

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO PARA EL ESTUDIO DEL
AISLAMIENTO DINAMICO DE LAS VIBRACIONES**

NAYIBE ARRIETA GONZALEZ

HECTOR SUAREZ MORENO

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR

FACULTAD DE INGENIERÍA MECANICA

CARTAGENA DE INDIAS D. T y C

2002

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO PARA EL ESTUDIO DEL
AISLAMIENTO DINAMICO DE LAS VIBRACIONES**

NAYIBE ARRIETA GONZALEZ

HECTOR SUAREZ MORENO

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Ingeniero Mecánico**

Asesor

Juan Vicente Villamizar

Ingeniero Mecánico

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR

FACULTAD DE INGENIERÍA MECANICA

CARTAGENA DE INDIAS D. T y C

2002

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Ciudad y fecha: _____

Cartagena de Indias, D T y C, Mayo 2002

Señores

Departamento de Investigaciones

Corporación Universitaria Tecnológica De Bolívar

Cartagena D. T y C

Respetados señores:

Presentamos para su consideración el proyecto de Grado titulado: **DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO PARA EL ESTUDIO DEL AISLAMIENTO DINAMICO DE LAS VIBRACIONES** como requisito para optar al titulo de Ingeniero Mecánico.

Atentamente,

NAYIBE ARRIETA GONZALEZ

HECTOR SUAREZ MORENO

Cartagena de Indias, D T y C, Mayo 2002

Señores

Departamento de Investigaciones

Corporación Universitaria Tecnológica De Bolívar

Cartagena D. T y C

Respetados señores:

Por solicitud de los estudiantes NAYIBE ARRIETA GONZALEZ Y HECTOR SUAREZ MORENO, Asesoré a satisfacción el proyecto de grado titulado: DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO PARA EL ESTUDIO DEL AISLAMIENTO DINAMICO DE LAS VIBRACIONES, como requisito para optar al titulo de Ingeniero Mecánico.

Espero que el contenido y las normas aplicadas cumplan con los requisitos exigidos por esta dirección.

Atentamente,

JUAN VICENTE VILLAMIZAR

Ingeniero Mecánico
U.I.S.

ARTICULO 107

La Institución se reserva el derecho de propiedad intelectual de todos los trabajos de grado aprobados, los cuales no pueden ser explotados comercialmente sin autorización. Esta observación debe quedar impresa en parte visible del proyecto.

DEDICATORIA

*A Dios
Y a mi.*

Nayibe

DEDICATORIA

*A dios todopoderoso por haberme
permitido hacer de mi un profesional*

HECTOR

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por iluminarnos y conducirnos por el camino correcto, a lo largo de la elaboración de esta tesis.

A mis padres por su paciencia infinita y apoyo incondicional.

A Juan Vicente Villamizar, quien nos brindó su experiencia, la cual fue de mucha ayuda.

A Carlos Cuadro, Meza, y Escobar, por su ayuda incondicional en todos los momentos que fue necesaria una asesoría de carácter técnica.

A Shirley Morillo por su ayuda desinteresada.

A la familia Contreras por su hospitalidad y solidaridad.

A Lester Fernández por que sin su ayuda no habría sido posible la realización de esta tesis.

A Adolfo Ortiz por su valiosa colaboración.

A Manuel Salom por su gran amor y paciencia.

Y un agradecimiento muy especial al ingeniero Alonso Gaviria por compartir su experiencia a lo largo de esta tesis.

Y a todas aquellas personas que de una u otra manera influyeron en el desarrollo de este proyecto: Marllory Moukarzel, Albeiro Barreto, Carlos Carrascal entre otros..

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCION	
1. FUNDAMENTOS DE LA VIBRACIÓN	29
1.1. VIBRACIÓN	29
1.2. MOVIMIENTO ARMONICO	30
1.3. SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD	33
1.3.1. Ecuación Diferencial de movimiento	34
1.3.2. Vibraciones Libres con amortiguamiento	37
1.3.3. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento	43
1.3.4. Vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso	53
1.3.4.1 Excitación por una fuerza armónica externa	54
1.3.4.2 Excitación por fuerzas de inercia rotativas	58
1.4. SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD	72
1.4.1. Vibraciones libres sin amortiguamiento	
62	

1.5. SISTEMAS DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD	72
1.5.1 Arreglo asimétrico.	74
1.5.2. Arreglo simétrico alrededor de los planos X-O-Z (caso 1)	79
1.5.3. Arreglo simétrico alrededor de los planos Y-O-Z y X-O-Y (caso 2).	86
1.5.4. Arreglo simétrico alrededor de los planos Y-O-Z y X-O-Z (caso 3).	89
1.5.5. Sistema completamente simétrico (caso 4).	91
1.5.6. Conclusiones sobre los S6GL.	92
2. AISLAMIENTO MECANICO	102
2.1. CONTROL ACTIVO DE LAS VIBRACIONES	102
2.1.1. Control activo de las vibraciones generadas por fuerzas de excitación de amplitud constante	109
2.1.2. Control activo de vibraciones generadas por fuerzas de excitación inerciales	117
2.2.. CONTROL PASIVO DE LAS VIBRACIONES	121
2.3 FUNDACIONES O CIMENTACIONES..	122
2.3.1. Tipo de Fundaciones o cimentaciones	123
2.3.1.1. Cimentación "directa" de la máquina	123
2.3.1.2. Cimentación "indirecta" de la máquina.	123
2.3.2. Bases de diseño.	127

2.3.3.	Procedimiento de análisis.	129
2.3.4.	Chequeo de algunos parámetros de diseño	131
2.4	ALGUNAS REGLAS O GUIAS PRACTICAS	132
3.	DISEÑO Y ANÁLISIS DEL PROTOTIPO PARA EL ESTUDIO DEL AISLAMIENTO MECÁNICO	134
3.1.	FUENTE DE EXCITACIÓN: VIBRADOR DE MASAS DESBALANCEADAS	140
3.1.1.	Excitación inercial actuando a través del centro de gravedad del cuerpo	140
3.1.2.	Excitación inercial que no actúa a través del centro de gravedad	144
3.1.3.	Mecanismos para variar el tamaño y la posición de las pesas	146
3.2.	CARACTERÍSTICAS DEL MODELO	150
3.2.1.	Elementos que conforman el vibrador de masas desbalanceadas	150
3.2.2.	Otros Accesorios del sistema dinamico vibratorio	152
3.2.3.	Mecanismo de variación de velocidad	157
3.3.	DISEÑO Y SELECCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE MONTAJE	1.58
3.3.1.	Discos equilibrados y pesas	158
3.3.2.	Calculo de fuerzas y torque de excitación máximos.	160
3.3.3.	La cimentación.	161
3.3.4.	Elementos deformables.	162

3.3.4.1. Calculo de los resortes helicoidales de acero:	165
4. VIBRACIONES PRODUCIDAS POR DESBALANCEO	174
4.1. RESONANCIA	175
4.1.1. Factores que afectan la resonancia	177
4.1.2. Determinar si una pieza es resonante	180
4.1.3. Fase de vibración en relación con la resonancia.	181
5.. ESTUDIO DEL MODELO	187
5.1. DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS NATURALES	187
5.1.1. Determinación del centro de gravedad	189
5.1.2. Calculo de los momentos de inercia	192
5.1.3. Calculo de las frecuencias circulares naturales de la instalación básica	195
5.2. COMPROBACIÓN DE LAS FRECUENCIAS NATURALES	205
5.2.1. Equipo utilizado	208
5.2.2. Instalación del equipo para iniciar la medición	215
5.2.3. Procedimiento para la medición	215
5.2.4. Análisis de las formas modales	224
5.2.4.1. Procedimiento:	225
5.2.5. Análisis e interpretación de datos	226

5.3	DIAGRAMA DE OPERACIONES DEL VIBRADOR DE MASAS DESBALAANCEADO	230
	RECOMENDACIONES	235
	CONCLUSIONES	237
	<i>BIBLIOGRAFÍA</i>	240
	ANEXOS	241

LISTA DE TABLAS

Pag

Tabla 1. .Características principales de las masas.

160

Tabla 2. Características de los resortes helicoidales obtenidos en forma teórica 173

Tabla 3. Calculo de centro de gravedad del sistema dinámico vibratorio.	191
Tabla 4. Momentos de inercia de los elementos del modelo.	194
Tabla 5. Parámetros para el calculo de las frecuencias naturales	195
Tabla 6. Frecuencias naturales obtenidas teóricamente.	204
Tabla 7. Tipos de excitación.	206
Tabla 8. Datos de las pruebas realizadas.	220

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1. Vibración libre	30
Figura 1.2. Movimiento vibratorio	32
Figura 1.3. Sistemas de un grado de libertad	33
Figura 1.4. Sistema fundamental de un grado de libertad	34
Figura 1.5. Tipos de movimiento según el valor de la amortiguación	39
Figura 1.6. S1GL con diferentes tipos de excitación	46
Figura 1.7. Funciones de amplitud para los sistemas de un grado de libertad sin amortiguación	49
Figura 1.8. Resonancia	50
Figura 1.9. Curvas de respuesta de un S1GL con excitación de por fuerza armónica externa	57
Figura 1.10. Sistema de un grado de libertad excitado por una fuerza de inercia rotativa	58
Figura 1.11 . Curvas de respuesta de un S1GL con excitación fuerza de inercia rotativa	60

Figura 1.12. Sistema de dos grados de libertad	61
Figura 1.13. Modelo fundamental de un sistema de dos grados de libertad	63
Figura 1.14. Modelo fundamental de un sistema de dos grados de libertad	69
Figura 1.15. Modelo de seis grados de libertad	73
Figura 1.16. Puntos de montaje de un sistema de seis grados de libertad	74
Figura 1.17. Los seis modos de vibración de un sistema de seis grados de libertad	78
Figura 1.18. Instalación típica motor-generador	80
Figura 1.19. Modelo simétrico alrededor de dos planos	90
Figura 1.20. Caso 1 y 2	97
Figura 1.21 Caso 3 y 4	98
Figura 2.1. Clasificación de las formas de control de vibraciones	105
Figura 2.2. T_f para un sistema de un grado de libertad sin amortiguación	111
Figura 2.3. Factor dinámico "Transmisibilidad de la fuerza" de un sistema de un grado de libertad con excitación armónica (Fuerza de magnitud constante.)	114
Figura 2.4. Factor dinámico "Respuesta al desplazamiento" para un sistema de un grado, de libertad con excitación armónica (fuerza de magnitud constante).	116

Figura 2.5. Factor dinámico “Transmisibilidad de la fuerza” de un sistema de un grado de libertad (fuerza de magnitud variable).	119
Figura 2.6. Factor dinámico “Transmisibilidad relativa” de un S1GL con excitación armónica (Fuerzas de magnitud variable).	120
Figura 2.7. Algunos ejemplos de fundaciones o cimentaciones.....	124
Figura 2.8. Fundaciones tipo bloque	126
Figura 2.9. Fundación tipo aporticado	126
Figura 2.10. Fundación tipo placa flexible	127
Figura 3.1. .Mecanismo biela manivela	139
Figura 3.2. Mecanismo excéntrica-corredera	139
Figura 3.3 Excitación por dos masas desbalanceadas	139
Figura 3.4. Vibración de un cuerpo soportado por resortes	143
Figura 3.5 Excitación inercial actuando fuera del centro de gravedad	145
Figura 3.6. Mecanismos para variar el tamaño y la posición de las pesas	147
Figura 3.7. Vista superior	153
Figura 3.7. Vista frontal	154
Figura 3.8. Dimensión de los discos equilibrados	159
Figura 3.9. Configuración de las pesas	159
Figura 3.10. Dimensiones de la placa base	163
Figura 3.11 Dimensiones de la cimentación	164
Figura 3.12 Sistema equivalente	166
Figura 4.1 Sistema resorte	178

Figura 4.2 Formas modales.	180
Figura 4.4 Sistema resonante	183
Figura 5.1 Plano de fuerzas y plano de simetría	188
Figura 5.2 Plano de referencia para calcular el el centro de gravedad	190
Figura 5.3 Pesas de corrección	193
Figura 5.4 IRD 350	208
Figura 5.5 Botón de encendido	208
Figura 5.6 Selector de rangos de frecuencia	209
Figura 5.7 Dial análogo del sintonizador de frecuencias.	209
Figura 5.8 Sintonizador de frecuencias	209
Figura 5.9 Pickup	210
Figura 5.10 Sintonizador de filtros	210
Figura 5.11 Selector de parámetros de medición	211
Figura 5.12 Selector de rangos de amplitud.	211
Figura 5.13. Tablero indicador de amplitudes	212
Figura 5.14 Entrada para el sensor	212
Figura 5.15 Entradas para el graficador	212
Figura 5.16 Entrada de energía	213
Figura 5.17 Entrada de la lámpara estroboscópica	213
Figura 5.18 Sensor de velocidad	214
Figura 5.19 Lámpara estroboscópica	214
Figura 5.20 Visualización de los puntos de medición	218

Figura 5.21	Equipo en reposo	228
Figura 5.22	Giro vertical desacoplado	228
Figura 5.23	Modo vertical	229
Figura 5.24	Modo trasversal y giro longitudinal acoplados	229
Figura 5.25	Modo vertical desacoplado	230
Figura 5.26	Diagrama de operación del vibrador de masas desbalanceadas	233

LISTA DE ANEXOS

Pág

Anexo A.	Listado de resortes del fabricante.	242
Anexo B.	Propiedades mecánicas de algunos materiales.	244
Anexo C.	Carta para hallar C_1 .	245
Anexo D	Diagrama para el calculo de los momentos de inercia.	246

GLOSARIO

Sistema: conjunto formado por masa – resorte – amortiguador en sus diferentes combinaciones, y que representan a un sistema de ingeniería cualquiera.

Cargas dinámicas: fuerzas externas variantes en el tiempo a las que está sometido un sistema, y cuyos efectos también son función del tiempo.

Grados de libertad: es el número mínimo de coordenadas generalizadas de un sistema, que unívocamente determinan la posición del mismo.

Vibración libre: es el movimiento periódico que se observa cuando el sistema se desplaza de su posición de equilibrio estático ante ausencia de fuerzas externas.

Vibración forzada: es el movimiento, no necesariamente periódico, que se presenta cuando sobre el sistema actúan fuerzas externas.

Amortiguamiento: fricción o resistencia al movimiento periódico, que lo retardan o causan su eventual desaparición.

Frecuencia y Período: la frecuencia es el número de ciclos por unidad de tiempo, y el período es el tiempo necesario para que un movimiento periódico se repita.

Frecuencia natural: es la frecuencia de un sistema que tiene vibración libre sin amortiguamiento.

Resonancia: fenómeno que ocurre cuando la frecuencia de la excitación es igual a la frecuencia natural del sistema. Cuando se presenta, la amplitud de la vibración aumenta indefinidamente y está gobernada únicamente por la cantidad de amortiguamiento presente en el sistema.

Modo de vibración: es la manera particular de vibrar que tienen los sistemas para cada una de sus frecuencias naturales.

Amplitud: Es la distancia total recorrida por una masa suspendida vibrando alrededor de su posición de equilibrio, los parámetros que cuantifican la amplitud se expresan en términos de: desplazamiento, velocidad y aceleración.

Desplazamiento: Es la distancia total recorrida por un elemento de máquina vibrando alrededor de su posición de equilibrio desde un extremo positivo hasta un

máximo negativo es un movimiento pico a pico, por lo tanto el parámetro desplazamiento es una medida de amplitud de vibración pico a pico.

Velocidad y Aceleración Pico: El movimiento de un elemento de máquina vibrando alrededor de su posición de equilibrio es un movimiento con velocidad variable, definiéndose como velocidad pico la velocidad máxima que adquiere el elemento en movimiento durante un ciclo de vibración, la variación de la velocidad en la unidad de tiempo se define como la aceleración.

Frecuencia de la Vibración: Es el número de eventos que se repiten en la unidad de tiempo, esta es en términos de la vibración el inverso del periodo, $F = (1/T)$. La frecuencia de la vibración permite identificar la causa de la vibración y así relacionar problemas en particular con respecto a la maquinaria rotativa, existen dos formas para expresar frecuencia: relativa al tiempo y relativa a la rotación del eje (ordenes de rotación).

Angulo de fase: Es la medición en grados de la relación en tiempo entre eventos este parámetro se utiliza para describir la vibración comparando los movimientos dinámicos de elementos vibrando o simplemente relacionando el movimiento dinámico de un elemento en particular con una referencia dada.

FORMA DE LA ONDA: Este es el medio más importante de presentar los datos de vibración, permite comprender el comportamiento de cada máquina en particular, ya que se dispone de la señal fiel de la vibración.

RESUMEN

Los sistemas dinámicos vibratorios para aislamiento mecánico activo de máquinas rígidas, constan básicamente de una base o bloque y elementos deformables debajo (o encima) de ella. Además, la máquina soportada por el bloque (fundación), es quien se constituye en fuente de vibraciones.

En el aislamiento mecánico activo se debe analizar el comportamiento dinámico del SDV, a fin de verificar que las fuerzas dinámicas que van al piso sean cero, siempre y cuando, los elementos deformables entre la fundación y el piso estén diseñados adecuadamente.

Uno de los objetivos de este estudio es determinar experimentalmente las frecuencias de excitación y naturales del sistema dinámico vibratorio a fin de mostrar los diferentes modos de vibración (resonancia). Así mismo, se deben variar los parámetros masa, rigidez y amortiguación con el propósito de analizar su influencia en el comportamiento dinámico del sistema y determinar las condiciones óptimas para el aislamiento mecánico activo.

INTRODUCCIÓN

A lo largo del desarrollo de la ingeniería como ciencia, el hombre buscó la solución de problemas técnicos que posibilitaran la ejecución de tareas más complejas con un menor gasto de energía, mayor comodidad, con nuevos y mejores materiales y en menor tiempo. Esto podría traducirse en que la tendencia ha sido, y es actualmente, la "búsqueda" de una mayor eficiencia en la realización de dichas tareas.

Paralelamente a esta "búsqueda" de eficiencia surgen nuevos problemas que, precisamente, están asociados al uso de nuevos materiales, al desarrollo de altas velocidades y a menores tiempos de trabajo entre otros.

Uno de estos problemas que afecta a todas las ramas de la ingeniería es la falla inesperada de un sistema en servicio. Este problema fue enormemente reducido, gracias a la importancia cada vez mayor que cobra en este siglo, el estudio y análisis detallado de las cargas dinámicas que producen vibraciones y su efecto más dañino: la fatiga de los materiales (stress).

En general, puede decirse que todos los sistemas de ingeniería que posean masa y elasticidad están capacitados para tener movimiento relativo. Si el mismo se repite luego de un cierto intervalo se está en presencia de vibración, que no es más que una forma de energía disipada.

Cuando las vibraciones no son generadas deliberadamente por el hombre con un fin determinado sino que son consecuencia de causas externas o de condiciones de funcionamiento, producen efectos indeseables que pueden afectar negativamente no sólo a los sistemas de ingeniería sino también a las personas.

En los sistemas de ingeniería, se tiene que la gran mayoría de las máquinas, equipos y construcciones civiles, excepto las muy pequeñas, pueden presentar serios problemas estructurales y de funcionamiento debidos a las cargas dinámicas que producen vibraciones. Estos problemas pueden llevar a un fallo total del sistema. Estas causas fueron determinantes, para el estudio y perfeccionamiento de métodos para reducir o eliminar las vibraciones en los sistemas de ingeniería.

En el campo de la Ingeniería Mecánica se observa que el aumento de las velocidades de servicio de las máquinas (actualmente se consiguen velocidades de rotación de más de 12.000 r.p.m.) así como el aligeramiento de su construcción,

favorecen la aparición de vibraciones. Además, se produce otro efecto indeseable como es el ruido en el ambiente de trabajo.

En la Ingeniería Civil la presencia de cargas dinámicas, y por lo tanto de vibraciones y fatiga, ha sido la responsable de grandes catástrofes

Es un hecho entonces que la presencia de vibraciones en los sistemas de ingeniería, no sólo afecta la salud del hombre, sino que también provoca fallas estructurales y de funcionamiento. Esto trae como consecuencia la reducción de su vida útil. La necesidad de sustitución de dichos sistemas, o parte de ellos, se traduce en pérdidas económicas de importancia. La eliminación o reducción de las vibraciones constituye una parte fundamental de la Ingeniería moderna, y son cada vez más numerosas las aplicaciones y técnicas empleadas para la solución de este problema.

Las técnicas tradicionalmente utilizadas consisten en el cálculo y la selección de elementos elásticos y disipativos (resorte y amortiguador), que al ser instalados reducen al mínimo los efectos indeseables. También, y según la aplicación, estas técnicas tradicionales pueden combinarse con los más modernos y sofisticados equipos electrónicos.

Por lo tanto en todo nuevo proyecto de ingeniería resulta imprescindible considerar un estudio profundo de las cargas dinámicas, de sus influencias y de su eliminación o reducción.

1. FUNDAMENTOS DE LA VIBRACIÓN

1.1 VIBRACION

La vibración, en general es una forma de energía disipada y en muchos casos es inconveniente, especialmente en maquinarias; ya que debido a las vibraciones se producen ruidos, se transmiten fuerzas y movimientos no deseados.

La vibración también puede ser descrita como la variación de la configuración de un sistema con respecto al tiempo, alrededor de su posición de equilibrio estable.

El estudio de las vibraciones se refiere a los movimientos oscilatorios de los cuerpos y, a las fuerzas asociadas con ellas. Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibrar. La mayoría de las máquinas y las estructuras experimentan vibración hasta cierto grado y, su diseño, requiere generalmente consideración de su conducta oscilatoria.

1.2 MOVIMIENTO ARMÓNICO.

El movimiento oscilatorio puede repetirse así mismo regularmente, como es el caso de un balancín de reloj o el caso de los movimientos sísmicos.

Cuando el movimiento se repite a intervalos de tiempo "T", se le llama *periódico* donde "T" es el periodo de oscilación y su recíproco $f=1/T$ es la *frecuencia*. El movimiento periódico más simple es el *MOVIMIENTO ARMÓNICO*. Este movimiento puede ilustrarse por medio de una masa suspendida de un resorte liviano (Ver Fig. 1.1).

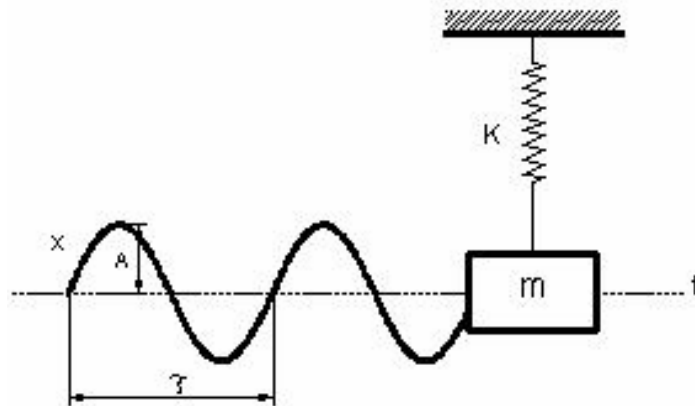


Figura 1.1. Vibración libre

Si la masa se desplaza de su posición de reposo y se libera, oscilará hacia arriba y abajo. En ausencia de fricción el movimiento en el dominio del tiempo es mostrado en la figura 1.1.

El movimiento del peso de su posición neutral hasta el límite más alto de su recorrido y de vuelta por el punto neutral, al límite más bajo del recorrido y su

regreso a la posición neutral, representa un ciclo del movimiento. El tiempo que se requiere para un ciclo es el periodo de vibración. El número de ciclos por periodo de tiempo es la frecuencia de vibración.

La ecuación de movimiento en este caso esta dada por la expresión:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad 1.1$$

donde

m: Masa del elemento.

k: Constante del resorte.

x: Posición (Amplitud).

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$x(t) = x_0 \text{sen}(w_n t + f) \quad 1.2$$

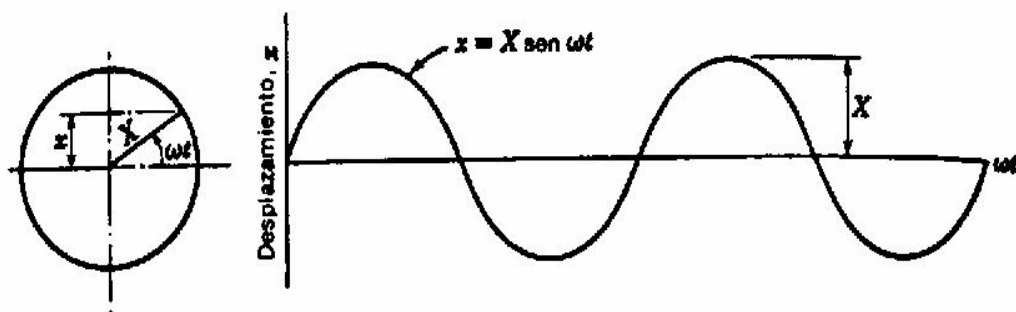
x_0 : Máxima Amplitud.

w_n : Velocidad angular o circular natural (rad/seg.).

f : Angulo de fase.

f : Frecuencia de la vibración (en CPM o CPS=Hz).

T : Periodo de vibración.



En la ecuación 1.2 aparece w_n , llamada la frecuencia angular o circular natural medida en unidades de radianes por segundo. Si se observa la figura 1.2 y la ecuación 1.2 se puede notar que la vibración completa un ciclo cuando $w_n t = 2\mathbf{p}$ el intervalo de t será igual al periodo T , o sea:

$$T = 2\mathbf{p}/w_n$$

como se vio anteriormente, f es el inverso de T :

$$f = w_n/2\mathbf{p}$$

En un movimiento armónico en el cual el desplazamiento esta dado por la ecuación 1.2, la velocidad se obtiene derivando el desplazamiento con respecto al tiempo.

$$\dot{x}(t) = x_0 w \cos(w_n t + \mathbf{f}) \quad \text{Velocidad}$$

En la ecuación se puede observar que la velocidad también es armónica con un valor máximo de $x_0 w_n$. La aceleración obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo.

$$\ddot{x}(t) = -x_0 w^2 \text{sen}(w_n t + \mathbf{f}) \quad \text{Aceleración.}$$

Si se reemplazan las ecuaciones anteriores en la ecuación 1.1 y se simplifica se puede encontrar que:

$$w_n = k/m \quad \text{y como } f = w_n/2\mathbf{p}$$

se tiene entonces:

$$f = \frac{1}{2p} * \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 1.3$$

1.3 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

Muchos sistemas pueden vibrar en más de una manera y dirección. Si un sistema está restringido a vibrar de una manera o necesita solo una coordenada independiente para determinar por completo la localización geométrica de las masas del sistema en el espacio, este es un sistema de un solo grado de libertad.

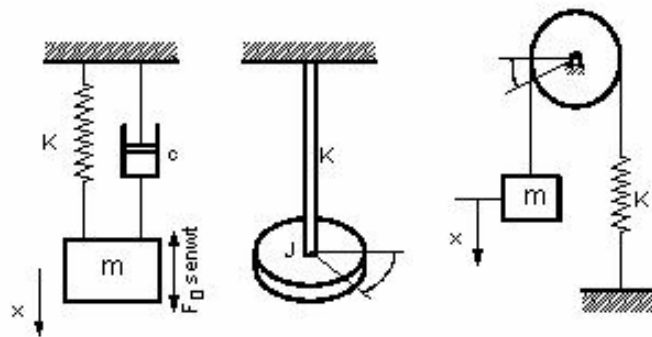


Figura. 1.3 Sistemas con un grado de libertad

En general se puede decir que para especificar la posición de un sistema mecánico se requieren n números (coordenadas), el sistema tiene n grados de libertad.

1.3.1 Ecuación diferencial de movimiento. Es aquella que muestra un equilibrio entre fuerzas de inercia, fuerzas aplicadas y fuerzas externas. El sistema fundamental de un grado de libertad se muestra en la figura 1.4.

Este sistema es idealizado y simplificado en términos de masa, resorte y amortiguador, los cuales representan a la masa, la elasticidad y la fricción respectivamente. Entonces la ecuación del movimiento expresa el desplazamiento como una función del tiempo.

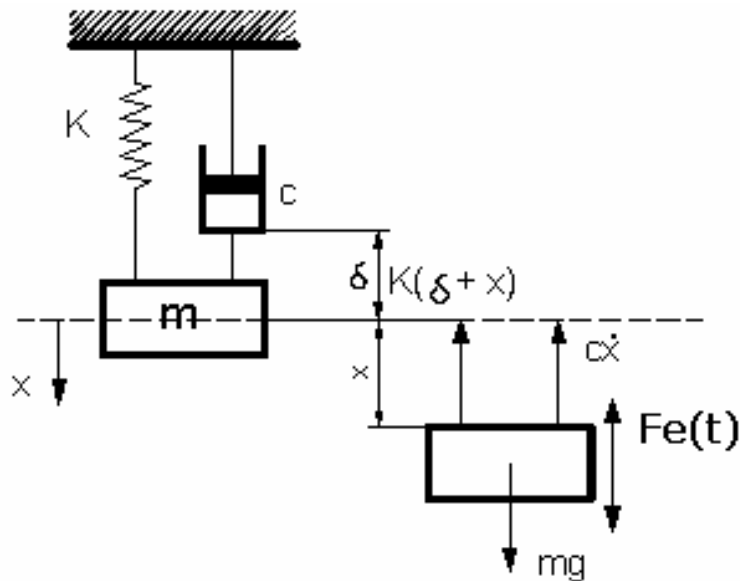


Figura 1.4. Sistema fundamental de un grado de libertad

En este sistema, la masa m se desplaza gracias a la fuerza de excitación $F_e(t)$ y la fuerza gravitacional mg . Las fuerzas que actúan en el cuerpo rígido¹ de masa m son:

¹ Se dice que un cuerpo es rígido, cuando su menor frecuencia natural circular ω_n es mucho mayor que la frecuencia de la fuerza de excitación.

La fuerza de excitación $F_e(t)$.

El peso mg que actúa en dirección del movimiento y causa un desplazamiento estático.

La resistencia ofrecida por el resorte o fuerza restauradora, que se opone al movimiento y regresa la masa a su posición de equilibrio estático. La fuerza que ejerce el resorte es de magnitud kx donde k es la constante de rigidez del resorte, que por definición es el número de kilogramos de tensión necesarios para alargar el resorte 1 cm.

La fuerza de amortiguación que puede deberse a las propiedades viscosas del fluido en el que se mueve la masa, o debido a que la masa en movimiento puede conectarse a un mecanismo amortiguador. En cualquier caso, existe un mecanismo amortiguador que genera una fuerza $c\dot{x}$ la cual, es proporcional a la velocidad y en dirección opuesta. La magnitud c se conoce como *constante de amortiguamiento* o *coeficiente de amortiguamiento viscoso*.

Se debe tener en cuenta que todas las fuerzas que actúan sobre la masa se consideran positivas cuando se ejercen hacia abajo y negativas cuando se ejercen hacia arriba.

La segunda ley de Newton es la primera base para examinar el movimiento del sistema.

$$F = m * a$$

Aplicándola al sistema de la figura 1.4 se tiene que:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_e(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_e(t) \quad 1.4$$

La anterior ecuación se conoce como la ecuación diferencial del movimiento de un sistema con un solo grado de libertad. Donde los cuatro términos indican, la fuerza de inercia, la fuerza de amortiguamiento, la fuerza del resorte y la fuerza exterior. La solución que satisface esta ecuación se llama solución general no homogénea.

Si se considera que el sistema no está sometido a ninguna fuerza externa esto quiere decir que $F_e(t) = 0$ por lo tanto la ecuación 1.4 toma la siguiente forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad 1.5$$

Esta es una ecuación diferencial, ordinaria, de segundo orden y homogénea con coeficientes constantes.

Su solución se llama función complementaria y viene dada por $x = x_0 e^{st}$ donde, S es una variable que será determinada a continuación y t es una variable independiente.

$$\dot{x} = x_0 s e^{st}; \quad \ddot{x} = x_0 s^2 e^{st}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 1.5 se tiene que:

$$(S^2 + cS/m + k/m) * x_0 e^{st} = 0$$

$$S^2 + cS/m + k/m = 0$$

cuya solución es:

$$S_{1,2} = \left(\frac{1}{2} \right) \left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km} \right) \quad (1.6)$$

La solución completa de la ecuación 1.5 se puede entonces escribir como:

$$x_{(t)} = B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t} \quad (1.7)$$

la ecuación 1.6 muestra que la naturaleza de las oscilaciones dependen de los valores de c , k y m .

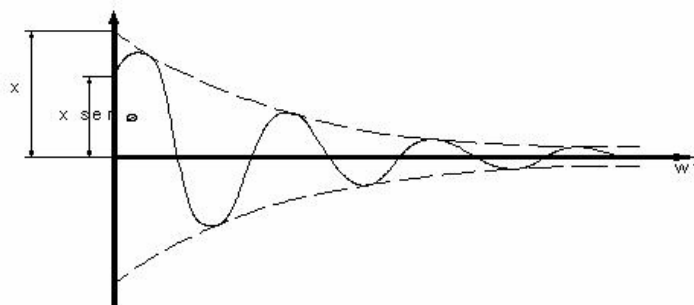
1.3.2. Vibraciones Libres con Amortiguamiento. Considérese entonces la ecuación 1.5 incluyendo el término de amortiguamiento $c\dot{x}$ que representa acertadamente las condiciones de amortiguamiento debidas a la viscosidad del aceite en un amortiguador.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad 1.5$$

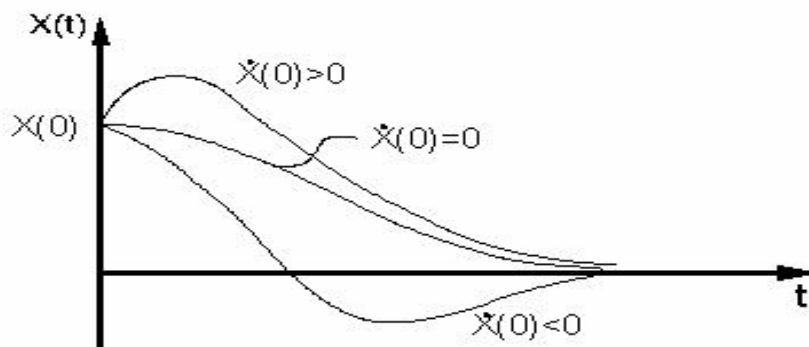
La solución a esta ecuación esta dada en el numeral anterior. Ahora considérese los tres valores de c que son interesantes para entender el significado físico de la ecuación 1.6.

Cuando $c^2 > 4km$, la expresión dentro del radical es positiva siendo por tanto reales los dos valores de s . Como la raíz cuadrada es menor que el primer término $-c/2m$, ambos valores de s son negativos. Por lo tanto la ecuación 1.6 describe una solución que consiste en la suma de dos curvas exponenciales decrecientes como se muestra en el diagrama (c) de la figura 1.5. En él se ve que en este tipo de movimiento llamado sobreamortiguado, m no realiza una "vibración" sino más bien un lento regreso a la posición de equilibrio.

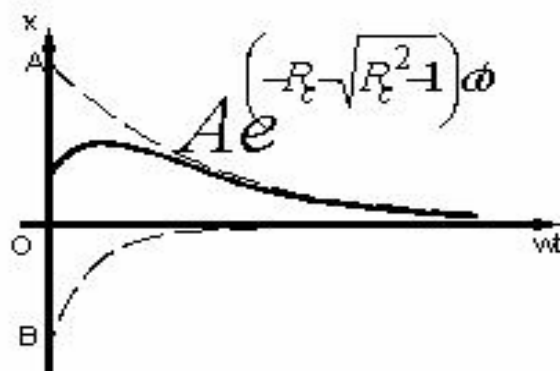
Para los valores menores de c , es decir cuando $0 < c^2 < 4km$ las raíces S_1 y S_2 de la ecuación 1.6 son complejas. A este tipo de movimiento representado en el diagrama (a) de la figura 1.5 se le conoce como amortiguado. En él ocurre la oscilación alrededor de una posición de equilibrio, disminuyendo cada amplitud sucesiva con respecto a la anterior.



a. Movimiento Amortiguado $c^2 < 4km$



b. Movimiento Críticamente Amortiguado $c^2 = 4km$



c. Movimiento Sobreamortiguado $c^2 > 4km$

Figura 1.5 Tipos de movimiento según el valor de la amortiguación.

Al amortiguamiento c en el que ocurre la transición, de movimiento amortiguado a sobreamortiguado, se le denomina amortiguamiento crítico c_c (figura 1.5 b).

$$C_c = 2 * m\sqrt{k/m} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

Aquí no se observa un movimiento vibratorio. Los sistemas con amortiguamiento crítico son muy importantes en todas las aplicaciones técnicas, debido a que recobran su posición de equilibrio sin que tenga lugar ninguna oscilación y en el menor tiempo posible.

Se debe tener en cuenta que cuanto más grande sea la constante de amortiguamiento c , más aplastada resultará la exponencial y, más ciclos se requerirán para que se desvanezcan las vibraciones.

El amortiguamiento en relaciones usadas para propósitos prácticos es caracterizado más convenientemente por un término que se define a continuación

$$R_c = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2} * \sqrt{km} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

R_c representa entonces la relación entre el coeficiente de amortiguación actual del sistema y el coeficiente de amortiguación crítico del sistema. Si este factor es utilizado, el límite entre el movimiento periódico (amortiguado) y el movimiento no oscilatorio (no amortiguado), se presenta cuando $R_c = 1$.

Al amortiguamiento presente en las vibraciones libres estudiadas en el presente numeral, se le denomina "amortiguamiento viscoso". Este tipo de amortiguamiento se utiliza para todos aquellos casos en que las fuerzas disipativas son proporcionales a la velocidad.

$$\mathbf{F} = -\mathbf{cV} \quad \mathbf{c} = \text{Cte. De proporcionalidad.}$$

\mathbf{V} = Velocidad

Por ejemplo, en el caso de rozamiento entre superficies lubricadas donde existe una película continua de lubricante, puede suponerse que las fuerzas de fricción no dependen del material de los cuerpos en contacto, sino de la viscosidad del lubricante y de la velocidad del movimiento.

Existen fuerzas amortiguadoras que se pueden originar por causas diferentes a aquellas que se manifiestan entre dos superficies lubricadas; tales fuerzas pueden originarse por resistencia del aire o líquidos, amortiguamiento eléctrico, rozamiento interno debido a la elasticidad imperfecta de los materiales, rozamiento en seco en el deslizamiento de la superficie de los cuerpos, etc. En el caso de amortiguamiento entre superficies en seco, generalmente se aplica la ley de Coulomb-Morin. Se supone que en el caso de superficies en seco, la fuerza de fricción F_r es proporcional a la componente normal N de la presión que actúa entre las superficies, de modo que:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{N}$$

m = Coeficiente de roce cinético cuya magnitud depende del material de los cuerpos en contacto y de las asperezas de sus superficies.

N = Fuerza normal

Este tipo de amortiguamiento generalmente se denomina "amortiguamiento constante o de Coulomb". En éste caso, la fuerza de fricción cambia de dirección cuando el movimiento cambia también de dirección y las expresiones matemáticas que describen el movimiento son diferentes ya que, en éste caso, la fuerza de amortiguación no es proporcional al desplazamiento o a cualquiera de sus derivadas y se debe tener en cuenta el cambio de signo en la fuerza de fricción.

Por lo anterior, la razón por la cual la mayoría de los problemas prácticos se consideran con amortiguación viscosa, es que desde el punto de vista matemático, es más ventajoso por que la fuerza de amortiguación varía linealmente con la velocidad y , como se vio anteriormente, sus expresiones matemáticas tienen inherentemente incluido el cambio de signo al cambiar la dirección del movimiento. Es decir se necesitan dos ecuaciones para describir el movimiento de un sistema de un grado de libertad con amortiguación de coulomb.

1.3.3 Vibración forzada sin amortiguamiento. Una vibración forzada se refiere al movimiento de respuesta del sistema a una excitación externa. Esta excitación puede ser por pulsos, por vibraciones transitorias, por fuerzas perturbadoras aplicadas al sistema o por movimientos de la fundación que soporta el sistema. La respuesta puede ser expresada en diferentes formas dependiendo de la naturaleza de la excitación.

En general, la respuesta es función de la frecuencia de la fuerza y varía con los diferentes tipos y grados de amortiguación. Los resultados que se presentan en este numeral son para vibraciones forzadas sin amortiguación y para sistemas con amortiguación viscosa.

La figura 1.6 muestra varios casos en que se obliga a una masa m a vibrar debido a la acción de una fuerza que periódicamente cambia en dirección, como en (a) y (b), o bajo la acción de la inversión de un desplazamiento de un soporte, como en (c). Estos casos están agrupados debido a que su ecuación diferencial de movimiento y la respectiva solución son semejantes.

Para el sistema de la figura 1.6 a, la ecuación diferencial de movimiento es similar a la ecuación 1.4, pero con $c=0$. o sea:

$$m\ddot{x} + kx = F_e(t) = F_0 \text{sen} \omega t \quad 1.4$$

En la figura 1.6.b, se muestra una masa soportada simétricamente por cuatro resortes iguales, que se desplaza hacia arriba una distancia $x(t)$ bajo la acción de la fuerza de inercia de una masa m_1 que rota con velocidad angular ω alrededor de un eje fijo en el cuerpo de masa m ; la cual, incluye la masa rotatoria m_1 . la componente en la dirección x del movimiento relativo de m_1 con respecto a m es:

$$x_1 - x' = e \text{sen} \omega t \quad 1.8$$

donde x_1 y x son los desplazamientos absolutos de m_1 y m respectivamente, en la dirección x . La ecuación diferencial de movimiento para el sistema es:

$$m\ddot{x} + m_1\ddot{x}_1 + (4kx_1)/4 = 0 \quad 1.9$$

pero, de la ecuación 1.8 se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} + e\omega \text{Cos}(\omega t) \\ \ddot{x}_1 &= \ddot{x} - e\omega^2 \text{Sen}(\omega t) \end{aligned}$$

y, reemplazando en la ecuación 1.9:

$$(m + m_1)\ddot{x} + kx = m_1 e w^2 \text{Sen}(wt)$$

Haciendo $m+m_1 = M$ y $m_1 e w^2 = F_0$, la ecuación toma la misma forma que la ecuación 1.4:

$$m\ddot{x} + kx = F_e(t) = F_0 \text{sen}(wt)$$

donde, F_0 es la fuerza de inercia de rotación.

La figura 1.6.c puede ser por ejemplo una representación simplificada de un vehículo de masa m que se mueve sobre un camino áspero, con una suspensión de resorte entre la masa y la rueda. El camino se puede representar por una onda senoidal que desplaza la rueda hacia arriba una distancia $x'(t) = x'_0 \text{sen}wt$. Bajo la suposición, que la rueda siempre esta en contacto con el camino, x'_0 es la amplitud de la onda senoidal. Al mover la rueda, se logra el desplazamiento forzado del resorte y cuando la rueda se eleva, se comprime y desplaza la masa m una distancia y hacia arriba que es menor que x'_0 mismo para que el resorte este en compresión. La fuerza del resorte que actúa sobre m es proporcional a los dos desplazamientos o sea, a $k(x' - x)$. Se tiene entonces que:

$$k(x' - x) = m\ddot{x}$$

$$kx'_0 \text{sen}wt - kx = m\ddot{x}$$

Haciendo $kx'_0 = F_0$ y reordenando los términos se obtiene:

$$F_0 \text{sen}wt = kx + m\ddot{x} \quad 1.4$$

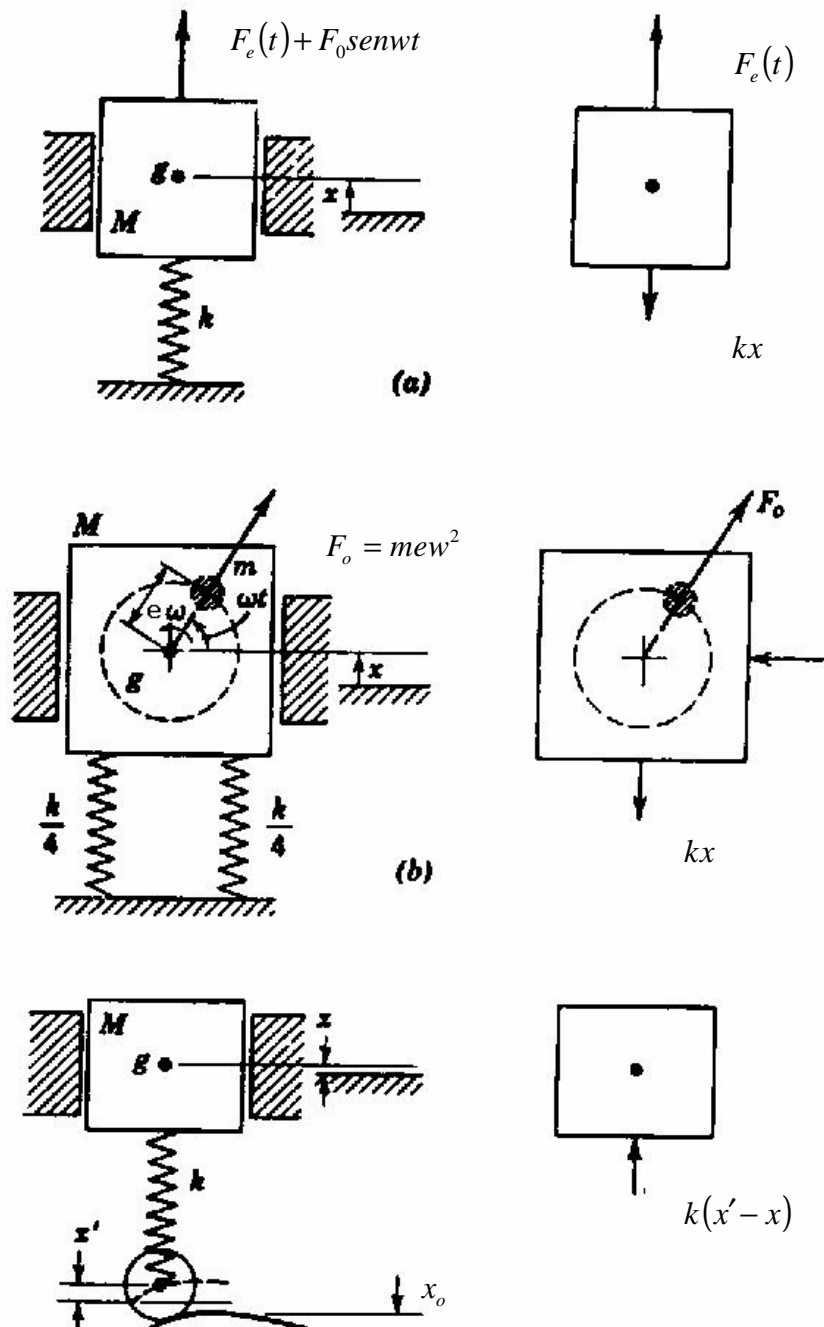
Es razonable suponer que la función $x = x_0 \text{sen}(wt)$ puede satisfacer esta ecuación.

En efecto al sustituir esta función en la ecuación. 1.4 resulta

$$-mw^2 x_0 \text{sen}(wt) + kx_0 \text{sen}(wt) = F_0 \text{sen}(wt)$$

dividiendo entre $\text{sen}wt$ se obtiene una solución para la ecuación 1.4.

$$-mw^2 x_0 + kx_0 = F_0$$



Factorizando se tiene:

$$x_0(k - m\omega^2) = F_0$$

$$x_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - m\omega^2/k} = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad 1.10$$

$$x_t = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} * \text{sen}\omega t \quad 1.11$$

La expresión F_0/k es la deformación estática del resorte bajo la carga constante

F_0 por lo tanto se puede escribir que $F_0/k = x_{est}$ y la solución resulta

$$\frac{x}{x_{est}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} * \text{sen}\omega t \quad 1.12$$

Aunque es válido establecer que esta expresión es una solución de la ecuación 1.4, no puede ser la solución más general, la cual debe contener dos constantes de integración. Puede verificarse fácilmente por sustitución que:

$$x = c \text{sen}\omega_n t + c \cos \omega_n t + \frac{x_{est}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{sen}\omega t \quad 1.13$$

los dos primeros términos constituyen la vibración libre sin amortiguamiento; el tercer término es la vibración forzada no amortiguada.

Ahora se examinarán las implicaciones del resultado de la ecuación 1.12. Es

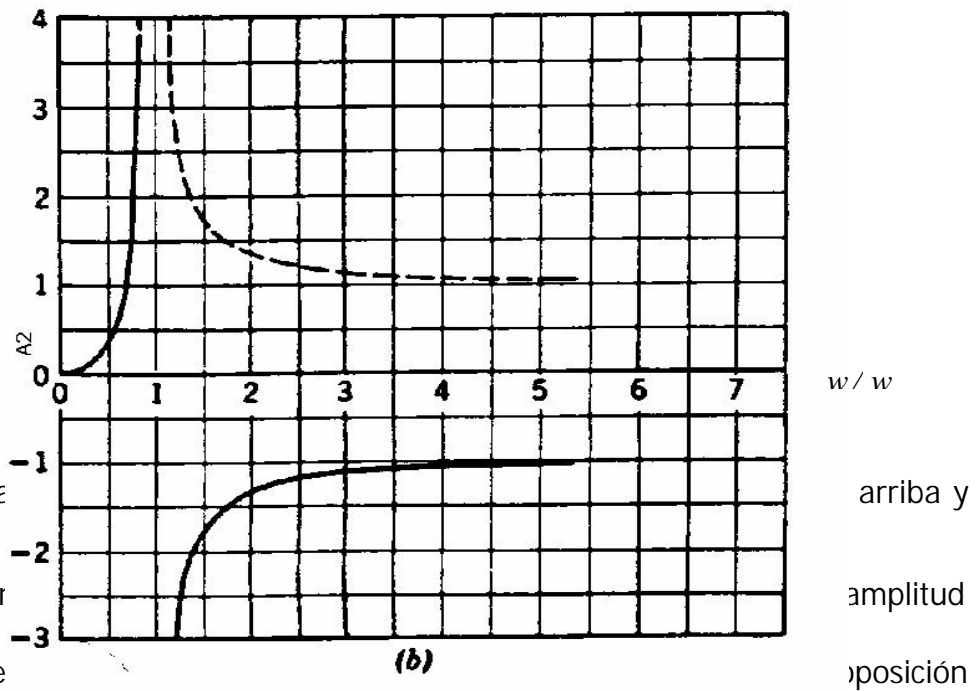
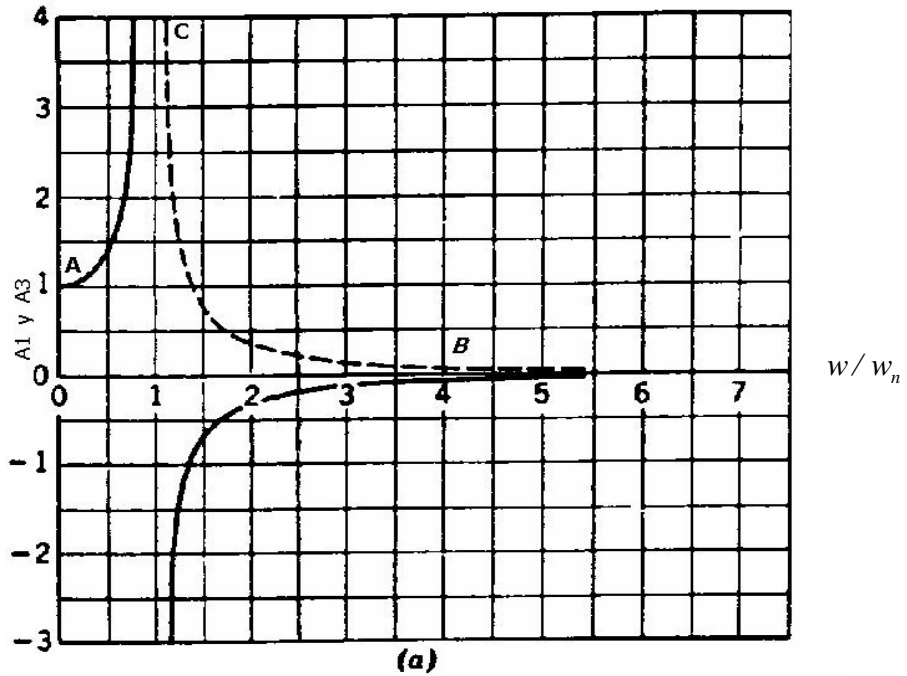
evidente que x/x_{est} es una onda senoidal de amplitud $\frac{1}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}$, dependiendo

de la razón de frecuencias $\frac{w}{w_n}$ la figura 1.7 representa claramente esta relación.

De la ecuación 1.10 se puede observar que para $\frac{w}{w_n} < 1$ las amplitudes u ordenadas son positivas mientras que para $\frac{w}{w_n} > 1$ son negativas.

Existen tres puntos importantes, A, B y C en la figura 1.7 en los cuales es posible inferir el valor de la ordenada basándonos en razonamientos puramente físicos.

Considérese primero el punto A muy cercano a $w=0$ o cuando $\frac{w}{w_n} < 1$; la frecuencia de la fuerza es sumamente lenta y la masa se habrá deformado por la fuerza, solamente en la magnitud de su deformación estática $x_0 = x_{est}$. Por lo tanto las amplitudes de la curva cercanas al punto A deberán ser aproximadamente iguales a la unidad.



Para frecuencias
 hacia abajo
 resulta muy pe-

arriba y
 amplitud
 posición

Figura 1.7 Funciones de amplitud para los sistemas de un grado de libertad sin amortiguación o desfase.

En el punto C se observa que la amplitud se hace infinitamente grande, esto sucede cuando $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$, la frecuencia forzada coincide exactamente con la frecuencia natural. La fuerza entonces puede empujar a la masa en el momento oportuno en la dirección adecuada y la amplitud puede aumentar indefinidamente. A este fenómeno se le conoce como "resonancia" y a la frecuencia natural se le suele llamar también "frecuencia de resonancia".

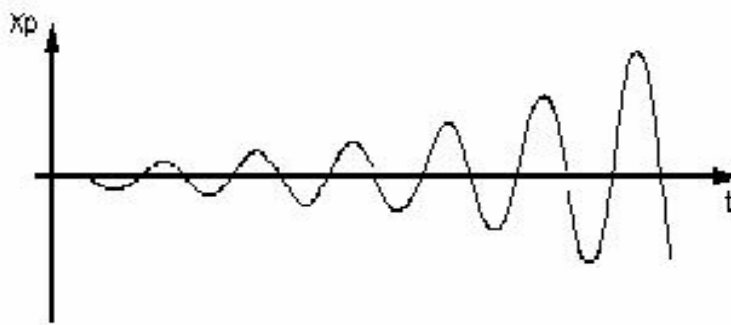


Figura 1.8. Resonancia

Regresando a la ecuación 1.10 y 1.11 se tiene que x_t es una onda senoidal cuya amplitud depende de la relación de las frecuencias $\frac{\omega}{\omega_n}$. Al valor absoluto de la relación $\frac{x}{x_{est}}$, se le conoce como la relación de amplificación, amplitud o

agrandamiento A , la cual muestra el tamaño de la amplitud en función del desplazamiento estático provocado por F_0 se tiene entonces que:

$$A_1 = \frac{x}{x_{est}} = \frac{I}{(1 - R_w^2)} \quad 1.14$$

donde $R_w = \frac{w}{w_n}$ es la relación de las frecuencias.

Para el sistema de la figura 1.6. b, $F_0 = m_1 e w^2$ y haciendo este reemplazo en la ecuación 1.9 se obtiene:

$$A_2 = \frac{mx}{m_1 e} = \frac{R_w^2}{(1 - R_w^2)} \quad 1.15$$

para el sistema de la figura 1.6.c, se observó que $F_0 = k x_0$ valor que al reemplazarlo en la ecuación 1.9 da:

$$A_3 = \frac{x}{x_0} = \frac{I}{(1 - R_w^2)} \quad 1.16$$

Para los sistemas de las figuras 1.6 a y 1.6.c, y observando las curvas de la figura 7 a se puede concluir que la amplitud de la vibración se hace más pequeñas para valores altos de R_w . Para el sistema de la figura 1.6.b. la amplitud de vibración se hace más pequeña cuando R_w tiende a cero.

En la ecuación 1.14 se puede ver que si $R_w < 1$, entonces el denominador $1 - R_w^2$ es positivo y, esto significa que la respuesta esta en fase con la excitación. Pero si $R_w > 1$, entonces el denominador se hace negativo; lo que significa que la respuesta esta 180 grados fuera de fase con la excitación.

$$R_w < 1$$

$$A_1 = \frac{1}{(1 - R_w^2)}$$

$$R_w > 1$$

$$A_1 = -\frac{1}{(R_w^2 - 1)}$$

Sin embargo para un caso práctico es más importante la amplitud que el signo: es por esto que la grafica de A_1 en función de w mostrada en la figura 1.7 a aparece graficando el valor absoluto de A_1 .

En ambas curvas se puede observar que se presenta una situación critica cuando $w = w_n$; es decir, $R_w = 1$, por lo que la amplitud se hace infinita. En este caso, la frecuencia de la fuerza perturbadora coincide exactamente con la frecuencia natural circular del sistema. Bajo estas circunstancias, la fuerza siempre puede empujar a la masa en el momento oportuno, en la dirección adecuada y, la amplitud se puede aumentar infinitamente presentándose entonces la condición de resonancia.

En la figura 1.7 a. se observa que para pequeños valores de R_w , o sea para casos en que la frecuencia de la fuerza perturbadora es pequeña en comparación con la

fuerza natural de la vibración libre, el factor de amplificación es aproximadamente igual a la unidad y las deformaciones son más o menos iguales que en el caso de una acción estática de la fuerza F_0 .

Cuando la frecuencia de la fuerza perturbadora es igual a la frecuencia de la vibración libre, el factor de amplificación se hace infinito. Su valor absoluto disminuye con la razón w/w_n y se acerca a cero cuando esta razón es muy grande.

Esto significa que cuando una fuerza pulsante de alta frecuencia actúa sobre el cuerpo vibrante, produce vibraciones de muy pequeña amplitud y en muchos casos se puede considerar que el cuerpo permanece inmóvil en el espacio; es decir, la fuerza se mueve hacia arriba y hacia abajo tan deprisa que la masa debido a su inercia, simplemente "no tiene tiempo para seguirla".

1.3.4. Vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso. Cuando un sistema está sometido a una excitación armónica forzada, su respuesta de vibración tiene lugar a la misma frecuencia de excitación.

Una fuente común de excitación armónica es el desbalance en máquinas rotatorias, aunque la excitación armónica es menos probable que la periódica u otros tipos de excitación. Pero se estudia la excitación armónica para comprender como el sistema responde a tipos más generales de excitación.

Considerando un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso, excitado por una fuerza armónica $F_0 \text{sen} \omega t$ la ecuación dinámica de movimiento para las vibraciones forzadas con amortiguamiento es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \text{sen} \omega t \quad 1.4$$

Se sabe que la solución de la ecuación 1.4 consta de dos partes: una parte complementaria (Solución homogénea), que es la solución de la ecuación 1.5 y una solución particular que es para las vibraciones forzadas. La solución complementaria fue resuelta en numerales anteriores.

1.3.4.1 Excitación por una fuerza armónica externa. Este tipo de fuerza aparece en maquinas reciprocantes por la acción de la fuerza del medio de trabajo (liquido o gas).

Para este caso tenemos la siguiente ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \text{sen} \omega t$$

la ecuación completa de esta ecuación será:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad 1.17$$

Si se supone que su solución es $x = x_0 \text{sen}(wt + \mathbf{f})$ se obtiene para esta ecuación los valores para x_0 y \mathbf{f} :²

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} \quad 1.18$$

$$\tan \mathbf{f} = \frac{cw}{k - mw^2} \quad 1.19$$

donde x es la amplitud del desplazamiento de la masa m y, \mathbf{f} representa la diferencia de fase entre la fuerza perturbadora y el desplazamiento x .

Sustituyendo w_n , $R_c = c/c_c$ y $R_w = w/w_n$ se obtienen los parámetros adimensionales de A (función o relación de amplitudes) y de \mathbf{f} (función de fases).

$$A = \frac{x}{\left(\frac{F_0}{k}\right)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - R_w^2)^2 + (2R_c R_w)^2}} \quad 1.20$$

$$\mathbf{f} = \arctan g\left(\frac{2R_c R_w}{1 - R_w^2}\right) \quad 1.21$$

finalmente se obtiene para $x_p(t)$ la siguiente expresión que es la solución particular:

$$x_p(t) = \left(\frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} \right) \text{sen}(wt - \mathbf{j}) \quad 1.22$$

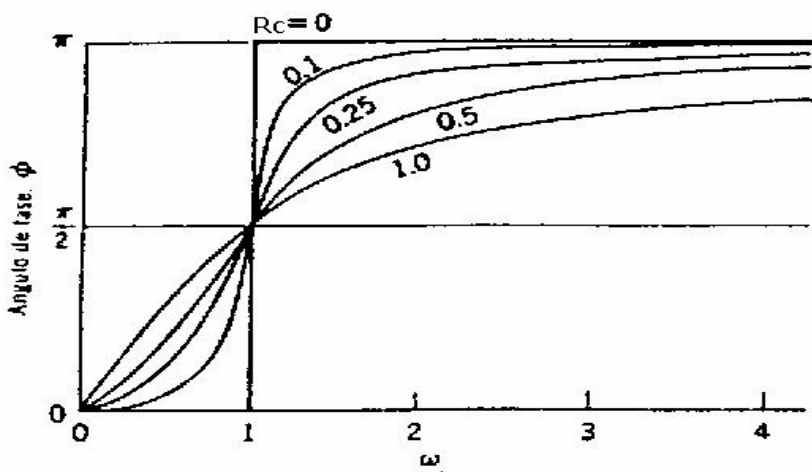
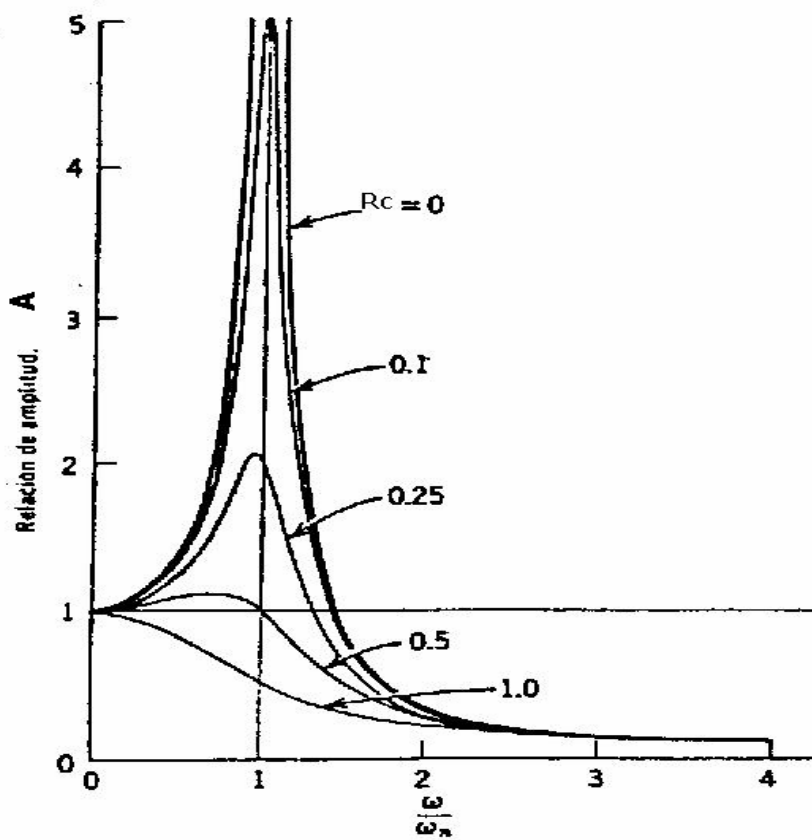
². Den Hartog. Capitulo 2

En la figura 1.9 se encuentran graficados A y \mathbf{f} . El diagrama a de amplitudes de la figura 1.9, consiste en una familia de curvas, una para cada valor de amortiguamiento c . Todas las curvas aparecen debajo de la de amortiguamiento cero (la cual es una asíntota). Esta curva para $c = 0$ es la misma de la figura 1.7 a. Se puede entonces afirmar que la amplitud de la vibración forzada disminuye con el amortiguamiento.

“Como se ve en el diagrama (a) de la figura 1.9, el valor máximo de A ocurre cuando $R_w = 1$. Para $R_w = 0$ y, en valores progresivamente menores a medida que R_w aumenta.

En el diagrama b de la figura 1.9, se representa la diferencia de fase entre la fuerza perturbadora y el desplazamiento. Para una vibración forzada sin amortiguación, se ha visto que cuando $R_w < 1$, la fuerza y el desplazamiento están en fase (se mueven en la misma dirección); mientras que por encima de la resonancia, se encuentran desfasados 180 grados. La curva de la figura 1.9 b, muestra en consecuencia, un salto discontinuo en el punto de resonancia.

Estas ecuaciones indican que la amplitud adimensional A y la fase ϕ son funciones solamente de la razón de frecuencias $\frac{\omega}{\omega_n}$ y el factor de amortiguación R_c , que gráficamente se representan como: $R_c = 1$



1.3.4.2. Excitación por fuerzas de inercias rotativas: El desbalance en maquinas rotatorias es una fuente común de excitación vibratoria.

Existe desbalanceamiento rotacional en una máquina, si el centro de gravedad de la parte rotatoria no coincide con el eje de rotación.

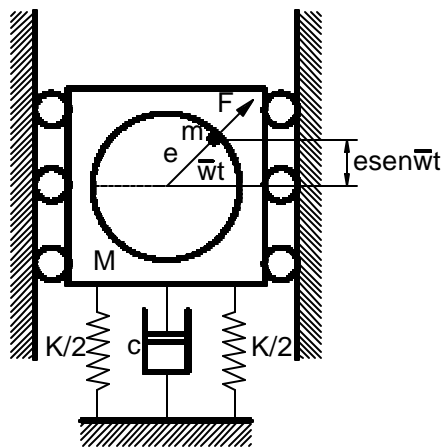


Figura 1.10 Sistema de un grado de libertad excitado por una fuerza de inercia

Considérese un sistema resorte-masa restringido a moverse en una sola dirección vertical y excitado por una máquina rotativa no balanceada como muestra la figura 1.10, el desbalance está representado por una masa excéntrica m con excentricidad e que rota con una velocidad angular ω . Se puede entonces obtener para este sistema una ecuación diferencial de movimiento que viene dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

donde $F_0 = m\omega e^2$; $m + M = m_1$ donde m es la masa desbalanceada.

Si se hacen estos reemplazos en la ecuación 1.22 se obtiene:

$$x_p(t) = \frac{m\omega e^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin \omega t$$

$$x_p = \frac{m\omega e^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

siendo x_p la máxima amplitud de la curva

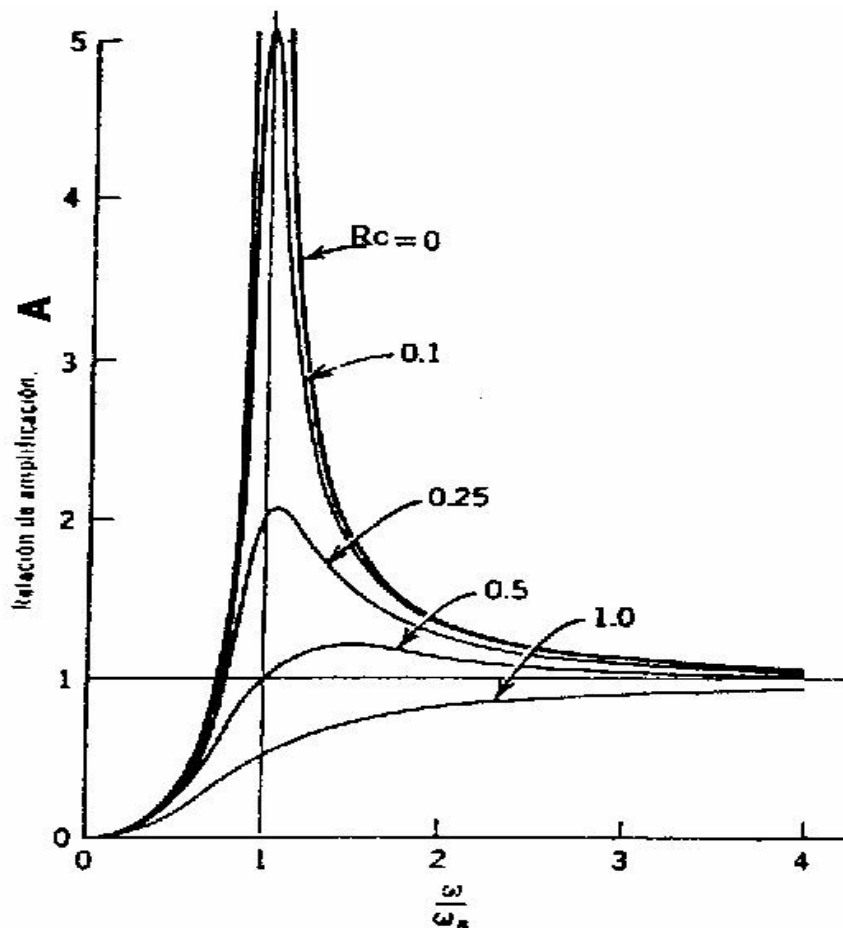
$$\mathbf{f} = \arctan g \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right)$$

Haciendo $R_c = \frac{c}{c_c}$ y $R_w = \frac{\omega}{\omega_n}$ se obtiene:

$$A = \frac{Mx}{me} = \frac{R_w^2}{\sqrt{(1 - R_w^2)^2 + (2R_c R_w)^2}} \quad 1.23$$

$$f = \arctan g \left(\frac{2R_c R_w}{1 - R_w^2} \right)$$

Estas ecuaciones se encuentran graficadas en la figura 1.11. En esta grafica se puede observar que para un valor de R_w pequeño o una velocidad de rotación baja, la masa M efectúa cambios muy pequeños, para una velocidad cercana a la frecuencia circular natural del sistema; es decir que cuando $R_w = 1$, la función de amplitudes toma valores muy grandes para una amortiguación pequeña. El valor máximo de la amplitud A ocurre cuando $R_w = 1$, para $R_c = 0$ y en valores progresivamente mayores a medida que R_c aumenta.



1.4 SISTEMA CON DOS GRADOS DE LIBERTAD

Se dice que un sistema tiene dos grados de libertad, cuando se requieren dos coordenadas para describir su movimiento. Este sistema es la clave para el estudio de sistemas con varios grados de libertad.

Si las masas " m_1 " y " m_2 " se restringen a moverse verticalmente; se necesitara por lo menos una coordenada " $x(t)$ " para definir la localización de cada una de las

masas en un instante cualquiera, así el sistema necesita en total dos coordenadas para determinar su posición (Es de dos grados de libertad). Figura 1.12

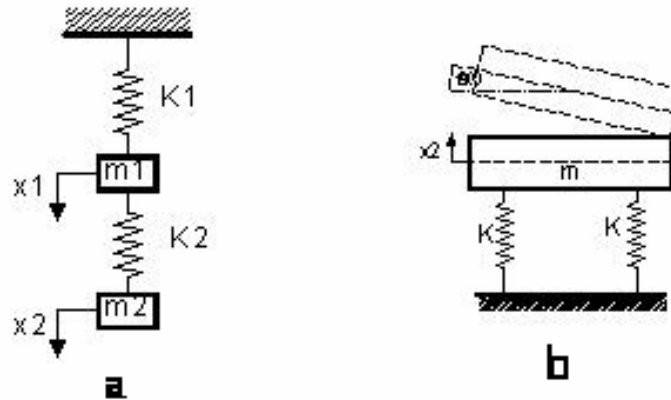


Figura 1.12 Sistema de dos grados de libertad

Las masas " m_1 y m_2 " se restringen a moverse verticalmente, se necesitan dos coordenadas para determinar el comportamiento del sistema y que las dos masas pueden moverse independiente la una de la otra. Especificando sus posiciones verticales x_1 y x_2 Figura 1.12 a.

Si la masa m de momento de inercia I , soportada por dos resortes iguales, como se muestra en la Figura 1.12 b., es obligada a moverse en plano vertical se necesitan dos coordenadas para determinar su movimiento.

Una de estas coordenadas es un desplazamiento rectilíneo $x(t)$ y la otra coordenada será un desplazamiento angular $q(t)$ que tiene que ver con la rotación de la masa. Las dos coordenadas son independientes una de la otra.

Un sistema de dos grados de libertad tiene dos ecuaciones de movimiento, una para cada masa; es decir, un sistema con dos grados de libertad tendrá dos frecuencias naturales.

Las frecuencias naturales se encuentran resolviendo “La ecuación de frecuencia”³ en un sistema sin amortiguación o la “Ecuación característica” si es un sistema amortiguado.

1.4.1 Vibraciones libres sin amortiguamiento. Para el modelo fundamental de la figura 1.13 el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 1.13.

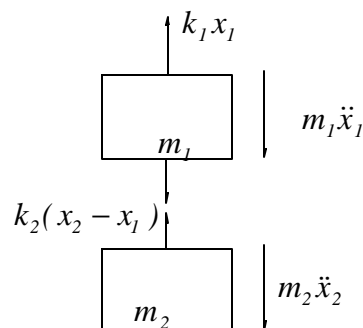


Figura 1.13 Modelo fundamental de un sistema de dos grados de libertad

³ la ecuación de la frecuencia es una expresión que describe la variación con respecto al tiempo de cada coordenada utilizada para definir el movimiento del sistema.

Aplicando la segunda ley de Newton y teniendo presente que las masa m_1 y m_2 pueden deslizarse sin rozamiento y que los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se toman como coordenadas, desde su posición de equilibrio estático, se obtiene que:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad 1.24$$

Estas son ecuaciones diferenciales, lineales y sim.ultaneas con coeficientes constantes. Si suponemos que el movimiento es periódico y compuesto de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias, se puede tener una solución de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \text{sen}(w_n t + \mathbf{f}); & \ddot{x}_1 &= -A w_n^2 \text{sen}(w_n t + \mathbf{f}) \\ x_2 &= B \text{sen}(w_n t + \mathbf{f}) & \ddot{x}_2 &= -B w_n^2 \text{sen}(w_n t + \mathbf{f}) \end{aligned}$$

Donde A, B y \mathbf{j} son constantes arbitrarias y w_n es una de las frecuencias naturales desconocidas hasta ahora, del sistema.

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la ecuación 1.24 igualando a cero, y simplificando $\text{sen}(w_n t + \mathbf{f})$; se obtiene que:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 w_n^2) A - k_2 B &= 0 \\ -k_2 A + (k_2 - m_2 w_n^2) B &= 0 \end{aligned} \quad 1.25$$

Cuando $A = B = 0$ se presenta una solución lógica, llamada solución trivial pero, la misma solo define la condición de equilibrio estático del sistema. Otra solución

diferente a cero, si existe, se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 w_n^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 w_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante, se tiene que:

$$(k_1 + k_2 - m_1 w_n^2)(k_2 - m_2 w_n^2) - k_2^2 = 0$$

$$w_n^4 - \left[(k_1 + k_2) / m_1 + (k_2 / m_2) \right] w_n^2 + (k_1 * k_2 / m_1 * m_2) = 0$$

esta es la ecuación de frecuencia del sistema y, resolviéndola se obtiene que sus dos raíces:

$$w_{n1,2}^2 = \frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_1 * k_2}{m_1 * m_2}} \quad 1.26$$

Estas dos raíces representan las dos frecuencias naturales del sistema, las cuales son reales.

Regresando a la ecuación 1.25 se observa que no se pueden obtener valores determinados para A y B, pero si una razón o relación:

$$\frac{A}{B} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_1 * w_n^2} = \frac{k_2 - m_2 * w_n^2}{k_2}$$

tomando w_n^2 como w_{n1}^2 o w_{n2}^2 se obtiene las razones de amplitud:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_1 * w_{n1}^2} = \frac{k_2 - m_2 * w_{n1}^2}{k_2} \quad 1.27$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_1 * w_{n2}^2} = \frac{k_2 - m_2 * w_{n2}^2}{k_2}$$

Cuando las masas de un sistema oscilan de tal forma que llegan simultáneamente a los desplazamientos máximos y pasan por sus puntos de equilibrio también simultáneamente, o sea, que todas las partes móviles del sistema están oscilando en fase con una frecuencia. Tal estado se llama *modo normal o modo principal de vibración*.

Para ver mas claro lo referente a los modos principales de vibración se debe estudiar un diseño particular. Se asume entonces que $m_1 = m_2 = m$ y $k_2 = k$. Reemplazando estos valores en la ecuación 1.26 teniendo presente el signo positivo se toma para el modo de vibración de frecuencia natural más alta, se tiene que:

$$w_{n1,2}^2 = \left(\frac{3k}{2m} \right) \pm \left(\frac{\sqrt{5k^2}}{2m} \right)$$

entonces:

$$w_{n1} = 0.618 \sqrt{k/m}$$

$$w_{n2} = 1.618 \sqrt{k/m}$$

reemplazando estos valores en las ecuaciones 1.27 se obtiene:

$$A_1/B_1 = 0.618$$

$$A_2/B_2 = -1.618$$

Como se observa, A_1/B_1 es mayor que cero y A_2/B_2 es menor que cero; por lo tanto se puede concluir que cuando el sistema realiza vibraciones con la frecuencia ω_{n1} m_1 y m_2 se mueven siempre en fase. Cuando las vibraciones se efectúan en la frecuencia ω_{n2} las masas estarán siempre desfasadas 180 grados. Estos patrones de movimiento se denominan "modos principales de vibración". El de la frecuencia inferior ω_{n1} es llamado el primer modo y el de la frecuencia mas alta ω_{n2} es llamado el segundo modo de vibración del sistema.

En cualquier sistema de dos grados de libertad como el anterior, se obtendrá siempre una ecuación bicuadrada en ω_n (ecuación de frecuencia), que generalmente tendrá dos raíces positivas reales y desiguales. Para cada una de estas raíces se obtendrá una razón definida de las amplitudes de las dos coordenadas del movimiento. Estas razones de amplitud definen dos modos principales de vibración libre del sistema. Superponiendo estos dos modos principales adecuadamente, se puede representar el caso general de vibraciones libres del sistema.

Para el sistema de la figura 1.14 b necesita de dos coordenadas independientes para determinar su posición; estas son $\mathbf{x}(t)$ que describe el movimiento traslativo y la otra coordenada será un desplazamiento angular $\mathbf{q}(t)$ que tiene que ver con el movimiento rotativo, como se aprecia en el diagrama b y c de la figura 1.14. se

considera que la masa total del cuerpo rígido m esta concentrada en su centro de gravedad G . Si denominamos a \bar{r} como el radio de giro del cuerpo alrededor del eje perpendicular al plano del papel y, que pasa por G , $m\bar{r}^2$ es el momento de inercia del cuerpo respecto a dicho eje.

El cuerpo soportado por dos resortes cuyas constantes de rigidez son k_1 y k_2 y, los cuales están localizados a las distancias de L_1 y L_2 de G , como se muestra. La posición de equilibrio estático se muestra con líneas llenas.

Las ecuaciones de movimiento no son totalmente independientes la una de la otra, pues tendrán un coeficiente de acoplamiento. Asumiendo que el cuerpo vibra con pequeños desplazamientos, por lo tanto el movimiento traslativo viene dado por:

$$m\ddot{x} + k_1(x - L_1\mathbf{q}) + k_2(x + L_2\mathbf{q}) = 0$$

y el movimiento rotativo:

$$m\bar{r}^2\ddot{\mathbf{q}} + k_1L_1(x - L_1\mathbf{q}) + k_2L_2(x + L_2\mathbf{q}) = 0$$

Ordenando los términos:

$$\ddot{x} + \left[\frac{(k_1 + k_2)}{m} \right] x + \left[\frac{(k_2L_2 - k_1L_1)}{m} \right] \mathbf{q} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{q}} + \left[\frac{(k_2L_2 - k_1L_1)}{m\bar{r}^2} \right] x + \left[\frac{(k_1L_1^2 + k_2L_2^2)}{m\bar{r}^2} \right] \mathbf{q} = 0$$

estas formulas pueden ser escritas mas fácilmente haciendo las siguientes sustituciones:

$$a = \frac{(k_1 + k_2)}{m} \quad U = \frac{(k_2 L_2 - k_1 L_1)}{m} \quad d = \frac{(k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2)}{m}$$

las ecuaciones anteriores toman entonces la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + ax + Uq &= 0 \\ \ddot{q} + \left(\frac{U}{\bar{r}^2}\right)x + \left(\frac{d}{\bar{r}^2}\right)q &= 0 \end{aligned} \quad 1.28 \text{ a } 1.28 \text{ b}$$

Observando las ecuaciones anteriores se puede concluir que las coordenadas $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{q}(t)$ no son independientes una de otra y, si por ejemplo, a fin de generar vibraciones desplazamos el cuerpo rígido de masa m en la dirección x (que en este caso es dirección vertical) y después lo ponemos repentinamente en libertad, originamos una vibración en la cual tendrá lugar no solamente un desplazamiento vertical $\mathbf{x}(t)$, sino también una rotación $\mathbf{q}(t)$. Sin embargo sí el sistema esta diseñado para que $k_1 L_1 = k_2 L_2$ es decir, $U=0$; entonces, las coordenadas $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{q}(t)$ se hacen independientes. En este caso, una carga aplicada a G producirá solamente un desplazamiento de traslación de cuerpo sin rotación.⁴

⁴ El hecho de que el sistema sea simétrico. Para



seño

De otra parte, si $U=0$, la ecuación 1.28 a toma la siguiente forma;

$$\ddot{x} + ax = 0$$

esta ecuación representa un movimiento vertical desacoplado con

frecuencia vertical natural:

$$w_{nv} = \sqrt{a} = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$$

la ecuación 1.28 b queda de la siguiente forma:

$$\ddot{q} + \left(d/\bar{r}^2\right)q = 0$$

la cual representa un movimiento rotacional desacoplado con frecuencia natural rotacional:

$$w_{nr} = \sqrt{d/\bar{r}^2} = \sqrt{(k_1 L_1^2 + k_2 L_2^2)/m\bar{r}^2}$$

se concluye entonces que para las ecuaciones de movimiento, U representa el coeficiente de acoplamiento.

Para calcular las frecuencias naturales del sistemas acoplados se asume una solución de la siguiente forma:

$$x = A \text{sen} w_n t$$

$$q = B \text{sen} w_n t$$

$$\ddot{x} = -A w_n^2 \text{sen} w_n t$$

$$\ddot{q} = -B w_n^2 \text{sen} w_n t$$

sustituyendo estos valores en las ecuaciones 1.28 y simplificando $\text{sen} w_n t$ se obtiene:

$$\begin{aligned} A(a - w_n^2) + UB &= 0 \\ B\left[\left(\frac{d}{\bar{r}^2}\right) - w_n^2\right] + \frac{UA}{\bar{r}^2} &= 0 \end{aligned}$$

se tiene entonces que:

$$\frac{A}{B} = \frac{U}{(w_n^2) - a} = \frac{\bar{r}^2 w_n^2 - d}{U} \quad 1.29$$

la ecuación de la frecuencia toma entonces la siguiente forma:

$$w_n^4 - \left(\frac{d}{\bar{r}^2} + a\right)w_n^2 + \left(\frac{ad - U^2}{\bar{r}^2}\right) = 0$$

teniendo en cuenta que $w_{nv}^2 = a; w_{nr}^2 = \frac{d}{\bar{r}^2}$, se puede presentar la ecuación de

frecuencia de la siguiente manera:

$$w_n^2 - (w_{nr}^2 + w_{nv}^2)w_n^2 + \left[w_{nv}^2 * w_{nr}^2 - \left(\frac{k_2 L_2 - k_1 L_1}{m\bar{r}}\right)^2 \right] = 0$$

Las dos raíces de esta ecuación representan las dos frecuencias naturales del sistema acoplado:

$$w_n^2 = \frac{1}{2} \left[(w_{nv}^2 + w_{nr}^2) \pm \sqrt{(w_{nv}^2 - w_{nr}^2)^2 + 4\left(\frac{k_2 L_2 - k_1 L_1}{m\bar{r}}\right)^2} \right] \quad 1.30$$

el signo positivo se toma para el modo de vibración de frecuencia natural más alta w_{n2} y el signo negativo, para el modo de vibración de frecuencia inferior w_{n1} .

El diagrama de la figura 1.14 muestra uno de los modos acoplados de vibración, con eje nodal a una distancia L_n del centro de gravedad G, donde $L_n * B = A$. esta posición del eje nodal puede ser calculada de la ecuación 1.29:

$$L_n = \frac{A}{B} = \frac{U}{w_n^2 - a} = \left(\frac{1}{\left(\frac{w_n^2}{w_{nv}^2} \right) - 1} \right) \left(\frac{k_2 L_2 - k_1 L_1}{k_2 + k_1} \right)$$

los valores positivos de L_n se tendrán cuando el eje nodal este a la derecha del centro de gravedad G y, L_n : será negativo cuando el eje nodal esta a la izquierda de G. Se debe notar que L_1 y L_2 son las distancias de los dos ejes nodales al centro de gravedad, entonces $L_1 * L_2 = \bar{r}^2$ y la ecuación 1.30 se reduce a:

$$\frac{w_n^2}{w_{nv}^2} = \frac{k_1 L}{L_2 (k_1 + k_2)} = \frac{k_2 L}{L_1 (k_1 + k_2)}$$

Donde $L=L_1+L_2$. Si estos valores son sustituidos en la ecuación 1.29 entonces las distancias de los ejes nodales al centro de gravedad serán L_2 y $-L_1$ respectivamente, como se muestra en los diagramas e y f de la figura 1.14.

1.4 SISTEMAS DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD

Existen muchos casos en que una maquina, su fundación o el conjunto, pueden vibrar en cualquier dirección y alrededor de cualquier eje en el espacio. Las características de estos sistemas pueden ser estudiadas con un buen grado de seguridad, en basa a un modelo cuya masa y soportes estén arreglados no en el plano sino en el espacio figura 1.15.

Un modelo como este, requiere seis cantidades para describir su posición instantánea en el sistema de coordenadas X,Y,Z. Se tendrá entonces tres grados de libertad que son de traslación lo largo de los tres ejes coordenados y tres de rotación alrededor de los mismos ejes. Por lo anterior, el modelo es de seis grados de libertad.

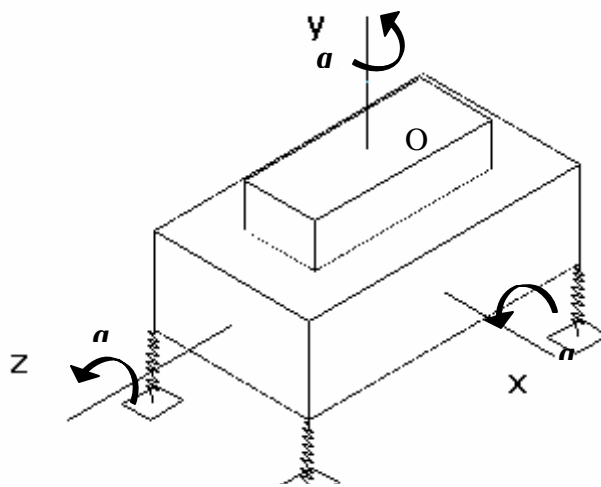
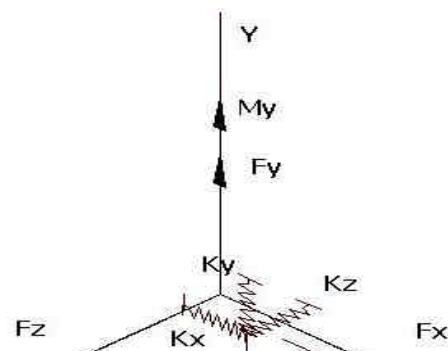


Figura 1.15 Modelo de seis grados de libertad



1.5.1. Arreglo asimétrico: Con base a lo anterior, se considera un punto de montaje cualquiera del modelo de la figura 1.15 y, se omite la amortiguación por razones de sencillez desde el punto de vista matemático. Con referencia a la figura 1.16 se tiene que:

O: Centro de gravedad del cuerpo rígido;

X,Y,Z: Desplazamientos del centro de gravedad a lo largo de los ejes O-X, O-Y, Y O-Z respectivamente;

q_x, q_y, q_z : Desplazamientos angulares del cuerpo rígido alrededor de los ejes O-X, O-Y, Y O-Z;

L_x, L_y, L_z : Coordenadas del punto de montaje;

k_x, k_y, k_z :Constantes de rigidez de los elementos de montaje con respecto a los ejes O-X,O-Y, Y O-Z;

I_x, I_y, I_z :Momentos de inercia.

Los desplazamientos lineales son positivos en la dirección en que lo indican las flechas en la figura 1.16. así mismo q_x, q_y, q_z :son positivos cuando van en sentido antihorario visto desde el extremo positivo del eje.

Las líneas de acción de los elementos de montaje (resortes), se toman paralelas a los ejes que son mutuamente perpendiculares a través del centro de gravedad; los cuales, se asume que son los ejes principales de inercia del cuerpo rígido.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento se pueden hallar aplicando la relación D' Alembert:

$$\begin{array}{ll}
 F_x + m\ddot{x} = 0 & M_x + I_x \ddot{q}_x = 0 \\
 F_y + m\ddot{y} = 0 & M_y + I_y \ddot{q}_y = 0 \\
 F_z + m\ddot{z} = 0 & M_z + I_z \ddot{q}_z = 0
 \end{array} \quad 1.31$$

si se tienen n unidades de montaje, entonces las constantes de rigidez y las coordenadas de cada unidad de montaje estarán determinadas por los subíndices 1-n es decir las coordenadas de la enésima unidad de montaje serán L_{xn}, L_{yn}, L_{zn} .

Teniendo en cuenta lo anterior, y de acuerdo a la figura 16 se tiene:

$$\sum k_x (x + L_z * q_y - L_y q_z) + m\ddot{x} = 0$$

$$\sum k_y (y + L_x * \mathbf{q}_z - L_z \mathbf{q}_x) + m\ddot{x} = 0 \quad 1.32$$

$$\sum k_z (z + L_y * \mathbf{q}_x - L_x \mathbf{q}_y) + m\ddot{z} = 0$$

$$\begin{aligned} F_z L_y - F_y L_z + I_x \ddot{\mathbf{q}}_x &= 0 \\ F_x L_z - F_z L_x + I_y \ddot{\mathbf{q}}_y &= 0 \\ F_y L_x - F_x L_y + I_z \ddot{\mathbf{q}}_z &= 0 \end{aligned} \quad 1.33$$

se suponen las soluciones de este conjunto de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= x \text{sen} w_n t & \ddot{x} &= -w_n^2 x \text{sen} w_n t \\ y &= y \text{sen} w_n t & \ddot{y} &= -w_n^2 y \text{sen} w_n t \\ z &= z \text{sen} w_n t & \ddot{z} &= -w_n^2 z \text{sen} w_n t \\ \mathbf{q}_x &= \mathbf{q}_x \text{sen} w_n t & \ddot{\mathbf{q}}_x &= -w_n^2 \mathbf{q}_x \text{sen} w_n t \\ \mathbf{q}_y &= \mathbf{q}_y \text{sen} w_n t & \ddot{\mathbf{q}}_y &= -w_n^2 \mathbf{q}_y \text{sen} w_n t \\ \mathbf{q}_z &= \mathbf{q}_z \text{sen} w_n t & \ddot{\mathbf{q}}_z &= -w_n^2 \mathbf{q}_z \text{sen} w_n t \end{aligned}$$

reemplazando en las ecuaciones 1.32 y 1.33 se obtiene los siguiente:

$$\begin{aligned} (\sum k_x - m w_n^2) x &+ \sum (k_x L_z) \mathbf{q}_y - \sum (k_x L_y) \mathbf{q}_z = 0 \\ (\sum k_y - m w_n^2) y &- (\sum k_x L_z) \mathbf{q}_x + (\sum k_x L_x) \mathbf{q}_z = 0 \\ (\sum k_z - m w_n^2) z &+ \sum (k_z L_y) \mathbf{q}_x - \sum (k_z L_x) \mathbf{q}_y = 0 \\ -\sum (k_y L_z) y &+ \sum (k_z L_y) z + [\sum (k_z L_y^2) + \sum (k_y L_z^2) - I_x w_n^2] \mathbf{q}_x - \sum (k_z L_x L_y) \mathbf{q}_y - \sum (k_y L_x L_z) \mathbf{q}_z = 0 \\ (\sum k_x L_z) x &- (\sum k_z L_x) z - \sum (k_z L_x L_y) \mathbf{q}_x + [\sum (k_x L_z^2) + \sum (k_z L_x^2) - I_y w_n^2] \mathbf{q}_y - \sum (k_x L_y L_z) \mathbf{q}_z = 0 \\ (\sum k_x L_y) x &+ \sum (k_y L_x) y - \sum (k_y L_x L_z) \mathbf{q}_x - \sum (k_x L_y L_z) \mathbf{q}_y + [\sum (k_y L_x^2) + \sum (k_x L_y^2) - I_z w_n^2] \mathbf{q}_z = 0 \end{aligned}$$

En forma matricial, se puede escribir este conjunto de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 \sum k_x - m\omega_n^2 & & & -\sum(k_x L_z) & -\sum(k_x L_y) & & X \\
 & \sum k_y - m\omega_n^2 & & -\sum(k_y L_z) & -\sum(k_y L_x) & & Y \\
 & & \sum k_z - m\omega_n^2 & -\sum(k_z L_y) & -\sum(k_z L_x) & & Z \\
 -\sum(k_y L_z) & \sum(k_z L_y) & \sum(k_z L_x) & \sum(k_x L_z^2) + \sum(k_y L_z^2) - I_x \omega_n^2 & -\sum(k_z L_x L_y) & & q_x \\
 \sum(k_x L_z) & -\sum(k_z L_x) & -\sum(k_z L_y) & \sum(k_x L_z^2) + \sum(k_z L_x^2) - I_y \omega_n^2 & -\sum(k_x L_y L_z) & & q_y \\
 -\sum(k_x L_y) & \sum(k_y L_x) & -\sum(k_y L_z) & -\sum(k_x L_y L_z) & \sum(k_y L_x^2) + \sum(k_x L_y^2) - I_z \omega_n^2 & & q_z
 \end{array}$$

Se puede presentar una solución única, llamada nula o trivial pero, esta no tiene ninguna significación para el efecto de explicar vibraciones y, por lo tanto nos interesan mas las soluciones no triviales. Como se sabe, la solución no trivial se presenta cuando el determinante de la matriz de coeficiente es igual cero. Por lo tanto igualamos la matriz anterior a cero y obtenemos la ecuación llamada característica.

Cuando el determinante D es expandido, resulta una ecuación polinomial de grado seis en w_n^2 . Las raíces de esta ecuación son los cuadrados de las frecuencias naturales, w_{nj}^2 . Estos valores pueden ser ordenados de la siguiente manera:

$$0 \leq w_{ni}^2 \leq w_{nii}^2 \leq w_{nii}^2 \leq w_{niv}^2 \leq w_{nv}^2 \leq w_{nvi}^2$$

correspondiente a cada valor característico w_{nj}^2 habrá un "vector característico", o modo natural de vibración V_j donde

$$V_j = \begin{bmatrix} V_i \\ V_{ii} \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{vi} \end{bmatrix}$$

en la figura 1.17 se muestran los seis modos naturales de vibración de un modelo como el de la figura 1.16.

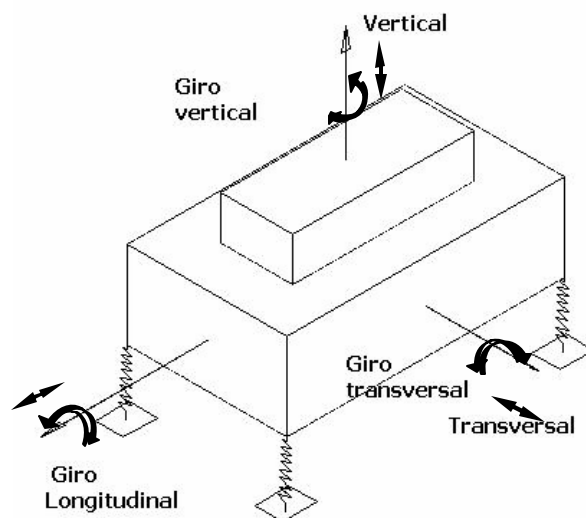


Figura 1.17 Los seis modos naturales de vibración para el modelo de seis grados de libertad

1.5.2. Arreglo simétrico alrededor del plano Y-O-Z (caso1). De acuerdo con la figura 1.17 los O-x, O-Y, O-Z, son transversal, vertical y longitudinal respectivamente. Por consiguiente, las vibraciones lineales serán llamadas transversal, vertical y longitudinal y las vibraciones torsionales o giros alrededor de dichos ejes, serán llamados “giro transversal” (Pitching o Rolling) “giro vertical” (yawing o Twisting) y “giro longitudinal” (Rocking).⁵

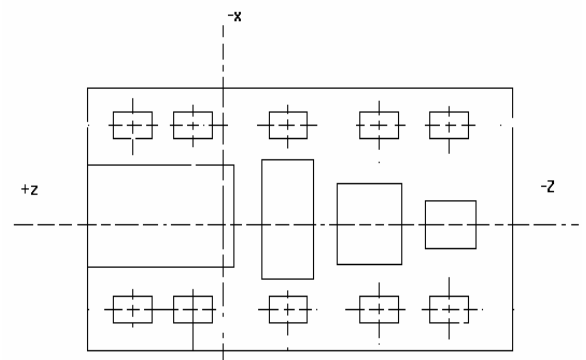
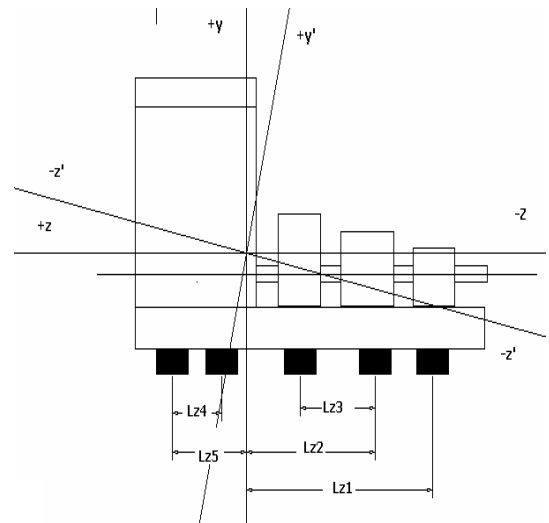
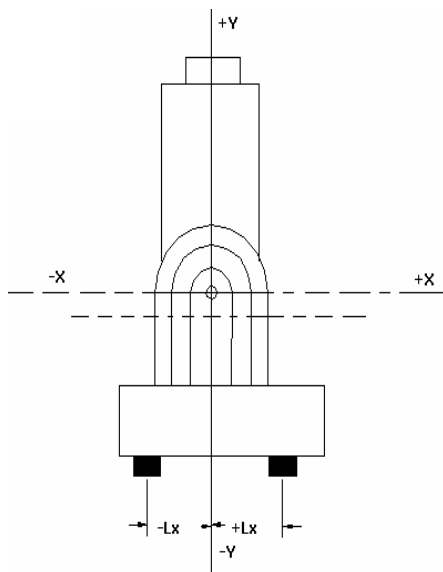
Se asume como es usual en la práctica, que el sistema de montaje consiste en un número de unidades de montaje idénticas, las cuales tienen las mismas constantes de rigidez k_x, k_y y k_z . De acuerdo con la anotación anterior, k_x es la rigidez transversal, k_y la vertical y k_z la longitudinal de cada unidad de montaje. En general k_x, k_y y k_z son diferentes entre sí.

Se ha utilizado el término “unidad de montaje”, para mostrar que en determinados puntos de montaje (resortes por ejemplo), en todas las tres direcciones. Así mismo, un resorte tiene tres componentes de rigidez.

⁵ Al darle la denominación de giro transversal, vertical o longitudinal a las vibraciones torsionales. Se busca que el lector los asocie rápidamente con los ejes XYZ alrededor de los cuales movimiento.

La figura 1.18 muestra un diagrama de una instalación típica, consistente en un motor directamente acoplado a un generador eléctrico. El conjunto motor generador esta montado sobre una placa sólida y esta, es soportada por diez elementos de montaje distribuidos por parejas a lo largo de la placa.

Estos diez elementos de montaje tienen las mismas características y, todos están colocados simétricamente alrededor del plano vertical que contiene al centro de gravedad del conjunto cimentación-motor-generador; por consiguiente, este arreglo es simétrico alrededor del plano Y- O-Z.



Bajo estas condiciones, según lo muestra la figura 1.18, la localización transversal de cada par de elementos de montaje es L_{x1} , L_{x2} , etc, al lado derecho de Y-Y y es L_{x1} , $-L_{x2}$ etc, al lado izquierdo. Esto hace que la $\sum L_x$ para toda instalación completa sea cero y, como k_x , k_y y k_z son los mismos para cada unidad de montaje, todos los elementos de la matriz característica que contiene $\sum L_x$, serán cero.

Es muy importante aclarar que si k_x , k_y y k_z no tienen los mismos valores para cada unidad de montaje entonces la condición para que exista simetría alrededor del plano Y-O-Z sería que, $\sum(k_y * L_x) = \sum(k_z L_x) = 0$.

Cuando se presenta lo anterior, la matriz característica toma la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} \sum k_x - m\dot{V}_H^2 & & -\sum(k_x L_z) & -\sum(k_x L_y) \\ & \sum k_y - m\dot{V}_H^2 & & \\ & & -\sum(k_y L_z) & \\ & & & \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sum k_y - m\dot{w}_n^2 & -\sum(k_z L_y) & & & & \\ -\sum(k_y L_z) & \sum(k_z L_y) & \sum(k_z L_y^2) + \sum(k_y L_z^2) - I_x \dot{w}_n^2 & & & \\ \sum(k_x L_z) & & & \sum(k_x L_z^2) + \sum(k_z L_x^2) - I_y \dot{w}_n^2 & -\sum(k_x L_y L_z) & \\ -\sum(k_x L_y) & & & -\sum(k_x L_y L_z) & \sum(k_y L_x^2) + \sum(k_x L_y^2) - I_z \dot{w}_n^2 & \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación 1.34

El determinante de esta ecuación esta conformado por seis ecuaciones que se pueden subdividir en dos grupos

a saber: el primero, que agrupa las ecuaciones que contienen los términos con Y, Z, q_x ; o sea, los modos de vibración vertical, longitudinal y giro transversal (Pitching), acoplados. El segundo, es el de los modos transversal, giro vertical (Yawing) y giro longitudinal (Rocking) acoplados. Es decir las tres ecuaciones con Xq_y, yq_z ∴

Se puede escribir la ecuación anterior como dos ecuaciones de esta manera:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum k_y - m\dot{w}_n^2 & -\sum(k_y L_z) \\ \sum k_z - m\dot{w}_n^2 & -\sum(k_z L_y) \end{vmatrix} = 0$$

1.34 a

$$\left| \begin{array}{ccc} -\sum(k_y L_z) & \sum(k_z L_y) & \sum(k_z L_y^2) + \sum(k_y L_z^2) - I_x w_n^2 \\ \sum(k_x L_z) & \sum(k_x L_z^2) + \sum(k_z L_x^2) - I_y w_n^2 & -\sum(k_x L_y L_z) \\ -\sum(k_x L_y) & -\sum(k_x L_y L_z) & \sum(k_y L_x^2) + \sum(k_x L_y^2) - I_z w_n^2 \end{array} \right|$$

Esta ecuación caracteriza el movimiento de los modos vertical, longitudinal y giro transversal acoplados. La otra ecuación, que caracteriza el movimiento de los modos transversal, giro vertical y giro longitudinal acoplados serán:

$$D_2 \left| \begin{array}{ccc} \sum k_x - m w_n^2 & -\sum(k_x L_z) & -\sum(k_x L_y) \\ \sum(k_x L_z) & \sum(k_x L_z^2) + \sum(k_z L_x^2) - I_y w_n^2 & -\sum(k_x L_y L_z) \\ -\sum(k_x L_y) & -\sum(k_x L_y L_z) & \sum(k_y L_x^2) + \sum(k_x L_y^2) - I_z w_n^2 \end{array} \right| = 0 \quad 1.34 \text{ b}$$

El paso siguiente es obtener las ecuaciones de frecuencia de cada uno de los determinantes. A partir de estas ecuaciones se obtendrán las frecuencias naturales de vibración w_{nj}^2 del sistema. Expandiendo el D_1 se tiene que:

$$(\sum k_y - m w_n^2)(\sum k_z - m w_n^2)[\sum(k_z L_y^2) + \sum(k_y L_z^2) - I_x w_n^2] - [\sum(k_y L_z)]^2 (\sum k_z - m w_n^2) - [\sum(k_z L_y)]^2 (\sum k_y - m w_n^2) = 0$$

si, $\sum k_y = n k_y$, donde n es el numero de unidades de montaje se pueden definir los siguientes términos:

$$w_{n1}^2 = (\sum k_y)/m = (n * k_y)/m = \text{Frecuencia de la vibración vertical desacoplada.}$$

$$w_{n2}^2 = (\sum k_z)/m = (n * k_z)/m = \text{Frecuencia de la vibración longitudinal desacoplada.}$$

$$w_{n3}^2 = \frac{[\sum (k_z L_y^2) + \sum (k_y L_z^2)]}{I_x} = \text{Frecuencia de giro transversal desacoplado.}$$

Si se tiene en cuenta que el sistema no realiza ningún modo de vibración independiente uno de otro sino que todos ellos están acoplados, se puede entonces definir los siguientes coeficientes de acoplamiento:

$$U_1 = (\sum k_z L_y)/m = (k_z \sum L_y)/m \quad U_2 = (\sum k_z L_y)/I_x = (k_z \sum L_y)/I_x$$

$$U_3 = (\sum k_y L_z)/m = (k_y \sum L_z)/m$$

$$U_4 = (\sum k_y L_z)/I_x = (k_y \sum L_z)/I_x$$

reemplazando los términos definidos anteriormente y, reordenando, se tiene que la ecuación de frecuencia toma finalmente la siguiente forma:

$$w_n^6 - (w_{n1}^2 + w_{n2}^2 + w_{n3}^2)w_n^4 + (w_{n1}^2 * w_{n2}^2 + w_{n1}^2 * w_{n3}^2 + w_{n2}^2 * w_{n3}^2 - U_1 * U_2 - U_3 * U_4)w_n^2 - (w_{n1}^2 * w_{n2}^2 * w_{n3}^2 + U_1 * U_2 * w_{n1}^2 + U_3 * U_4 * w_{n2}^2) = 0 \quad 1.35$$

expandiendo el determinante D_2 se obtendrá la ecuación de la frecuencia para los modos y transversal, giro vertical y giro longitudinal acoplados:

$$w_n^6 - (w_{n4}^2 + w_{n5}^2 + w_{n6}^2)w_n^4 + (w_{n4}^2 * w_{n5}^2 + w_{n4}^2 * w_{n6}^2 + w_{n5}^2 * w_{n6}^2 - U_5 * U_6 - U_7 * U_8 - U_9 * U_{10})w_n^2 - (w_{n4}^2 * w_{n5}^2 * w_{n6}^2 + 2 * U_6 * U_7 * U_9 - w_{n4}^2 * U_9 * U_{10} - w_{n6}^2 * U_7 * U_8) = 0 \quad 1.36$$

donde:

$$w_{n4}^2 = \frac{(\sum k_x)}{m} = \frac{(nk_x)}{m} = \text{Frecuencia de la vibración transversal desacoplada.}$$

$$w_{n5}^2 = \frac{[\sum (k_x L_z^2) + \sum (k_z L_x^2)]}{I_y} = \text{Frecuencia del giro vertical desacoplado.}$$

$$w_{n6}^2 = \frac{[\sum (k_y L_x^2) + \sum (k_x L_y^2)]}{I_z} = \text{Frecuencia del giro longitudinal desacoplado.}$$

$$U_5 = \frac{\sum (k_x L_y)}{m} = \frac{(k_x \sum L_y)}{m}$$

$$U_6 = \frac{\sum (k_x L_y)}{I_z} = \frac{(k_x \sum L_y)}{I_z}$$

$$U_7 = \frac{\sum (k_x L_z)}{m} = \frac{(k_x \sum L_z)}{m}$$

$$U_8 = \frac{\sum (k_x L_z)}{I_y} = \frac{(k_x \sum L_z)}{I_y}$$

$$U_9 = \frac{\sum (k_x L_y L_z)}{I_y} = \frac{(k_x \sum L_y L_z)}{I_y}$$

$$U_{10} = \frac{\sum (k_x L_y L_z)}{I_z} = \frac{(k_x \sum L_y L_z)}{I_z}$$

la ecuación 1.35 tiene como solución tres raíces que corresponden a los tres valores característicos en los cuales se presenta el movimiento vibratorio del conjunto maquina-cimentación en los modos vertical, longitudinal y giro

transversal acoplados. Así mismo, de la ecuación 1.36 se obtienen los otros tres valores característicos para los modos transversal, giro longitudinal y giro vertical acoplados.

Debe quedar en claro que al tener un plano de simetría, aunque se obtienen seis frecuencias naturales w_{nj}^2 , no se presenta ningún modo de vibración independiente o desacoplado sino, dos grupos cada uno, de tres modos de vibración acoplados. O sea, el caso 1 puede ser estudiado por medio de dos sistemas de tres grados de libertad cada uno y luego, superponer sus resultados.

1.5.3 Arreglo simétrico alrededor de los planos Y-O-Z y X-O-Y caso2.

como se vio cuando el sistema es simétrico alrededor del plano Y-O-Z. Las frecuencias naturales aparecen en dos grupos. En muchos casos prácticos esta condición de simetría puede ser cumplida sin mucha dificultad.

Si además de cumplir con la condición que $\sum L_x = 0$, se tiene que los elementos de montaje están simétricamente dispuestos alrededor del plano X-O-Y, esto es que $\sum L_z = 0$, entonces todos los términos en la ecuación 1.34 a y 1.34 b (determinantes D_1 y D_2), que contengan $\sum L_z$ desaparece y, estas ecuaciones quedan entonces de la siguiente forma:

$$D_3 = \begin{vmatrix} \sum k_y - m w_n^2 & & \\ & \sum k_z - m w_n^2 - \sum (k_z L_y) & \\ & & \sum (k_z L_y) \quad \sum (k_z L_y^2) + \sum (k_y L_z^2) - I_x w_n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad 1.34 \text{ c}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} \sum k_x - m w_n^2 & & -\sum (k_x L_y) \\ & \sum (k_x L_z^2) + \sum (k_z L_x^2) - I_y w_n^2 & \\ -\sum (k_x L_y) & & \sum (k_y L_x^2) + \sum (k_x L_y^2) - I_z w_n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad 1.34 \text{ d}$$

Debe quedar claro que si k_x , k_y y k_z no son los mismos para todas las unidades de montaje, la condición para que exista simetría alrededor del plano X-O-Y sería que $\sum (k_y * L_z) = \sum (k_x L_x) = 0$.

Expandiendo el determinante D_3 , y ordenando términos se obtiene la siguiente ecuación:

$$(w_{n1}^2 - w_n^2)(w_n^4 - (w_{n2}^2 + w_{n3}^2)w_n^2 + w_{n2}^2 * w_{n3}^2 - U_1 * U_2) = 0$$

también se puede escribir:

$$w_n^2 = w_{n1}^2; w_n^2 = \frac{1}{2}[(w_{n2}^2 + w_{n3}^2) \pm \sqrt{(w_{n2}^2 - w_{n3}^2)^2 + 4U_1 * U_2}] \quad 1.37$$

Según estas ecuaciones, el modo vertical w_{n1}^2 es desacoplado; mientras que, los modos longitudinales w_{n2}^2 y giro transversal w_{n3}^2 son acoplados.

Expandiendo el D_4 , reemplazando valores y procediendo de la misma forma que la ecuación anterior, se obtiene:

$$w_n^2 = w_{n5}^2; w_n^2 = \frac{1}{2}[(w_{n4}^2 + w_{n6}^2) \pm \sqrt{(w_{n4}^2 - w_{n6}^2)^2 + 4U_5 * U_6}] \quad 1.38$$

esta ecuación muestra que el giro vertical w_{n5}^2 es desacoplado; Mientras que los modos transversal w_{n4}^2 y giro longitudinal w_{n6}^2 son acoplados.

En este caso, al tener un plano de simetría mas, se presentan dos modos de vibración desacoplados a las frecuencias $w_{ni}^2 = w_{n1}^2$ y $w_{niv}^2 = w_{n5}^2$ dos valores mas w_{nii}^2 y w_{niii}^2 dados por la ecuación 1.34 para los modos longitudinales y giro transversal acoplados y, dos valores w_{nv}^2 y w_{nvi}^2 (de la ecuación 1.38), para los modos transversal y giro longitudinal acoplados. También en este caso, aunque se obtienen seis valores característicos w_{nj}^2 solamente se presentan dos modos de vibración desacoplados. Es decir a la frecuencia $w_{ni}^2 = w_{n1}^2$ se vera el sistema hacer desplazamientos a lo largo del eje Y, y a la frecuencia $w_{niv}^2 = w_{n5}^2$ se vera que el sistema trata de girar alrededor del eje Y.

Teniendo presente que las raíces de la ecuación 1.37 son w_{nii}^2 y w_{niii}^2 y de la ecuación 1.46 son w_{nvi}^2 y w_{nvi}^2 , podemos verificar los resultados haciendo:

$$(w_{nii}^2 + w_{niii}^2) = (w_{n2}^2 + w_{n3}^2)$$

$$(w_{nvi}^2 + w_{nvi}^2) = (w_{n4}^2 + w_{n6}^2)$$

1.5.4 Arreglo simétrico alrededor de los planos Y-O-Z y X-O-Z (caso 3).

Este arreglo requiere que tanto $\sum L_y$ como $\sum L_x$ sean cero. Una manera practica de hacer que $\sum L_y = 0$ que muestra la figura 1.19 donde, los elementos de montaje están arreglados en el plano horizontal, conteniendo el centro de gravedad del sistema de tal manera que $\sum L_y = 0$. en este caso, debido que los términos que contienen a $\sum L_y$ desaparecen, los determinantes D_1 y D_2 se reducen a las siguientes expresiones:

$$D_5 = \begin{vmatrix} \sum k_y - m\bar{w}_n^2 & -\sum(k_y L_z) \\ & \sum k_z - m\bar{w}_n^2 \\ -\sum(k_y L_z) & \sum(k_z L_y^2) + \sum(k_y L_z^2) - I_x \bar{w}_n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad 1.34 e$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} \sum k_x - m\dot{w}_n^2 & -\sum(k_x L_z) & & & & \\ \sum(k_x L_z) & \sum(k_x L_z^2) + \sum(k_z L_x^2) - I_y w_n^2 & -\sum(k_x L_y L_z) & & & \\ & & & \sum(k_y L_x^2) + \sum(k_x L_y^2) - I_z w_n^2 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1.34 \text{ f} \\ =0 \end{matrix}$$

Expandiendo el determinante D_6 reemplazando valores y ordenando los términos se obtiene:

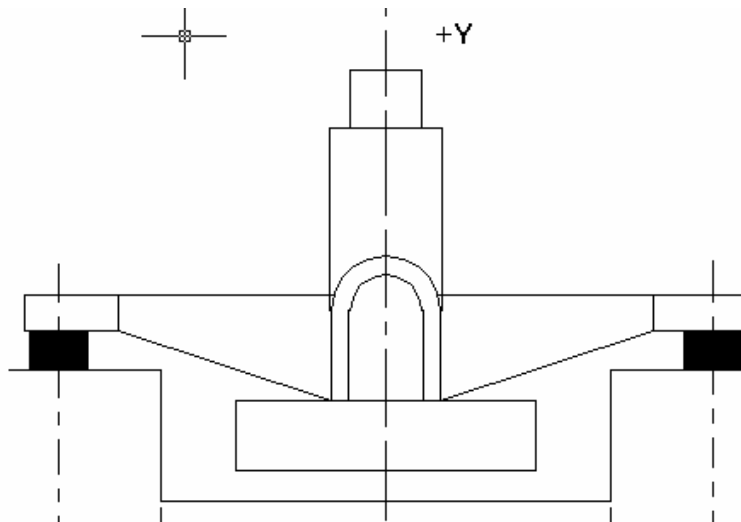
$$w_n^2 = w_{n2}^2; w_n^2 = \frac{1}{2}[(w_{n1}^2 + w_{n3}^2) \pm \sqrt{(w_{n1}^2 - w_{n3}^2)^2 + 4U_3 * U_4}] \quad 1.39$$

en este caso, el modo longitudinal es desacoplado mientras que, los modos vertical y giro transversal son acoplados.

A partir del determinante D_6 se obtiene la otra ecuación de la frecuencia:

$$w_n^2 = w_{n6}^2; w_n^2 = \frac{1}{2}[(w_{n4}^2 + w_{n5}^2) \pm \sqrt{(w_{n4}^2 - w_{n5}^2)^2 + 4U_7 * U_8}] \quad 1.40$$

Obteniendo el giro longitudinal desacoplado y, los modos transversal y giro vertical acoplados.



Como en el caso anterior, al lograr dos planos de simetría se tendrían dos modos de vibración desacoplados (longitudinal y giro longitudinal), y cuatro modos de vibración acoplados en grupo de dos. Si comparamos las ecuaciones 1.39 y 1.40 se nota que son idénticas; es decir que $w_{ni}^2 = w_{nv}^2$ y $w_{n3}^2 = w_{nr}^2$. Se podrá entonces estudiar dos sistemas de un grado de libertad y dos sistemas de dos grados de libertad y, superponerlos para tener el análisis completo del sistema de seis grados de libertad.

Para verificar los resultados, se debe tener presente que $w_{ni}^2 = w_{n2}^2$ y $w_{niv}^2 = w_{n6}^2$.. de la ecuación 1.39 se obtiene w_{nii}^2 y w_{niii}^2 de la ecuación 1.40 w_{nv}^2 y w_{nvi}^2 .si la solución numérica es correcta debe cumplirse entonces que:

$$(w_{nii}^2 + w_{niii}^2) = (w_{n1}^2 + w_{n3}^2)$$

$$(w_{nv}^2 + w_{nvi}^2) = (w_{n4}^2 + w_{n5}^2)$$

1.5.5 Sistema completamente simétrico (caso 4). Un sistema completamente simétrico se logra cuando $\sum L_x, \sum L_y, \sum L_z$ son todos iguales a cero. Cuando estas tres condiciones de simetría se cumplen, todos los coeficientes de acoplamiento U, se hacen cero y en la ecuación 1.39 (determinante D), solamente quedan los elementos de la diagonal principal. Teniendo esto presente, la ecuación de la frecuencia toma la siguiente forma:

$$(w_n^2 - w_{n1}^2)(w_n^2 - w_{n2}^2)(w_n^2 - w_{n3}^2)(w_n^2 - w_{n4}^2)(w_n^2 - w_{n5}^2)(w_n^2 - w_{n6}^2) = 0$$

en este caso, los seis valores de w_n^2 corresponden a los seis modos desacoplados de vibración. Es decir:

$$w_{nj}^2 = w_{n1}^2, w_{n2}^2, w_{n3}^2, w_{n4}^2, w_{n5}^2, w_{n6}^2; ; j = i, ii, \dots, vi \quad 1.41$$

1.5.6 Conclusiones sobre los S6GL. Como se ha visto, al hacer cumplir ciertas condiciones de simetría, el determinante D se simplifica y, entonces, los valores característicos (o modos naturales de vibración), pueden ser determinados de una manera práctica y sencilla.

El caso 1, ocurre cuando $\sum L_x = 0$ y, el caso 2 tiene por condición que $\sum L_x = \sum L_z = 0$; esto es, los modos vertical y giros vertical quedan desacoplados y por lo tanto, se simplifica el proceso matemático para hallar la solución en comparación con el caso uno.

Los casos tres y cuatro difieren de los casos uno y dos en que las unidades de montaje están situadas en el plano horizontal que contiene el centro de gravedad del conjunto maquina-cimentación. En este caso también se pueden solucionar numéricamente las ecuaciones sin necesidad de un proceso matemático muy complicado. En el caso cuatro todos los seis modos de vibración son desacoplados, lo cual implica que, una fuerza vertical aplicada al centro de gravedad excita solamente un movimiento de traslación vertical. Similarmente un torque alrededor del eje Y, por ejemplo, excita solamente un giro vertical.

Otra característica del caso cuatro es que todas las frecuencias naturales se encuentran dentro de la franja mas angosta que cuando se tienen dos o mas modos acoplados. Es decir los valores $w_{n1}^2, w_{n2}^2, w_{n3}^2, w_{n4}^2, w_{n5}^2, w_{n6}^2$, pueden encontrarse muy cercanos el uno para el otro.

Los casos dos y cuatro son probablemente los de mayor interés en la practica. Un plano de simetría (caso uno) por lo general es fácil de obtener. Se debe entonces

buscar otro plano simetría, llegándose mas fácilmente al caso dos que al tres o cuatro debido a que, como se vio anteriormente, en estos dos últimos casos uno de los planos de simetría es horizontal y debe contener el centro de gravedad.

En el análisis anterior se asumió que los tres ejes mutuamente perpendiculares que pasan a través del centro de gravedad (ejes O-X, O-Y y O-Z), son ejes principales de inercia del conjunto maquina-cimentación. Los ejes principales son considerados como los ejes alrededor de los cuales un cuerpo rígido, libre en el espacio, tendera a rotar cuando sobre el actúa una excitación torsional. El eje principal alrededor del cual la rotación ocurre será determinado por la naturaleza de la perturbación inicial. Así por ejemplo si la excitación es un torque alrededor del eje longitudinal, la rotación ocurrirá alrededor de este eje principalmente; o sea, el movimiento generado será el giro longitudinal. En la practica el cuerpo rígido oscilara alrededor de ejes que puedan no ser necesariamente, lo ejes principales de inercia. Debido a esto se presentan reacciones indeseables en los puntos de montaje.

Entonces, en un montaje ideal los ejes de rotación no solamente deben pasar a través del centro de gravedad del conjunto maquina-cimentación sino, que deben ser ejes principales de inercia.

En el caso como el de un montaje como el de la figura 1.18, el plano vertical Y-O-Z que contiene al centro de gravedad, es normalmente un plano de simetría. El eje transversal O-X es perpendicular a dicho plano de simetría y, por lo tanto, es un eje principal de inercia. Los otros dos ejes principales y el eje principal transversal O-X son mutuamente perpendiculares pero, los ejes principales longitudinal y vertical no necesariamente están dirigidos a lo largo de los ejes longitudinal O-Z y vertical O-Y. Estos últimos, pueden estar desviados un ángulo f y, se indican como O-Y' y O-Z' en la figura 1.18. La magnitud de f depende del grado de simetría que se tenga alrededor de los planos X-O-Y y X-O-Z. Por ejemplo, en la mayoría de los montajes de este tipo de ángulo de inclinación f entre los ejes O-Z y O-Z' varia entre) y 15 grados. Valores mayores normalmente asociados con montajes cortos; es decir, aquellos en que la masa esta relativamente mas concentrada en un extremo, como por ejemplo, en los automóviles donde la masa se concentra en el lado del motor.

En la practica es muy importante conocer la dirección de los ejes principales y en lo posible, hacer que estos ejes coincidan con los ejes de rotación par poder tomar la línea de acción de los resortes paralela a la dirección de los ejes principales, usando los momentos de inercia principales y, obteniendo así una evaluación mas segura de las frecuencias naturales. En lo posible, se debe hacer que el eje longitudinal coincida o sea paralelo con el eje longitudinal de la maquina, debido a

que en estas circunstancias la oscilación alrededor de dicho eje principal no irá acompañada de efectos secundarios indeseables como, una reacción de giroscopio, la cual tiende a producir giro transversal e imponer sobrecargas al eje de la máquina.

En el caso que se presente algún ángulo de inclinación \mathbf{f} entre estos dos ejes (figura 1.18), entonces una excitación por torque $M(t)$ produce dos componentes: $M \cos \mathbf{f}$ actuando alrededor del eje principal longitudinal, que hace que el cuerpo libre en el modo giro longitudinal, (Rocking) y, $(M \sin \mathbf{f})$ actuando alrededor del eje principal vertical, obligando al conjunto a hacer vibraciones en el modo de giro vertical (Yawing).

Similarmente, debido a que el eje principal vertical O-Y' está inclinado un ángulo \mathbf{f} con respecto al eje vertical O-Y, una excitación por fuerza $F_e(t)$ produce dos componentes:

$F \cos \mathbf{f}$ actuando a lo largo del eje principal vertical O-Y' y $F \sin \mathbf{f}$ actuando a lo largo del eje principal longitudinal O-Z'.

Los resultados anteriores se encuentran resumidos en el cuadro 1 y, aunque se obtuvieron para el sistema motor-generador de la figura 1.18,

son igualmente aplicables a otros sistemas o montajes. Este cuadro se ha dividido en cuatro partes a fin de facilitar un procedimiento rutinario en el calculo de las frecuencias naturales y tener así, una pequeña posibilidad de error.

Caso 1: Arreglo simétrico alrededor del plano Y-O-Z.

Caso 2: Arreglo simétrico alrededor del los planos Y-O-Z y X-O-Y

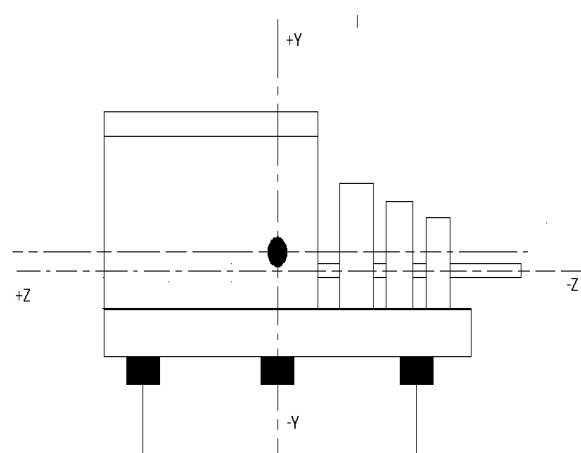
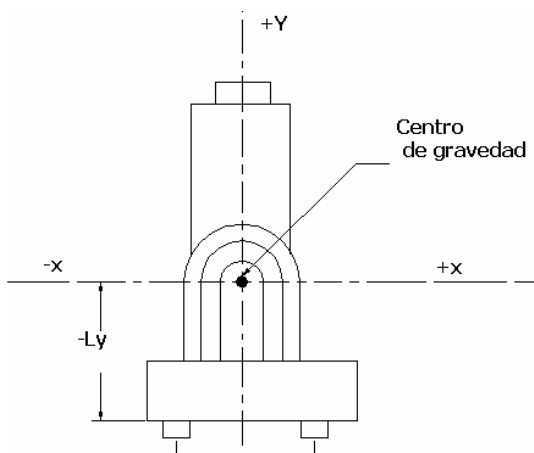
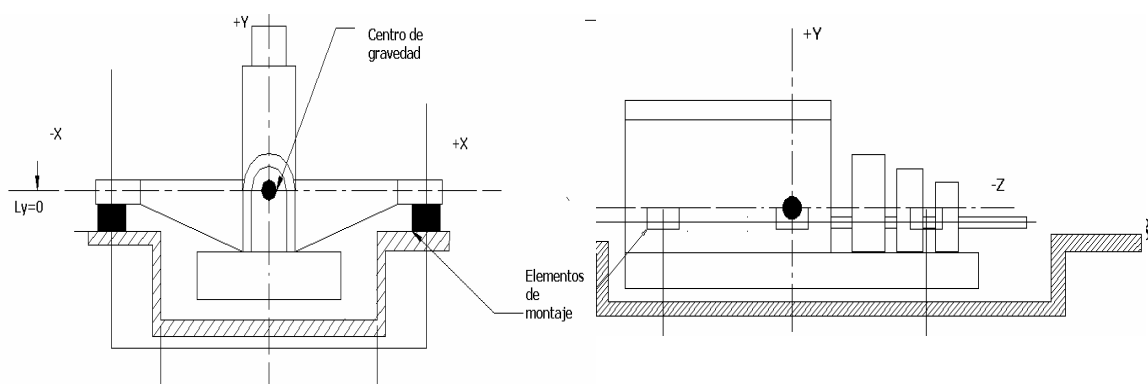


Figura 1.20 Casos 1 y 2

Caso 3: Arreglo simétrico alrededor del los planos Y-O-Z y X-O-z.

Caso 4: Sistema simétrico.



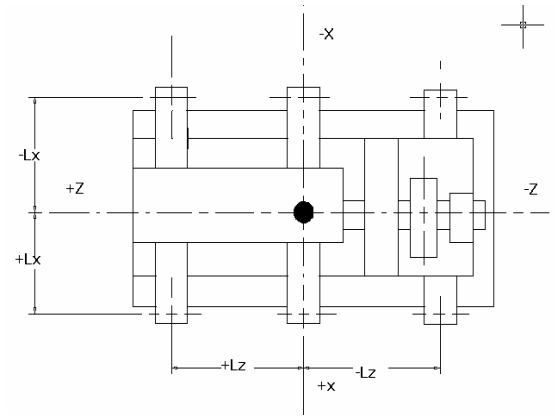


Figura 1.21 Casos 3 y 4

Cuadro 1 Guía para el cálculo de las frecuencias naturales

PARTE I DATOS DE LA INSTALACION								
Masa y Rigidez	Distancia de los puntos de montaje							
<i>N</i> = numero de unidades de montaje Cada uno de los mismos valores de rigidez k_x , k_y y k_z .	Unidad <i>N</i>	L_x	L_x^2	L_y	L_y^2	L_z	L_z^2	$L_y L_z$
<i>W</i> = peso del ensamble soportado por las <i>n</i> unidades de montaje, dado en Kgf.	1							
$m = \frac{W}{g} = \frac{W}{981} \left(\frac{\text{Kgrf} - \text{s}^2}{\text{cm}} \right)$	2							
<i>P</i> = <i>W</i> / <i>n</i> = peso soportado por cada unidad de montaje en Kgf.	3							
I_x = Momento de inercia alrededor del eje O-X en Kgf-cm-s ²	<i>n</i>							
I_y = Momento de inercia alrededor del eje O-Y	Σ	ΣL_x	ΣL_x^2	ΣL_y	ΣL_y^2	ΣL_z	ΣL_z^2	$\Sigma L_x L_z$
I_z = Momento de inercia alrededor del eje O-Z	<p style="text-align: center;">Nota</p> <p>El arreglo con <i>n</i> unidades de montaje debe cumplir con las siguientes condiciones:</p> <p>CASO 1: $\Sigma L_x = 0$</p> <p>CASO 2. $\Sigma L_x = 0$ Y $\Sigma L_z = 0$ también, $\Sigma L_x L_z = 0$</p> <p>CASO 3. $\Sigma L_x = 0$ Y $\Sigma L_y = 0$ también $\Sigma L_y^2 = 0$ Y $\Sigma L_x L_z = 0$</p> <p>CASO 4. $\Sigma L_x = 0$, $\Sigma L_y = 0$ Y $\Sigma L_z = 0$</p>							
k_x = Rigidez de cada elemento de montaje en la dirección transversal O-X, en Kgf/cm.								
k_y = Rigidez de cada elemento de montaje en la dirección transversal O-Y, en Kgf/cm.								
k_z = Rigidez de cada elemento de montaje en la dirección transversal O-Z, en Kgf/cm								
Nota: estos datos son requeridos en todos los casos								

Parte II: Factores Necesarios Para calcular las Frecuencias Naturales				
Factor	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
U_9 (Coeficiente de acop.)	$K_x \sum (L_y L_z) / I_x$	0	$n K_y / m$	0
W_{n2}^2 (Longitudinal)		$n K_z / m$		
U_{10} (Coeficiente de acop. Giro Transversal)	$K_y \sum (L_y L_z) / I_x$	0	0	0
W_{n4}^2 (Transversal)	$n K_x / m$			
W_{n5}^2 (Giro vertical)	$[(K_x \sum L_z^2) + (K_z \sum L_x^2)] / I_y$			
W_{n5}^2 (Giro longitudinal)	$[(K_y \sum L_x^2) + (K_x \sum L_y^2)] / I_z$		$(K_y \sum L_x^2) / I_z$	
U_1 (Coeficiente de acop.)	$(K_z \sum L_y) / m$		0	0
U_2 (Coeficiente de acop.)	$(k_z \sum L_y) / I_x$		0	0
U_3 (Coeficiente de acop.)	$(K_y \sum L_z) / m$		$(K_y \sum L_z) / m$	0
U_4 (Coeficiente de acop.)	$(K_y \sum L_z) / I_x$	0	$(K_y \sum L_z) / I_x$	0
U_5 (Coeficiente de acop.)	$(K_x \sum L_y) / m$		0	0
U_6 (Coeficiente de acop.)	$(K_x \sum L_y) / I_z$		0	0
U_7 (Coeficiente de acop.)	$(K_x) \sum L_z / m$		$(K_x \sum L_z) / m$	0
U_8 (Coeficiente de acop.)	$(k_x \sum L_z) / I_y$		$(K_x \sum L_z) / I_y$	0

Parte III Frecuencias Naturales

Caso 1	<p>a) Modo vertical, longitudinal y giro transversal (Pitching) acoplados.</p> $w_n^6 - (w_{n1}^2 + w_{n2}^2 + w_{n3}^2)w_n^4 + (w_{n1}^2 * w_{n2}^2 + w_{n1}^2 * w_{n3}^2 + w_{n2}^2 * w_{n3}^2 - U_1 * U_2 - U_3 * U_4)w_n^2 - (w_{n1}^2 * w_{n2}^2 * w_{n3}^2 + U_1 * U_2 * w_{n1}^2 + U_3 * U_4 * w_{n2}^2) = 0$ <p>b) . Modos transversal giro vertical (Yawing) y giro longitudinal (Rocking), acoplados.</p> $w_n^6 - (w_{n4}^2 + w_{n5}^2 + w_{n6}^2)w_n^4 + (w_{n4}^2 * w_{n5}^2 + w_{n4}^2 * w_{n6}^2 + w_{n5}^2 * w_{n6}^2 - U_5 * U_6 - U_7 * U_8 - U_9 * U_{10})w_n^2 - (w_{n4}^2 * w_{n5}^2 * w_{n6}^2 + 2 * U_6 * U_7 * U_9 - w_{n4}^2 * U_9 * U_{10} - w_{n6}^2 * U_7 * U_8) = 0$
Caso 2	<p>a..Modo vertical desacoplado y modos longitudinal y giro transversal acoplados</p> $w_n^2 = w_{n1}^2; w_n^2 = \frac{1}{2}[(w_{n2}^2 + w_{n3}^2) \pm \sqrt{(w_{n2}^2 - w_{n3}^2)^2 + 4U_1 * U_2}]$ <p>chequeo:</p> $(w_{nii}^2 + w_{niii}^2) = (w_{n2}^2 + w_{n3}^2)$ <p>donde W_{nii} y W_{niii} son las raíces de la ecuación.</p> <p>b. giro vertical desacoplado y modos transversal y giro longitudinal, acoplados.</p> $w_n^2 = w_{n5}^2; w_n^2 = \frac{1}{2}[(w_{n4}^2 + w_{n6}^2) \pm \sqrt{(w_{n4}^2 - w_{n6}^2)^2 + 4U_5 * U_6}]$ <p>chequeo:</p> $(w_{nv}^2 + w_{nvi}^2) = (w_{n4}^2 + w_{n5}^2)$
Caso 3	<p>a. Modo longitudinal desacoplado y modo vertical y giro tranv. Acoplados.</p> $w_n^2 = w_{n2}^2; w_n^2 = \frac{1}{2}[(w_{n1}^2 + w_{n3}^2) \pm \sqrt{(w_{n1}^2 - w_{n3}^2)^2 + 4U_3 * U_4}]$ <p>chequeo:</p> $(w_{nii}^2 + w_{niii}^2) = (w_{n1}^2 + w_{n3}^2)$ <p>b. Giro longitudinal desacoplado y modo transversal y giro vertical acoplados.</p> $w_n^2 = w_{n6}^2; w_n^2 = \frac{1}{2}[(w_{n4}^2 + w_{n5}^2) \pm \sqrt{(w_{n4}^2 - w_{n5}^2)^2 + 4U_7 * U_8}]$ <p>chequeo</p> $(w_{nv}^2 + w_{nvi}^2) = (w_{n4}^2 + w_{n5}^2)$

Caso 4	<p>Todos los modos son desacoplados</p> $w_{nj}^2 = \begin{cases} w_{n1}^2 (\text{Modo..vertical}) \\ w_{n2}^2 (\text{Modo..longitudinal}) \\ w_{n3}^2 (\text{Giro..transversal}) \\ w_{n4}^2 (\text{Modo..transversal}) \\ w_{n5}^2 (\text{Giro..vertical}) \\ w_{n6}^2 (\text{Giro..Longitudinal}) \end{cases}$ <p>$j = i, ii, iii, iv, v, vi$</p>
-------------------------	---

2. AISLAMIENTO MECANICO

A menudo se presentan dificultades durante la instalación de máquinas, ya que fuerzas de inercia no compensadas producen vibraciones en ellas y éstas pasan a través del bastidor de la máquina a la fundación, de donde se transmiten a otras máquinas.

La manera más simple de evitar estas vibraciones es suprimirlas en su origen, asegurando un equilibrado correcto, sin embargo, es difícilmente practicable, por tanto la única alternativa es aislar el equipo montándolas sobre resortes y amortiguadores.

Las fuerzas de excitación en máquinas generalmente son causadas por fuerzas inerciales originadas por masas desbalanceadas o no compensadas. O sea la compensación de masa de las partes que giran, oscilan o reciprocán, representa uno de los más efectivos y simples medios de eliminar o reducir las vibraciones; sin embargo, debido a que la compensación o balanceo de masas es un procedimiento "incompleto" (siempre queda un desbalance residual), se generan pequeñas fuerzas "insignificantes" que pueden llegar excitar las resonancias de

elementos estructurales y, convertirse en fuente de considerables vibraciones y ruidos.

Como se observo en el capítulo anterior, la resonancia se presenta cuando una de las frecuencias de excitación es igual a una de las varias frecuencias naturales w_{nj} de un sistema cualquiera. Cuando esto ocurre, la amplitud de la vibración aumentará a valores muy grandes causando daños por fatiga.

En general, sólo es posible reducir más que eliminar las vibraciones o las fuerzas dinámicas causantes de las mismas. Entonces, para controlar la respuesta de un sistema a una excitación se dispone de la práctica, de ciertas técnicas, a saber:

- *Controlar convenientemente las frecuencias naturales y las de excitación existente, para prevenir resonancias.*

- *Aplicar amortiguación o medios disipadores de energía para prevenir la "respuesta" excesiva, incluso en la resonancia. "La respuesta de un dispositivo o sistema es el movimiento (u otro producto) que resulta de una excitación (estímulo) bajo condiciones específicas "⁵*

⁵ Crede, pag. 166

- *Emplear aisladores para reducir la transmisión de las fuerzas de excitación de una a otra parte de la máquina.*
- *Finalmente, añadir un neutralizador de masa auxiliar para reducir la respuesta.*

De acuerdo a lo anterior, debemos distinguir tres formas de control de vibraciones

(véase la Figura 2.1):

- ***Control o aislamiento activo de vibraciones*** *el aislamiento de vibraciones es activo cuando se aísla una fuente generadora de vibración de sus cimentaciones, para evitar su propagación a través del suelo, hacia el ambiente.*
- ***Control o aislamiento pasivo de vibraciones*** *es evitar que se desarrollen hacia la máquina vibraciones periódicas o no periódicas (estocásticas), originadas por otras máquinas o movimientos dinámicos del ambiente.*
- ***Control o reducción de choques*** *es evitar que las vibraciones producidas por fuerzas de impacto (no periódicas, deterministas), se propaguen desde la máquina hacia el ambiente.*

En el presente trabajo se hará énfasis en el control activo. El pasivo como se verá más adelante, tiene por fundamento al control activo; los choques, no son tema del presente estudio.

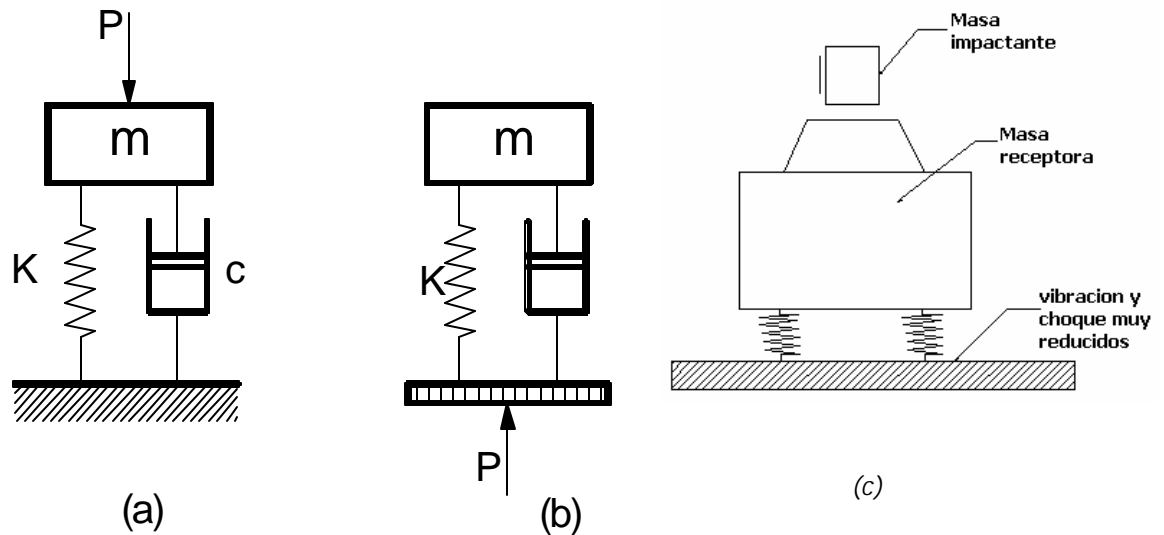


Figura 2.1 Clasificación de las formas de control de vibraciones

2.1 CONTROL ACTIVO DE VIBRACIONES

Para el control o aislamiento activo se debe, básicamente, determinar las frecuencias naturales del Sistema Dinámico Vibratorio y, compararlas con las frecuencias de excitación para verificar que el sistema se encuentra lejos de la resonancia y con esto, que las fuerzas dinámicas que se propagan hacia el

ambiente sean pequeñas y no afecten el buen funcionamiento de otras máquinas o al ser humano mismo.

Las ventajas del aislamiento activo están relacionadas fundamentalmente con el hecho de que las vibraciones pueden considerarse como perturbaciones con frecuencias y amplitudes aleatorias y que pueden presentarse durante períodos de tiempo también aleatorios.

Algunas de estas ventajas son:

- Fácil adaptación a diferentes condiciones de trabajo.*
- Suministran o disipan energía cuando se requiere.*
- Atenúan vibraciones en un amplio rango de frecuencias.*
- Toleran diferentes tipos de perturbaciones.*

El problema de control en este caso, se circunscribe a diseñar un controlador que genere una señal que permita eliminar o reducir al mínimo las vibraciones. Esto es equivalente a regular un sistema que esté sometido a perturbaciones no medibles directamente. Entonces, el sistema de aislamiento activo puede ser visto como un sistema que continuamente está adaptando su capacidad de disipación según la perturbación actuante.

En la actualidad son variadas las aplicaciones del aislamiento activo o también llamado control activo de vibraciones. Las principales son: en las fundaciones de máquinas reciprocantes, máquinas de alta velocidad, instalaciones de plantas generadoras (de vapor o nucleares), edificios y estructuras industriales suspensión inteligente o suspensión activa de vehículos; en mesas de calibración de instrumentos, control de estructuras flexibles, entre muchas otras. También se encuentran aplicaciones de aislamiento activo en la industria automotriz, por ejemplo en suspensión inteligente o suspensión activa de vehículos.

En general, en maquinaria industrial se deben distinguir dos tipos comunes de fuerzas que generan excitación:

➤ ***Fuerzas de inercia originadas por máquinas rotativas o reciprocantes.***

En éste caso, se distinguen dos tipos de fuerzas de inercia: rotativas y alternativas. Las rotativas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$F_r(t) = m_r * e * \omega^2$$

Donde: m_r = masa rotativa

e = radio de giro o excentricidad de m_r .

$$\omega = \frac{2\pi f}{60}; \quad f = \text{rpm.}$$

Dichas fuerzas de inercia rotativas y alternativas son fuerzas de amplitud variable cuando la velocidad de giro de la maquina es variable. Si f es constante, las fuerzas de inercia rotativas serán constantes. Así mismo, se tendrán varias frecuencias de excitación si f es constante para las fuerzas de inercia rotativas. Las fuerzas de inercias rotativas alternativas siempre generan excitación en mas de una frecuencia.

➤ **Fuerzas del medio de trabajo.** Cuya amplitud es constante para un "régimen" pero, generan excitación a frecuencias múltiples de w .

Debe quedar claro que en la mayoría de los casos prácticos las fuerzas de excitación no son "armónicas puras" sino mas bien funciones periódicas. En este caso, la fuerza de excitación viene dada por la siguiente expresión:

$$F_e(t) = F(t + T); \quad T = 1/f = 2 * p / w$$

donde:

T = es el periodo;

w = frecuencia de excitación periódica;

f = rpm de la maquina.

En base a lo anterior cuando se realiza el control activo de vibraciones lo que se hace es sintonizar la(s) frecuencia(s) natural(es) del sistema dinámico vibratorio

con respecto a la masa de la cimentación y a la(s) frecuencia(s) de excitación. Esta "sintonización" se hace variando las rigideces y amortiguaciones de los elementos deformables del sistema y, puede realizarse de las tres formas siguientes:

- *Sintonización alta.* Cuando se hace que w_n sea mayor que w_o , si la maquina genera excitación, en mas de una frecuencia, cuando la frecuencia natural más "baja" es mayor que la "mayor" frecuencia de excitación.

- *Sintonización baja.* Cuando se hace que w_n sea menor que w_o , si se tienen varias frecuencias de excitación, la sintonización baja ocurre cuando la "mayor" frecuencia natural w_{nj} es menor que la "menor" frecuencia de excitación.

- *Sintonización mezclada.* Se presenta cuando las frecuencias naturales del sistema dinámico vibratorio y las frecuencias de excitación están el mismo rango pero, en una relación tal que no se presente resonancia.

En el aislamiento mecánico activo existen dos criterios diferentes los cuales, son: la fuerza que va al piso debe ser cero; la maquina no debe sufrir grandes desplazamientos. A continuación se hablara del análisis de cada uno de estos criterios para los dos casos generales: Fuerzas de excitación de amplitud constante y fuerzas de excitación inerciales.

2.1.1. Control activo de las vibraciones generadas por fuerzas de excitación de amplitud constante. Primero se hará énfasis en el modelo fundamental representativo de este caso (sistema de un grado de libertad con excitación por fuerza armónica externa y sin amortiguación), a fin de comprender algunos conceptos básicos. Para dicho modelo la ecuación diferencial de movimiento viene dada por (ecuación 1.4):

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \text{sen} \omega t$$

para esta ecuación se obtuvo en el capítulo anterior la siguiente expresión para la amplitud x del desplazamiento vibratorio (ecuación 1.11):

$$x_0 = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{F_0}{k} = x_{est}$$

El primer criterio utilizado en aislamiento activo (fuerza dinámica al piso debe ser cero), se estudia en base a la relación F_T / F_e , que se define como "transmisibilidad de la fuerza", esta es la medida de la cantidad de fuerza transmitida por un aislador. Siendo la fuente de vibraciones una fuerza externa armónica o periódica, la transmisibilidad de la fuerza T_F , es la relación entre la amplitud o tamaño de la fuerza transmitida F_T y la intensidad o "tamaño" de la fuerza de excitación F_e .

Con el propósito de reducir tanto como sea posible la cantidad de fuerza transmitida a los cimientos debido a la vibración de la maquinaria; las máquinas generalmente están aisladas de los cimientos, montándolas sobre resortes y amortiguadores.

Para el modelo fundamental se tiene que a partir de la ecuación 1.11 que T_F viene dado por la ecuación 1.15:

$$x_0 = \frac{F_T}{F_e} = \frac{x}{x_{est}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{F_o}{k} = x_{est}$$

T_F es entonces, según se vio anteriormente, la misma relación de amplitudes A y, esta representada gráficamente por la figura 2.2.

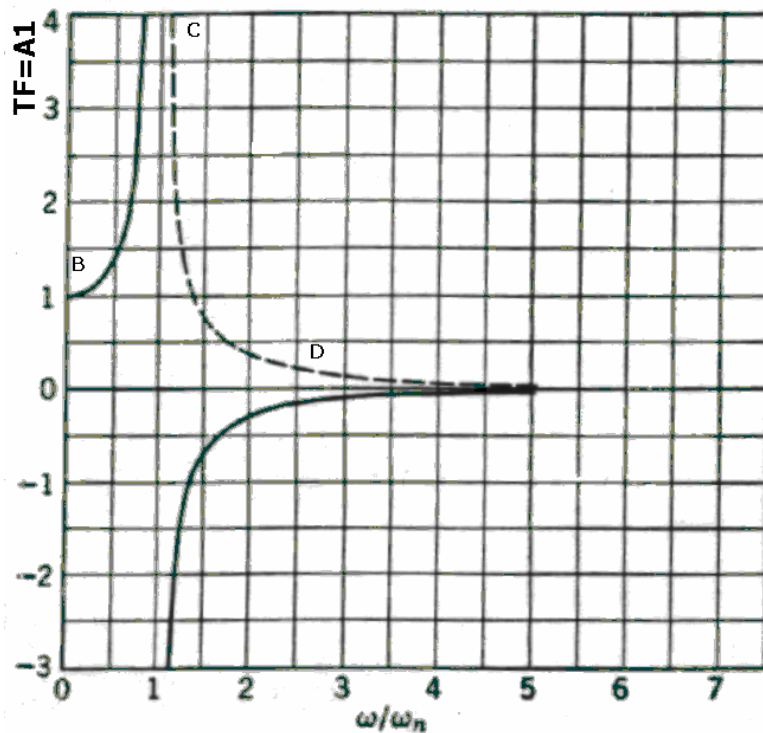


Figura 2.2 T_F para un sistema de un grado de libertad sin amortiguación

Si los resortes que soportan a la fundación son relativamente duros, w_n es mucho mayor que w (sintonización alta) y, w/w_n tiende a cero quedando, $T_F = 1$ es decir, $x = x_{est}$ o $F_T = F_o$. En este caso, es como si se anclara la maquina directamente al piso, prácticamente sin elementos deformables entre ella y el piso, (punto B de la figura 2.2). La desventaja de esta situación es que, la conexión maquina piso es prácticamente rígida, por lo tanto las fuerzas que van al piso son considerables. Una reducción de estas fuerzas dinámicas que cargan el ambiente se logra haciendo sintonización baja; es decir, colocando resortes relativamente suaves (w_n es mucho menor que w). Si se hace que w tienda a cero, se obtendrá un sistema que idealmente no contiene resortes; es decir la suavidad de estos es tan alta que la masa (maquina mas fundación) prácticamente "flota" libremente en el espacio. (Punto D de la figura 2.2).

Se considerara ahora el efecto de la amortiguación. Si esta se presenta entonces la fuerza de excitación $F_e(t)$ se transmite al ambiente a través del resorte y del amortiguador. Para un sistema de un grado de libertad con excitación por fuerza armónica externa o fuerza de inercia rotativa pero con w constante (en ambos casos la amplitud es constante), la transmisibilidad de la fuerza viene dada por la siguiente ecuación:

$$T_F = \frac{F_T}{F_e} = \sqrt{\frac{1 + (2 * R_c * R_w)^2}{(1 - R_w^2)^2 + (2 * R_c * R_w)^2}} \quad 2.1$$

Esta relación se encuentra graficada en la figura 2.3 en la cual, se puede distinguir claramente las tres zonas o bandas: de sintonización alta, resonancia, sintonización baja.

Se tiene sintonización alta cuando la "menor" frecuencia natural es mayor que la frecuencia de excitación "máxima". La zona de sintonización alta va desde $R_w = 0$ (idealmente) hasta $R_w = 0.3$. La banda de resonancia se encuentra entre los valores de $R_w = 0.8$ hasta $R_w = \sqrt{2}$ y, la zona de sintonización baja (la máxima w_n debe ser menor que la mínima frecuencia de excitación), va de $R_w = 3\sqrt{2}$, a $R_w = 10$.

Sin embargo se debe tener en cuenta la amortiguación. Se debe aislar (en sintonización baja) con materiales "sin" amortiguación (resortes de acero, por ejemplo). En efecto en la zona de sintonización baja se puede observar (figura 2.3), que si la amortiguación es alta ($R_w = 0.5$ por ejemplo), entonces la fuerza transmitida al piso aumenta por que T_F aumenta.

Los factores de amortiguación de los materiales usados en la práctica son relativamente bajos ($R_w = 0.01$ a 0.1) y, no existe una diferencia significativa entre

las curvas correspondientes a tales valores y la curva que representa el caso sin amortiguación. Así mismo, se puede observar que la amortiguación es de gran importancia cuando la resonancia se presenta, porque previene que la amplitud (x) del movimiento vibratorio y la fuerza transmitida, se crezcan mas allá de todos los, limites impuestos. Por ejemplo, una maquina instalada sobre una sintonización baja, pasa por resonancia cuando se enciende (R_w se aumenta desde cero hasta el

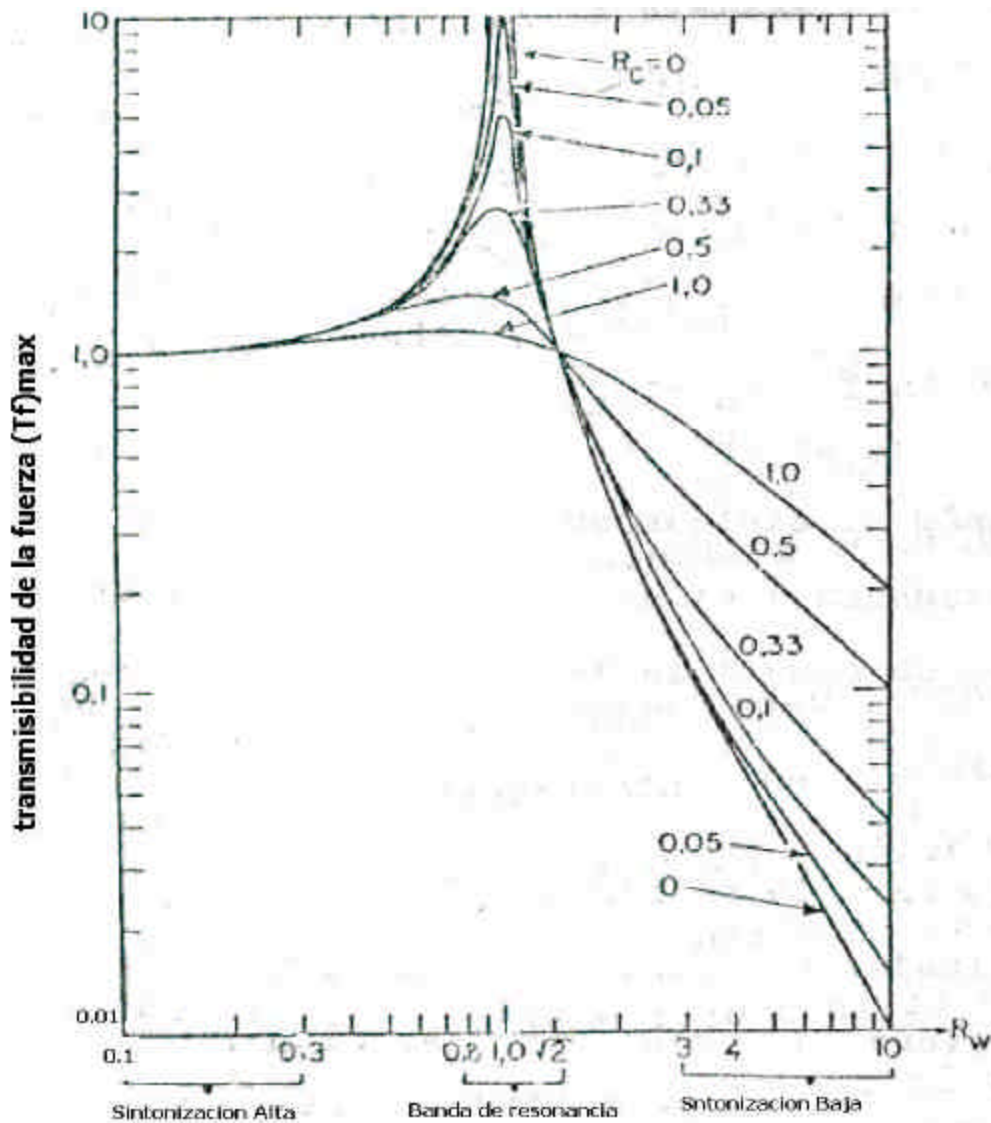


Figura 2.3 Factor dinámico "Transmisibilidad de la fuerza" de un sistema de un grado de libertad con excitación armónica (Fuerza de magnitud constante.)

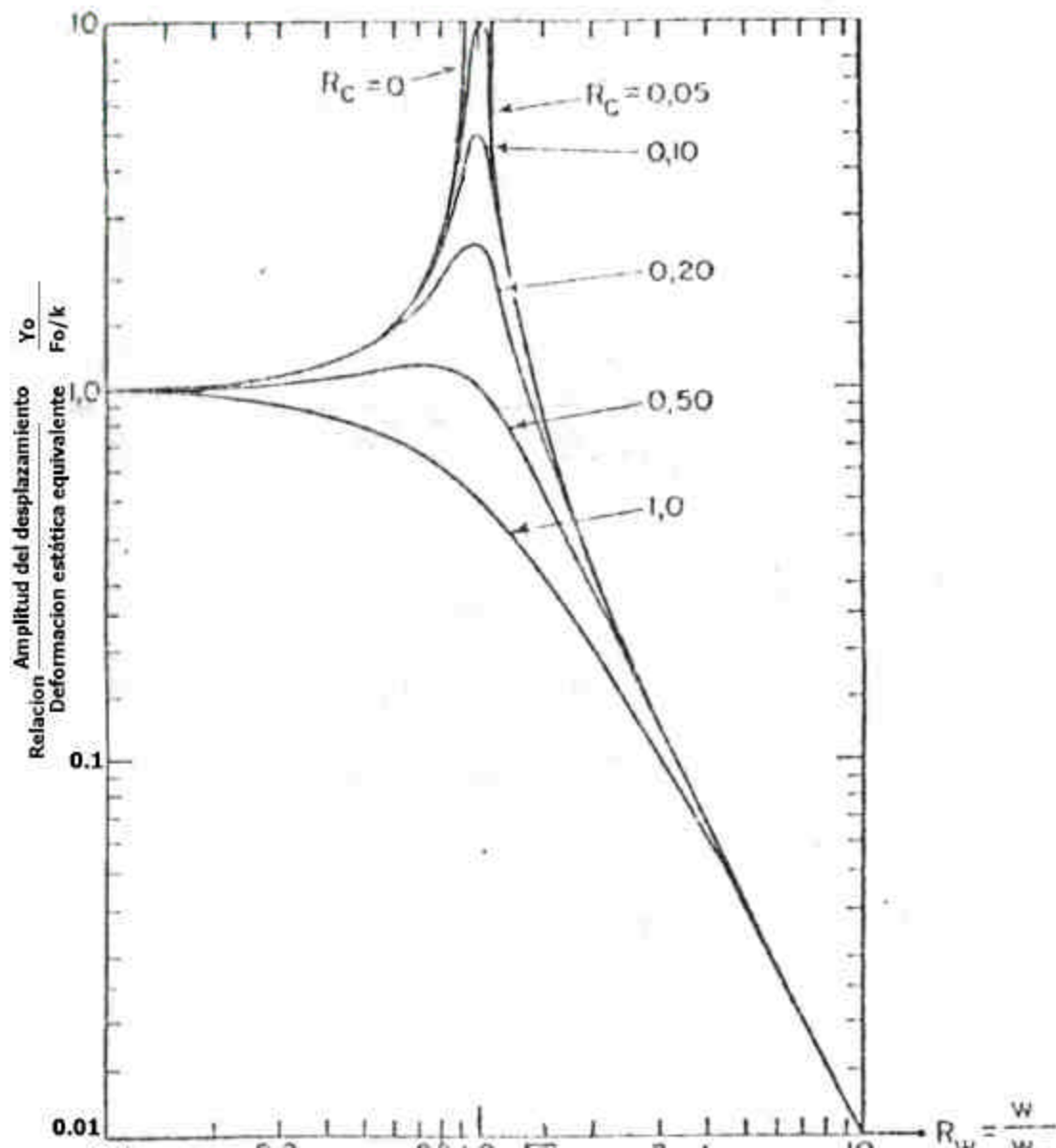
valor de operación de 3 a 5) y, cuando se apaga. En la práctica, cuando se acelera o desacelera la maquina lo que se debe hacer es pasar a través de la resonancia lo más rápido posible para minimizar el tiempo de agrandamiento de las amplitudes. El otro criterio a tener en cuenta en el control o aislamiento activo (el sistema dinámico no debe moverse), se estudia basándose en él termino "respuesta al desplazamiento"; el cual representa la relación entre la amplitud (x) del desplazamiento del sistema dinámico vibratorio y la amplitud de la deformación estática de los elementos aisladores bajo la acción de una carga constante. Por ejemplo, F_o para un sistema de un grado de libertad excitado por una fuerza armónica externa $F_o \cdot \text{sen} \omega t$. Dicho termino viene dado por la siguiente expresión:

$$A = \frac{x}{x_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - R_w^2)^2 + (2R_c R_w)^2}} ; \frac{F_o}{k} = x_{est} \quad 2.2$$

esta expresión es igual a la ecuación 1.21, la cual representa la función de amplitudes para un sistema de un grado de libertad con excitación por fuerza

armónica externa. En la figura 2.4 se encuentra graficada esta función y, se puede observar que, desde el punto de vista de respuesta al desplazamiento, la amortiguación es favorable para cualquier relación de frecuencias R_w porque hace que la función de amplitudes A , sea más pequeña.

Se puede entonces concluir, que a los sistemas dinámicos de vibración con fuerzas de excitación de amplitud constante se les debe realizar un control o aislamiento en la zona de sintonización baja teniendo en cuenta la "mínima" frecuencia de



excitación w . Así mismo los materiales usados deben tener una "baja" amortiguación; con esto, se logra cumplir con los dos criterios: las fuerzas dinámicas que van al piso y el desplazamiento (x) del sistema dinámico vibratorio estarán dentro de los límites aceptables.

2.1.2. Control activo de vibraciones generadas por fuerzas de excitación inerciales. *Como se menciona anteriormente las máquinas que hacen excitación con fuerzas de magnitud variables son aquellas con masas desbalanceadas cuya velocidad de giro (rpm) es variable.*

El primer criterio del aislamiento (fuerza al piso debe ser igual a cero), se estudia en base al factor dinámico transmisibilidad de fuerza de inercia rotativa y, teniendo en cuenta la amortiguación, la transmisibilidad de la fuerza viene dada por la siguiente expresión:

$$T_F = \frac{F_T}{m_r * e * \omega^2} = R_w^2 * T_F \quad 2.3$$

T_F es entonces la relación entre la amplitud o tamaño de la fuerza transmitida y la amplitud de la fuerza perturbadora ($F_e = m_r * e * \omega^2$). Dicha relación se encuentra graficada en la figura 2.5. También aquí, se observan las tres zonas o bandas: de sintonización alta, de resonancia, de sintonización baja.

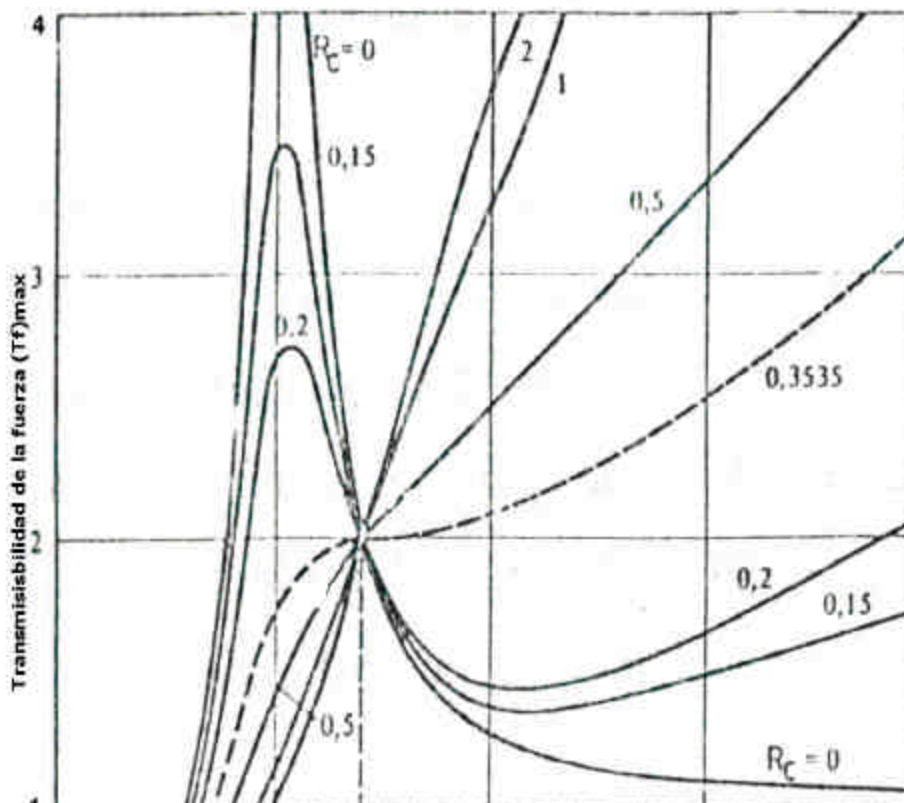
Sin embargo, en este caso a diferencia del anterior, se debe hacer que la relación de frecuencias R_w sea menor que $\sqrt{2}$, es decir, se debe hacer sintonización alta con cualquier valor de R_c para evitar que las fuerzas dinámicas de magnitud considerable sean transmitidas al piso. En efecto, según al figura 2.5 con materiales de cualquier amortiguación y en la banda de sintonización alta se obtiene menores valores para el factor T_F .

En la practica, los montajes con sintonización alta más característicos son los de las maquinas reciprocantes de tipo pistón, cuya velocidad es relativamente baja (f

= 300 a 500 rpm.) estas maquinas son ancladas a una fundación tipo bloque de área relativamente grande.

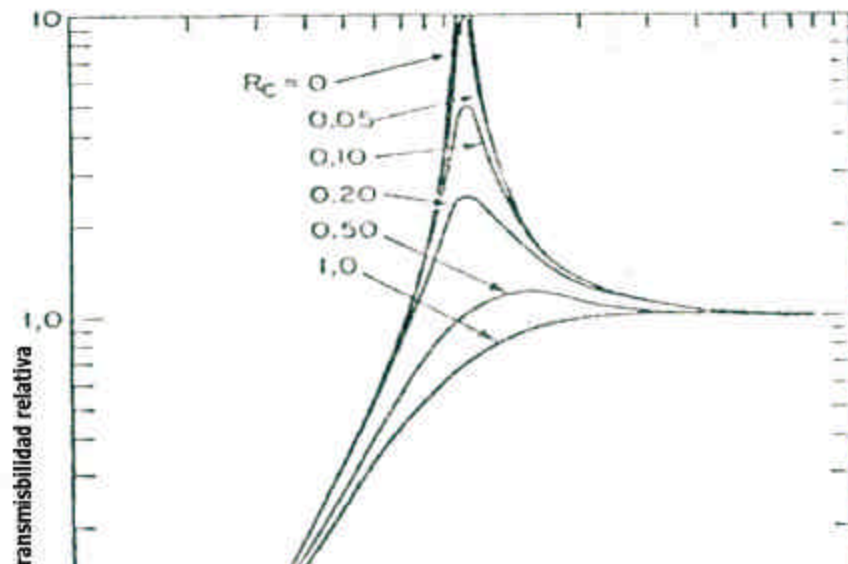
El otro criterio a tener en cuenta (la maquina no debe moverse) se estudia en base al termino "Transmisibilidad Relativa" T_R . Para un sistema dinámico vibratorio con excitación por fuerza de inercia rotativa la T_R es la relación entre la amplitud del desplazamiento impuesto a la fundación.

Un aislador se deforma o comprime, permitiendo la reducción de estas vibraciones. La deformación (o desplazamiento) relativo, es una medida del espacio requerido por dicho aislador. La T_R es entonces igual a la función de amplitudes A y viene dada por la siguiente expresión:



$$T_R = A = \frac{m_x}{m_r * e} = \frac{R_w^2}{\sqrt{(1 - R_w^2)^2 + (2R_c R_w)^2}} \quad 2.4$$

en la figura 2.6 se encuentra graficada esta función y, se puede observar que la función T_R tiene valores por debajo de 0.1 en el rango de sintonización alta.



Como conclusión, en un sistema dinámico vibratorio con fuerzas de excitación inerciales la amortiguación no juega un papel muy importante. Se pueden tener materiales con alta y baja amortiguación. Estos sistemas cumplen los dos criterios cuando se realiza sintonización alta; o sea, se debe trabajar en base a la máxima frecuencia de excitación w .

2.2 CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES

Aunque no es tema principal de este trabajo, se indicaran los aspectos generales de este tipo de aislamiento.

El control pasivo de vibraciones busca evitar que las vibraciones libres originadas por otras máquinas o equipos así como los movimientos dinámicos del ambiente, se desarrollen hacia una maquina o equipo sensible. Por ejemplo, equipos ópticos instrumentos de medición y control, etc.

Este método, conocido como aislamiento pasivo, se aplica en la actualidad en las cimentaciones de grandes maquinarias e incluso construcciones civiles y, en muchos casos, es necesario estudiar el problema de la dinámica de los suelos y sus interacciones con las mismas. Otra aplicación muy conocida es la suspensión de los vehículos, que se calcula según sean vehículos de competición, de calle, o de carga.

Puede mencionarse dentro de sus ventajas, que conforman sistemas sencillos, en muchos casos prácticamente libres de mantenimiento y no requieren ninguna fuente de energía externa para su funcionamiento. La principal desventaja de la aplicación del aislamiento pasivo en máquinas, equipos y vehículos, es que sólo elimina o reduce las vibraciones dentro del rango de frecuencias para el que fue calculado. En otras palabras, puede decirse que es 100 % efectivo solo para un

modo de vibración en particular, pudiendo resultar ineficiente y hasta volverse inestable si ese modo cambia. Esto puede ocurrir por ejemplo si varían las condiciones de operación, o si cambian las frecuencias de las excitaciones, lo que produce que el sistema vibre en un modo distinto al calculado.

2.3 FUNDACIONES O CIMENTACIONES

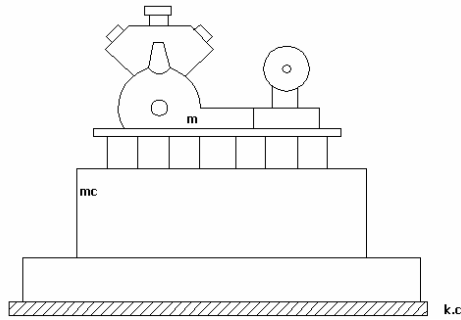
En la gran mayoría de los casos prácticos, la instalación o montaje de una máquina requiere de una fundación o cimentación cuyo diseño debe ser tal, que haga del conjunto máquina-cimentación un sistema vibratorio cuyas amplitudes de vibración estén dentro de los límites aceptables.

Un Sistema Dinámico Vibratorio (SDV) lo conforman, como se mencionó anteriormente, el sitio de instalación y la máquina soportada; es decir, el conjunto máquina, cimentación y elementos aisladores o terreno.

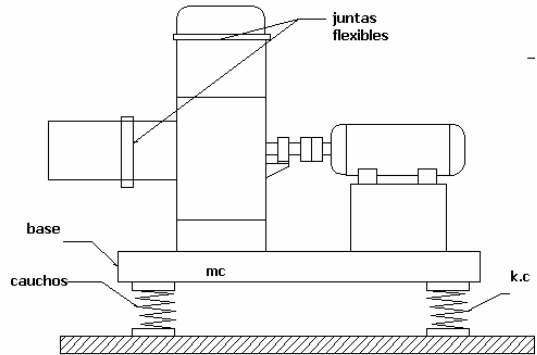
2.3.1 Tipos de fundaciones o cimentaciones. *En la figura 2.7 se muestran algunos ejemplos de fundaciones. En general, se tienen dos enfoques diferentes en lo que a tipos de cimentaciones respecta:*

2.3.1.1. Cimentación “directa” de la máquina. *Cuando se ancla la máquina directamente sobre el piso por medio de pernos; sin elementos resilientes entre la máquina y el piso o fundación (véase figura 2.7.a). En éste caso, hay que determinar los siguientes parámetros dinámicos: -desplazamiento máximo del movimiento del SDV a fin de evaluar la carga para la edificación; -la velocidad de la vibración para evaluar los esfuerzos dinámicos sobre la máquina; -la aceleración de la vibración para evaluar la carga para el piso o la fundación.*

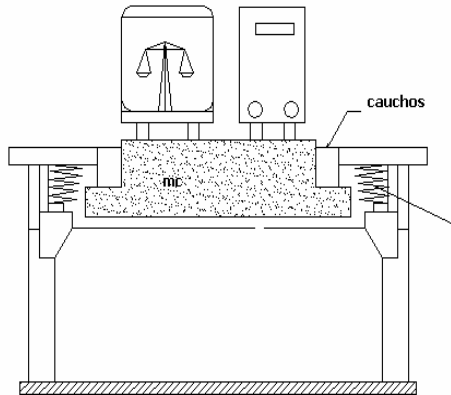
2.3.1.2. Cimentación “indirecta” de la máquina. *En éste caso, se utilizan elementos resilientes entre la máquina y el piso. Se debe determinar la fuerza dinámica que va por dichos elementos hacia el piso cuando su rigidez es más baja en comparación con la del piso o terreno. El diagrama (e) de la figura 2.7 es un*



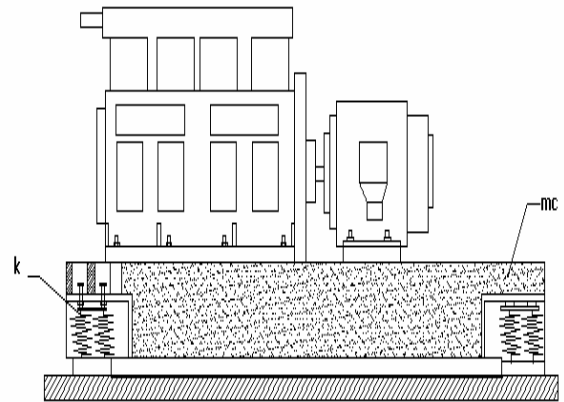
(a) fundación tipo bloque



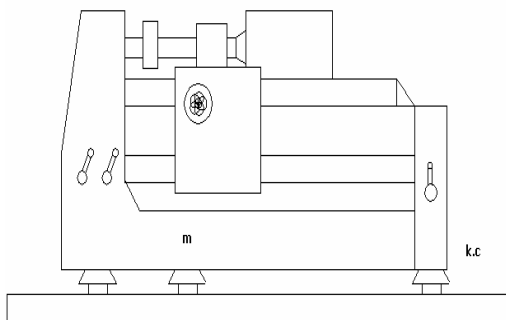
(b) Montaje de un ventilador sobre resortes de caucho



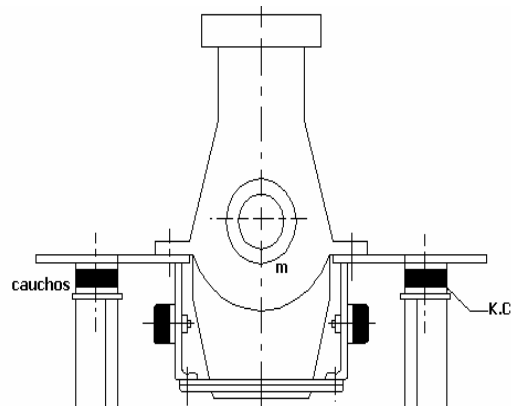
(c) Instrumentos protegidos de las vibraciones ambientales (control pasivo)



(d) Fundación tipo bloque sobre resortes de acero.



(e) Torno instalado sobre



(f) Máquina instalada sobre resortes de caucho

caso típico en que la máquina está soportada por elementos resilientes (sin cimentación).

La más aceptada y difundida clasificación de fundaciones considera los tres tipos siguientes:

1. Tipo macizo o tipo bloque. Conformada por un bloque de concreto que soporta directamente la máquina y otros equipos auxiliares fijados a ella. El espesor de este bloque es tal, que la deformación causada por el equipo es despreciable. En la figura 2.8 se muestran tres disposiciones de fundaciones tipo bloque. En el diagrama (a) la rigidez es suministrada por el piso o el terreno mismo; en el (b), el bloque descansa sobre elementos resilientes. Dichos elementos usualmente son resortes de acero o caucho, o en vez de ellos, una capa de arena, corcho, caucho molido, etc. Finalmente, el diagrama (c) muestra una combinación de resortes y péndulo en el que la principal ventaja es que se suministra también, rigidez lateral.

El diagrama (a) de la figura 2.7 muestra una fundación tipo bloque, donde la rigidez es suministrada por el terreno. Los diagramas (b), (d) y (e) de dicha

figura, muestran fundaciones sobre elementos resilientes y, los diagramas (c) y (f), corresponden al caso (c) de la figura 2.8.

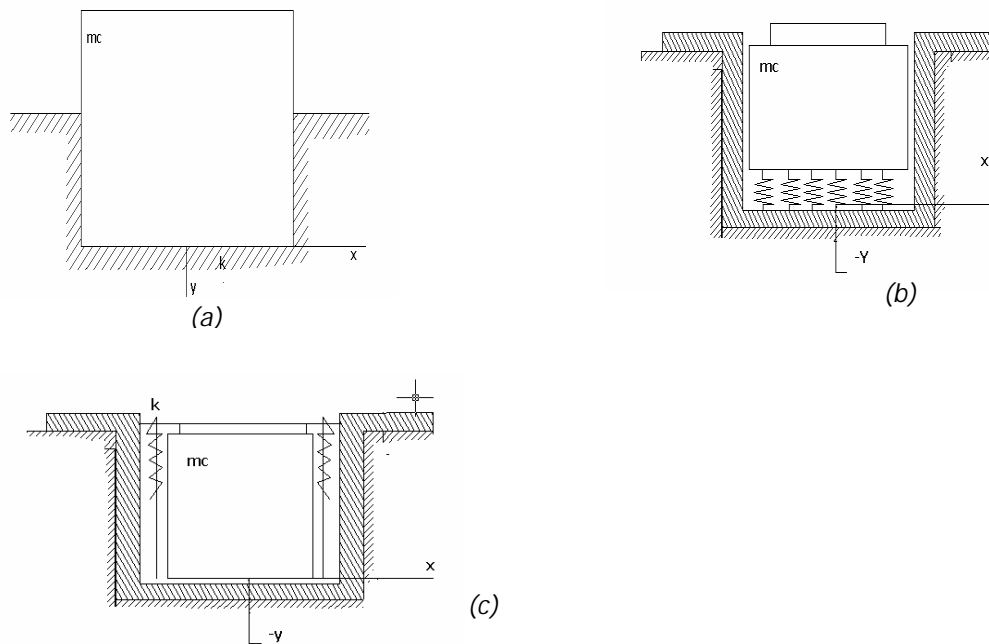


Figura 2.8 Fundaciones tipo bloque

2. Tipo aporticado. Conformada por una placa base y columnas o pilares agrupados de tal forma que sobre el conjunto descansa la placa donde se encuentra anclado el equipo. El diagrama de la figura 2.9 muestra una fundación aportificada típica.

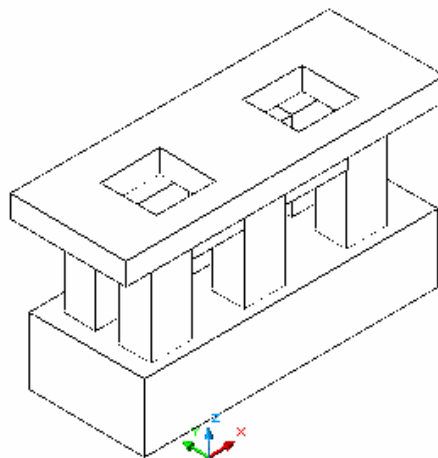


Figura 2.9 Fundaciones tipo aporticado

3. Tipo placa flexible: es una losa o placa de concreto que descansa directamente sobre el terreno; la cual, soporta una maquina o batería de maquinas.

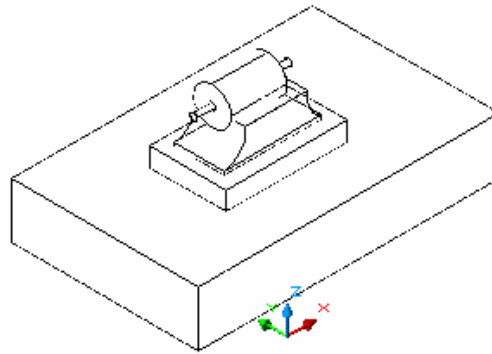


Figura 2.10 Fundación tipo placa flexible

2.3.2 Bases de diseño. Para el diseño de una cimentación deben tenerse en cuenta factores tales como: amplitud de vibración, velocidad y aceleración, amplificación y transmisibilidad de cargas dinámicas, etc. En general, se deben proporcionar dos tipos de datos: los primeros, relacionados con las características del terreno y los segundos con el equipo.

Los primeros datos se hacen indispensables cuando se va a instalar "directamente" la máquina al terreno y, generalmente se precisan los siguientes: densidad del

terreno, nivel freático, coeficiente de Poisson, asentamientos, módulo de cizallamiento y tensión admisible o carga portante.

Los segundos datos son facilitados por el constructor del equipo, siendo algunos: plano de disposición de la máquina ampliamente dimensionado con disposiciones de los centros de gravedad, pesos de equipo total y partes rotantes, velocidades de régimen y críticas, magnitud, dirección y frecuencias de las fuerzas horizontal y vertical no equilibradas, excentricidad de masas desequilibradas, etc.

Con base en la información anterior, el diseñador establecerá el tipo de fundación más adecuada; la cuál, deberá responder a los siguientes requerimientos:

- Gran solidez, estabilidad y resistencia;*
- Que no produzca excesivos asentamientos sobre el terreno y que no se deforme;*
- Ausencia de fuertes vibraciones o bajos valores de amplitud;*
- Que las frecuencias naturales del SDV difieran ampliamente de la velocidad de rotación principal de la máquina.*

Los dos primeros requerimientos en la mayoría de los casos son cumplidos ampliamente o no precisan grandes esfuerzos para hacerlos cumplir, ya que

normalmente el peso de la máquina y el peso de la cimentación están en una relación tal que la carga unitaria transmitida sobre el terreno es relativamente baja; así mismo, los asentamientos sobre el terreno y la deformación de la cimentación misma se descartan, debido a la configuración (maciza o aporticada) de ésta y, aún más si se incorpora estructura de hierro.

Por el contrario, para el cumplimiento de los restantes requerimientos, sí se precisa un análisis profundo y una verificación de resultados sancionados por la práctica e incluso reglamentados por organismos internacionales, procedentes de las experiencias de otras máquinas en explotación.

2.3.3. Procedimiento de análisis. El conjunto máquina, cimentación y elementos aisladores o terreno conforman un SDV que puede ser considerado como un S1GL cuando se logran ciertas simetrías según se vio en la sección 1.3. El análisis de la fundación está sujeto a la forma como esta es excitada.

Si se tienen fuerzas de excitación de amplitud constante, entonces como se menciono anteriormente, la amplitud del desplazamiento de la masa del SDV está relacionada con la fuerza de excitación según la función de amplitudes A (figura 2.5).

$$A_l = \frac{Y}{Y_{est}} = \frac{I}{\sqrt{(1 - R_w^2)^2 + (2 \cdot R_c \cdot R_w)^2}}; Y_{est} = F_o / k e$$

Así mismo cuando se tienen máquinas que generan fuerzas de excitación inerciales, la amplitud del desplazamiento de la masa está relacionada con la fuerza de excitación según la función o relación de amplitudes A (figura 2.6).

$$A_2 = \frac{m.Y}{m_r.e} = \frac{R_w^2}{\sqrt{(1 - R_w^2)^2 + (2.R_c.R_w)^2}}$$

En un sistema de un grado de libertad sin amortiguación la frecuencia natural de la oscilación esta dada por:

$$w_n = \sqrt{k/m}$$

el sistema dinámico vibratorio da origen a distintas frecuencias naturales según la dirección de la oscilación. Por ejemplo, para el movimiento vertical tenemos que:

$$w_{ny} = \sqrt{k_y/m}$$

para el movimiento horizontal (dirección transversal X o longitudinal Z):

$$w_{nh} = \sqrt{k_h/m}$$

Para el movimiento rotatorio sobre los ejes horizontal y vertical, se tendrán también sus respectivas frecuencias naturales. La frecuencia de la resonancia es aquella a la cual se produce la máxima amplitud y, para el caso en que w es constante; o sea, sistemas de un grado de libertad por fuerza armónica externa, viene dado por la siguiente expresión:

$$w_r = w_n \sqrt{1 - 2R_c^2}$$

si w varia (sistema de un grado de libertad con excitación por fuerza inercial), entonces w_r es:

$$w_r = \frac{w_n}{\sqrt{1 - 2R_c^2}}$$

el calculo de las frecuencias naturales se hace para compararlas con la velocidad de operación de la maquina. Para que no aparezcan las vibraciones criticas se debe verificar que cada una de las frecuencias naturales caiga fuera del rango comprendido entre la mitad y cuatro veces la velocidad principal de operación de la maquina en primera aproximación, o bien en sentido mas estricto, tener una diferencia de $\pm 20\%$ con la(s) frecuencia(s) de resonancia, que en definitiva es(son) función de la(s) frecuencia(s) natural(es).

De la misma forma, las amplitudes de vibración se calculan (en base a las funciones de amplitudes A mencionadas en este capitulo), y se comparan con los valores aceptados en la practica.

2.3.4 Chequeo de algunos parámetros de diseño cuando se ha diseñado una fundación y analizando su funcionamiento, se deben chequear ciertos requerimientos de diseño, a saber:

- Chequeo usual de los esfuerzos estáticos.

- *Chequeo de las características dinámicas que incluye: máxima amplitud de vibración, máxima velocidad y aceleración, máxima función de amplitudes, máxima función de carga armónica, posible condición de resonancia y máxima fuerza transmitida.*
- *Inspección de todos los modos de vibración, inclusive los acoplados.*
- *Consideración de los posibles fallas por fatiga en la maquina o en la instalaron o miembros estructurales.*

2.4 ALGUNAS REGLAS O GUIAS PRACTICAS

independientemente de los análisis anteriores, es muy conveniente como medio de auxilio para el dimensionamiento de la cimentación y el control del aislamiento activo de las vibraciones, apoyarse en experiencias ya consagradas y tener n cuenta entre otras las siguientes recomendaciones:

- **En la primera estimación el peso de la cimentación debe ser equivalente a cuatro veces el peso de la propia maquina como punto probable de ausencia de fuertes vibraciones.⁷**
- **Por lo general, las cimentaciones para maquinas, tienen dimensiones tales que la presión especifica sobre el terreno es muy baja. Sin embargo, debe tenerse en**

⁷ GARCIA SAEZ, J. Y VALVERDE, A “Diseño de cimentaciones de máquinas centrífugas considerando la vibración” Ingeniería Química. Julio 1982

cuenta que los esfuerzos sobre el terreno no debe exceder el 75% de la tensión admisible.

- **Como las cargas de transmisión al terreno son relativamente bajas, los hormigones para el caso de la cimentación en bloque puede ser de una resistencias de hasta 150 Kgr/cm² y para las aporcadas de unos 180 Kgr/cm², evitando asi fuertes dosificaciones, que por ser aplicado en grandes masa pueda llegar a producir fuertes retracciones.**
- **Téngase en cuenta que cuanto mayor es la amplitud de vibración del cimiento, tanto mayor es el riesgo de asentamientos, fisuramientos y perturbaciones en el funcionamiento.**
- **La condición de falla de la fundación es alcanzada cuando el movimiento dinámico del sistema dinámico vibratorio excede los valores limites expresados generalmente en términos de amplitud, velocidad y aceleración del movimiento vibratorio.**

3. DISEÑO Y ANÁLISIS DEL PROTOTIPO PARA EL ESTUDIO DEL AISLAMIENTO MECANICO

Hasta ahora se ha visto que para el estudio de las vibraciones mecánicas es suficiente comprender el modelo matemático de un sistema de un grado de libertad, el cual esta conformado por el conjunto máquina, cimentación y terreno. Sin embargo, se debe enfocar la atención al diseño, o mejor al cálculo, de los parámetros de un modelo “físicamente realizable”; esto es, un modelo de seis grados de libertad.

Como se menciona en el capítulo anterior los sistemas dinámicos vibratorios para aislamiento mecánico activo de máquinas rígidas, constan básicamente (véase figura 2.1) de una base o bloque y elementos deformables debajo (o encima) de ella. Además, la máquina soportada por el bloque (fundación), es quien se constituye en fuente de vibraciones.

Para poder desarrollar el modelo “físico” para el análisis práctico se debe partir de los experimentos a realizar. Es decir, se debe resolver

principalmente la siguiente pregunta: ¿Qué se va a medir? En el aislamiento mecánico activo se debe analizar el comportamiento dinámico del SDV, a fin de verificar que las fuerzas dinámicas que van al piso sean cero, siempre y cuando, los elementos deformables entre la fundación y el piso estén diseñados adecuadamente.

Se debe medir entonces de una parte, el comportamiento dinámico de la máquina (amplitud de los desplazamientos traslativos y rotativos, velocidad y aceleración de la vibración) con el fin de determinar la secuencia temporal entre las diferentes mediciones; es decir, se requiere una alta tecnología de medición.

Sin embargo del análisis matemático anterior se sabe, que el aislamiento depende prácticamente de la relación entre las frecuencias de excitación existentes en la máquina y las frecuencias naturales del sistema dinámico de vibraciones. Así mismo, la transmisibilidad de fuerza (T_f), es una medida de la eficacia de los aisladores. Esto significa, que se puede verificar la eficiencia del aislamiento mecánico activo por el control de dichas frecuencias; lo cual, es un problema más fácil de resolver.

Es decir, en vez de medir la reacción dinámica del piso, deben ser medidas las frecuencias de excitación y naturales con el fin, de hacer entrar al sistema

dinámico de vibraciones en resonancia e identificar los diferentes modos o formas naturales de vibración. Con ésto, se sabe en que rango de frecuencia podrá trabajar la máquina de resonancia.

En un sistema dinámico de vibración para aislamiento activo, la máquina se constituye en fuente de vibraciones. Estas vibraciones, se clasifican de acuerdo a las causas que la producen en:

- Vibraciones naturales o libres, producidas por un impulso inicial. El sistema dinámico de vibración no recibe energía del exterior;
- Vibraciones forzadas: producidas por la influencia de una fuerza externa. El sistema dinámico de vibración recibe energía del exterior;
- Vibraciones autoexcitadas: producidas por una causa interna del sistema. Por ejemplo, vibraciones producidas por fricción seca, vibraciones en las líneas de transporte de energía eléctrica, etc.

El modelo de seis grados de libertad deberá ser un sistema lineal, cuya fuente de excitación mantenga vibraciones forzadas en el sistema dinámico vibratorio (SDV) ya que, debido a sus características no se puede tener vibraciones autoexcitadas.

Una vibración forzada ocurre cuando una fuerza pulsante externa, usualmente llamada "fuerza de excitación", es aplicada a un cuerpo rígido que responde con un movimiento vibratorio de frecuencia igual a la de la fuerza de excitación, usualmente llamada "frecuencia de excitación". Los dispositivos mecánicos más comunes utilizados para generar dichas vibraciones forzadas son:

1. Por un mecanismo biela-manivela (figura 3.1). Compuesto por los siguientes elementos: cigüeñal O, volante V, manivela OB, biela BC, cruceta guía C y pulsador CD.

Un movimiento periódico es transmitido por el pulsador CD al objeto en estudio. Esto es desventajoso, porque el análisis espectral de dicho movimiento periódico traslativo muestra que, la aceleración del punto B contiene a parte de w , frecuencias múltiples enteras de w ; por ejemplo: $2w$, $4w$, $6w$

Las maquinas vibratorias que trabajan con este mecanismo son indicadas para producir fuerzas importantes de pequeña amplitud y con frecuencia hasta de 100Hz.

2. Por excéntrica y corredora (figura 3.2). La ventaja de este mecanismo es que produce un movimiento armónico de la forma $x(t) = x_o \text{sen} \omega t$. Sin embargo, este tipo de maquinas deben ser muy bien construidas a fin de evitar que se bloquee la corredera por un ajuste o juego inadecuado entre el pasador P y la corredera.

3. Por dos masas desbalanceadas (figura 3.3). La principal característica de este mecanismo de excitación, es que varía la frecuencia, obteniéndose así desde una pequeña fuerza de excitación $F_e(t)$, hasta fuerzas de magnitud considerable; en base a la fuerza centrífuga desarrollada por las dos masas desbalanceadas que giran en sentidos opuestos. Se puede jugar con la posición de las masas para hacer que una de las componentes de la fuerza de inercia se anule. En la posición en que se encuentran las masas en la figura 3.3, las componentes horizontales se anulan y el vibrador producirá solamente fuerzas verticales armónicas. Para una posición antisimétrica, es una fuerza armónica horizontal la que se produce. La fuerza generada es función de la velocidad de rotación, el tamaño y la posición de las masas desbalanceadas.

En general, se puede concluir que en las maquinas rotativas existen fuerzas de excitación a la frecuencia $\omega = 2\pi f / 60$ (radianes /segundo). Dichas fuerzas son

de amplitud constante solamente cuando f es constante y, su dirección coincide con la dirección de la masa rotativa desbalanceada m_r .

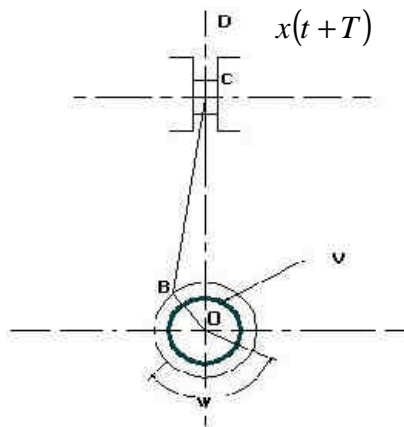


Figura 3.1. Mecanismo biela-manivela

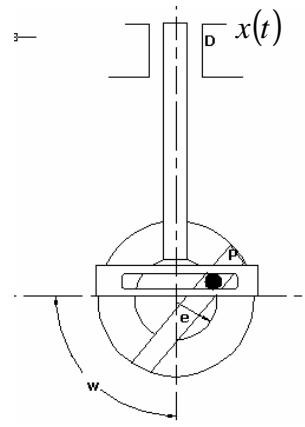


Figura 3.2. Mecanismo excéntrica-corredera

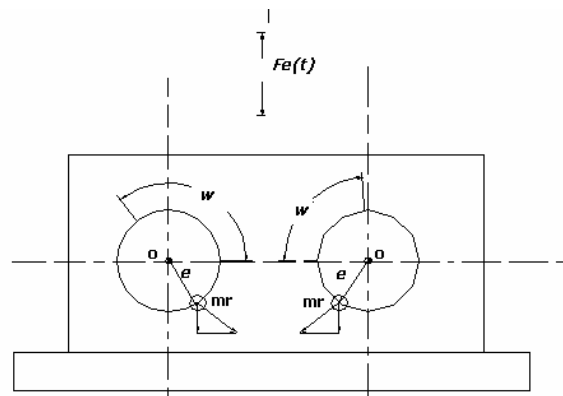


Figura 3.3. Excitación por dos masas desbalanceadas

Lo anterior, significa que la frecuencia de excitación es fácil de medir en maquinas rotativas; en cambio, en las maquinas tipo biela-manivela que giran con f constante, resultan fuerzas de inercia rotativas (a la

frecuencia ω) y fuerzas de inercia alternativas periódicas a la frecuencia ω o infinitos múltiplos enteros de ω .

Por las razones anteriores, es que se optó por una maquina rotativa (vibrador de masas desbalanceadas), ya que puede proporcionar una gran gama de frecuencias de excitación y lo que es más importante, permite hacer excitación por fuerza inercial, como se vera en la siguiente sección.

3.1. FUENTE DE EXCITACIÓN: VIBRADOR DE MASAS DESBALANCEADAS

Como se menciona anteriormente (capitulo 2), las fuerzas de excitación pueden ser de amplitud constante o variable. Cuando la excitación no varía con la frecuencia, es una "excitación de amplitud constante". El vibrador de masas desbalanceadas opera sobre un "rango" de velocidades, de tal forma que la frecuencia de excitación ω varia con las rpm del motor. En este caso, la excitación es de amplitud variable y directamente proporcional al cuadrado de la velocidad; dichas fuerzas de excitación son llamadas también, "fuerzas de excitación inerciales" y

su control o aislamiento se hace sobre la base de la teoría vista en el capítulo 2.

3.1.1. Excitación inercial actuando a través del centro de gravedad del cuerpo. En el diagrama (a) de la figura 3.4 se muestra un mecanismo simple para producir una fuerza de excitación inercial, originada por las masas desbalanceadas o pesas iguales, que rotan en sentidos opuestos. Cada pesa produce una fuerza centrífuga de la forma $m * e * \omega^2$ la cual, tiene una componente armónica horizontal y otra vertical.

Si las masas están colocadas simétricamente una respecto de la otra, las componentes horizontales se anulan y las verticales se suman dando como resultado una fuerza de excitación armónica $F_e(t)$, a lo largo de la línea vertical que pasa a través del centro de gravedad del cuerpo. Dicha fuerza de excitación es:

$$F_e(t) = 2 * m_r * e * \omega^2 * \text{sen} \omega t$$

$F_e(t)$ tiene un máximo positivo cuando $\omega t = 90^\circ$ y negativo cuando $\omega t = 270^\circ$, se puede entonces escribir la ecuación anterior como:

$$F_e(t) = \pm 2 * m_r * e * \omega^2 = \pm 2 * W_r * e * \omega^2 / g \quad 3.1$$

Donde:

$$m_r = \frac{W_r}{g} = \text{masa de cada pesa en kgf-s}^2/\text{cm}.$$

m = masa del cuerpo (incluye la masa de la pesas).

W_r = peso de cada pesa en kgf.

g = aceleración de la gravedad = 981 cm / s².

e = excentricidad de las pesas en cm.

f = r p m de las pesas.

$$w = 2\pi f / 60 = f / 9.55 \text{ rad / s, velocidad angular de las pesas.}$$

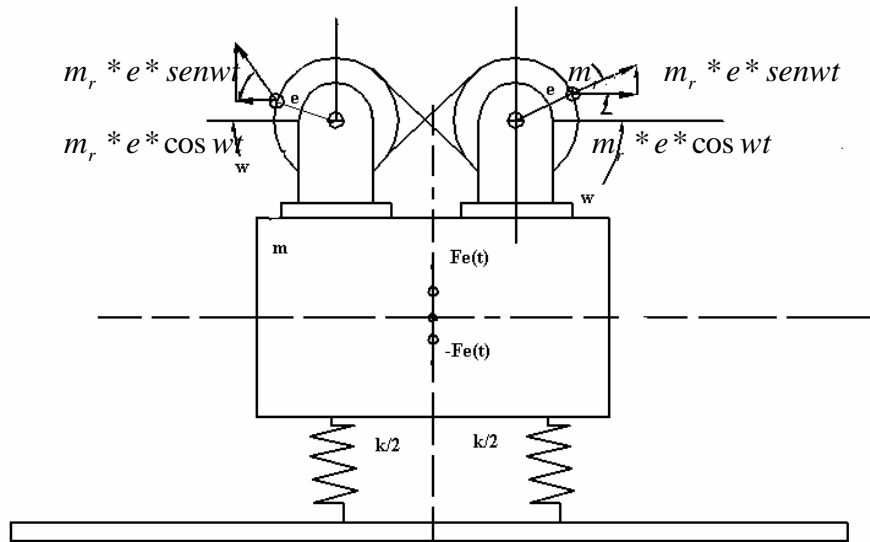
La fuerza de excitación $F_e(t)$ actúa verticalmente a través del centro de gravedad del cuerpo causando un movimiento vibratorio lineal vertical de amplitud $\pm y$, dicha amplitud puede ser calculada a partir de la ecuación 2.4 y la figura 2.6 (sección 2.1.2). Así mismo, con la ecuación 2.3 y la figura 2.5 se puede calcular la amplitud o tamaño de la fuerza transmitida por los resortes hacia el piso, a fin de evaluar la eficiencia del aislamiento mecánico activo.

El diagrama (b) de la figura 3.4 muestra un mecanismo simple para producir excitación por torque inercial o "par de fuerzas". En este caso, las masas desbalanceadas se encuentran desfasadas 180 grados y giran en el mismo sentido. Las componentes horizontales de las fuerzas centrífugas se cancelan mientras que, las componentes verticales

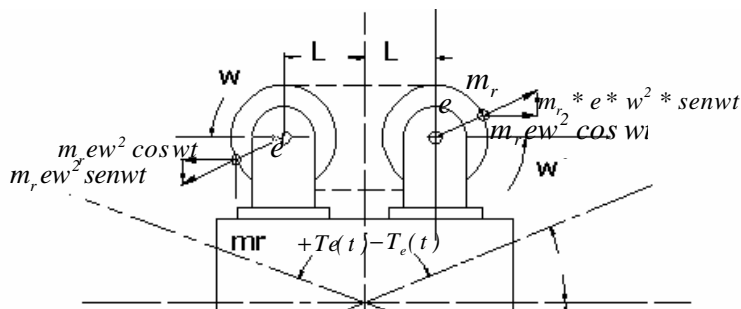
producen un “par de fuerzas” que tiende a hacer girar el cuerpo alrededor del eje longitudinal que pasa a través de su centro de gravedad.

Si la distancia entre los ejes de rotación de las masas desbalanceadas es $2.L$, entonces el “par de fuerzas” que causa una vibración angular de amplitud máxima θ_0 es:

$$T_e(t) = \pm 2 * m_r * w^2 * e * L = \pm F_e(t) * L$$



a.



b

Figura 3.4 Vibración de un cuerpo soportado por resortes: Excitación inercial

El diagrama (a) de la figura 3.4 muestra una fuerza de excitación actuando verticalmente a través del centro de gravedad del cuerpo, que causa un movimiento vibratorio lineal vertical de amplitud $\pm y$. Si la excitación en vez de ser aplicada verticalmente, se aplica en la dirección longitudinal (Z) o transversal (X), entonces el cuerpo y su centro de gravedad vibrarán a lo largo de los ejes longitudinal o transversal. El diagrama (b) muestra una excitación por torque inercial actuando alrededor del eje longitudinal a través del centro de gravedad, que causa vibraciones angulares de amplitud \pm grados alrededor del mismo eje. Si el torque inercial o par de fuerzas es aplicado alrededor de los ejes

vertical o transversal, entonces la vibración angular será también alrededor de los ejes vertical o transversal, respectivamente.

3.1.2 Excitación inercial que no actúa a través del centro de gravedad.

En la práctica, es muy difícil que la fuerza de excitación pase exactamente por el centro de gravedad del cuerpo. El diagrama (a) de la Figura 3.5 muestra esta condición general, donde la fuerza de excitación $F_e(t)$ es aplicada en un punto situado a una distancia L del centro de gravedad.

La amplitud del movimiento vibratorio resultante puede ser hallada asumiendo que se tienen dos excitaciones de la misma amplitud pero sentido opuesto, actuando a través del centro de gravedad del cuerpo como se muestra en el diagrama (b) de la Figura 3.5.

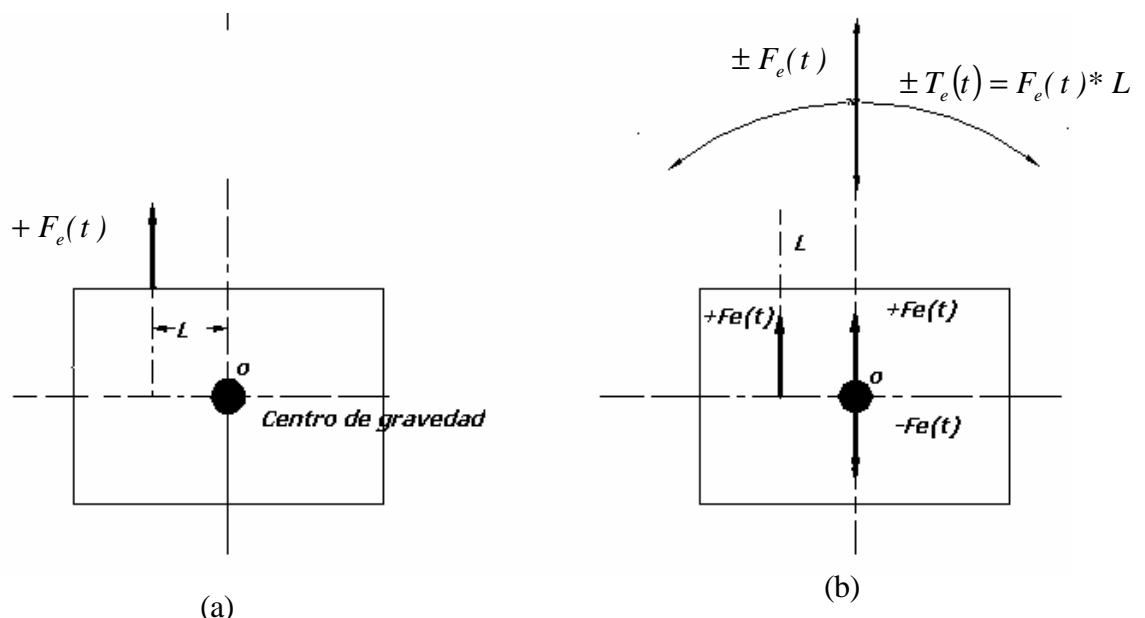


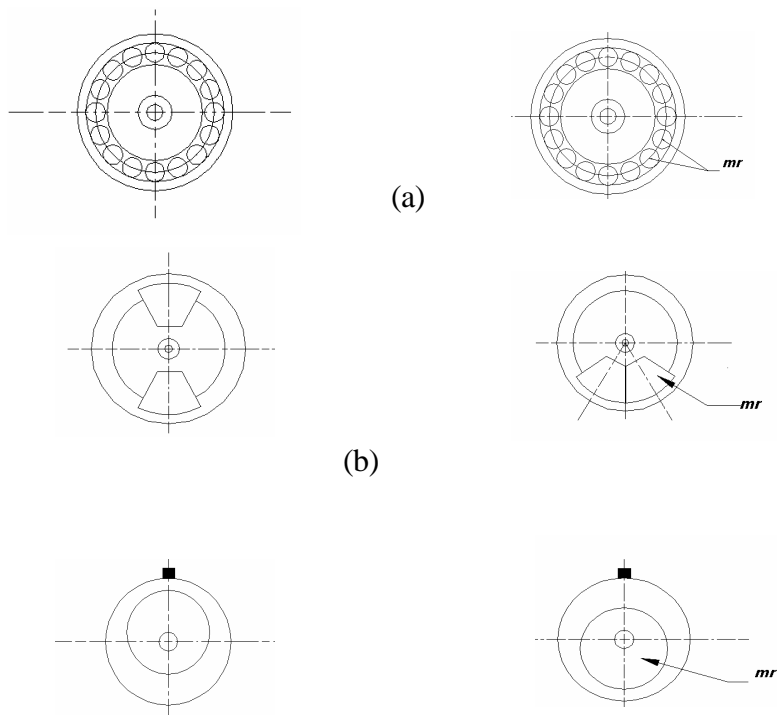
Figura 3.5 Excitación inercial actuando fuera del centro de gravedad.

Estas fuerzas de excitación adicionales se cancelan y por lo tanto, no afectan el movimiento del sistema. Sin embargo, ellas hacen posible superponer dos movimientos para obtener el movimiento vibratorio resultante: Uno lineal producido por la fuerza de excitación $F_e(t)$ actuando a través del centro de gravedad del cuerpo, y otro angular, alrededor de un eje que pasa a través del centro de gravedad del cuerpo. Dicho movimiento angular es producto del "torque inercial" de excitación $\pm F_e(t)*L$. La amplitud de estos dos movimientos se obtiene a partir de las ecuaciones vistas anteriormente.

Se debe entonces construir el mecanismo de excitación (vibrador de masas desbalanceadas), teniendo en cuenta principalmente dos características: Primero, que se puede variar la frecuencia de excitación y segundo, que se pueda variar el tamaño y/o la posición de las masas desbalanceadas o "pesas". Es importante cumplir con estas características, por que $F_e(t)$ es función de m_r y w^2 .

3.1.3..Mecanismos para variar el tamaño y la posición de las pesas. Entre los mecanismos más comunes para variar el tamaño y la posición de las pesas, se tienen:

- Para vibradores relativamente pequeños se emplea un disco o tambor equilibrado (véase Figura 3.6.a), con una serie de orificios roscados paralelos al eje de rotación, dentro de los cuales se colocan las pesas.
- Para máquinas de potencia media, se aplica la construcción de la Figura 3.6.b. La masa desbalanceada la constituyen las dos pesas que, pueden ser colocadas en distintas posiciones sobre la periferia del disco. La fuerza resultante es igual a cero cuando las pesas están en posiciones opuestas y, es máxima cuando, las pesas están una junta a la otra.
- La solución de la Figura 3.6.c se aplica a máquinas de gran potencia.
- La masa desbalanceada desliza a lo largo de una manivela (Figura 3.6.d). Con este mecanismo se obtiene una variación de la excentricidad e y por lo tanto, una variación de la fuerza excitación.



- La Figura 3.6.e representa una solución en que tanto la masa como la excentricidad son constantes.

Además de hacer que la fuente de excitación cumpla con las condiciones que f y m_r sean variables, debemos hacer que la máxima frecuencia de excitación w sea mayor que la máxima frecuencia natural circular w_{nj} del SDV. En la sección 2.1.2 se concluyó, que el control activo de vibraciones generadas por fuerzas de excitación inerciales (vibrador de masas desbalanceadas), se debe hacer con sintonización alta; o sea, lograr que la frecuencia natural más "baja" sea mayor que la "mayor" frecuencia de excitación. Sin embargo, en un principio no hay

control activo del movimiento vibratorio (la menor w_{nj} es menor que la mayor w), por que se requiere que la amplitud de dicho movimiento sea apreciable. Después, al variar los parámetros masa de la cimentación Y rigidez de los elementos deformables las frecuencias naturales del SDV varían de tal forma que se logra la sintonización alta.

Al tener un S6GL con seis frecuencias naturales w_{nj} (tres de traslación a lo largo de los tres ejes principales y tres de rotación alrededor de los mismos ejes) y cumplir con los anteriores requerimientos, entonces al ir aumentando la velocidad de giro (f) del motor, la frecuencia de excitación w aumentará e irá progresivamente coincidiendo con cada una de las seis frecuencias naturales w_{nj} . El SDV entrará en resonancia cada vez que w coincida con una w_{nj} produciendo entonces un modo natural de vibración.

Como se mencionó en la sección 1.6, si se hace que el modelo sea simétrico con respecto a dos planos (casos 2 o 3), el análisis matemático para calcular teóricamente las frecuencias naturales se simplifica. Sin embargo, la determinación experimental y la identificación de los modos naturales no es tan simple, por que se debe medir instantánea y simultáneamente por lo menos en tres sitios diferentes. Cuando el SDV entra en resonancia y la amplitud del

movimiento vibratorio es apreciable, se podrá disponer de algún sistema o mecanismo de observación o visualización de dichos modos naturales.

Entonces, se instalará una base rígida debajo del vibrador, sobre la cual se fijará el sistema de observación. Al mismo tiempo, esta base o bloque rígido permitirá mostrar y analizar como influyen en el comportamiento dinámico del SDV los siguientes parámetros: masa y momento de inercia de la base rigidez y amortiguación de los elementos deformables.

3.2 CARACTERISTICAS DEL MODELO

En la figura 3.7 se pueden observar los elementos que conforman el sistema vibratorio. Los elementos están enumerados de tal forma que sean de fácilmente identificables.

3.2.1 Elementos que conforman el vibrador de masas desbalanceadas.

Basándose en la teoría tratada en capítulos anteriores se diseño y construyó la fuente de excitación utilizando los siguientes elemento:

1. Unidad Motriz. La cual esta conformada por un motor eléctrico AC con las siguientes características:

Numero de revoluciones máximas:	$f_{max} = 11.500 \text{ rpm}$
Potencia:	$P = 93.25 \text{ W}$ atios.
Peso:	$W = 2 \text{ KGR}$ (4.4 LB).
Diámetro del eje:	$d = 7.93 \text{ mm.}$ (5/16")

Como el modelo construido será utilizado como ayuda didáctica, el tamaño y la potencia del motor, resultan adecuados para tal propósito. Para mayor seguridad se trabajara con una máxima velocidad de giro del motor de 3600 rpm cuando se estén utilizando las pesas desbalanceadoras, ya que estas pesas originan grandes fuerzas centrífugas que son muy perjudiciales para el motor.

2. Tuercas de sujeción. Estas son utilizadas para sujetar al eje, los discos equilibrados. Estas tuercas son de 5/16" de diámetro interno.

3. Discos equilibrados: Como el vibrador es relativamente pequeño, se utilizan dos discos equilibrados con una serie de orificios, a fin de alojar las pesas. Con este mecanismo la excentricidad es constante pero se puede jugar con la posición angular de las pesas.

- 4. Masas desbalanceadoras o pesas:** son los elementos que dan origen a las fuerzas de inercia rotativas o fuerzas de excitación. Están localizadas en los orificio de 1/8" de diámetro en los discos equilibrados.
- 5. Placa base:** Este elemento soporta el vibrador, sobre ella van montados los elementos anteriores. El soporte del motor va montado sobre la placa base mediante cuatro tornillos de 1/4" de diámetro.
- 6. Carriles posicionadores:** Están colocados paralelos al eje motriz; es decir, paralelos la eje longitudinal. Sobre estos carriles se desliza la placa base (5) a fin de buscar la posición en la cual el plano vertical que contiene las fuerzas de excitación (Perpendicular al plano O-Z), pasa por lo menos muy cerca del centro de gravedad del sistema dinámico vibratorio. Como se menciona en la sección 1.6 es condición importante que dicho plano contenga el centro de gravedad del conjunto ya que así se logra una simetría simplificándose el análisis matemático; además como puede apreciarse en la figura 3.7, los elementos del vibrador están dispuestos de tal manera que el conjunto es simétrico también con respecto al plano Y-O-Z, el cual, contiene al eje rotacional del motor.

La placa base se sujeta firmemente a estos carriles mediante cuatro tornillo de cabeza hexagonal de $\frac{1}{4}$ " de diámetro con sus respectivas tuercas y arandelas de presión, una vez encontrada la posición deseada. Estos carriles están hechos con un perfil de aluminio cuadrado de $1'' \times 1''$. Poseen con una ranura en la cual se deslizan los tornillos de $\frac{1}{4}$ " que sirven para desplazar al vibrador de una posición a otra.

3.2.2 Otros accesorios del sistema dinámico vibratorio: **los elementos anteriores hacen parte del vibrador de masa desbalanceada. Los siguientes tienen que ver con el anclaje y cimentación de la maquina (Vibrador):**

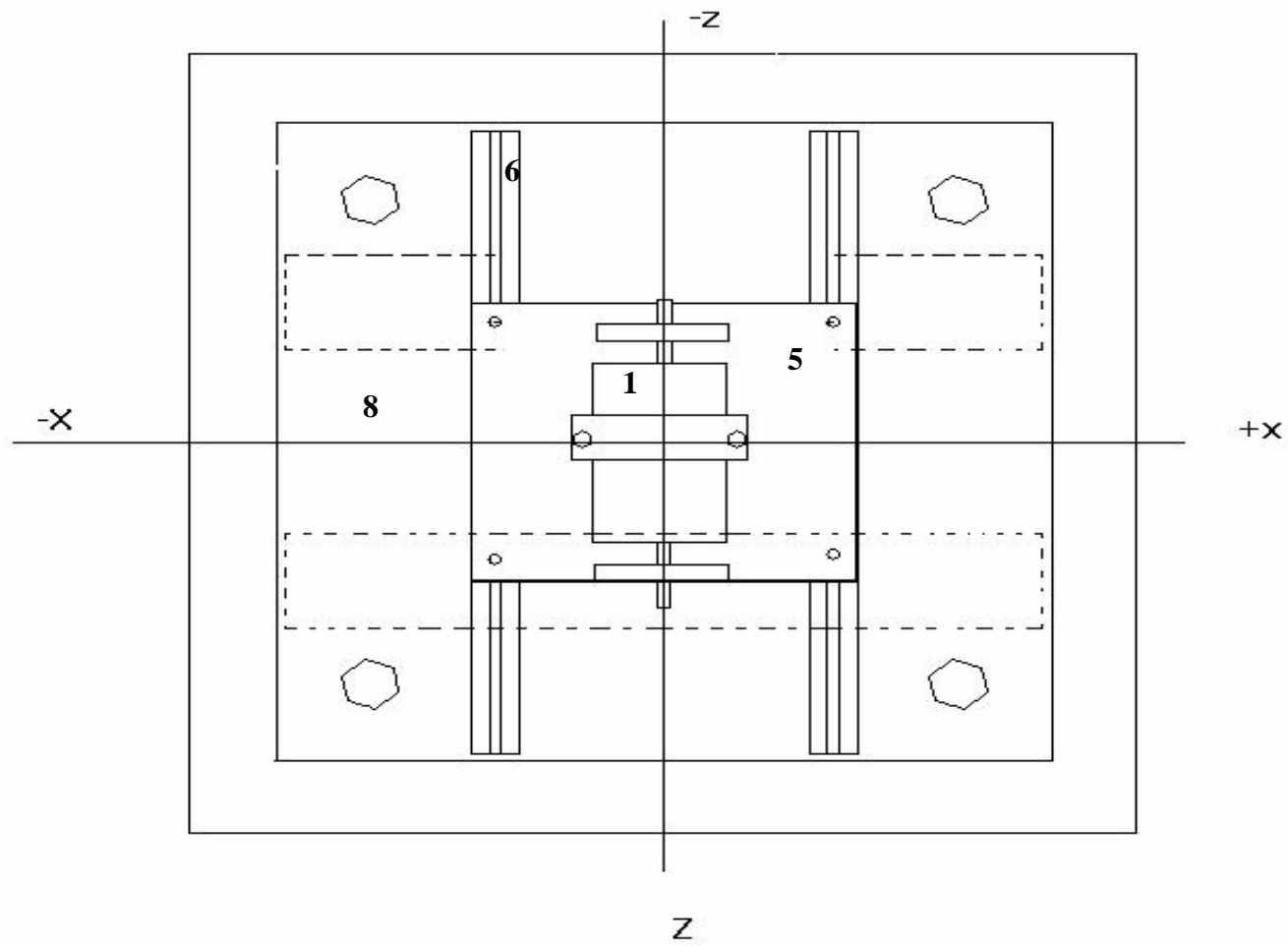


Figura 3.7 Vista superior del modelo

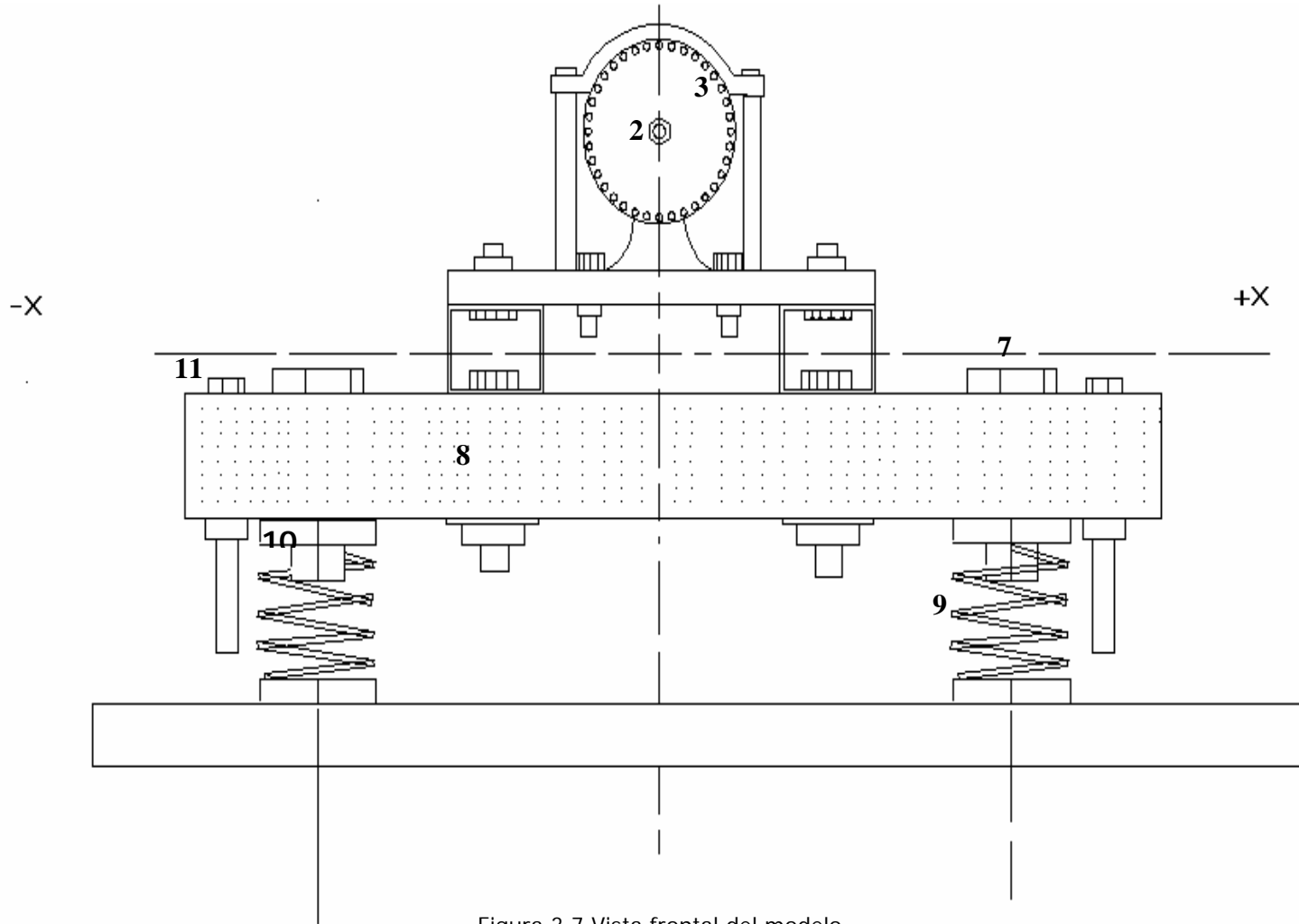


Figura 3.7 Vista frontal del modelo

7. Pernos guías: **Estos tornillos de cabeza hexagonal de 5/8" de diámetro. Van roscados directamente a la cimentación. Son utilizados como guías para los elementos deformables (resortes de acero o de caucho).**

8. Cimentación: **Bloque de madera, los parámetros de masa y momento de inercia característicos de la cimentación, influyen sobre los fenómenos a estudiar porque a medida que la masa de la cimentación aumente, disminuirá la amplitud del movimiento vibratorio y de las fuerzas dinámicas que pasan al ambiente. Como se menciona en el capítulo 2, el aislamiento mecánico de máquinas rígidas es cuatro veces mayor que la masa de la máquina (vibrador), el movimiento vibratorio será de muy poca amplitud así como, las fuerzas dinámicas.**

En el caso que se está estudiando, lo que se desea es ver los modos naturales de vibración del sistema dinámico vibratorio (resonancias); por lo tanto la cimentación debe tener inicialmente menor a cuatro veces la masa del vibrador; después se irá aumentando para verificar, si en efecto, la amplitud del movimiento vibratorio y las fuerzas que cargan el ambiente disminuyen. La masa se aumenta fijando platinas de acero desde la parte inferior de la cimentación, por medio de tornillos de 1/4" de diámetro y sus respectivas tuercas y arandelas.

La cimentación es entonces el elemento encargado de “mostrar” los modos de vibración. Para tal efecto a sido pintada de negro y dotada de puntos brillantes (cabezas de alfileres separadas un centímetro una de otra). Con esto se establece un buen contraste y mediante luz electroscópica se logra una buena visualización de los modos naturales de vibración. Dependiendo de la amplitud del movimiento vibratorio es posible ver dichos modos a simple vista.

9. Elementos deformables: resortes .pueden ser de caucho o acero. En cualquier caso el parámetro que juega un papel importante en el aislamiento es la rigidez de dichos elementos. Como se vio al final de la sección 2.1 en un sistema dinámico vibratorio con fuerzas de excitación inerciales la amortiguación no juega un papel muy importante.

Por la anterior razón se tienen resortes de acero helicoidales de diferentes dimensiones y por lo tanto diferentes rigideces. Se tienen también elementos deformables de caucho a fin de comparar el comportamiento del sistema dinámico vibratorio con le comportamiento en presencia de los resortes de acero.

10 Tapones superiores e inferiores: los resorte están alojados en dos tapones para ayudarlos a que se mantengan en su posición y evitar cualquier tipo

de pandeo a la hora estar en funcionamiento. Los tapones inferiores se fijan a una placa de madera por medio de tornillos, y los y tapones superiores se fijan a la cimentación por medio de los pernos guías.

3.2.2 Mecanismo de variación de velocidad de giro del motor. La velocidad del motor debe ser variable porque se requiere que $w = 2\pi f / 60$ vaya aumentando desde un valor mínimo a uno máximo disminuyendo de uno máximo a uno mínimo, de tal forma que al coincidir una frecuencia de excitación w con una natural w_{nj} se entre en resonancia y, algún modo natural de vibración del sistema pueda ser visualizado. Para tal fin, se dispuso un mecanismo eléctrico de variación de la velocidad el cual, internamente posee una serie de resistencias, varia la señal de voltaje AC, aumentando o disminuyendo la entrega de potencia al motor y, originándose por tanto, un aumento o disminución de la velocidad de giro del motor.

El variador de velocidad presenta las siguientes especificaciones:

1. Voltaje de entrada 110 V.
2. Voltaje de salida 0-110 V.
3. Máxima corriente de entrada 3 amp.
4. Raango de velocidades de trabajo >300 rpm.
5. Consumo sin carga 10 mA.

6. Protección por sobre corriente.

3.3 DISEÑO Y SELECCIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL MONTAJE

En esta sección se encontrara el diseño y la selección de los principales elementos que conforman el modelo, en especial de aquellos que por su condición de trabajo así lo requieran.

3.3.1 Discos equilibrados y pesas: el calculo de los discos se hizo en base al espacio disponible, o sea que el diámetro de los discos no deben de mayor del diámetro de la carcasa porque puede hacer contacto con la base del motor. Los discos tienen entonces la siguientes características:

Cada disco tiene 36 orificios de 1/8" (cada uno a 10° véase figura 3.8), para fijar allí las pesas y poder variar su posición angular.

El material de los discos es aluminio debido, a la necesidad de hacer lo mas liviano posible cada elemento del modelo. Además las condiciones de trabajo de estos elementos permiten el uso de dicho material.

Las masas desbalanceadas o pesas (figura 3.9) son los elementos que originan las fuerzas de inercia rotativas. En cada medición se utiliza una pesa en cada disco lateral si la excitación es por torque inercial

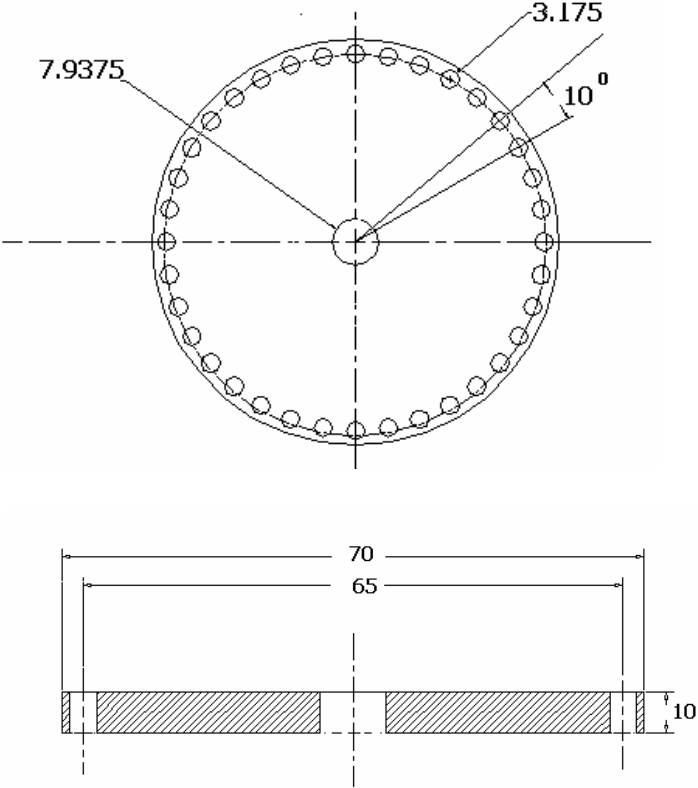


Figura 3.8 Dimensiones del disco equilibrado (mm)

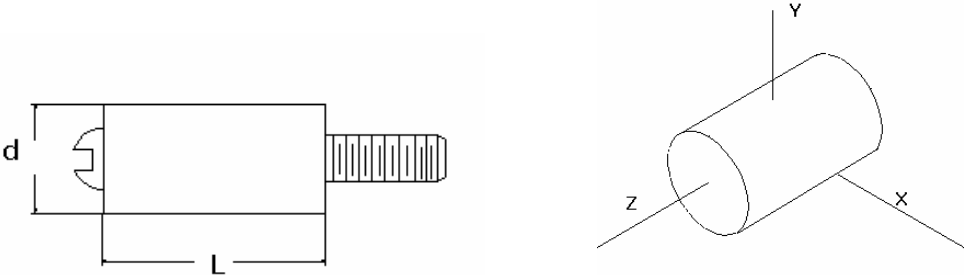


Figura 3.9 Configuración de las pesas

Tabla 1. Características principales de las pesas

Masa (gr)	Diametro d (mm)	Longitud L (mm)	Momento de Inercia (gr-mm ²)	Momento de Inercia (Kgf-cm-s ²)
2,1	7	10	12,8625	0,000000128
5,3	10	10	66,25	6,625*10 ⁻⁷
13	14	12	318,5	3,18*10 ⁻⁶

3.3.2. Calculo de la fuerza y el torque de excitación máximos. La fuerza de excitación máxima viene dada por la ecuación 3.1;

$$F_e(max) = \pm 2 * W_r * e * w^2 / g$$

con excentricidad $e = 3.25\text{cm}$, $W_{rmax} = 0.013$, $g = 981 \text{ cm}^2/\text{s}$, $f_{max} = 3600$ y

$w = f / 9.55 \text{ rad} / \text{s}$, la fuerza de excitación máxima es:

$$F_e(max) = \pm 12.24 \text{ kgf}$$

EL máximo torque generado por esta fuerza es:

$$T_e(max) = \pm 12.24 * 7.9 \text{ kgf} = 96.36 \text{ Kgrfcm}$$

Los mayores esfuerzos sobre el eje motriz se presentan cuando se arranca el motor. Después de la vencida de inercia se disminuye la velocidad de giro y por lo tanto disminuye la excitación y los esfuerzos que se producen en este. El torque requerido para arrancar el motor

0.025 Kgf-m, la fuerza tangencial que se origina (0.449Kgf) no hace necesario el chequeo motriz. Más aun teniendo en cuenta que F_e y T_e no siempre tendrán los mismos valores máximos calculados anteriormente y además ellos lo que hacen es obligara al conjunto maquina cimentación a realizar el movimiento vibratorio, cuya amplitud si depende de dichos valores. En el capitulo 4 se estudiara mas a fondo lo relacionado con este tema.

3.3.3 La cimentación: Rango de variación de su masa. Al hacer la descripción del modelo se llamo cimentación al bloque de madera (8). El rango de variación de su masa debe ir de una a dos veces la masa del vibrador hasta cuatro veces dicha masa.

La cimentación la conforman en realidad dos elementos: la placa base (5) cuya masa no varia (véase figura 3.10), y el bloque de madera (8), el cual tiene masa constante pero, se le puede adicionar masa por la parte inferior, colocando platinas de acero por medio de tornillos (11) y tuercas. En la figura 3.11 se muestran las dimensiones principales de la cimentación. Entonces, la masa de la cimentación básica es:

$$m_c = m_{pb} + m_{bm}$$

donde: m_c = masa de la cimentación básica en Kgf-s²/cm.

$$m_{pb} = \text{masa de la placa base} = W_{pb} / g .$$

$$m_{bm} = \text{masa del bloque de madera} = W_{bm} / g$$

$$W_{pb} = \text{peso de la placa base} = 0.1837 \text{ Kgrf.}$$

$$W_{bm} = \text{peso del bloque de madera + pernos de anclaje} = 3.3689 \text{ Kgf.}$$

$$g = \text{aceleración de la gravedad} = 981 \text{ cm/s}^2.$$

Reemplazando valores en la ecuación anterior,

$$m_c = 3.621 * 10^{-3} \text{..Kgf} - s^2 / \text{cm}$$

el peso del vibrador (conformado por los elementos restantes sobre la placa base) es aproximadamente 2.233 Kgf. Y con $m = W / g$ y $g = 981 \text{ cm/s}^2$, la masa del vibrador es: $2.27 * 10^{-3} \text{ Kgf-s}^2/\text{cm}$. O sea, la masa de la cimentación es 1.5 veces mayor que la masa del vibrador. Como inicialmente la masa de la cimentación debe ser de una a dos veces la masa de la maquina (vibrador), este valor es correcto.

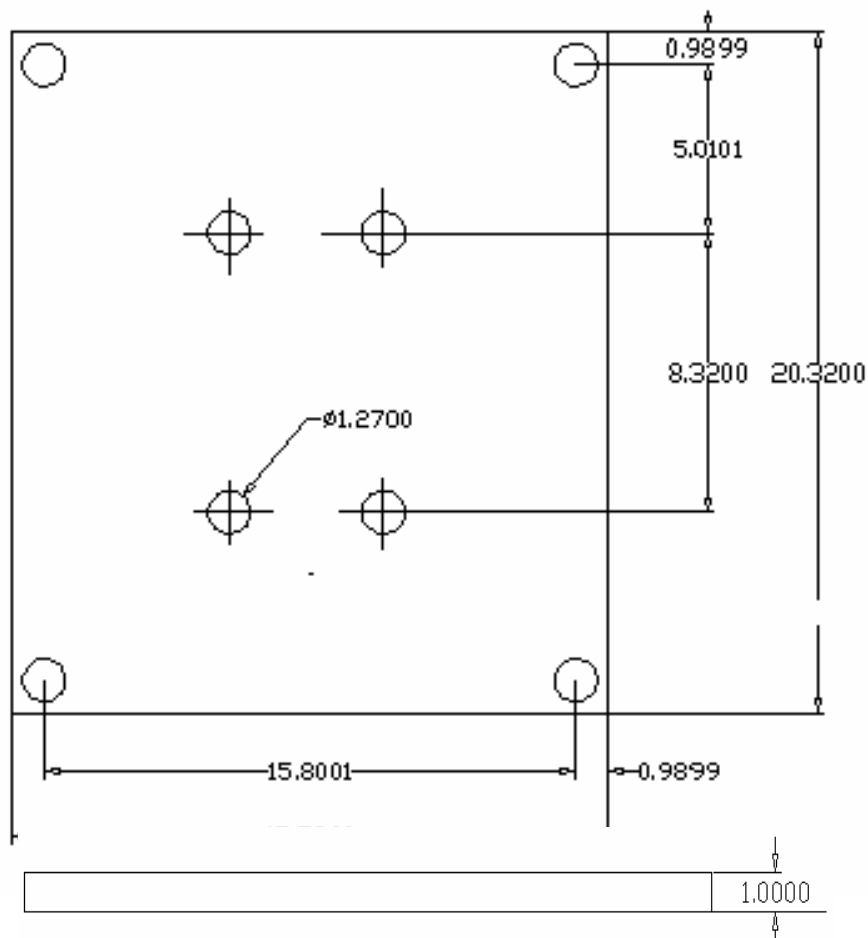
Los elementos utilizados para aumentar la cimentación son:

Sin platinas: $m_c = 3.62 * 10^{-3} \text{ Kgf-s}^2/\text{cm}$.

Con platina de 1.5 Kgf: $m_c = 5.15 * 10^{-3} \text{ Kgf-s}^2/\text{cm}$

3.3.4 Elementos deformables: Rigidez y amortiguación. En general, los elementos de elasticidad adoptan la forma de resortes; los cuales se suponen perfectamente sin masa y no disipativos, tales resortes se definen por su rigidez, dimensiones que estén acorde con las coordenadas de movimiento del sistema.

De otra parte, los elementos de amortiguación son los que generalmente disipan la energía en un sistema vibratorio, y se suponen sin masa e inelásticos. Sin embargo, la disipación se relaciona en alguna forma con el movimiento relativo entre los elementos o componentes del sistema. La energía disipada en el amortiguamiento tiene que ser "respuesta" de una fuente externa de excitación para que la vibración pueda sostenerse (vibración forzada) pues de otra manera, la



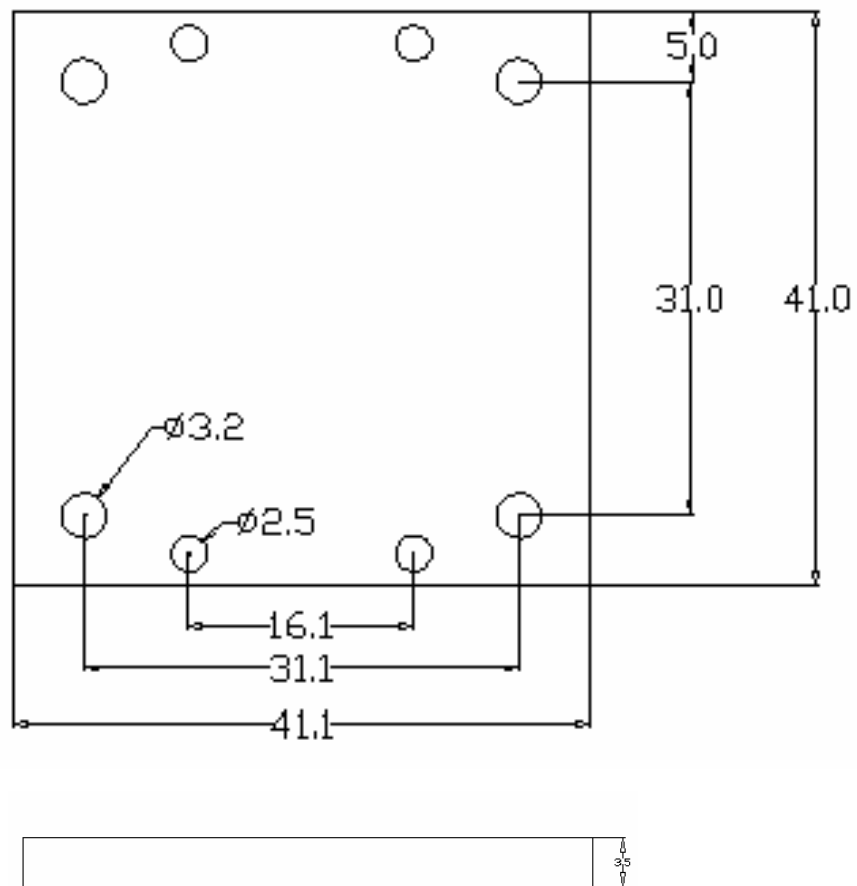


Figura 3.11 Dimensiones de la cimentación.

amortiguamiento tiene que ser "respuesta" de una fuente externa de excitación para que la vibración pueda sostenerse (vibración forzada) pues de otra manera, la magnitud de la vibración decrece continuamente y el sistema termina por llegar al reposo (vibración transitoria).

Hay que aclarar que este modelo no posee un mecanismo discreto de amortiguación para disipar energía. Esta se disipa debido a la histéresis interna de los miembros estructurales conformen estos experimenten una variación cíclica de deformación unitaria por el desplazamiento de las conexiones con pernos, por la resistencia del aire ofrece a los miembros que vibran, etc. en general, la amortiguación derivada de tales fuentes no es grande y, según se vio anteriormente en la sección 2.1.2 en el aislamiento activo del sistema dinámico vibratorio con excitación por fuerza inercial rotatoria, la amortiguación no juega un papel importante. Es decir no se requieren amortiguadores por que con el valor de la amortiguación dentro del material de los resortes se cumple con los criterios del aislamiento mecánico activo.

3.3.4.1 Calculo de los resortes helicoidales de acero: en cualquier sistema dinámico vibratorio con cualquier numero de grados de libertad están dados en función de la rigidez de los resortes, la masa y el momento de inercia de la cimentación. El modelo construido constituye un sistema de seis grados de libertad

con masa $M = 6.24475 \cdot 10^{-3}$ Kgf-s²/cm la cual, es la suma de la cimentación básica (sin platinas), y la masa del vibrador. La rigidez del sistema dinámico vibratorio es suministrada por los cuatro resortes que se encuentran entre la cimentación y el piso.

Para simplificar el diseño se puede considerar al sistema de seis grados de libertad como un sistema de un grado de libertad excitado por una fuerza por fuerza de inercia rotatoria (figura 3.12) con las siguientes características:

- Masa equivalente $m_e = M = 6.213 \cdot 10^{-3}$ Kgf-s²/cm;
- Rigidez equivalente, $k_e = 4 \cdot k$;

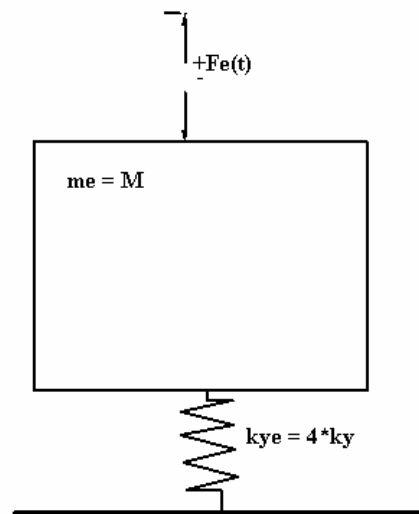


Figura 3.12 Sistema equivalente

- La resonancia se presenta cuando $R_w = 1$, para $R_c = 0$ (véase sección 1.3.4.2), y en valores progresivamente mayores a medida que R_c aumenta. Como R_c es muy pequeño (0.01 a 0.05) se puede entonces aproximar que la resonancia se presenta cuando $R_w = \frac{w}{w_n} = 1$.
- La frecuencia de excitación es $w = 2\pi * f / 60 = f / 9.55$ rad/s, donde f es la velocidad de giro del motor en rpm.
- La frecuencia circular natural o velocidad natural es $w_n = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}}$ y, de acuerdo a la dirección del movimiento se tiene:

$$w_{ny} = \sqrt{\frac{k_{ye}}{m_e}} \text{ rad/s} \quad 3.3$$

$$w_{nh} = \sqrt{\frac{k_{ye}}{m_e}} \text{ rad/s} \quad 3.3 \text{ a}$$

Donde: w_{ny} = frecuencia circular natural para la oscilación en la dirección vertical (a lo largo del eje Y).

w_{nh} = Frecuencia circular natural para la oscilación horizontal (a lo largo del eje transversal X o longitudinal Z).

f_{min} = Velocidad de giro mínima del motor en rpm.

k_{ye} = Rigidez equivalente en dirección vertical.

k_{he} = Rigidez equivalente en la dirección horizontal ($k_x = k_z$).

$m_e =$ Masa equivalente, $m_e = M = 6.213 * 10^{-3} \text{ Kgf-s}^2/\text{cm}$.

En la practica, cuando la frecuencia de excitación w se hace aproximadamente igual w_n el sistema entra en resonancia (la amplitud del movimiento aumenta y se mantiene constante) y, un modo de vibración puede ser visualizado. La frecuencia natural es solo función de la rigidez k_e , para el modelo básico por que, para el la masa es constante.

Según las ecuaciones 3.3, se pueden tener dos (o más) frecuencias circulares naturales, según sea la dirección del movimiento vibratorio. Dependiendo de los valores de k_{ye} y k_{he} , puede ocurrir que $w_{ny} < w_{nh}$ o que $w_{ny} > w_{nh}$.

Cuando $w_{ny} \approx w_{nh}$, los modos de vibración vertical y horizontal ocurrirán aproximadamente a la misma velocidad de operación del motor por que, $w = f / 9.55 = w_{ny} \approx w_{nh}$. Este caso es el más favorable por que lo que se desea, es ver cada modo de vibración vertical será mayor o menor, que la frecuencia f_h a cual se presenta el modo de vibración horizontal.

Se debe entonces diseñar los resortes teniendo en cuenta las anteriores recomendaciones:

- Para reducir el efecto de curvatura, el índice del resorte debe tener valores mayores de seis. Dicho índice está dado por la ecuación $C = D/d$ donde D es el diámetro medio de la espira y d el diámetro del alambre.
- Según Wilson⁸, los valores de L/D mayores que tres pero menores de seis hacen que la rigidez lateral sea bastante menor que la vertical; mientras que, valores de $L/D < 1$ hacen que k_{he} sea mayor que k_{ye} . A fin de evitar el pandeo, dicha relación debe tener valores siempre menores de seis.
- Como se puede apreciar en la figura 3.7 los pernos guías, es por donde se deslizan los resortes a la hora de ser aplicada la fuerza; por lo tanto el diámetro interno del resorte debe ser mayor de 2.7cm que es el diámetro de la tuerca.

Como los resortes no tienen que actuar un número indefinido de veces durante su vida útil (no va a ser sometido a trabajo continuo), se proyectarán en base al procedimiento "estático". Se deben tener en cuenta entonces las siguientes ecuaciones:

$$S_{sy} = \frac{k_s * 8 * D * F_s}{p * d^3} \quad 3.4$$

donde k_s está dado por la siguiente fórmula:

$$k_s = \frac{2 * C + 1}{2 * C} \quad 3.5$$

⁸ W. Ker Wilson, pag. 125

Deformación
$$d = \frac{8 * F * C^3 * N_a}{G * d} = \frac{F}{K_y} \quad 3.6$$

Según Wahl ⁹ la rigidez horizontal o lateral es:

$$\frac{k_h}{k_y} = \frac{3.4}{C_1 \left[1.3 + \left(\frac{L}{D} \right)^2 \right]} \quad 3.7$$

$$L = L_0 - d \quad 3.8$$

Donde: L = longitud del resorte deformado en cm;

L₀ = Longitud libre del resorte en cm;

C₁ = Factor en función de d/L_0 y L_0/D (véase anexo 1);

$k_h = k_x = k_z$ rigidez horizontal en Kgr/cm.

k_y = rigidez vertical en Kgr/cm.

El procedimiento para el diseño entonces es:

1. Con $R_w = 1$ y $w_{ny} \approx w = f \text{ min} / 9.55 \text{ rad} / \text{seg}$, asumiendo $f_{min} = 350$ rpm el valor mínimo de k_{ye} a partir de la ecuación 3.3 es:

$$k_{ye} = m_e \left(\frac{f \text{ min}}{9.55} \right)^2 \text{ Kgf/cm.}$$

Remplazando $m_e = 6.213 * 10^{-3}$ y teniendo en cuenta que $k_{ye} = 4 * k_y$, se obtiene fácilmente para cada resorte una constante de rigidez vertical de:

$$k_{ymin} = 2.09 \text{ Kgrf} / \text{cm}$$

⁹ WAHL, A.. M.. mechanical springs.

2. Asumiendo un diámetro de espira de $d = 0.105'' = 0.267 \text{ cm}$, (estos diámetros serán escogidos por catálogos de fabricantes de resortes anexo 1) como el diámetro medio del resorte debe ser mayor de 4cm que es el diámetro de la arandela, se asume un índice del resorte de 17 y se obtiene un diámetro medio de 4.53 cm. Entonces de la ecuación 3.5:

$$k_s = \frac{2 * 17 + 1}{2 * 17} = 1.029$$

3. de la ecuación 3.4 se puede calcular el esfuerzo inducido por la fuerza aplicada a cada resorte:

$$S_{sy} = \frac{1.029 * 8 * 1.56 * 4.53}{p * (0.267)^3} = 927.87 \text{ kgr} / \text{cm}^2$$

4..Calculando el factor de seguridad para la fuerza utilizada anteriormente (Según el anexo 2 el esfuerzo de fluencia para el acero AISI 1070 es 5460 Kgf/cm^2):

$$n = \frac{5460}{927.87} = 5.8$$

esto quiere decir que los diámetros escogidos están correctos al comprobar por resistencia.

5. Asumiendo para el primer grupo de resortes un numero de espiras activas de 7 se puede calcular entonces la deformación estática del resorte;

$$d = \frac{8 * 1.56 * 4.27^3 * 7}{0.305^4 * 0.8085 * 10^6} = 0.97$$

6. Asumiendo $L_0/D = 2$; es decir $L_0 = 2 * 4.27 = 8.53 \text{ cm}$.

7. De ecuación 3.8, $L = 7.56 \text{ cm}$. Con $L_o/D = 2$ y $d/L_o = 0.289$ se obtiene $C = 1.6$ del anexo 3. el valor de C_1 obtenido de esta manera y $L/D = 1.77$ se reemplazan en la ecuación 3.7 para obtener k_h :

$$k_h = 1.02 \text{ kgr/cm}$$

8. Como $k_{he} = 4k_h = 4.09 \text{ Kgr/cm}$ la frecuencia de la vibración horizontal desacoplada a partir de la ecuación 3.3 es:

$$w_{nh} = \sqrt{4.09/0.06213} = 25.35 \text{ rad/s}$$

9. con $k_{ye} = 4k_y = 8.54 \text{ kgf/cm}$, la frecuencia de la vibración vertical desacoplada a partir de la ecuación 3.3 es:

$$w_{nh} = 36.65 \text{ rad/s}$$

Como $f_y > f_h$, los modos verticales desacoplados y horizontal desacoplado no se presentan simultáneamente. Repitiendo el procedimiento de diseño, se proyectan otros resortes, variando la longitud, el número de espiras, el diámetro de los resortes. Las características de estos resortes se encuentran en la tabla 2.

Tabla 2. Características de los resortes helicoidales obtenidos en forma teórica.

<i>Dm</i>	<i>C</i>	<i>d</i>	<i>N_a</i>	<i>défor.</i>	<i>LoD</i>	<i>Lo</i>	<i>K_y</i>	<i>W_y</i>	<i>f_y</i>	<i>K_n</i>	<i>w_{rh}</i>	<i>f_n</i>	<i>f_n-f_y</i>
4,27	14	0,305	7	0,950147141	2,00	8,53	1,60	32,132	306,8615274	0,76	22,18	211,84	-95,02
4,29	11,4	0,376	12	0,713056675	2,50	10,71	2,14	37,091	354,2222608	0,77	22,26	212,54	-141,68
4,27	12,4	0,343	4	0,338592496	2,00	8,53	4,50	53,826	514,0427176	1,61	32,24	307,87	-206,18
3,9624	13	0,120	5,0	0,543386419	1,85	7,33	2,80	42,489	405,7733172	7,51	34,76	331,94	-73,83

4..VIBRACIONES PRODUCIDAS POR DESBALANCEO

El desbalanceo es una de las causas mas comunes de vibración. La vibración ocasionada por desbalanceo se da a una frecuencia equivalente a la 1*rpm, de la parte desequilibrada (solo ocurre a la velocidad de rotación de la maquina), mientras que la amplitud de la vibración es proporcional a la importancia del desbalanceo existente.

Las vibraciones por desbalanceo tienen su origen cuando el centro de masa de un cuerpo en rotación no coincide con su centro geométrico de giro.

La ecuación que rige el desbalanceo se expresa de la siguiente manera:

$$F = m * e * w^2$$

la anterior formula nos indica que la fuerza de desbalanceo aumenta al cuadrado de la velocidad, por esta razón entre mas velocidad tenga la pieza o maquina a ser balanceada, se debe obtener un grado de balanceo residual menor.

4.1 RESONANCIA

Para fines prácticos se emplearan los términos “frecuencia natural” y “velocidad crítica”, aunque no son realmente sinónimos, describen el mismo concepto. Una pieza que pase por velocidad crítica se puede decir que esta resonando o que resuena. Sin embargo la expresión velocidad crítica se utiliza cuando el rotor es el resonante. Cuando una pieza no rotatoria, tal como el tramo de una tubería, viga o columna o cualquier estructura esta resonante, no debe aplicarse el termino velocidad crítica sino el de frecuencia de resonancia o frecuencia natural. Es muy común hoy en día mezclar los términos y usar la palabra velocidad crítica cuando se quiere decir frecuencias naturales o frecuencia de resonancia.

La vibración puede tener muchos orígenes. Si un origen crea una frecuencia de vibración que sea igual o casi igual a la frecuencia resonante de un a pieza, la pieza resonara. Por ejemplo las vibraciones de una pieza muy bien balanceada puede verse amplificada por la estructura dentro de la cual este ensamblada. De acuerdo a la formula, la fuerza centrífuga varia según el cuadrado de las rpm. La amplitud de la vibración no solo aumenta con las rpm, sino que se eleva en una proporción muchísimo mas alta cuando pasa por la resonancia o la velocidad crítica de la pieza que responde y luego disminuye cuando las rpm las sobrepasan.

Para visualizar lo que ocurre, considérese un simple resorte plano con un peso montado en un extremo como lo muestra la figura 1.1 del capítulo 1. cuando se desvía el resorte tirando el peso y luego soltándolo, el resorte oscilara y el sistema de resorte y peso vibrara a su frecuencia natural.

Si se da un solo impulso comúnmente la amplitud de la vibración disminuirá con el tiempo, debido a la fricción y otras pérdidas de energía. Si durante periodos continuos, la sincronización o la dirección de los impulsos no coincide con la frecuencia natural, el resultado sería una frecuencia desafinada que no se acumularía. Si, por otra parte, la sincronización de los impulsos coincidiera con la frecuencia natural del resorte, el resultado sería una vibración afinada una amplitud progresivamente mas y mas grande con cada ciclo adicional. La amplitud finalmente alcanza un máximo (debida a la fricción o a las fuerzas viscosas amortiguadoras).

La resonancia amplifica la amplitud de la vibración en sistemas relativamente no amortiguados de 5 a 10 y a veces 20 veces sobre las vibraciones no resonantes. La vibración a menudo reduce la amplificación, pero incluso con esta reducción, la amplitud es todavía suficientemente grande como para causar un desgaste excesivo e incluso una fractura.

Cada pieza de maquina, cada trozo de acero, aluminio e incluso concreto tienen frecuencias naturales. No obstante, no todas las piezas posiblemente resonantes tienen una posibilidad igual de resonar. Por ejemplo, las frecuencias naturales de los rotores casi siempre están diseñadas para que no coincidan con las velocidades de giro del mismo. Sin embargo los rotores, de velocidad variable como es el caso de turbinas, compresores centrífugos, tienen mas posibilidades de ser resonantes a sus propias velocidades de funcionamiento ya que es mas fácil que estos equipos encuentren una frecuencia de resonancia en el intervalo de la frecuencia de trabajo.

4.1.1 Factores que afectan la resonancia. Desde un punto de vista practico, cualquier maquina, pieza estructural o combinación de piezas ensambladas que pueden ser desviadas por una fuerza y luego volver a su posición de equilibrio cuando se elimina la fuerza, pueden tratarse como un resorte o un sistema de resorte.

Un eje o árbol soportado entre dos cojinetes puede considerarse como un resorte individual; así como las columnas que soportan el suelo. Cada resorte o sistema de resorte posee su propia frecuencia natural, la cual –cuando es igualada por una frecuencia de vibración resonara.

Mientras mas flexible es la pieza, mas baja es la frecuencia natural; mientras mas rígida, mas alta será la frecuencia natural. Añadiendo peso a un sistema de resorte también bajara la frecuencia natural, si recordamos la ecuación de la frecuencia natural se tiene $w_n = \sqrt{k/m}$ se puede observar que la frecuencia es inversamente proporcional a la masa.

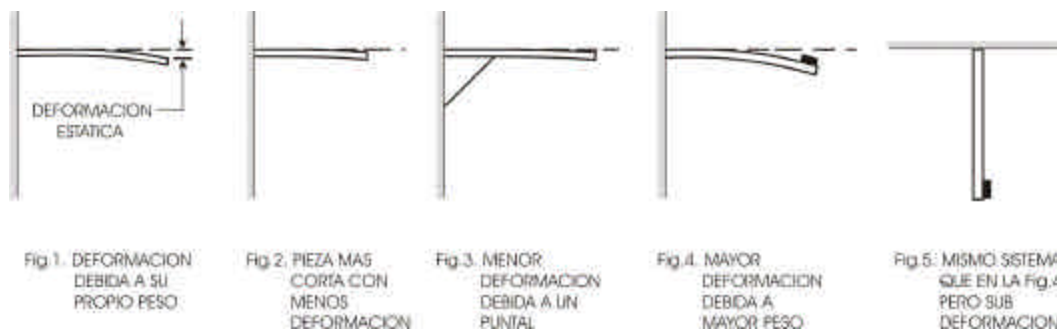


Figura 4.1 sistema resorte

Para darse una idea general de lo que afecta a la frecuencia de resonancia a la frecuencia de un resorte en el grafico 1 de la figura 4.1 se ilustra una viga plana voladiza que está levemente caída (deformación estática) debido a su propio peso.

En el grafico 1, hay una deformación estática debida al peso del resorte plano y su frecuencia de resonancia resultante es baja. Si el resorte plano se acortara como lo indica la grafico 2 o se dejara menos voladizo con la adición de un puntal ilustrado en el 3, la deformación estática disminuirá; mientras más pequeña sea la desviación, más alta será la frecuencia de resonancia. Mientras mayor sea la deformación estática, menor será la frecuencia de resonancia.

Para un sistema de resorte no voladizo como una sección de viga soportada por dos columnas, se aplica el mismo principio. Mientras más corta sea la viga, más rígida es, más alta es su frecuencia de resonancia. Mientras más larga sea la sección, menos rígida es (o más flexible), y más baja será su frecuencia de resonancia.

Suponiendo la misma rigidez y la misma longitud mostrada en el grafico 4, pero soportando ahora un peso, la desviación sería mayor. A mayor desviación, menor frecuencia de resonancia. Moviendo el peso a un lugar que de origen a una mayor desviación, disminuye aún más la frecuencia resonante. Moverlo a un lugar donde otorgue menos desviación, aumenta la frecuencia de resonancia.

Los sistemas de resorte de la "vida real" en la planta, como vigas, secciones de tubería, columnas, segmento de bases y pedestales, etc., combina los efectos de la rigidez, longitud y peso con sus efectos netos, dando como resultado más o menos desviación estática. Las analogías, incluyendo ésta, nunca son perfectas. El error de la analogía anterior presupone que el peso se ve afectado por la gravedad, causando una desviación estática. Sin embargo el mismo sistema de resorte podría reposicionarse como lo ilustra el grafico 5 de tal modo que el efecto de la gravedad no de cómo resultado la misma desviación estática. La frecuencia resonante permanecería esencialmente igual a como se describe anteriormente. La intención de la analogía usando la desviación estática es únicamente ayudar al analista a visualizar como ajustar la frecuencia resonante de una sola pieza o un sistema entero.

4.1.2. Determinar si una pieza es o no resonante. **Cuando un pieza o sección no es resonante, la forma del modo de vibración es relativamente plana o recta. Cuando la pieza es resonante se presentan ondulaciones relativamente grandes. Cuando una pieza no es resonante la forma del modo puede mostrar un pequeño enroscamiento, pero comparado con la situación resonante, es relativamente recto.**

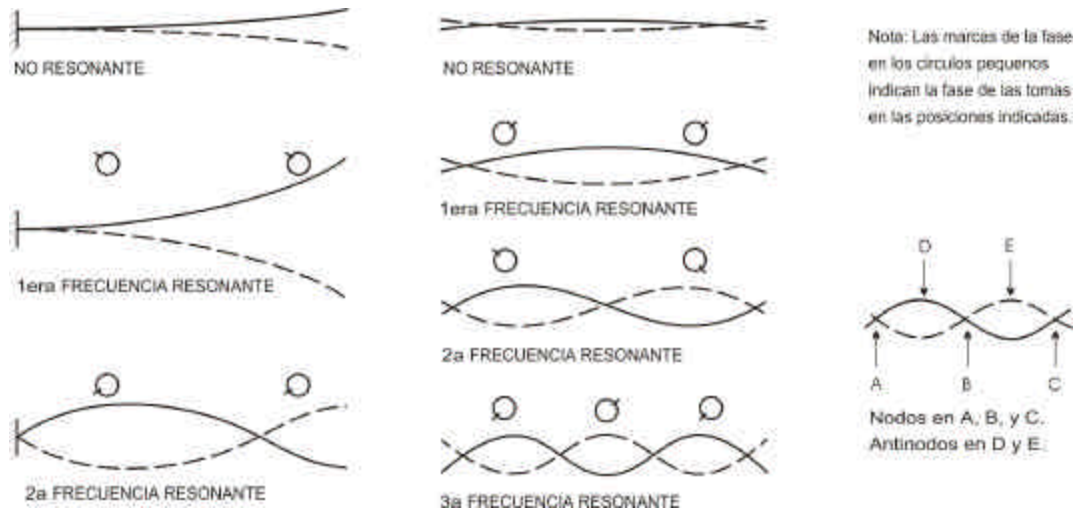


Figura 4.2 Formas modales

Observe que una pieza resonante tiene puntos de amplitud y ondulación máximo, llamados “antinodos” y puntos casi sin amplitud llamados “nodos”. Los antinodos vibran a 180° en posiciones opuestas entre si. Cuando se desvía un antinodo en una dirección los antinodos adyacentes se desvían en la dirección opuesta. Esto produce una flexión hacia atrás y hacia delante que se concentra en los nodos. Si esto continua por suficiente tiempo la pieza se romperá en uno o mas nodos. Para casos muy graves de vibración cerca del pico de la frecuencia resonante, los nodos deben ser muy concentrados, es decir acumularse en una parte pequeña de la longitud. Esto pueda dar como resultado grietas en las estructuras y por ultimo **fractura en los materiales.**

4.1.3 Fase de vibración en relación con la resonancia. **Si se aplica una fuerza lentamente a un sistema de resorte, la fuerza y su deformación se moverán en la misma al mismo tiempo o en “fase” una con respecto a la otra. Si se aplica una fuerza vibradora al mismo objeto o sistema resorte y si la frecuencia de dicha**

fuerza vibradora esta bajo el rango de velocidad critica o el rango de resonancia, entonces la fuerza deformación resultante permanecerán en fase. Sin embargo cuando la frecuencia de vibración ingrese al rango de la frecuencia de resonancia o de la velocidad critica, la fuerza comienza a preceder la deformación resultante. La deformación resultante retrasara la fuerza. Cuando la frecuencia de vibración alcance la velocidad critica o la resonancia, la fuerza precederá la deformación en 90° . A medida que la frecuencia aumente, la fuerza aumenta hasta que la fuerza finalmente precede a la deformación resultante en 180° . La relación de 180° permanecerá inalterada para todas las frecuencias sobre el rango de la frecuencia de resonancia, hasta que se aproxime el segundo rango de la frecuencia de resonancia. Luego el proceso comienza nuevamente con otra reversión del ángulo de fase, etc.

Para visualizar este fenómeno utilizando una ilustración practica, suponga que los círculos representan un eje de rotor perfectamente redondeado. El punto grande (el punto es el desbalanceo presente en le rotor), representa el lugar en donde las marcas o (deformación) se producirá en relación con la fuerza de desbalanceo en frecuencias bajo y sobre la resonancia. La marca de referencia arbitraria representa lo que se vería mediante un instrumento de vibración que revele la fase a través de la luz estroboscópica.

Bajo el rango de velocidad de resonancia, el rotor todavía esta tratando de girar alrededor de la línea central geométrica del eje, pero esta siendo forzado fuera del centro por la fuerza centrífuga debida al desbalanceo (causando vibración). Sin

embargo sobre el rango de velocidad de resonancia, el rotor no gira alrededor de su línea central geométrica, sino que lo hace a través del centro de masa del rotor

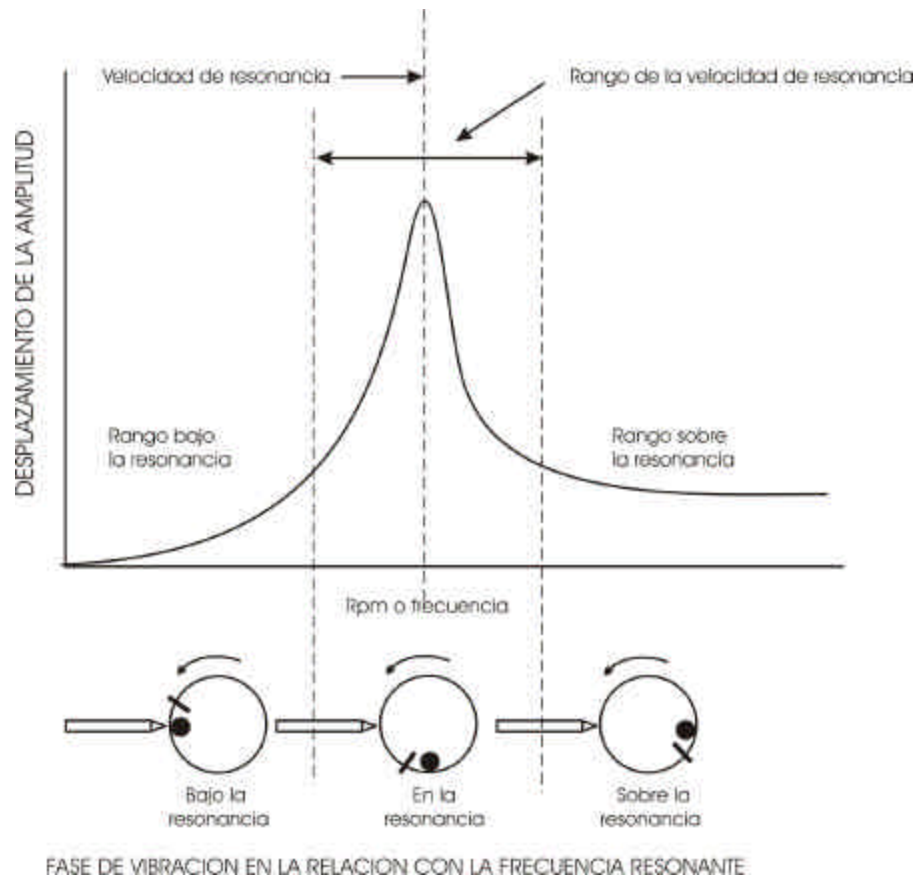


Figura 4.4 sistema resonante

Si se supone que se trata de un rotor con rpm variables, que puede aumentar o disminuir su velocidad de giro. Cuando rota a través de los rangos de velocidad resonante, la fase de la vibración cambia. Cuando el cambio en la velocidad del rotor se encuentra en un rango que no es resonante, entonces la fase de la vibración no cambia (aunque la velocidad del rotor este cambiando). Cuando la velocidad del rotor alcanza la velocidad crítica o rango de frecuencia resonante, el

cambio mas leve de velocidad dará como resultado un cambio de fase. Para mayor simplicidad, suponga que la luz estroboscópica revelara la posición angular de fase.

Con el rotor en marcha a velocidades bastante por debajo de las frecuencias resonantes, la fase permanece constante en solo un posición angular. Por ejemplo, cuando el estroboscopio comienza a destellar constantemente, la fase podría presentarse, digamos a las 10:00 en punto y permanecer en la misma posición a través de cualquier aumento de velocidad hasta que las rpm del rotor alcancen el fin del rango no resonante “por debajo de la resonancia”. Tan pronto ingrese la velocidad del rotor al primer rango de velocidad de resonancia, la fase comenzara a cambiar con cada aumento de velocidad. La marca de fase de referencia comenzara a rotar o moverse gradualmente en ángulo a nuevas posiciones horarias hasta que la velocidad del rotor alcance la velocidad resonante pico real. A la velocidad resonante pico, la fase debería haber cambiado 90° (en este ejemplo, de las 10:00 en punto a las 7:00 en punto).

A mediada que el rotor aumenta sus rpm, la marca de referencia continuara desplazándose angularmente (6:00 en punto 5:00 en punto etc) hasta que se halla desplazado alrededor de 180° desde cuando el rotor ingreso por primera vez en el rango de la velocidad resonante, a las 4:00 en punto. Ahora que el rotor continua aumentando sus rpm, ha ingresado al rango de velocidad no resonante. Aunque la velocidad del rotor continua aumentando, la marca de fase se mantendrá aproximadamente en las 4:00 en punto pareciendo que estuviese quieta. Esto

continua así hasta que ingrese nuevamente a otro rango de velocidades de resonancia.

A través de los rangos no resonantes, la fase no cambiara de su posición angular u horaria, aunque las rpm sigan aumentando. Cuando se alcance el rango de velocidad, el proceso comienza nuevamente.

Como se menciono, el desplazamiento habitual seria de aproximadamente 180° de la entrada a la salida a cualquier rango de velocidad resonante especifico. Cuando el desplazamiento de la fase alcanza 90° desde el extremo de alta frecuencia, al extremo de baja frecuencia esto seria una indicación de que el rotor esta operando en el punto alto de una velocidad resonante. A esta frecuencia, la amplitud debe indicar una medición “pico” máxima.

Finalmente todo se reduce a un simple principio. Es decir, a medida que el rotor acelera o desacelera pasando por el rango resonante de la pieza, la fase se desplazara. Cuando no hay resonancia, cuando el rotor se acelera o desacelera, la fase no se desplaza.

5. ESTUDIO DEL MODELO

Uno de los objetivos de este estudio es determinar experimentalmente las frecuencias de excitación y naturales del sistema dinámico vibratorio a fin e mostrar los diferentes modos de vibración (resonancia). Así mismo, se deben variar los parámetros masa, rigidez y amortiguación con el propósito de analizar su influencia en el comportamiento dinámico del sistema y determinar las condiciones óptimas para el aislamiento mecánico activo. En este caso el sistema vibratorio lo conforman el vibrador de masas desbalanceadas (maquina), la cimentación (placa base y bloque de madera o cimentación básica) y los elementos deformables resortes.

5.1 DETERMINACION DE LAS FRECUENCIAS NATURALES

El modelo construido es para un sistema de seis grados de libertad que teóricamente presenta dos simetrías: la primera alrededor del plano Y-O-Z la cual se debe a la posición simétrica alrededor de dicho plano de todos los elementos que conforman el sistema vibratorio. Este plano de simetría contiene el eje longitudinal del motor por lo tanto el eje perpendicular a este plano debe ser un eje de simetría. Si lo anterior se cumple la distancia $+L_x$ medida desde el plano Y-O-

Z hasta el eje axial de los resortes de la izquierda $-L_x$; es decir que $\sum L_x = 0$.

Véase la figura 5.1.

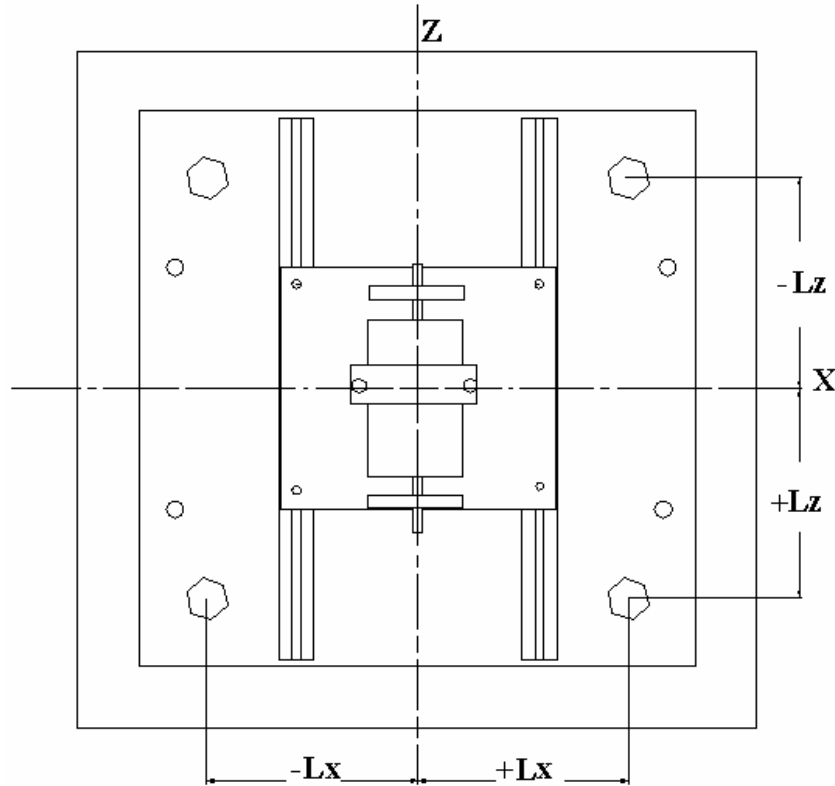


Figura 5.1 Plano de fuerzas y plano de simetría

Para calcular las frecuencias naturales w_{nj} , lo primero que se debe hacer es calcular el centro de gravedad y el momento de inercia del sistema. Guiados por el cuadro 1 y la teoría vista en el numeral 1.6, y teniendo en cuenta que si se cumple con las dos simetrías el sistema corresponde al caso dos del cuadro 1.

5.1.1 Determinación del centro de gravedad: en la tabla 3 se pueden observar los datos utilizados para el calculo del centro de gravedad de los principales elementos del sistema dinámico vibratorio.

Las distancias centroidales \bar{X} , \bar{Y} , y \bar{Z} son:

$$\bar{X} = \frac{M_{y_0 z_0}}{M}, \quad \bar{Y} = \frac{M_{x_0 z_0}}{M}, \quad \bar{Z} = \frac{M_{y_0 y_0}}{M}$$

donde $M_{y_0 z_0}$ = Momento de masa respecto al plano de referencia $Y_0 - Z_0$ en $\text{Kgf} \cdot \text{s}^2$.

$M_{x_0 z_0}$ = momento de masa respecto al plano de referencia $X_0 - Z_0$ en $\text{Kgf} \cdot \text{s}^2$.

$M_{x_0 y_0}$ = momento de masa respecto al plano de referencia $X_0 - Y_0$ en $\text{Kgf} \cdot \text{s}^2$.

De esta tabla se obtiene que:

$$\bar{X} = 20.5 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = 5.78 \text{ cm}$$

$$\bar{Z} = 20.5 \text{ cm}$$

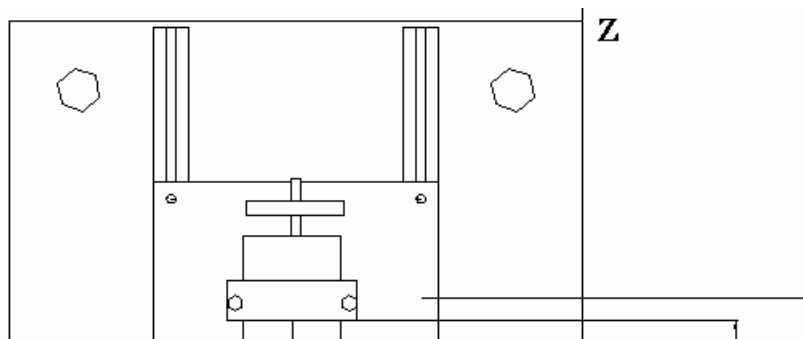


Tabla 3 Calculo del centro de gravedad del sistema dinámico vibratorio

n	Elementos	Masa, m_i	\bar{z}	$m_i * \bar{z}$	\bar{Y}	$m_i * \bar{Y}$	\bar{X}	$m_i * \bar{X}$
		(Kgf-s ² /cm)	Cm	(Kgf-s ²)	cm	(Kgf-s ²)	cm	(Kgf-s ²)
1	Motor	$2.038 * 10^{-3}$	20.5	$39.56 * 10^{-3}$	11.6	$22.3 * 10^{-3}$	20.5	$39.56 * 10^{-3}$
2	Discos de aluminio 1	$0.101 * 10^{-3}$	11.6	$1.017 * 10^{-3}$	11.6	$1.17 * 10^{-3}$	20.5	$2.07 * 10^{-3}$

2	Discos de aluminio 1	$0.101 * 10^{-3}$	11.6	$1.017 * 10^{-3}$	11.6	$1.17 * 10^{-3}$	20.5	$2.07 * 10^{-3}$
3	Discos de aluminio 2	$0.096 * 10^{-3}$	31.8	$3.057 * 10^{-3}$	11.6	$1.11 * 10^{-3}$	20.5	$1.968 * 10^{-3}$
4	Perfiles de aluminio 1	$0.128 * 10^{-3}$	20.5	$2.62 * 10^{-3}$	4.8	$0.61 * 10^{-3}$	11.5	$1.472 * 10^{-3}$
5	Perfiles de aluminio 2	$0.128 * 10^{-3}$	20.5	$2.62 * 10^{-3}$	4.8	$0.61 * 10^{-3}$	29.1	$3.72 * 10^{-3}$
6	Placa base	$0.192 * 10^{-3}$	20.5	$3.936 * 10^{-3}$	6.6	$1.26 * 10^{-3}$	20.5	$3.936 * 10^{-3}$
7	cimentación	$3.53 * 10^{-3}$	20.5	$72.36 * 10^{-3}$	1.75	$6.175 * 10^{-3}$	20.5	$72.36 * 10^{-3}$
		$M = \sum m_i$		$M_{x_0} = \sum (m_i z_i)$		$M_{y_0} = \sum (m_i y_i)$		$M_{x_0} = \sum (m_i x_i)$
		$6.208 * 10^{-3}$		0.1272		0.03454		0.1272

5.1.2. Cálculo de los momentos de inercia: **para calcular los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} , e I_{zz} se debe tener presente que al ser el plano Y-O-Z un plano de simetría ($\sum L_x = 0$) el eje X-X perpendicular a dicho plano es un eje de simetría o sea un eje principal de inercia.**

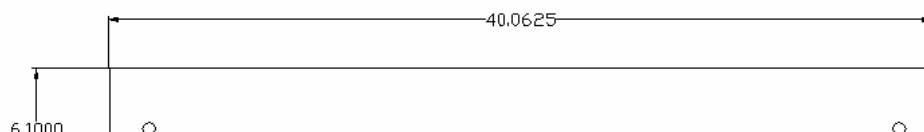
Los momentos de inercia de los ejes que conforman el modelo se muestran en la tabla 4. Los momentos de inercia con respecto a los ejes X-X, Y-Y y Z-Z vienen dados por la siguiente ecuación.

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^8 (I_{xi} + m_i d_{xi}^2)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^8 (I_{yi} + m_i d_{yi}^2)$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^8 (I_{zi} + m_i d_{zi}^2)$$

Para el cálculo del momento de inercia se debe tener en cuenta la pesa de corrección que será utilizada para rigidizar el sistema. Las dimensiones de esta pieza se puede observar en la figura 5.3.



A partir de la tabla 4 y las figuras anteriores se obtuvieron, los datos de I_{xi} , I_{yi} , I_{zi} , d^2_{xi} , d^2_{yi} , d^2_{zi} y m_i ; que al ser reemplazados en las ecuaciones anteriores se obtienen los siguientes resultados:

$$I_{xx} = 0.6988Kgf - cm - s^2$$

$$I_{yy} = 1.1822Kgf - cm - s^2$$

$$I_{zz} = 0.8228Kgf - cm - s^2$$

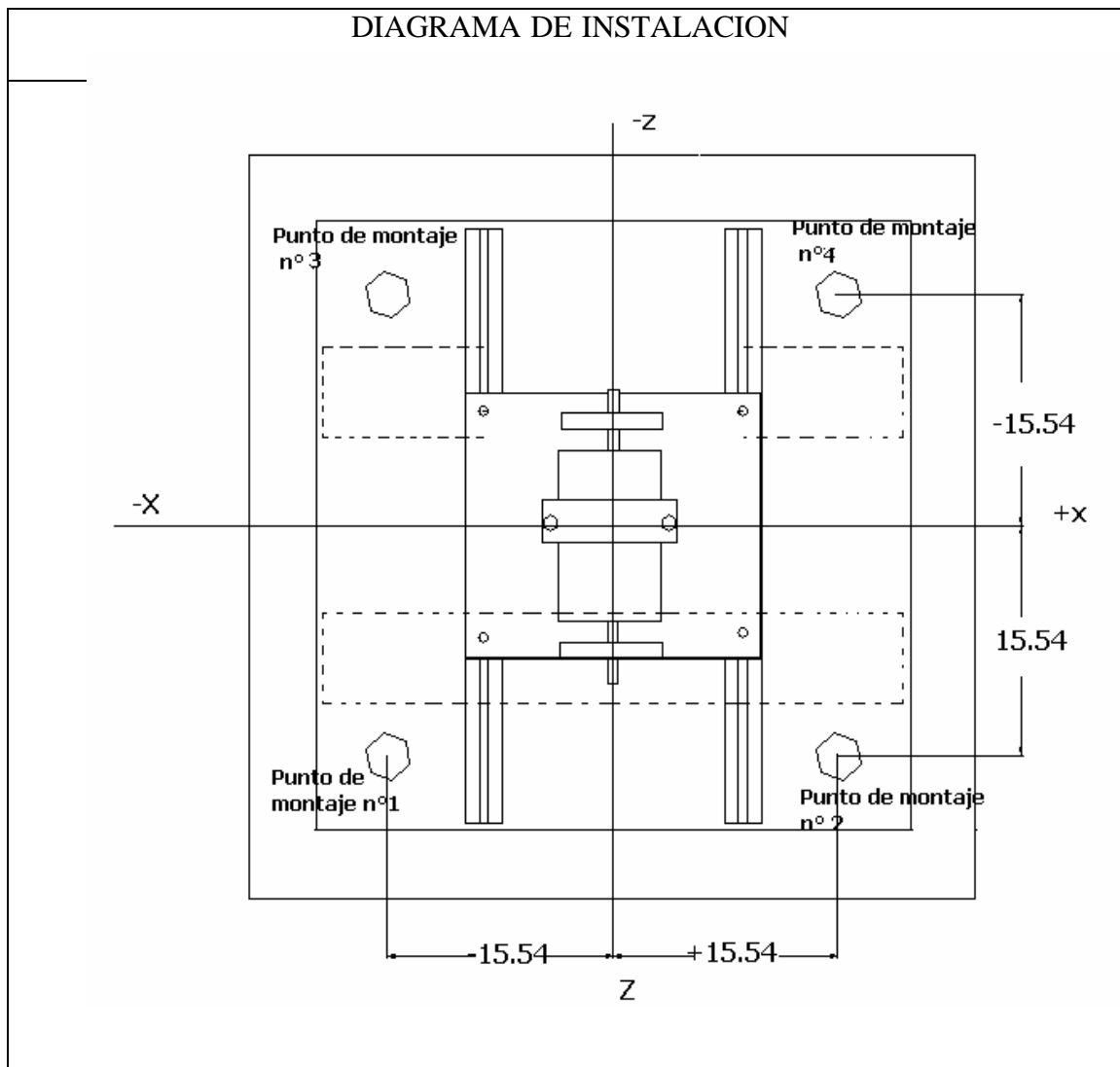
Tabla 4 Momentos de inercia de los elementos del modelo

<i>N°</i>	<i>Masa</i> (Kgrf-s ² /cm)	<i>Dimensiones</i>			<i>Momentos de inercia</i> (Kgf-s ² /cm)		
		a	b	c	Ixx	Iyy	Izz
1 Motor	0.002038	7	7	11.5	0.03078	0.03078	0.01664
2. Discos	0.00096	R=3.5			0.000294	0.000294	0.0006186
3. Discos	0.00101	R=3.5			0.0003093	0.0003093	0.0006186
4. Perfiles de aluminio	0.000128	2.54	2.54	40	0.00001041	0.00001041	0.000002082
5. Perfiles de aluminio	0.000128	2.54	2.54	40	0.00001041	0.00001041	0.000002082
6. Placa base	0.000192	17.7	20.3	1	0.005012	0.03348	0.006593
7. cimentación	0.00353	41	3.5	41	0.49809	0.9889	0.0036035
Pesa de corrección	0.0008868	6.1	0.45	40	0.1182	0.12099	0.11826

* En el anexo 4 se encuentran los diagramas de las figuras utilizadas para el calculo del momento de inercia

5.1.3 Cálculo de las frecuencias circulares naturales de la instalación básica: **el cálculo de las frecuencias naturales w_{nj} de la instalación sin platina, se hará teniendo en cuenta que el sistema responde al caso 2 del cuadro 1. Los datos de instalación a partir de dicha tabla se muestran en la segunda parte de la tabla 5 para cada conjunto o grupo de elementos de montaje (resortes). Al cambiar de resortes, los valores de L_x y L_z (tabla 5) siguen siendo los mismos.**

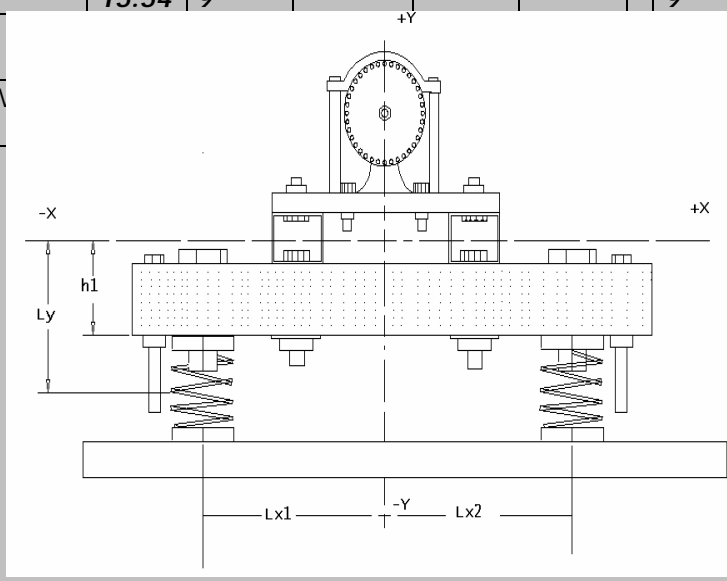
Tabla 5 Parámetros para el cálculo de la frecuencias naturales



PARTE II DATOS DE LA INSTALACIÓN

MODELO SOBRE LOS RESORTES DEL GRUPO a

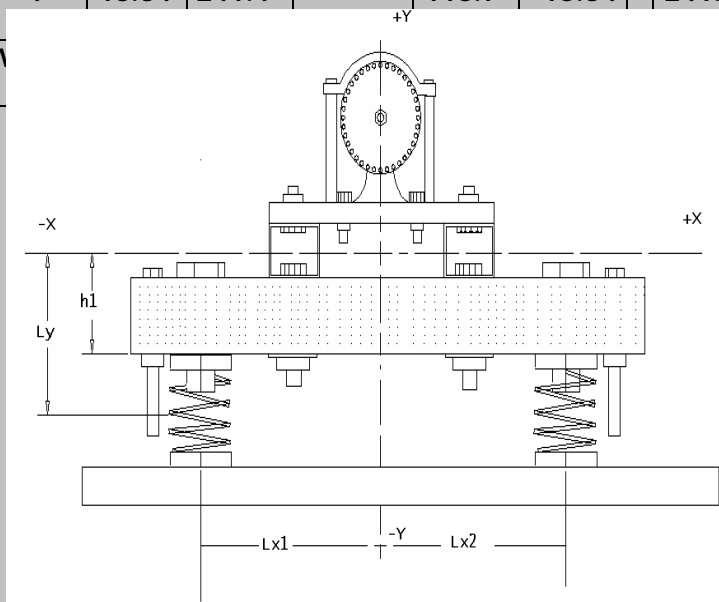
Masa y Rigidez	Distancia de los puntos de montaje						
<i>N</i> = numero de resortes Cada uno de los mismos valores de rigidez k_x, k_y y k_z . $N = 4$	Unidad <i>N</i>	L_x <i>cm</i>	L_x^2 <i>cm²</i>	L_y <i>cm</i>	L_y^2 <i>cm²</i>	L_z <i>cm</i>	L_z^2 <i>cm²</i>
<i>W</i> = peso del modelo = 6.09 Kgf.	1	-	241.4 9	-9.715	94.38	15.54	241.4 9
<i>m</i> = <i>W</i> / <i>g</i> = 6.208 kgf-s ² /cm	2	15.54	241.4 9	-9.715	94.38	-15.54	241.4 9
<i>P</i> = <i>W</i> / <i>n</i> = 1.525 Kgf.	3	-	241.4 15.54	-9.715	94.38	15.54	241.4 9
$I_{xx} = 0.6988 \text{ Kgf-cm-s}^2$							
$I_{yy} = 1.1822 \text{ Kgf-cm-s}^2$	Λ						
$I_{zz} = 0.8228 \text{ Kgf-cm-s}^2$							
$k_x = 0.76 \text{ Kgf/cm.}$							
$k_y = 1.6 \text{ Kgf/cm.}$							
$k_z = 0.76 \text{ Kgf/cm}$							
<i>L</i> ₀ = longitud libre del resorte							
<i>L</i> ₀ = 8.53 cm							
<i>H</i> ₁ = 5.45 cm							
<i>L</i> _y = -9.715 cm							



PARTE II DATOS DE LA INSTALACIÓN

MODELO SOBRE LOS RESORTES DEL GRUPO b

Masa y Rigidez	Distancia de los puntos de montaje						
<p><i>N</i> = numero de resortes Cada uno de los mismos valores de rigidez k_x, k_y y k_z.</p> <p>N = 4</p> <p><i>W</i> = peso del modelo = 6.09 Kgf.</p> <p><i>m</i> = $W/g = 6.208 \text{ kgf-s}^2/\text{cm}$</p> <p><i>P</i> = $W/n = 1.525 \text{ Kgf.}$</p> <p>$I_{xx} = 0.6988 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$I_{yy} = 1.1822 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$I_{zz} = 0.8228 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$k_x = 0.77 \text{ Kgf/cm.}$</p> <p>$k_y = 2.14 \text{ Kgf/cm.}$</p> <p>$k_z = 0.77 \text{ Kgf/cm}$</p> <p><i>Lo</i> = longitud libre del resorte $Lo = 10.71 \text{ cm}$</p> <p>$H1 = 5.45 \text{ cm}$</p> <p>$Ly = -10.805 \text{ cm}$</p>	<p>Unidad <i>d</i> <i>N</i></p>	<p>L_x <i>cm</i></p>	<p>L_x^2 <i>cm</i>²</p>	<p>L_y <i>cm</i></p>	<p>L_y^2 <i>cm</i>²</p>	<p>L_z <i>cm</i></p>	<p>L_z^2 <i>cm</i>²</p>
	1	-	241.4	-	116.7	15.54	241.4
		15.54	9	10.805	4		9
	2	15.54	241.4	-	116.7	-15.54	241.4
			9	10.805	4		9
	3	-	241.4	-	116.7	15.54	241.4
		15.54	9	10.805	4		9
	4	15.54	241.4	-	116.7	-15.54	241.4



PARTE II DATOS DE LA INSTALACIÓN

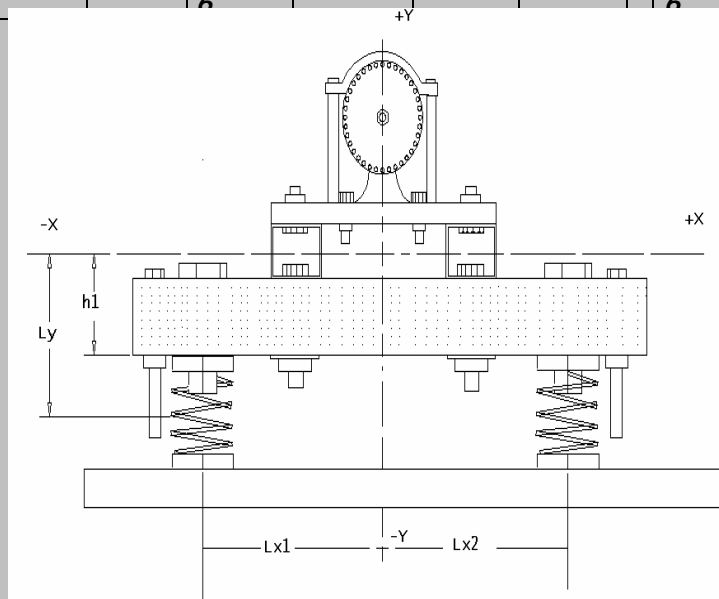
MODELO SOBRE LOS RESORTES DEL GRUPO c

Masa y Rigidez	Distancia de los puntos de montaje						
<p><i>N</i> = numero de resortes Cada uno de los mismos valores de rigidez k_x, k_y y k_z.</p> <p><i>N</i> = 4</p> <p><i>W</i> = peso del modelo = 6.09 Kgf.</p> <p><i>m</i> = $W/g = 6.208 \text{ kgf-s}^2/\text{cm}$</p> <p><i>P</i> = $W/n = 1.525 \text{ Kgf.}$</p> <p>$I_{xx} = 0.6988 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$I_{yy} = 1.1822 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$I_{zz} = 0.8228 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$k_x = 1.62 \text{ Kgf/cm.}$</p> <p>$k_y = 4.5 \text{ Kgf/cm.}$</p> <p>$k_z = 1.62 \text{ Kgf/cm}$</p> <p><i>Lo</i> = longitud libre del resorte <i>Lo</i> = 8.53 cm</p> <p><i>H1</i> = 5.45 cm</p> <p><i>Ly</i> = -9.565 cm</p>	<p>Unidad <i>d</i> <i>N</i></p>	<p>L_x cm</p>	<p>L_x^2 cm^2</p>	<p>L_y cm</p>	<p>L_y^2 cm^2</p>	<p>L_z cm</p>	<p>L_z^2 cm^2</p>
	1	-	241.4 9	-9.715	91.48	15.54	241.4 9
	2	15.54	241.4 9	-9.715	91.48	-15.54	241.4 9
	3	-	241.4 9	-9.715	91.48	15.54	241.4 9
	4	15.54	241.4 9	-9.715	91.48	-15.54	241.4 9
	N=4	0	965.9	-38.26	365.9	0	965.6

PARTE II DATOS DE LA INSTALACIÓN

MODELO SOBRE LOS RESORTES DEL GRUPO d

Masa y Rigidez	Distancia de los puntos de montaje						
<p><i>N</i> = numero de resortes Cada uno de los mismos valores de rigidez k_x, k_y y k_z.</p> <p><i>N</i> = 4</p> <p><i>W</i> = peso del modelo = 6.09 Kgf.</p> <p><i>m</i> = $W/g = 6.208 \text{ kgf-s}^2/\text{cm}$</p> <p><i>P</i> = $W/n = 1.525 \text{ Kgf}$.</p> <p>$I_{xx} = 0.6988 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$I_{yy} = 1.1822 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$I_{zz} = 0.8228 \text{ Kgf-cm-s}^2$</p> <p>$k_x = 1.88 \text{ Kgf/cm}$.</p> <p>$k_y = 2.8 \text{ Kgf/cm}$.</p> <p>$k_z = 1.88 \text{ Kgf/cm}$</p> <p><i>Lo</i> = longitud libre del resorte <i>Lo</i> = 7.33 cm <i>H1</i> = 5.45 cm <i>Ly</i> = -9.115</p>	<p>Unidad <i>d</i> <i>N</i></p>	<p>L_x cm</p>	<p>L_x^2 cm^2</p>	<p>L_y cm</p>	<p>L_y^2 cm^2</p>	<p>L_z cm</p>	<p>L_z^2 cm^2</p>
	1	-	241.4 9	-9.115	83.08	15.54	241.4 9
	2	15.54	241.4 9	-9.115	83.08	-15.54	241.4 9
	3	-	241.4 9	-9.115	83.08	15.54	241.4 9
	4	15.54	241.4 9	-9.115	83.08	-15.54	241.4 9
	N=4	0	965.9 6	-36.46	83.08	0	965.6 6



PARTE III FACTORES NECESARIOS PARA EL CALCULO DE LAS FRECUENCIAS

NATURALES

Resortes	a	b	c	d
$w_{n1}^2 = \frac{4ky}{M}$	1030	1379	2899	1804
$w_{n2}^2 = \frac{4kz}{M}$	489.6	496	1043	1211
$w_{n3}^2 = \left[(kz * \sum Ly^2) + (ky * \sum Lz^2) \right] / I_{xx}$	2584	3423	6994	4696
$w_{n4}^2 = \frac{4kx}{M}$	489.6	496	1043	1211.3
$w_{n5}^2 = \left[(kx \sum Lz^2) + (kz \sum Lx^2) \right] / I_{yy}$	1129.26	2372	4989	2317.76
$w_{n6}^2 = \left[(ky \sum Lx^2) + (kx \sum Ly^2) \right] / I_{zz}$	2203.27	2918	5962	4003.23
$U_1 = \frac{(kz \sum Ly)}{M}$	-4967	-5360.7	-10140.7	-11041.4
$U_2 = \frac{(kz \sum Ly)}{I_{xx}}$	-146	-46.93	-88.79	-96.67
$U_5 = \frac{(kx \sum Ly)}{M}$	-16668.65	-5360.73	-10140.7	-11041.4
$U_6 = \frac{(kx \sum Ly)}{I_{zz}}$	-124.41	-40.01	-75.69	-82.41

En la parte tres de la tabla 5 se calculan los factores necesarios para determinar las

w_{nj} . Dichas frecuencias se determinan a partir de las siguientes ecuaciones, que

corresponden al caso 2 del cuadro 1.

➤ **Modo vertical desacoplado y modos longitudinales y giro transversal desacoplado:**

$$w_{ni}^2 = w_{n1}^2 \quad 5.1$$

$$w_{nii,iii}^2 = \frac{1}{2}[(w_{n2}^2 + w_{n3}^2) \pm \sqrt{(w_{n2}^2 - w_{n3}^2)^2 + 4U_1 * U_2}] \quad 5.2$$

con los valores calculados se hace el siguiente chequeo:

$$w_{nii}^2 + w_{niii}^2 = w_{n2}^2 + w_{n3}^2$$

➤ **Giro vertical desacoplado y modos transversal y giro longitudinal acoplados:**

$$w_{niv}^2 = w_{n5}^2 \quad 5.3$$

$$w_{nvi}^2 = \frac{1}{2}[(w_{n4}^2 + w_{n6}^2) \pm \sqrt{(w_{n4}^2 - w_{n6}^2)^2 + 4U_5 * U_6}] \quad 5.4$$

Chequeo: $(w_{niv}^2 + w_{nvi}^2) = (w_{n4}^2 + w_{n6}^2)$

Los valores de w_{nj} obtenidos a partir de las ecuaciones 5.2 y 5.4 son para los modos

acoplados; los cuales se presentan a bajas frecuencias y después a altas. Para todos

los casos, la frecuencia de los modos de vibración es:

$$w_{nj} = \frac{2pf_i}{60} \text{ rad/s}$$

donde $f_i = \frac{60w_{nj}}{2p} = 9.55w_{nj}$ en rpm. 5.5

a continuación calcularemos las frecuencias naturales para el modelo instalado en los

resortes del grupo a:

$$w_{ni}^2 = w_{n1}^2 = 1030$$

donde $w_{ni} = w_{n1} = 32.09 \text{ rad / seg}$

las frecuencias circulares para los modos longitudinal y giro transversal acoplados

son:

$$w_{nii,iii}^2 = \frac{1}{2} [(489.6 + 2584) \pm \sqrt{(489.6 - 2584)^2 + 4(-4967 * -146)}]$$

Modo acoplado bajo: $w_{nii} = 19.87 \text{ rad/seg}$

Modo acoplados alto $w_{niii} = 51.75 \text{ rad/seg}$

Para verificar si los valores son los correctos se realiza el siguiente chequeo:

$$w_{nii}^2 + w_{niii}^2 = w_{n2}^2 + w_{n3}^2$$

$$394.81 + 2678.4 = 489.6 + 2584$$

$$3073.2 = 3073.6$$

Reemplazando los valores en la ecuación 5.3

$$w_{niv}^2 = w_{n5}^2$$

$$w_{niv}^2 = 1129.26$$

$$w_{niv} = 33.6 \text{ rad/seg}$$

A partir de la ecuación 5.4

$$w_{nv,vi}^2 = \frac{1}{2} [(489.6 + 2203.27) \pm \sqrt{(489.6 - 2203.27)^2 + 4(-16668.65 * -124.41)}]$$

modo acoplado bajo: $w_{nv} = 19.9 \text{ rad/seg}$

$w_{nvi} = 47.92 \text{ rad/seg.}$

Chequeo: $(396 + 2296.3) = (489.6 + 2203.27)$

2692=2692

Los datos de estos cálculos se encuentran en la tabla 6.

Tabla 6 Frecuencias naturales obtenidas teóricamente

Frecuencias Resortes	w_{ni} rad/seg	f_i rpm	w_{nii} rad/seg	f_{ii} rpm	w_{niii} rad/seg	f_{iii} rpm	w_{niv} rad/seg	f_{iv} rpm	w_{nv} Rad/seg	f_{iv} rpm	w_{nvi} Rad/seg	f_{vi} rpm
A	32.10	306.6	19.87	189.83	51.75	494.27	33.60	321.	19.90	190	47.92	457.6
B	37.13	354.6	20.31	193.65	59.21	565.45	48.70	465	20.26	193.5	54.80	523.3
C	53.84	514	29.93	285.8	84.50	806.9	70.63	674.5	29.87	285.3	78.18	746.6
d	42.47	405.6	30.46	290.9	70.56	673.8	48.14	459.7	30.27	289	65.55	626

f_i = Frecuencia del modo vertical desacoplado.

f_{ii} = Frecuencia baja de los modos longitudinal (Z) y giro transversal (q_x) acoplados.

f_{iii} = Frecuencia alta de los modos longitudinal (Z) y giro transversal (q_x) acoplados.

f_{iv} = Frecuencia de giro vertical (q_y) desacoplados.

f_v = Frecuencia baja de los modos transversal (X) y giro longitudinal (q_z) acoplados.

f_{vi} = Frecuencia alta de los modos transversal (X) y giro longitudinal (q_z) acoplados.

5.2 COMPROBACION PRACTICA DE LAS FRECUENCIAS NATURALES

La comprobación de estas frecuencias se realiza a la hora de hacer las pruebas en el modelo identificando las velocidades de giro a las cuales se presentan los modos de vibración estudiados y comparando estas velocidades con las ya calculadas teóricamente.

Estos modos de vibración serán inducidos gracias a pesas desbalanceadoras que se colocaran en los discos de aluminio para generar desbalanceo. Algunas de estas posiciones se encuentran en la tabla 7.

En la tabla 7:

e , es la excentricidad,

p_1 y p_2 son las posiciones iniciales de las pesas.

F_{ey} es la fuerza vertical,

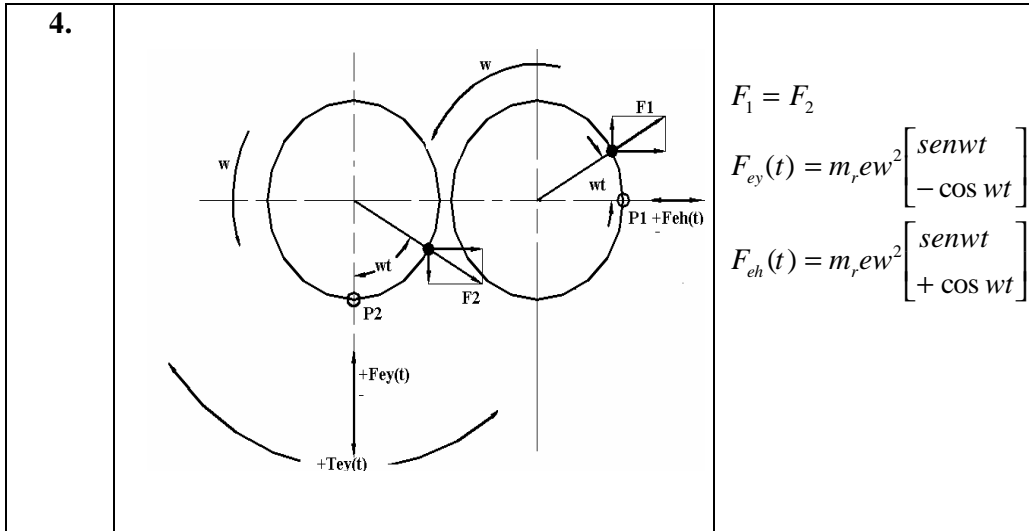
F_{eh} es la fuerza horizontal,

T_{ey} torque originado por F_{ey} ,

T_{eh} es el torque originado por la fuerza horizontal.

Tabla 7 Tipos de excitación

Clase	Diagrama	Definiciones
1.		$F_1 = F_2$ $F_{eh}(t) = 2m_r e w^2 \sin wt$ $F_{ey}(t) = 2m_r e w^2 \cos wt$
2.		$F_1 = F_2 = m_r e w^2$ $F_{ey}(t) = m_r e w^2 \begin{bmatrix} \sin wt \\ -\cos wt \end{bmatrix}$ $F_{eh}(t) = m_r e w^2 \begin{bmatrix} \sin wt \\ +\cos wt \end{bmatrix}$
3.		$F_1 = F_2 = m_r e w^2$ $F_{ey} = 0$ $F_{eh} = 0$



Como se menciono anteriormente existen varias formas de excitar el modelo variando la posición de las pesas. En la tabla 7 se encuentran las distintas formas de excitación que se pueden realizar. Se pueden generar fuerzas inerciales verticales, así como torques inerciales alrededor de los planos inerciales y también se puede presentar la combinación de varios modos.

La mayoría de estas posiciones generan movimientos combinados aunque se presentan casos en los que se presenta vibración pura ya sea de forma vertical o giro vertical desacoplado

5.2.1. EQUIPO UTILIZADO: **El equipo utilizado es un IRD Mechanalysis modelo 350. el cual es un analizador de vibraciones (figura 5.4) el cual esta constituido por los siguientes elementos:**



Figura 5.4 IRD 350

- 1 **Botón de encendido que permite energizar el analizador. Permite trabajar con corriente alterna y con batería.**

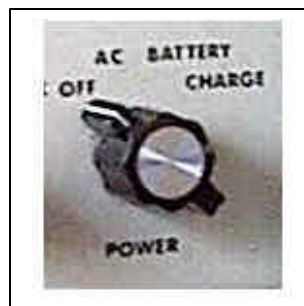


Figura 5.5 Botón de encendido

2. **Selector de Rango de frecuencias: el cual permite sintonizar la frecuencias en el siguiente Rango.**

- ✓ 50-500 cpm.
- ✓ 500-5k cpm
- ✓ 5k-50k cpm.
- ✓ 50k-500k cpm.



Figura 5.6 Selector de rangos de frecuencias

3. Dial análogo del sintonizador del rango de frecuencias: en el se permite observar y leer la frecuencia de giro a la que se esta trabajando.

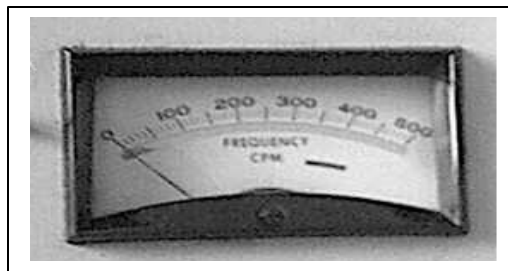


Figura 5.7 Dial análogo del sintonizador de frecuencias

4. Sintonizador de frecuencias: permite sintonizar manualmente la velocidad de giro del motor utilizándola lámpara estroboscópica.

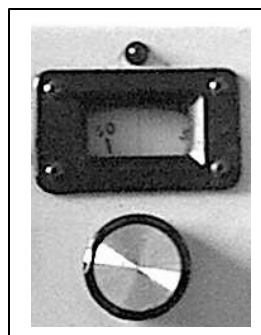


Figura 5.8 Sintonizador de frecuencias

5. Pickup: Permite escoger entre las dos entradas del sensor.

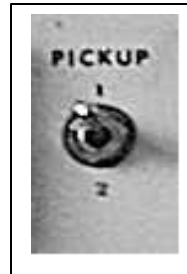


Figura 5.9 Pickup

6. Sintonizador de filtros: el cual consta de:

- ✓ **Oscilador:** que actúa únicamente como tacómetro.
- ✓ **Sharp:** Que filtra la señal con un ancho de banda de 12 cpm.
- ✓ **Broad:** Que filtra la señal con un ancho de banda de 120 cpm.
- ✓ **Our:** filtro afuera que dirige la señal al rango donde se este presentando la mayor amplitud.



Figura 5.10 Sintonizador de filtros

7. Swicht de selección de parámetros de medición: permite escoger los parámetros en los que el sensor va a medir, ya sea en desplazamiento o elocidad.

- ✓ **Desplazamiento micrones pk-pk.**
- ✓ **Mm/seg Pk.**



Figura 5.11 Switch selector de parámetros de medición

8. Selector de rangos de amplitud: la medición se puede dar en dos unidades ya sean micrones o mm/seg. El selector nos da las siguientes escalas de trabajo.

- ✓ **0-1**
- ✓ **1-3**
- ✓ **1-10**
- ✓ **1-30**
- ✓ **1-100**
- ✓ **1-300**
- ✓ **1-1000**
- ✓ **1-3000**



Figura 5.12 Selector de rangos de amplitud

9. Tablero análogo de medición de amplitudes: muestra la medida de la amplitud o de la velocidad ya sea en micrones o en mm/seg.

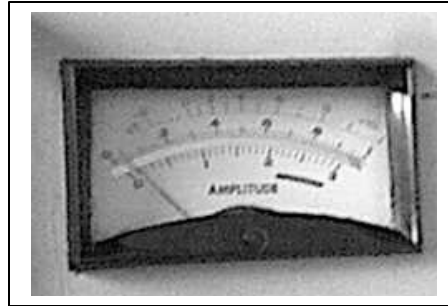


Figura 5.13 Tablero indicador de amplitudes

10. Conector 1 y 2 para entrada del sensor.

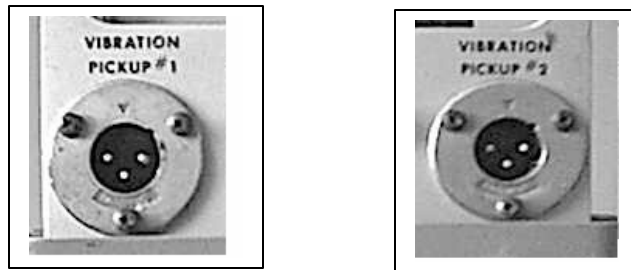


Figura 5.14 Entrada para el sensor.

11. Entradas para el graficador X-Y: posee tres entradas que son:

- ✓ Frecuencia
- ✓ Osciloscopio.
- ✓ Amplitud



Figura 5.15 entradas para el graficador

12. Conexión para fuente de energía.

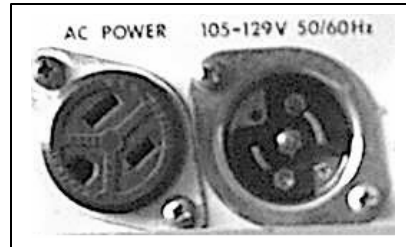


Figura 5.16 Entrada de energía

13. Entrada para la lámpara estroboscópica: aquí se conecta el cable de la lámpara estroboscópica.



Figura 5.17 Entrada de la lámpara estroboscópica

14. Sensor de vibración: el sensor utilizado es un sensor sísmico o de velocidad figura 66 de 1335mv/in pk modelo 544 IRD mechanalysis. Se utiliza con una varilla extensora debido a que su peso es muy grande y afecta la rigidez del modelo por lo tanto cambia las frecuencias naturales de todo el sistema. Algunas de las grandes ventajas de estos sensores es que se puede conocer el desplazamiento, solo se necesita integrar, su instalación es muy fácil, sirve para altas temperaturas.

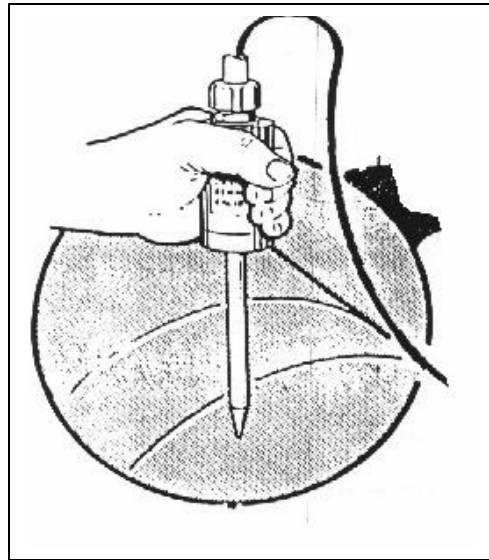


Figura 5.18 Sensor de velocidad

15. Lámpara estroboscópica: es utilizada para medir las rpm del motor así como para verificar, el estado de resonancia que se presenta cuando un modo de vibración es excitación. La lámpara estroboscópica se sincroniza con la velocidad de giro del motor con la finalidad de que sea más fácil estabilizar la fase.

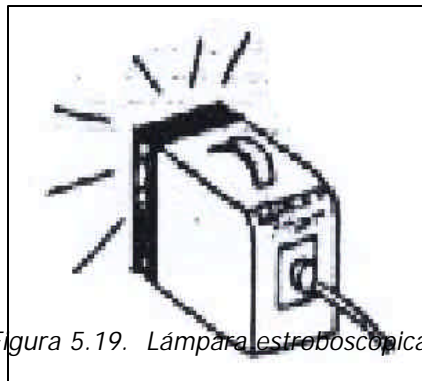


Figura 5.19. Lámpara estroboscópica

5.2.2. Instalación del equipo para iniciar la medición:

- 1..Se conecta el sensor a la entrada 1 del analizador del IRD 350 por medio de un cable de conexión al mismo tiempo se coloca el pickup en posición 1.**
- 2. Se conecta la lámpara estroboscópica al analizador IRD 350 por medio de un cable de conexión.**
- 3. Se conecta el analizador IRD 350 a la salida de 110 voltios de cualquier toma corriente, por medio de un cable de conexión.**
- 4. El cable del motor se conecta al variador de velocidad y este a su vez a una salida de 110 voltios.**

5.2.3 Procedimiento para la medición: **el procedimiento para realizar las pruebas en el modelo es el siguiente:**

- 1. Se selecciona el par de pesas a utilizar (13 gr) se instalan en los discos de acuerdo al tipo de excitación que se quiera realizar según la tabla 7. En la tabla 8 que es la tabla donde se anotaran los datos obtenidos de las pruebas, se tendrán en cuenta los siguientes datos: masa desbalanceadora m_r , grupo de resortes que están instalados en el modelo (a, b, c, d) se recomienda empezar con los resortes mas suaves, frecuencia**

de giro del motor para el caso que se esta presentando. Los valores de la amplitud son opcionales, estos valores son para verificar la forma de vibración del equipo la cual se puede observar a simple vista.

2..Puesta en servicio: después de verificar la correcta conexión de los equipos a utilizar se suministra tensión al IRD 350, moviendo el botón de encendido a la posición AC.

3..Se suministra tensión al vibrador de masas desbalanceadas por medio del variador de velocidad aumentando poco a poco la velocidad moviendo el botón de giro del variador, hasta alcanzar una de las frecuencias que se encuentran en la tabla 6. En este caso si se comenzó a trabajar con los resortes más suaves que son los del grupo a, entonces serán las frecuencias teóricas calculadas para este grupo de resortes.

4. Cuando encuentre el modo de vibración (resonancia) que es el originado en esta frecuencia, mida la velocidad de giro del motor con la lámpara estroboscópica, (o con un tacómetro) ubique el selector de frecuencias de giro del motor en el rango de 50-500 cpm, ubique el botón de selector de filtros en oscilador (recuerde que el oscilador solo funciona como tacómetro), encienda la lámpara estroboscópica y ubíquela al frente de los discos de aluminio, y con ayuda del dial sintonizador de frecuencias y con la lámpara estroboscópica recorra las frecuencias de tal forma que la marca de papel reflectivo en los discos de aluminio se quede quieta. De esta forma se sintonice las frecuencias de giro del motor con los parpadeos de la lámpara estroboscópica. Si la

velocidad de giro del motor es mayor de 500 cpm se ubica el botón seleccionador de rango de frecuencias en el rango de 500-5k.

5. Cuando encuentre la frecuencia requerida, se procede a anotar la frecuencia de giro del motor la cual puede ser un poco mayor o menor a la frecuencia calculada.

6. Se procede entonces a realizar la medición de la amplitud de la vibración por medio del sensor. Ubique el botón de sintonizador de filtros en sharp.

7. Ubique el botón selector de rangos de amplitudes en el rango de 0-1 y con el switch de selección de parámetros de medición escoja en que unidades se va a medir, para este caso en especial se medirá en micrones.

8. Coloque el extensor del sensor paralelo a eje longitudinal, que en este caso es el mismo del eje del motor, ubíquelo en el tornillo guía paralelo al eje longitudinal, haciendo contacto directo con este.

9. En el tablero indicador de amplitudes se visualizara la amplitud, en el caso de que la aguja llegue al extremo derecho se debe aumentar la escala ya sea de 1-3 o de 1-10 y así sucesivamente hasta localizar la que mejor capte la amplitud.

10. Esta medición debe hacerse en la dirección transversal y vertical colocando el extensor (sensor), paralelo a cada una de estas direcciones y realizando el procedimiento anteriormente explicado.

11. Con el botón de barrido del variador de velocidad lleve al sistema a otro modo de vibración o resonancia, aumentando o disminuyendo la velocidad de giro del motor.

12 Estas mediciones deben realizarse en cada uno de los puntos de montaje. Puede ser que no se puedan identificar todas las frecuencias naturales ya que algunas se presentan a muy bajas velocidades de giro del motor que el variador de velocidad no permite captar. Existen otras frecuencias en las que el movimiento no permanece estable.

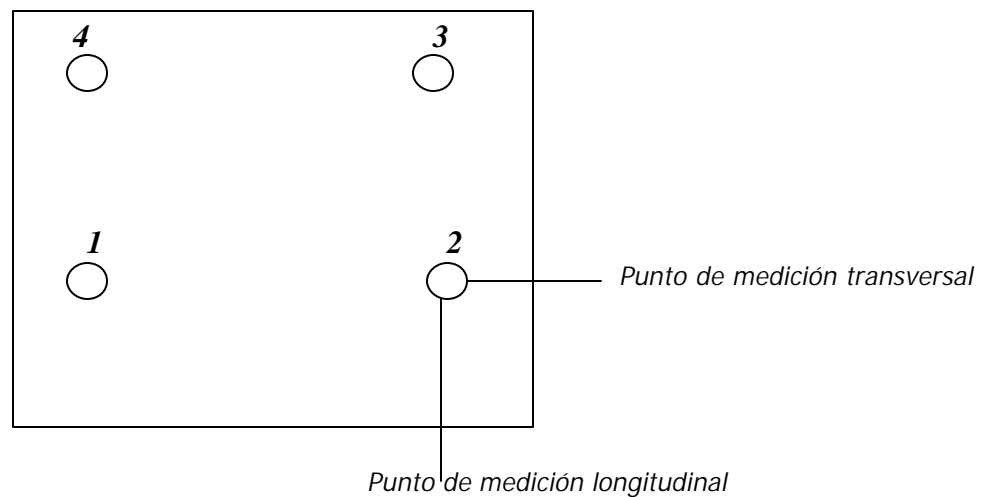


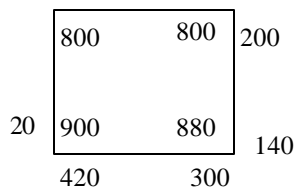
Figura 5.20 Visualización de los puntos de medición

Los datos obtenidos en estas mediciones están anotados en la tabla 8. se debe tener en cuenta a la hora de la medición que el extensor del sensor debe quedar lo más paralelo posible a los ejes coordenados y se debe evitar al máximo que este golpetee con los tornillos guías porque las lecturas tenderían a ser erróneas.

Tabla 8 Datos de las pruebas realizadas

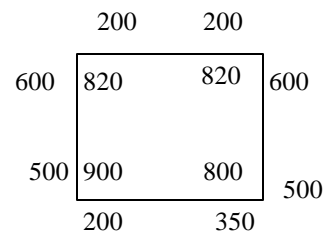
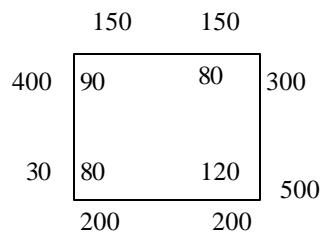
Frecuencias	Desplazamiento	Frecuencias	Amplitud
	Masa desbalanceadora 13 gr (micrones)	Grupo de resortes a	
Modo vertical		Modos	Ocurre a una

desacoplado $f_i = 350 \text{ rpm}$	<p style="text-align: center;">900</p>	longitudinal y giro transversal acoplados $f_{ii} =$	velocidad de giro muy baja por lo tanto no se puede apreciar.
Giro vertical desacoplado $f_{iv} = 350$	<p style="text-align: center;">150 150</p>	Modo transversal y giro longitudinal $1 f_{vi} =$	Se presenta pero no se mantiene estable.
Modo longitudinal y giro transversal acoplado $f_{iii} = 580$	<p style="text-align: center;">400 50 60 180</p> <p style="text-align: center;">200 20 40 200</p> <p style="text-align: center;">150 150</p> <p style="text-align: center;">420 500</p>		



Masa desbalanceadora 13 gr Grupo de resortes b			
Frecuencias	Desplazamiento (micrones)	Frecuencias	Amplitud
Modo vertical desacoplado $f_i = 400 \text{ rpm}$	<p style="text-align: center;">15 28</p> <p style="text-align: center;">40 250 250 45</p> <p style="text-align: center;">30 250 250 22</p> <p style="text-align: center;">15 10</p>	Modos longitudinal y giro transversal	<p style="text-align: center;">100 90</p> <p style="text-align: center;">30 120 100 32</p> <p style="text-align: center;">44 120 140 46</p> <p style="text-align: center;">90 80 237</p>

		acoplados $f_{iii} = 600$	
Giro vertical desacoplado $f_{iv} = 487$		Modo transversal y giro longitudinal $f_{vi} = 500$	



Masa desbalanceadora 13 gr Grupo de resortes c			
Frecuencias	Desplazamiento (micrones)	Frecuencias	Amplitud
Modo vertical desacoplado	40	Modos	100 90



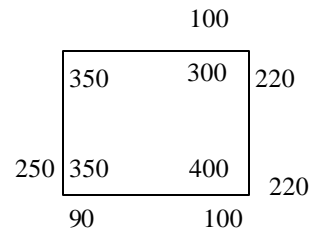
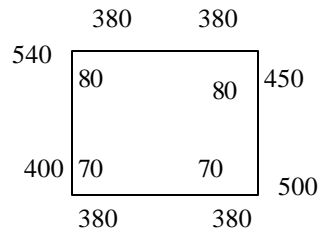
$f_i = 550 \text{ rpm}$		longitudinal y giro transversal acoplados $f_{iii} = 580$	
Giro vertical desacoplado $f_{iv} = 427$		Modo transversal y giro longitudinal $f_{vi} = 700$	

300 300
400 200 80 600
550 150 120 500
500 500

380 400
940 1200 880 450
450 900 1200 920
400 380

Frecuencias	Desplazamiento (micrones)	Frecuencias	Amplitud
Modo vertical desacoplado		Modos longitudinal y giro transversal	
	Masa desbalanceadora 13 gr	Grupo de resortes d	

$f_i = 530 \text{ rpm}$		acoplados $f_{iii} = 800$	
Giro vertical desacoplado $f_{iv} = 480$		Modo transversal y giro longitudinal $f_{vi} = 750$	



5.2.4. Análisis de las formas modales: **En el resorte que está instalado sobre la cimentación se podrán observar las distintas formas modales que se presentan cuando el sistema esta en resonancia o cuando las partes móviles del modelo alcanzan una de sus velocidades criticas.**

Para este modelo se debe tener en cuenta que las velocidades criticas del motor (rotor), se encuentran por debajo de la máxima frecuencia de trabajo. Estas frecuencias son muy difíciles de calcular, generalmente se tienen en cuenta a la hora del diseño del equipo para que no se presenten en el rango de velocidades de trabajo de la maquina. Para la obtención de estas velocidades criticas también se utilizan equipos especializados que grafican el espectro de velocidades criticas dándonos los valores de cada una de ellas y con que frecuencia se presentan.

En el resorte instalado en la cimentación se podrá observar como se esta flectando el eje cuando alcanza las diferentes velocidades criticas del rotor. Estas frecuencias se obtendrán experimentalmente, a medida que se aumenta o disminuye la velocidad de giro de motor, con ayuda de las pesas desbalanceadoras que aumentan la amplitud del movimiento y ayudan a que se puedan observar mejor los modos en el resorte ya que incrementan la fuerza de excitación.

Utilizando los resortes del grupo b y diferentes masas se obtiene los siguientes modos de vibración a diferentes velocidades del motor.

*Se obtiene con la masa de 5 gr
a una velocidad de 1300 rpm.*



Se obtiene con las masas de 2.1 y



5gr. A las velocidades de giro
de 3000 , 900 rpm.

Se obtiene con la masa de 5 gr y
la de 2 gr a las velocidades de 1050 y
1250.



Se presenta con la pesa de 5 gr
A una velocidad 1200 rpm



5.2.4.1. Procedimiento: el procedimiento para obtener los modos de vibración es el siguiente:

1. Desmontar las pesas de 13 gr y montar las de 5 gramos. Colocándolas a 180 grados una de la otra.
2. Aumentar la velocidad del motor utilizando el variador de velocidad y trabajar en rangos de 900 rpm en adelante, ya que es mas probable observar el movimiento del resorte a altas velocidades.
3. A medida que se va aumentando la velocidad del motor se ira sincronizando la lámpara estroboscópica con las revoluciones de este, con el fin de poder visualizar en el resorte los movimientos de eje del motor.

4. Cuando el sistema se este acercando a una velocidad critica el resorte comenzara a fluctuar, y a formas pequeños nodos, si el numero de destellos de la lámpara están sincronizados con el numero de rpm del motor, entonces se podrá observar los modos de vibración.

5.2.5. Análisis e interpretación de datos: **en la tabla 8 se consignaron los valores de las frecuencias de resonancia y los de la amplitud de la vibración en los diferentes puntos de montaje en las direcciones X-Y-Z.**

Los primeros datos (frecuencias naturales o de resonancia a las cuales se presentan los modos de vibración) sirven para hacer una comparación entre los datos teóricos calculados en al tabla de 6 y los datos obtenidos en la practica. Estos valores se encuentran en la tabla 9 los teóricos y los experimentales.

Los datos de amplitud nos sirven para corroborar la presencia de los modos de vibración ya que dependiendo del movimiento habrá diferencias en la amplitud en cada una de las direcciones.

La tabla 8 muestra la amplitud alcanzada en cada movimiento en las diferentes direcciones para cada uno de los grupos de resortes utilizados.

En las pruebas realizadas para mostrar las formas modales se puede observar que no existe una diferencia numérica entre una y otra velocidad critica, lo que si nos podemos dar cuenta

es que entre una y otra hay muy poca diferencia, esto quiere decir que se van a encontrar muchas de estas velocidades en a medida que se aumente la velocidad de giro de motor.

También es de tener en cuenta que ha muy altas velocidades, cuando el rotor entra en resonancia se corre el riesgo de que el sistema falle por esfuerzos generados en el eje debido a la combinación de alta velocidad y flexión del eje, ya que el eje se esta flectando muchísimas mas veces que a bajas frecuencias. Aquí la amplitud de la vibración es mas baja pero es mas peligroso trabajar en estas condiciones.

En las figuras siguientes se podrán observar algunos de los modos de vibración de nuestro modelo.

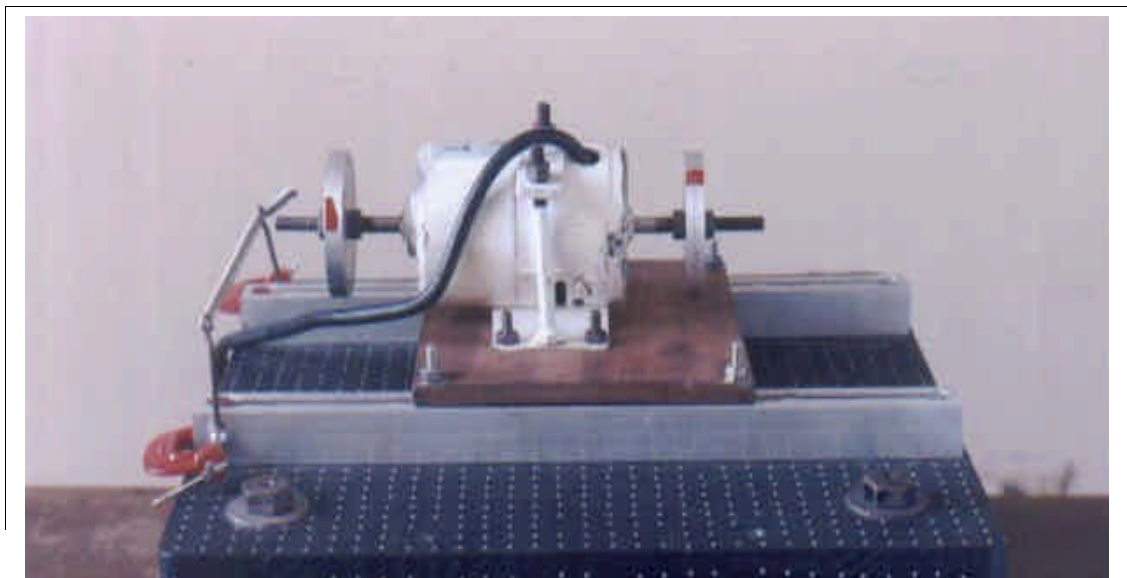


Figura 5.21 equipo en reposo

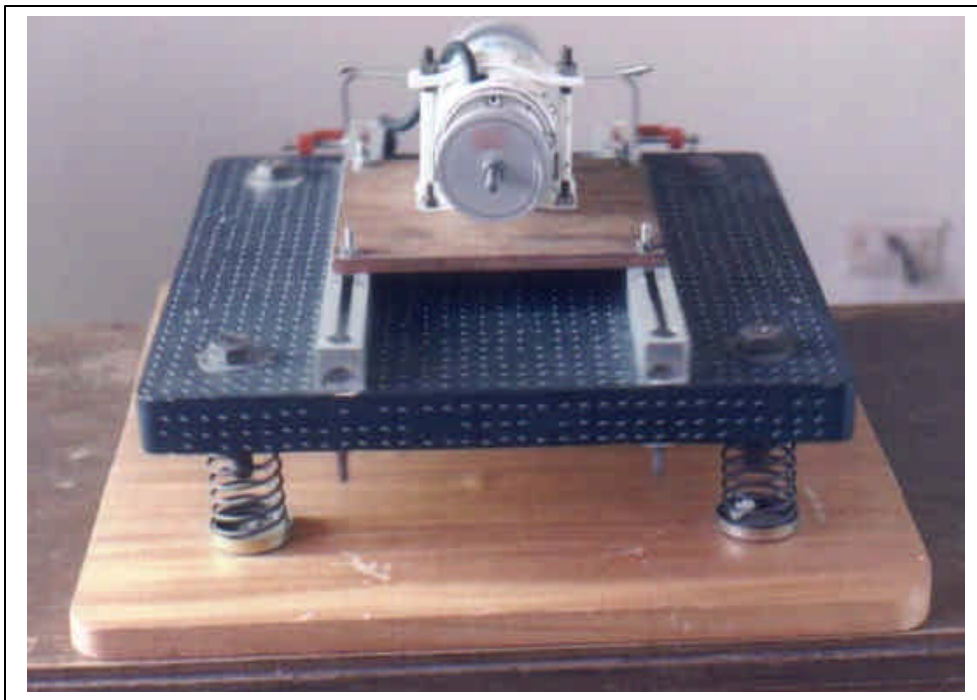


Figura 5.22 Giro vertical



Figura 5.23. Modo vertical

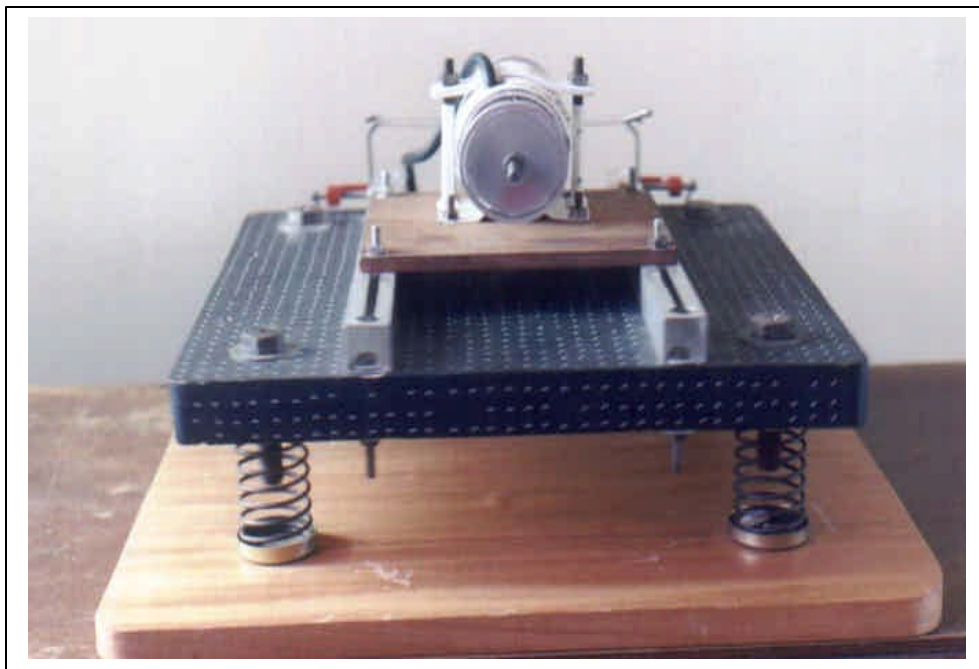


Figura 5.24. Modo transversal y Giro longitudinal acoplado



Figura 5.25 Modo vertical desacoplado

5.3 DIAGRAMA DE PROCESOS DE UN VIBRADOR DE MASA DESBALANCEADA

El elemento principal del mecanismo de vibración de masa desbalanceada es la base # 2 esta base esta hecha de madera y sus dimensiones son 60 cm x 50 cm x 1 cm.

A esta base se le realizan 4 orificios no pasantes por medio de un taladro cada uno con dimensiones de 1/4" donde irán sujetas los tapones de acero.

Los tapones de acero, son comprados ya hechos. Se pintan con 1/8 de pintura negra. Posen un diámetro de 5 cm de diámetro de tal manera que entren perfectamente los resortes. Cuatro de estos tapones se taladran con una broca de

3/8".. Los otros cuatros se ensamblan a la base 2 por medio tornillos de 1/8" de diámetro.

En un proceso aparte una tabla de madera de dimensiones (41 x 41 x 3.5) cm se le taladran 8 orificios de 5/8" en los lados laterales y 4 orificios mas de 3/8" en posición centrada, luego con 1/8 de pintura negra se pinta la tabla y luego se le pequan pequeños puntos de papel reflectivo a esta tabla dejando un espacio de un 1cm entre cada uno a esta tabla se le denominará en adelante la cimentación.

Otro proceso distinto es con un perfil de aluminio de 1mt se corta a través de una segueta en dos partes de 40 cm luego se señala y se mide las dimensiones de la ranura para seguir a desbastar con la fresadora las ranuras, taladrar cuatro orificios de 3/8" dos en cada perfil y cuatro de 1/2" en los bordes de los perfiles luego con 4 tornillos de 3/8" se unen los perfiles de aluminio a la cimentación.

En una tabla de madera (8 x 7 x 1/2) Pulgadas. Se taladran 8 orificios de 1/4" y con 1/8 de barniz se barniza.

Se utiliza un motor universal de 11.500 rpm. de 1/8 HP de 110 Voltios al cual se le alarga el eje uniendo a este otro eje del mismo diámetro y mismas características por medio de soldadura de arco metálico. Después de unidos los ejes por medio del torno

se le realizan una rosca de 5/16'' ordinaria para poder montar en él dos discos de aluminio equilibrados.

Discos de aluminio equilibrados se realizan utilizando una barra de aluminio cilíndrica de 80mm de diámetro. Esta barra se desbasta en el torno para obtener el diámetro de 70mm que se necesita, se corta a la altura de 1cm de espesor y se le realiza un cilindrado. Luego utilizando la fresadora se marcan puntos cada 10° del disco obteniendo de esta forma 36 marcas alrededor del disco y por ultimo se taladran para obtener 36 orificios pasantes de 1/8". Estos discos se ajustan al eje utilizando tuercas de 5/16".

Se conecta el variador de velocidad al motor para graduar la velocidad de giro de este.

Al motor también se conecta sensor y este a una computadora para medir las variaciones de las vibraciones producidas por este.

Luego se ensambla el motor a la placa de madera por medio de 4 tornillos de 1/4". Seguidamente se ensambla el motor en la base de los perfiles con 4 tornillos de 5/8".

4 de los tapones se ensamblan en la cimentación y los resortes se ensamblan en estos y por ultimo se ensambla todo el conjunto en la base de madera # 2.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda la utilización de otros elementos deformables tales como el caucho para la realización de pruebas para determinar la eficiencia de estos materiales y compararlas con la de los resortes de acero utilizados en este trabajo.

2. Como los resortes están prácticamente acoplados al piso, no fue posible evaluar correctamente la eficacia del aislamiento ya que para tal propósito se requiere medir la amplitud de la vibración del piso (tabla de madera).

Se recomienda entonces montar la tabla de madera sobre cuatro o mas cauchos y medir la amplitud y la aceleración del movimiento vibratorio de la tabla de madera y con estos valores ir a las ecuaciones 2.3 y 2.4 y a las figura 38 y 39 a evaluar los valores de la amplitud de movimiento $\pm Y$ y de la fuerza de transmitida F_t a fin de comparar la eficiencia del aislamiento en cada uno de los resortes instalados.

3. Se recomienda mejorar el mecanismo de variación de velocidad. Por razones de tipo económico, no fue posible diseñar o adquirir un mecanismo que permita un

mejor ajuste de la velocidad de giro del motor. Con el variador utilizado se presentan a veces variaciones en la velocidad del motor cuando este esta en resonancia.

CONCLUSIONES

- 1. uno de los objetivos de este proyecto era interpretar las vibraciones mecánicas y el fenómeno de la resonancia, esto se puede apreciar en los primeros capítulos 1,2,3 donde se describe claramente que es la vibración, de donde proviene, que ecuaciones se utilizan a la hora de estudiar este problema. Esta información es básica cuando se quiere incursionar en una rama de la mecánica tan compleja como son las vibraciones.**
- 2. Este diseño nos ayuda a confrontar la teórica con la practica. En la tabla 6 se pueden observar los resultados de los cálculos realizados para obtener las frecuencias naturales. Estos resultados son confrontados con los datos experimentales obtenidos en las practicas realizadas con el modelo.**

En base a dicha tabla se puede concluir que la teoría y la practica se relacionan muy bien en este caso ya que los valores teóricos son muy cercanos a los experimentales.

- 3..En las experiencias realizadas se presentaron reacciones indeseables en los puntos de montaje. Esto es debido a que alguno de los planos de inercia no coinciden con los calculados teóricamente. Esto también trae como consecuencia errores en la evaluación de las frecuencias naturales f_j ya que estas dependen de los momentos de**

inercia; estas son las razones principales de las diferencias entre los valores teóricos y los experimentales.

4. A medida que se aumenta la rigidez de los elementos deformables, mayores serán los valores de las frecuencias naturales, esto se puede observar en la ecuación que rige las frecuencias naturales para los sistemas de un grado de libertad $w_n = \sqrt{k/m}$. Esta es una condición ideal cuando se tienen problemas en las maquinas industriales ya que lo que se busca es que las frecuencias naturales estén por encima de la frecuencias de trabajo para que no se presente el fenómeno de resonancia.

5. Al aumentar la masa en el prototipo (agregando masa a la cimentación), también se rigidiza el sistema, la amplitud de la vibración disminuye y la frecuencia natural del vibrador también lo hace. Se debe tener en cuenta que en la industria no debe realiza esto para rigidizar un sistema buscando mejorar las condiciones de trabajo o tratando de sacar el equipo del estado de resonancia, ya que se esta sintonizando por debajo y es muy probable que en el apagado de una maquina esta tenga que pasar por cada una de estas frecuencias generando esfuerzos muy grandes en cada uno de los elementos que la conforman, ocasionando desbalanceo desalineación soldadura mecánica o alguno de los tantos problemas que genera la vibración.

6. Según la observación hechas, cuando el modelo se instala sobre cualquier grupo de resortes helicoidales de acero, no se requiere ninguna ayuda a la hora e identifica los modos de vibración. Esto se debe a que la amplitud del movimiento es apreciable en

la mayoría e los casos. Los datos de la tabla 8 sirven para comprobar los valores teóricos y evalúa al severidad del movimiento vibratorio.

7. En todos los casos se debe excitar el modelo con las pesas mas grandes, ya que estas originan mayor desbalanceo.

8. Aquellos modos de vibración que ocurren a muy baja frecuencia(< de 300 rpm) no logran ser excitados, porque el variador de velocidad no trabaja con frecuencias menores a estas.

9. Debido a que las fuerza de excitación no actúan totalmente a través del centro de gravedad del cuerpo se generan fuerzas o pares de fuerzas que en algunos casos , hacen que el movimiento vibratorio sea inestable, es decir el modos es excitado pero no se mantiene constante el tiempo suficiente para pode tomar los datos de amplitud y frecuencias de giro.

BIBLIOGRAFIA

CREDE Charles E. Conceptos sobre choque y vibración en el diseño de Ingeniería.

México 1970

DEN HARTOG Jacob P. Mecánica de vibraciones México 1964.

**GARCIA SAEZ J. y VALVERDE, A, Diseño de cimentaciones de maquinas
centrífugas considerando al vibración Ingeniería Química julio 1982.**

KER WILSON, W. Vibration engineering 1979.

**S. TIMOSHENKO y D. H. YOUNG Problemas de vibración en Ingeniería México
1959.**

SHIGLEY, Joseph E. Diseño en ingeniería mecánica. 5ª ed. México D.F., editorial McGraw Hill, 1996. p. 308-390.

THOMSOM, William. Teoría de vibraciones. 1ª ed. México D.F., editorial Prentice Hall Hispanoamericana s.a., 1997. p. 25-30.

STEIDEL, ROBERT F. Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas.

Editorial Continental S.A México.

**AVALLONE, EUGENE A.; BAUMEISTER, THECDORE. MARKS, Manual del
Ingeniero Mecánico. 9 Edición. Editorial Mc Graw Hill. México. 1997**

Anexo A .Listado de resortes del fabricante

DE : CentralDeResortes-Inverlopez-- NO. DE FAX : 2554565 19 MAR. 2002 04:00PM P1

SAE-1095

MILIMETROS	MILIMETROS
3.00 ✓	1.50
2.75 ✓	1.25
2.50 ✓	1.00
2.25 ✓	0.75
2.00 ✓	0.50 ✓
1.75	


AISI-302

MILIMETROS	MILIMETROS
6.00	2.00
5.00	1.75
4.50	1.50
4.00	1.25
3.50	1.00
3.00	0.75-0.80
2.75	0.50
2.50	0.30
2.25	

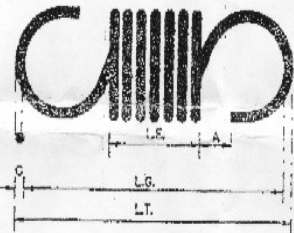
PRESENTACION DEL ACERO:
ROLLOS DE LONGITUD VARIABLE


DIMENSIONES NECESARIAS PARA LA FABRICACION

RESORTE DE COMPRESION




RESORTE DE TENSION



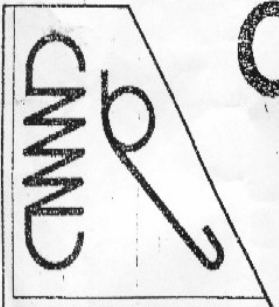


GANCHOS EN EXTREMOS



GANCHOS AL CENTRO

C..... CALIBRE $(\frac{D.E.-D.I.}{2})$
 D.E..... DIAMETRO EXTERNO
 D.I..... DIAMETRO INTERNO
 P..... PASO (D+DIST.E.)
 DIST. E..... DISTANCIA ENTRE ESPIRAS
 L.T..... LONGITUD TOTAL
 L.G..... LONGITUD ENTRE GANCHOS
 L.E..... LONGITUD DEL ENROLLADO
 A..... ABERTURA DEL GANCHO



CENTRAL DE RESORTES

FABRICACION TECNICA DE RESORTES INDUSTRIALES
 Calle 9 No. 51-166 Medellín - Colombia
 Telefonos: 255 45 65 255 45 20

DATOS GENERALES

<p>NOMBRE DE LA EMPRESA: INVERSIONES LOPEZ RAMIREZ LTDA. -CENTRAL DE RESORTES-</p> <p>N.I.T. 800.137.423 - 3</p> <p>DESCRIPCION DEL SERVICIO: FABRICACION DE RESORTES HELI- COIDALES, ARGOLLAS Y PIEZAS VARIAS EN ACEROS DE SECCION CIRCULAR.</p> <p>MATERIALES UTILIZADOS: ACEROS AL CARBON: SAE-5160, SAE-1045, SAE-1070, SAE-1095 ACERO INOXIDABLE: AISI-302</p>	<p>TRATAMIENTOS TERMICOS: -ALIVIO DE TENSIONES PARA LOS RESORTES FABRICADOS EN ACEROS SAE-1070, SAE-1095 Y AISI-302 -TEMPLE Y REVENIDO PARA LOS RESORTES FABRICADOS EN ACEROS SAE-1045 Y SAE-5160. DE ESTE TRATAMIENTO SE HACE CARGO EL CLIENTE, EN PLANTAS QUE PODE- MOS RECOMENDAR.</p> <p>GARANTIAS: -POR DEFORMACIONES CAUSADAS POR UN MAL TRATAMIENTO TERMICO REALIZADO EN NUESTRA EMPRESA -POR MEDIDAS DIFERENTES A LAS SOLICITADAS POR EL CLIENTE -NO POR ROTURA DEL MATERIAL</p>	<p>ALGUNOS DE NUESTROS CLIENTES:</p> <ul style="list-style-type: none"> - CEMENTOS ARGOS - COLPAPEL - COLTABACO - CRISTALERIA PELDAR - ENKA DE COLOMBIA - ESTRUCTURAS CENO - IND. ALIMENTICIAS NOEL - IND. ESTRA - IDEACE
---	--	---

CALIBRES UTILIZADOS EN LOS DIFERENTES ACEROS

SAE-5160

NUMERO	MILESIMAS	MILIMETROS
7/8"	0.875	22.22
3/4"	0.750	19.05
11/16"	0.687	17.46
5/8"	0.625	15.88
9/16"	0.562	14.29
1/2"	0.500	12.70

SAE-1045

NUMERO	MILESIMAS	MILIMETROS
7/8"	0.875	22.22
3/4"	0.750	19.05
11/16"	0.687	17.46
5/8"	0.625	15.88
9/16"	0.562	14.29
1/2"	0.500	12.70
7/16"	0.437	11.11
3/8"	0.375	9.53

PRESENTACION DEL ACERO:

VARILLAS DE LONGITUD APROXIMADA 6.00 Mts

SAE-1070

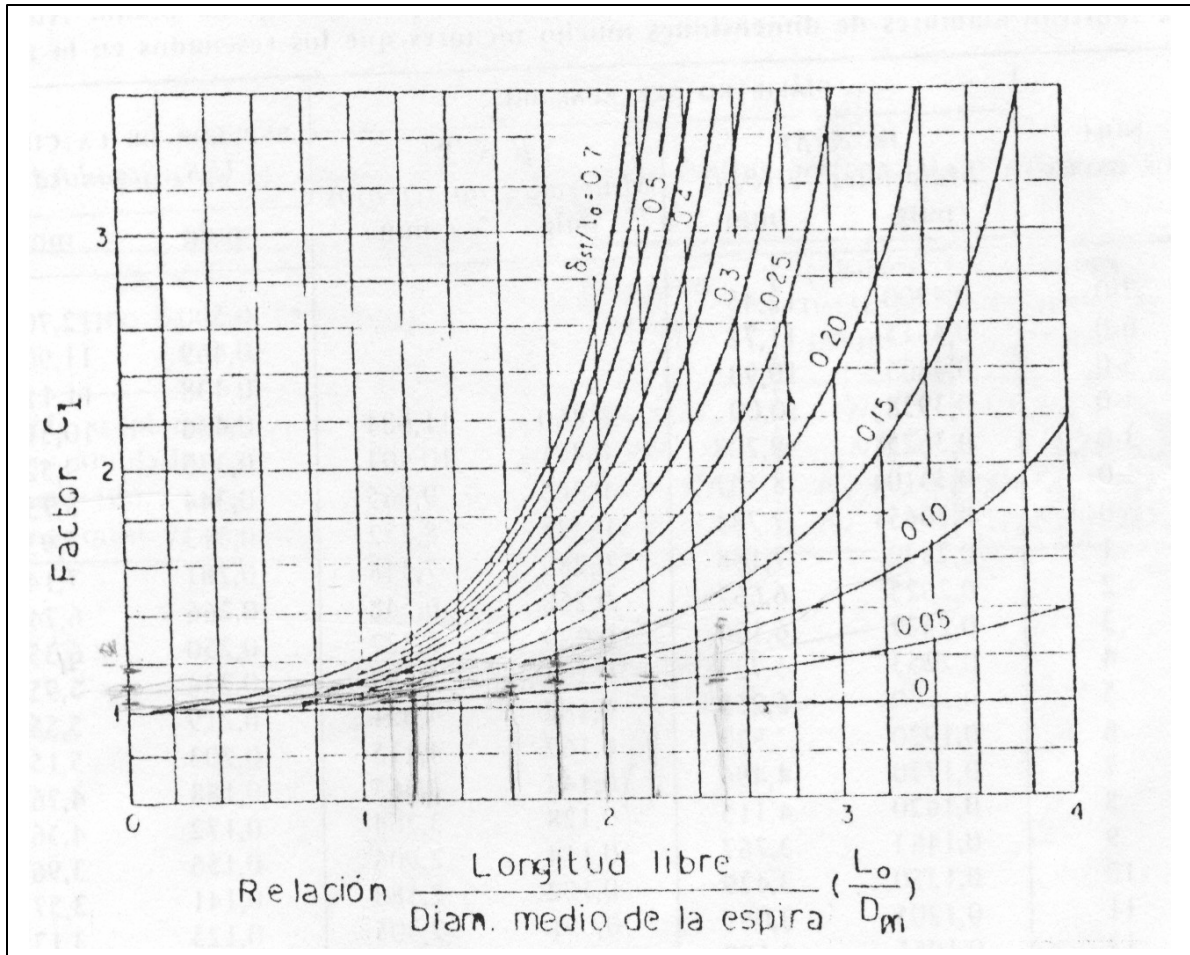
NUMERO	MILESIMAS	MILIMETROS	NUMERO	MILESIMAS	MILIMETROS
3/8"	0.375	9.53	16	0.062	1.59
11/32"	0.343	8.71	17	0.054	1.37
5/16"	0.312	7.94	18	0.047	1.21
9/32"	0.281	7.14	19	0.041	1.04
1/4"	0.250	6.35	20	0.035	0.88
7/32"	0.218	5.54	21	0.032	0.81
3/16"	0.187	4.76	22	0.029	0.73
7	0.177	4.57	23	0.026	0.66
8	0.162	4.11	24	0.023	0.58
9	0.148	3.77	25	0.020	0.52
10	0.135	3.43	26	0.018	0.46
11	0.120	3.06	27	0.017	0.44
12	0.105	2.68	28	0.016	0.41
13	0.091	2.32	29	0.015	0.38
14	0.080	2.03	30	0.014	0.36
15	0.072	1.83			

PRESENTACION DEL ACERO: ROLLOS DE LONGITUD VARIABLE

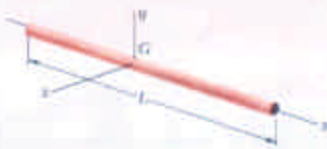
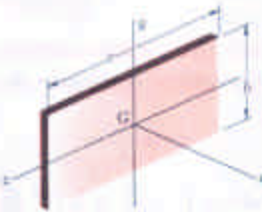





Anexo B. Propiedades mecánicas de algunos materiales

Nº SAE o AISI	Resistencia a la tracción Rm		Límite de fluencia Re		Alargamiento en 50 mm %	Dureza Brinell
	Kgf / mm ²	Mpa	Kgf/mm ²	Mpa		
1010	40,0	392,3	30,2	292,2	39	109
1015	42,9	420,7	32,0	313,8	39	126
1020	45,8	449,1	33,8	331,5	36	143
1025	50,1	491,3	34,5	338,3	34	161
1030	56,3	552,1	35,2	345,2	32	179
1035	59,8	586,4	38,7	377,5	29	190
1040	63,4	621,7	42,2	413,8	25	201
1045	68,7	673,7	42,2	413,8	23	215
1050	73,9	724,7	42,2	413,8	20	229
1055	78,5	769,8	45,8	449,1	19	235
1060	83,1	814,9	49,3	483,5	17	241
1065	87,0	853,2	51,9	509,0	16	254
1070	90,9	891,4	54,6	535,4	15	267
1075	94,7	928,7	57,3	560,9	13	280
1080	98,6	966,9	59,8	586,4	12	293

Anexo C. Carta para hallar C1



Anexo D. Diagrama para el calculo de los momentos de inercia.

Barra delgada		$I_x = I_y = \frac{1}{2} mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{2} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{2} mc^2$ $I_z = \frac{1}{2} mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{2} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{2} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{2} m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{2} m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{2} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mr^2$

