es el único que evalúa las alternativas teniendo en cuenta la rentabilidad propia del proyecto y la tasa de oportunidad del inversionista
5. Al emplear este método se obtiene o se calcula la rentabilidad propia del proyecto, la cual debe ser comparada con la TMAR del inversionista.
6. El método de la TRI consiste en determinar la conveniencia de diversas alternativas que requieren de diferentes inversiones de capital.
7. Al utilizar el método PRI se obtiene como resultado el tiempo que deberá transcurrir para recuperar el capital a invertir en un proyecto determinado.