

**IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE GALERKIN PARA LA  
IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE EN PROBLEMAS  
DE ELASTICIDAD LINEAL ANISOTRÓPICA 2D**

**KEVIN ELIECER PATRÓN HERNÁNDEZ**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y MECATRÓNICA  
CARTAGENA DE INDIAS D. T. y C.  
2012**

**IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE GALERKIN PARA LA  
IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE EN PROBLEMAS  
DE ELASTICIDAD LINEAL ANISOTRÓPICA 2D**

**KEVIN ELIECER PATRÓN HERNÁNDEZ**

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de  
Ingeniero Mecánico**

**Director**

**EDGARDO WILLIAM ARRIETA ORTIZ**

**Ingeniero Mecánico, MSc.**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA Y MECATRÓNICA**

**CARTAGENA DE INDIAS D. T. y C.**

**2012**

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

Firma del presidente del jurado

---

Jurado

---

Jurado

Cartagena de Indias D. T. y C., Diciembre de 2012

Cartagena de Indias D. T. y C., Diciembre de 2012

Señores

Comité Evaluador de Trabajos de Grado

Dirección de Programa Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR**

Cordial Saludo.

De la manera más atenta me permito presentar para su consideración el trabajo de grado titulado **“IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE GALERKIN PARA LA IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE EN PROBLEMAS DE ELASTICIDAD LINEAL ANISOTRÓPICA 2D”**, como requisito parcial para optar por el título de Ingeniero Mecánico.

Atentamente,

Kevin E. Patrón Hernández

---

**KEVIN ELICER PATRÓN HERNÁNDEZ**

C.C 1.143.354.703 de Cartagena

Cartagena de Indias D. T. y C., Diciembre de 2012

### **AUTORIZACIÓN**

Yo, KEVIN ELIECER PATRÓN HERNÁNDEZ, identificado con la cédula de ciudadanía número 1.143.453.703 de Cartagena, autorizo a la UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR para hacer uso de mi trabajo de grado titulado: "IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE GALERKIN PARA LA IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE EN PROBLEMAS DE ELASTICIDAD LINEAL ANISOTRÓPICA 2D", y publicarlo en el catálogo en línea de la biblioteca.

Atentamente,

Kevin E. Patrón Hernández

---

**KEVIN ELICER PATRÓN HERNÁNDEZ**

C.C 1.143.354.703 de Cartagena

*A mi Dios, el Señor Jesucristo, a quien todo se lo debo.*

***“Porque Jehová da la sabiduría,  
Y de su boca viene el conocimiento y la inteligencia.”***

***Prov. 2:6***

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer primeramente a Dios, porque sólo por Su gracia y misericordia he ido escalando peldaño a peldaño hasta llegar a esta etapa de mi vida profesional. A Él sea toda la gloria.

A mis padres, Ruth y Eliecer, por formarme y orientarme por el buen camino como muestra de su afecto y cariño en cada instancia de mi vida. Resultados como estos son el reflejo de su ardua labor como padres todos estos años.

A Karla, por llenar de color mis días grises, por brindarme ese hermoso sentimiento que me motiva a seguir adelante, y por todo el ánimo que me manifestó a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

A todos los profesores del departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Bolívar, especialmente al profesor Edgardo Arrieta, a quien le agradezco por todo el apoyo ofrecido, por sus valiosas enseñanzas, y por ser un gran ejemplo a nivel profesional y humano.

A todas las personas que de alguna u otra manera han contribuido en mi proceso de formación académica y humana.

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	3
<b>1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA</b> .....	5
1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	5
1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	5
<b>2. JUSTIFICACIÓN</b> .....	7
<b>3. OBJETIVOS</b> .....	8
3.1 OBJETIVOS GENERALES.....	8
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	8
<b>4. MARCO REFERENCIAL</b> .....	9
4.1 ESTADO ACTUAL.....	9
4.2 MARCO TEÓRICO.....	12
4.2.1. Problema Elástico.....	12
4.2.2. Descripción matemática de los cambios de forma.....	13
4.2.2.1 Medidas de deformación.....	14
4.2.2.1.1 Deformación unitaria Ingenieril.....	15
4.2.2.1.2 Deformación unitaria logarítmica.....	15
4.2.2.1.3 Deformación unitaria de Green-Lagrange.....	15
4.2.2.1.4 Deformación unitaria de Almansi.....	15
4.2.2.2 Tensor de deformación unitaria finita.....	16
4.2.2.3 Deformaciones unitarias infinitesimales.....	17
4.2.2.3 Vector de deformaciones unitarias.....	19
4.2.3. Descripción matemática de las fuerzas internas.....	20
4.2.3.1 Tensor de esfuerzos de Cauchy.....	21



4.2.3.2	Vector de esfuerzo.....	23
4.2.3.3	Fórmula de Cauchy.....	24
4.2.3.4	Ecuaciones de equilibrio.....	24
4.2.3.4.1	Equilibrio interno.....	24
4.2.3.4.2	Equilibrio externo.....	26
4.2.4.	Relaciones constitutivas.....	26
4.2.4.1	Ley de Hooke generalizada.....	27
4.2.5	Planteamiento del problema elástico lineal.....	30
4.2.5.1	Solución en el dominio.....	30
4.2.5.2	Solución en el contorno: condiciones de borde.....	32
4.2.5.2.1.	Condiciones de borde esenciales (de tipo Dirichlet).....	32
4.2.5.2.2.	Condiciones de borde naturales (de tipo Neumann).....	33
4.2.5.2.2.	Condiciones de borde mixtas.....	34
4.2.6.	Principios para la formulación integral ponderada de una ecuación diferencial.....	34
4.2.6.1.	Método de residuos ponderados.....	37
4.2.6.1	Método de colocación de puntos.....	40
4.2.6.2	Método de colocación de subdominios.....	40
4.2.6.3	Método de Galerkin.....	40
4.2.6.4	Método de mínimos cuadrados.....	41
4.2.7	Integración Numérica.....	41
4.2.7.1	Cuadratura de Newton-Cotes.....	42
4.2.7.2	Cuadratura de Gauss-Legendre.....	44
4.2.8	Parametrización de curvas para integrales de línea.....	46
4.2.9	Mínimos cuadrados para la solución de sistemas lineales.....	48
<b>5.</b>	<b>METODOLOGÍA GENERAL PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL ANISOTRÓPICO 2D.....</b>	<b>50</b>
5.1	APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.....	50
5.2	DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO.....	51
5.3	CONDICIONES DE CONTORNO EN TÉRMINOS DE LA APROXIMACIÓN.....	56
5.3.1	Condiciones de borde de tipo Dirichlet.....	56
5.3.2	Condiciones de borde de tipo Neumann.....	58
5.4	SOLUCIÓN COMPLETA AL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL...	63
<b>6.</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL.....</b>	<b>65</b>
6.1	Scilab.....	65
6.2	Presentación de subrutinas.....	65

<b>7. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b> .....	69
7.1 CASO DE ESTUDIO.....	70
7.1.1. Solución analítica.....	71
7.1.2. Solución numérica.....	73
7.1.2.1 Funciones de base.....	73
7.1.2.2 Discretización del dominio.....	74
7.1.2.3 Representación del contorno.....	75
7.1.2.4 Tipos de parametrización del contorno.....	77
7.1.2.5 Gráficas de soluciones.....	77
7.1.2.6 Observaciones.....	84
<b>8. CONCLUSIONES</b> .....	87
<b>9. BIBLIOGRAFÍA</b> .....	88

## **RESUMEN**

Se implementa una metodología alternativa para la imposición de las condiciones de borde en problemas de elasticidad lineal anisotrópica plana bidimensional, basada en el Método de Galerkin. En ese sentido, se exponen los procedimientos que constituyen esta sencilla técnica, y se concluye con la realización de un código desarrollado en Scilab que permite resolver completamente el problema elástico bajo la directriz de la metodología propuesta.

## INTRODUCCIÓN

En diversos casos de estudio y bajo diferentes criterios de evaluación, las limitaciones de los métodos numéricos basados en mallas se han vuelto cada vez más evidentes. Durante las últimas tres décadas, un gran número de metodologías de análisis y técnicas de simulación han venido surgiendo con el fin de aliviar los inconvenientes que presentan estos métodos, para así intentar obtener resultados más precisos y lograr reducir el tiempo invertido por parte del analista en la etapa del pre-procesamiento.

Bajo este contexto, en el presente trabajo se presenta una técnica alternativa muy sencilla pero a la vez muy poderosa, basada en el Método de Galerkin, para realizar la imposición de las condiciones de borde de tipo Dirichlet y de tipo Neumann en problemas de elasticidad lineal anisotrópica plana, y además obtener la solución numérica correspondiente en el dominio.

Básicamente, la idea principal radica en aplicar condiciones de borde de tipo integral ponderada del residuo en el contorno, en contraste con las condiciones de borde nodales (valores discretos en nodos del contorno) que comúnmente son asignadas en los convencionales métodos basados en mallas, las cuales originan ciertas restricciones poco deseables en la simulación. Adicionalmente, se brinda la libertad de emplear cualquier tipo de funciones de base, particionadas o definidas de forma global.

Este abordaje resulta interesante porque permite imponer condiciones de borde en fronteras móviles (o bien, en problemas con grandes variaciones en la geometría del contorno) dentro del marco de los métodos libres de malla, al igual que describir condiciones de borde de naturaleza compleja sobre fronteras que presenten un modelado muy complicado, con bajo costo computacional en comparación con otros métodos.

En el presente documento se describen de modo general los fundamentos teóricos que sostienen el desarrollo de la metodología y se concluye el proyecto con el desarrollo de un conjunto de subrutinas en un paquete de álgebra computacional de licencia OpenSource, llamado Scilab ©, que conformen un código funcional que permita resolver completamente el problema de elasticidad siguiendo la metodología de análisis propuesta.

# 1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

## 1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Dentro del marco de los métodos numéricos basados en mallas, es posible especificar los valores de las variables primarias y secundarias del problema (es decir, imponer las condiciones de borde) únicamente sobre los nodos que conforman los elementos de la malla, razón por la cual es necesario que se logren ubicar nodos en puntos de fuente, o bien, donde exista alguna condición de borde conocida, lo cual hace un poco tediosa la etapa de pre-procesamiento. (1)

Como las condiciones de borde juegan un papel fundamental en la solución de una simulación en un problema físico, restringirlas netamente a valores nodales del contorno, representa en sí una limitación a la hora de desarrollar un esquema de solución óptimo.

Es de importancia resaltar que de este modo es muy complicado asignar restricciones cinemáticas y/o imponer cargas externas sobre fronteras móviles (o bien en dominios con grandes variaciones de la geometría), puesto que el método exige un remallado para cada secuencia de variación, esto es, enmallar el dominio entero nuevamente para obtener una nueva discretización en el borde conforme varíe la frontera, lo cual notablemente representa altos costos computacionales.

De igual manera, este abordaje resulta poco eficiente en la simulación de problemas donde sea necesario imponer condiciones de borde complejas sobre fronteras que presenten una geometría muy sofisticada. Esto se aprecia al inducir errores al aproximar las condiciones de borde de tal manera que encajen en la discretización empleada.

La forma en que estos métodos intentan solucionar tales inconvenientes es refinando la malla en lugares donde existan cambios abruptos en la geometría, condiciones de borde, y variaciones en las propiedades del material. Sin embargo, de no suministrar alternativas de análisis para superar dichos inconvenientes, se espera infortunadamente emplear un poco más de consumo de tiempo en la etapa del pre-procesamiento por parte del analista para procesos de modelado sofisticados, una alta demanda en procesos computacionales, y además leves imprecisiones en las soluciones numéricas obtenidas.

## **1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

Con la imposición de las condiciones de borde nodales, bajo la directriz de los métodos basados en mallas, se adquieren diversas limitaciones a la hora de simular problemas que requieran restricciones cinemáticas y condiciones de carga complejas en el área de Elasticidad Lineal , pasando así a utilizar modelos físicos más sencillos que tienden a alejarnos levemente del problema real.

El problema a enfrentar podría enunciarse en forma de interrogante de la siguiente manera:

*¿Cómo se podrían aliviar los inconvenientes descritos anteriormente relacionados con la imposición de las condiciones de borde en problemas de elasticidad lineal anisotrópica bidimensional?*

## 2. JUSTIFICACIÓN

La presente investigación se debe realizar porque podría representar una alternativa de solución para los inconvenientes que surgen de aplicar los métodos basados en mallas en problemas de frontera móvil o con condiciones de borde de naturaleza compleja sobre contornos difíciles de modelar.

La motivación principal del proyecto radica en el deseo de asignar condiciones de frontera en problemas de elasticidad con mayor flexibilidad y con menos restricciones debidas al apego de los elementos de una malla, puesto que es bien sabido que el mallado de un objeto es una de las actividades que consumen mayor cantidad de cómputo, aproximadamente un 70% del proceso total.

Incursionar en esta área de estudio constituye en sí el primer paso para ahondar en un futuro próximo en el desarrollo de programas más sofisticados, basados en métodos libres de mallas, siguiendo el enfoque sencillo que ofrece el Método de Galerkin.



### **3. OBJETIVOS**

#### **3.1 OBJETIVO GENERAL**

Implementar una metodología de análisis alternativa para la imposición de las condiciones de borde en el problema elástico lineal bidimensional, mediante un esquema de solución basado en el Método de Galerkin, con el fin de aliviar ciertos inconvenientes que surgen en los métodos basados en mallas.

#### **3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Realizar una revisión general de la fundamentación teórica del problema elástico lineal anisotrópico.
- Exponer claramente las herramientas matemáticas empleadas a lo largo del desarrollo de la metodología propuesta.
- Desarrollar un código funcional en Scilab que permita imponer las condiciones de borde de tipo Dirichlet y de tipo Neumann en problemas de elasticidad lineal bidimensional anisotrópica, al igual que brindar su respectiva solución numérica en el dominio.
- Comparar las soluciones obtenidas con soluciones obtenidas en la literatura.
- Escribir un artículo científico mostrando el uso de esta metodología innovadora entre las metodologías que apuntan a soluciones numéricas “libres de malla”.

## 4. MARCO DE REFERENCIA

### 4.1 ESTADO ACTUAL

Regularmente bajo las pautas de la mayoría de los métodos basados en mallas (principalmente el tradicional Análisis por Elementos Finito) las ecuaciones del elemento se derivan construyendo la formulación débil de la ecuación diferencial de gobierno, y luego sustituyendo en ella la aproximación propuesta de la variable primaria. La diferenciación es distribuida entre la variable primaria y la función de ponderación al emplear el teorema de la divergencia para las integrales sobre el volumen, y por consiguiente se incluyen, de forma natural, términos de borde físicamente significativos que permiten especificar de manera explícita las condiciones de borde naturales en el elemento. (1)

Dependiendo del tipo de problema, sobre cada elemento se distinguen como mínimo dos tipos de incógnitas a determinar: una variable primaria, la cual es la variable dependiente de la ecuación diferencial de gobierno, y una variable secundaria, que comúnmente incluye términos de derivadas de dicha variable dependiente. La especificación de cada una de estas variables representan las condiciones de borde sobre el elemento. Así, al asignar un valor a la variable primaria en algún nodo del elemento se está imponiendo una condición de borde esencial (discreta o nodal), mientras que al asignar un valor a la variable secundaria en algún nodo, se está imponiendo una condición de borde natural.

En estos métodos basados en mallas, las condiciones de borde son impuestas después de haber formado el sistema lineal que discretiza la ecuación diferencial de gobierno sobre el dominio del problema, esto es, las variables primarias y/o secundarias son asignadas en cada uno de los nodos al modificar de forma manual las componentes de la matriz de rigidez y del vector de fuerza. Si en un nodo es conocida la variable primaria entonces la incógnita sería la variable secundaria, y si en un nodo es conocida la variable secundaria, entonces la

incógnita sería la variable primaria. De esta manera se obtiene un sistema lineal que representa un conjunto de ecuaciones consistentes que permiten encontrar las variables nodales.

Sin embargo, en muchos problemas de interés, se encuentran situaciones donde la porción del contorno sobre la cual se especifican las condiciones de borde naturales tiene puntos en común con la porción del borde sobre la cual se especifican las condiciones de borde esenciales. En otras palabras, existen puntos nodales de la malla donde la variable primaria y la variable secundaria pueden ser especificadas. Tales puntos son llamados puntos singulares. Como regla general en el Método de Elementos Finitos, en estos nodos se debe imponer la condición de borde esencial y considerar las variables secundarias como incógnitas, lo cual resulta un poco extraño puesto que estas últimas ya tienen de antemano valores definidos. Esto representa una singularidad obtenida a causa del esquema desarrollado en métodos basados en malla. Otra singularidad que resulta del enmallado es la especificación de dos valores diferentes de una variable primaria en el mismo nodo. En estos casos, el Análisis de Elementos Finitos propone elegir el mayor valor de la variable, o bien, hacer un promedio ponderado de los valores que pueden ser usados. Notablemente esto representa una imprecisión a la hora de imponer eficazmente las condiciones de borde.

Hoy en día existen otras técnicas para imponer las condiciones de borde en problemas de Mecánica de Sólidos, independiente de si hay o no un mallado del dominio (2). Hay casos donde no se puede forzar que el campo de desplazamiento propuesto, digamos  $\vec{u}$ , satisfaga ciertas  $k$  condiciones de borde esenciales de la forma

$$C(\vec{u}) = \begin{Bmatrix} C_1(\vec{u}) \\ C_2(\vec{u}) \\ \dots \\ C_k(\vec{u}) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Donde  $C$  es una matriz de coeficientes dada. Si el funcional lagrangiano del sistema es  $L$ , se busca un punto estacionario de un funcional “modificado”  $\tilde{L}$  sujeto a las restricciones dadas en la ecuación anterior. Una técnica que logra modificar el funcional es el Método de Multiplicadores de Lagrange, donde el funcional modificado es escrito de la forma

$$\tilde{L} = L + \int_{\Omega} \vec{\lambda}^T C(\vec{u}) d\Omega \quad (2)$$

Donde  $\vec{\lambda}^T$  es el vector de multiplicadores de Lagrange, dado por

$$\vec{\lambda}^T = \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_k\}$$

Cada multiplicador de Lagrange es una función desconocida en términos de las coordenadas independientes en  $\Omega$ , algo así como  $\lambda_i = \alpha_i N_i(x, y, z)$ . Como son funciones desconocidas, el número total de incógnitas crece.

Otra técnica que logra modificar el funcional lagrangiano es el Método de Penalización. En este se emplea un funcional de la forma  $C^T \alpha C$ , donde  $\alpha$  es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son constantes conocidas, los llamados factores de penalización. El funcional modificado queda de la forma

$$\tilde{L} = L + \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^T(\vec{u}) \alpha C(\vec{u}) d\Omega \quad (3)$$

Como  $\alpha$  está formada por constantes conocidas, no habrá un aumento en el número de incógnitas del sistema.

## **4.2 MARCO TEÓRICO**

A partir de aquí se describen los conceptos teóricos que fundamentan el desarrollo de la investigación, con el fin de dar soporte a cada uno de los pasos que se establecen para marcar el curso de la metodología a lo largo del presente trabajo. Se exponen claramente diversas temáticas sin entrar en rigurosos detalles, pero abarcando lo justo y necesario.

### **4.2.1 PROBLEMA ELÁSTICO**

El problema elástico consiste en determinar las deformaciones y los esfuerzos en un sólido deformable elástico (que presenta deformaciones reversibles), partiendo de un estado inicial (forma original del medio continuo) sobre el cual se aplican unas cargas externas y se imponen ciertas restricciones cinemáticas, y concluyendo con un estado final donde se refleja cómo responde el medio continuo ante tales condiciones. Esta respuesta depende de la geometría del cuerpo, las propiedades del material que lo conforma, y de las condiciones de borde.

La importancia de resolver el problema elástico para aplicaciones reales, radica en que su solución permite decidir un diseño adecuado de elementos mecánicos y estructurales, esto es, ofrecer un diseño que presente resistencia y rigidez apropiadas, así como estabilidad global y elástica. En este sentido, es importante primero lograr describir de forma adecuada las deformaciones y los esfuerzos presentes en un medio continuo, y segundo, establecer relaciones apropiadas entre estos.

#### 4.2.2 DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE LOS CAMBIOS DE FORMA

Para dar solución al problema elástico es necesario definir de antemano el significado de deformación. En términos generales, la deformación de un medio continuo se define como el cambio de forma que este presenta como consecuencia de cargas externas. En realidad, lo que sucede en el interior de los cuerpos que se deforman es que las partículas tienden a desplazarse al ser afectadas por las fuerzas internas que se desarrollan entre ellas.

En cuanto a la deformación, es de gran importancia observar el cambio de las posiciones relativas de una partícula y las partículas situadas en su entorno diferencial cuando el cuerpo pasa de la configuración inicial a la configuración final, pues esto define el estado de deformación en un punto material.

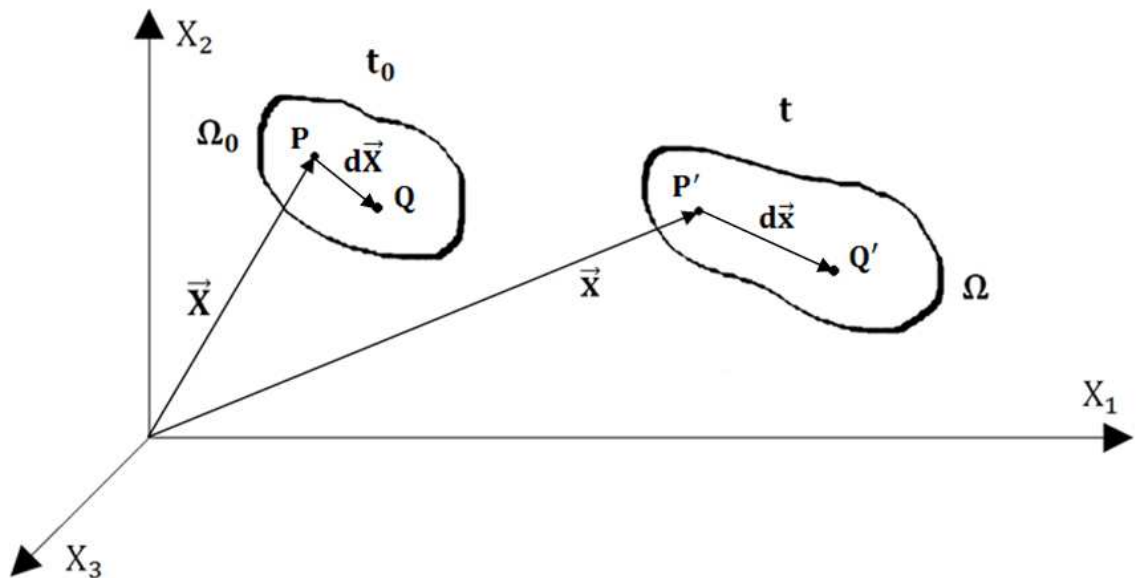


Ilustración 1 Cambios de forma en un medio continuo

De igual forma es relevante observar como se desplaza en el espacio un punto material del sólido como consecuencia de la deformación que sufrió el cuerpo.

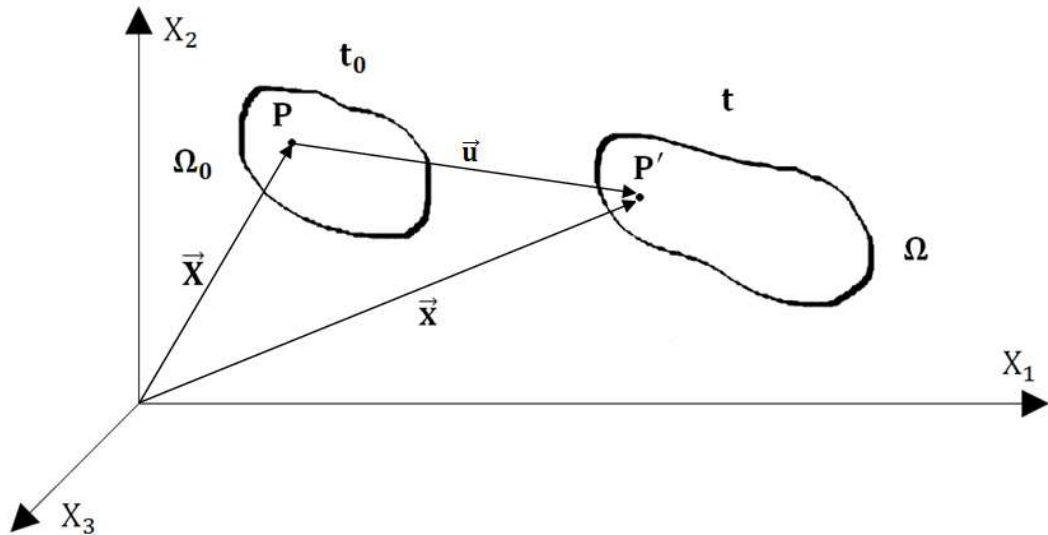


Ilustración 2 Desplazamiento en un medio continuo

Es posible obtener expresiones que relacionen cada configuración del sólido (antes y después de la deformación) con el fin de determinar cuantitativamente, es decir, medir de cierta manera cómo cambia de forma el sólido (3).

Normalmente se habla de deformación unitaria (cambio de forma en relación a la forma inicial) y no solo de deformación, con el fin de caracterizar cuanto cambio el sólido con respecto a su estado inicial.

#### 4.2.2.1 Medidas de deformación

Existen diversas formas de medir la deformación en un medio continuo. Si  $dS = \|d\vec{X}\|$  y  $ds = \|d\vec{x}\|$ , se pueden enunciar las medidas de deformación que se ilustran a continuación.

**4.2.2.1.1 Deformación unitaria ingenieril.** Define la deformacion  $e$  como la relación entre el cambio total de las dimensiones del medio continuo respecto a sus dimensiones iniciales (en la configuración inicial), así

$$e = \frac{ds - dS}{dS} \quad (4)$$

**4.2.2.1.2 Deformación unitaria logarítmica.** Define la deformacion como  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \ln(1 + e) \quad (5)$$

Esta medida de deformación da la medida correcta de la deformación unitaria final cuando la deformación se realiza de forma incremental, puesto que se deriva de una serie de incrementos, tomando en cuenta la influencia de la trayectoria de la deformación unitaria.

**4.2.2.1.3 Deformación unitaria de Green-Lagrange.** La deformación unitaria de Green está definida como

$$E = \frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} \quad (6)$$

Esta medida de la deformación es llamada deformación unitaria Lagrangeana. Representa la forma general de la deformación unitaria ingenieril, y es empleada cuando donde se esperan grandes cambios de forma o bien cuando ocurren deformaciones finitas, o grandes deformaciones.

**4.2.2.1.4 Deformación unitaria de Almansi.** La deformación unitaria de Green está definida como

$$e = \frac{ds^2 - dS^2}{2ds^2} \quad (7)$$

Tambien es empleada cuando existen deformaciones finitas.



#### 4.2.2.2 Tensor de deformación unitaria finita.

De forma general, la medida de la deformación unitaria en un punto material puede agruparse en un ente matemático llamado tensor, que cuantifica el estado de deformación unitaria, independiente del sistema de coordenadas elegido. Cabe destacar que la medida de deformación mas general es la de Green-Lagrange, de la cual se puede conseguir una medida relativamente adecuada cuando las deformaciones son pequeñas o infinitesimales, o bien cuando las deformaciones son grandes o finitas.

Para cada medida de deformación se puede obtener un tensor de deformación unitaria en términos del tensor gradiente material de la deformación <sup>1</sup>  $\mathbf{F}$  .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (8)$$

En el presente documento se emplea solamente el tensor de deformación unitaria con la medida de Gree-Lagrange por la cualidad mencionada anteriormente.

Normalmente las condiciones de borde del problema elástico incluyen la imposición de desplazamientos en el contorno del medio continuo. Así que, para el tratamiento de las ecuaciones que surgen del problema elástico resulta conveniente expresar el tensor de deformación unitaria en términos del campo de desplazamientos  $\vec{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  .

En ese sentido, a partir de la definición de desplazamiento, es posible obtener una expresión para el tensor de deformación unitaria en términos de

---

<sup>1</sup> Este tensor con tiene la información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo  $t$  de todas las partículas materiales en el entorno diferencial de una dada identificada por sus coordenadas materiales.  $d\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{F} d\vec{\mathbf{X}}$

los desplazamientos (o bien, del tensor  $J$  gradiente material de los desplazamientos<sup>2</sup>) así

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \mathbf{J}) \quad (9)$$

En notación indicial se escribe de la siguiente manera

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (10)$$

En notación matricial se puede escribir el tensor material de deformación unitaria así

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde las componentes de la diagonal principal representan las deformaciones longitudinales (estiramiento y alargamiento unitario de segmentos diferenciales) en la dirección de los ejes coordenados, y el resto de componentes representan las deformaciones transversales (variación de ángulos de segmentos diferenciales) (3)

#### 4.2.2.3 Deformaciones unitarias infinitesimales

En aplicaciones prácticas de ingeniería las deformaciones usualmente son muy pequeñas (inferiores en valor absoluto a 0,01), esto es, hay cambios de forma poco perceptibles. Por ejemplo, frecuentemente al trabajar con metales, las deformaciones unitarias elásticas presentes no son mucho mayores a 0.002 o al 0.2% (4), y se considera que el proceso de deformación es, en principio, isotérmico y adiabático (3).

<sup>2</sup> Se define al tensor  $\mathbf{J}$  como  $\mathbf{J} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$ , siendo  $\mathbf{I}$  el tensor unidad.

Cuando este es el caso, es posible suponer dos hipótesis adecuadas con el fin de simplificar la caracterización del estado de deformación (3).

1. Los desplazamientos son muy pequeños frente a las dimensiones típicas del medio continuo, lo cual quiere decir que  $\bar{\mathbf{u}} \ll \bar{\mathbf{X}}$ .

De acuerdo a la primera hipótesis, y a partir de la definición de los desplazamientos ( $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}$ ) se puede observar que la configuración inicial es muy próxima a la configuración actual, por lo tanto, es posible considerar que  $\bar{\mathbf{x}} \approx \bar{\mathbf{X}}$ , es decir, y por lo tanto ya no tiene sentido hablar de coordenadas espaciales ni materiales.

2. Los gradientes de los desplazamientos son muy pequeños o infinitesimales.

Esto puede escribirse como

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \ll 1 \quad i, j = 1, 2, 3$$

El producto  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  es mucho más pequeño que 1 (infinitésimo de segundo orden) y se puede despreciar. Con base en las dos hipótesis anteriores, se puede deducir que el tensor material de deformación  $\mathbf{E}$  se puede escribir así

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \mathbf{J}) \cong \frac{1}{2} (\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) \quad (12)$$

Se puede concluir entonces, que bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, el tensor material de la deformación coincide, y colapsa en el Tensor de deformación infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , el cual es usado comúnmente en ingeniería estructural y en elasticidad lineal, razón por la cual será empleado en el presente documento.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}$$

Así, de forma matricial, el tensor de deformación unitaria resulta de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (13)$$

En notación indicial, así

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (14)$$

#### 4.2.2.4 Vector de deformaciones unitarias.

“Es también muy frecuente en ingeniería aprovechar la simetría del tensor de deformación infinitesimal para trabajar únicamente con las seis componentes distintas de dicho tensor, reuniéndolas en el denominado vector de deformaciones ingenieriles“ (3)

Este vector está formado por las componentes del triangulo superior de la matriz de esfuerzo, así

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Para problemas bidimensionales  $w = 0$  , y por tanto el vector de deformación unitaria se reduce a

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Este será el vector empleado en la formulación de la metodología a lo largo del presente documento debido a la naturaleza de los problemas a solucionar.

#### **4.2.3 DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE LAS FUERZAS INTERNAS EN SÓLIDOS**

En los cuerpos que son cargados externamente se desarrollan fuerzas internas (normalmente de naturaleza compleja) que aseguran el equilibrio en su interior. Estas fuerzas internas resultan de vital importancia dentro del problema elástico, pues permiten determinar las condiciones adecuadas de diseño que un sólido sometido a cargas externas debe poseer con el fin de presentar una correcta funcionalidad sin presentar fallas por resistencia mecánica.

### 4.2.3.1 Tensor de esfuerzo

Al igual que en las deformaciones unitarias, es posible agrupar en un tensor las fuerzas internas en un punto material del sólido, en las direcciones de los ejes coordenados.

Si se selecciona un elemento cúbico de volumen  $\Delta V$  del cuerpo cargado externamente, en cada una de sus caras  $\Delta A_i$  se obtiene un vector de tracción promedio  $\vec{t}_{prom}^{(i)}$  como se ilustra en la figura 5.

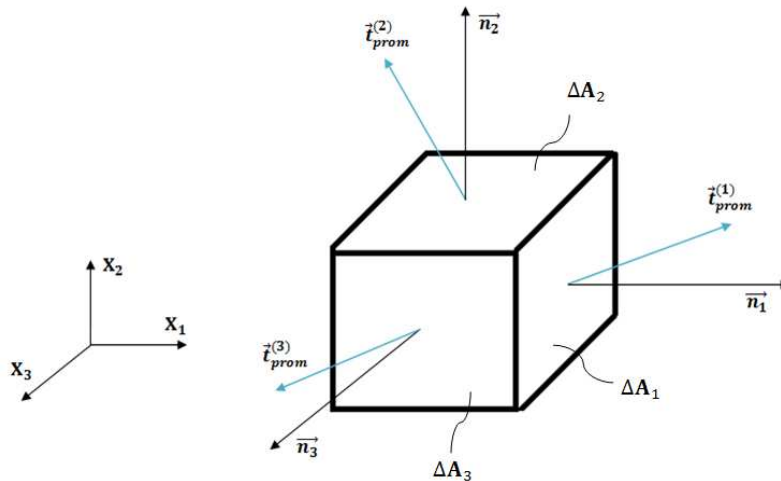


Ilustración 3 Vectores de tracción promedio en un elemento de volumen de un medio continuo

Si se imagina que este elemento de volumen se va encogiendo hacia su punto central  $P$ , en las sucesivas caras del cubo los vectores de tracción promedio van cambiando. En el límite, cuando  $dV \rightarrow 0$  o bien en un elemento infinitesimal de volumen, cada uno de los vectores de tracción promedio tienden a un vector de tracción finito.

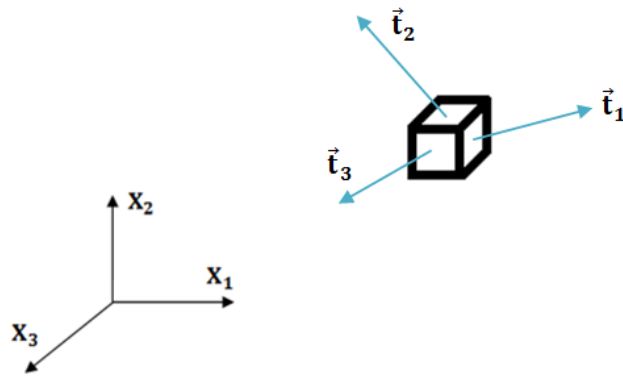


Ilustración 4 Vectores de tracción en un elemento infinitesimal de volumen de un medio continuo

Si se descomponen estos vectores en sus componentes cartesianas, se obtienen en total nueve componentes (tres por cada uno) que permiten definir el estado de esfuerzo general en el punto  $P$ .

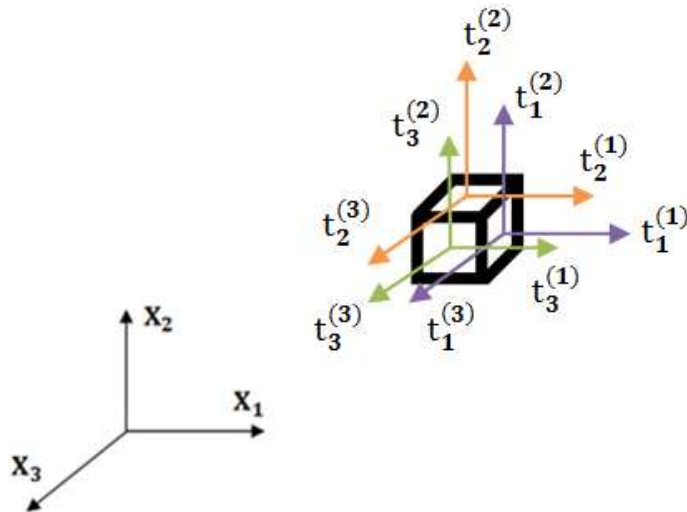


Ilustración 5 Componentes cartesianas de los vectores de tracción

$$\begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \\ \vec{t}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^{(1)} & t_1^{(2)} & t_1^{(3)} \\ t_2^{(1)} & t_2^{(2)} & t_2^{(3)} \\ t_3^{(1)} & t_3^{(2)} & t_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Así, el estado de esfuerzo está definido por el tensor de esfuerzo, comúnmente llamado Tensor de Cauchy.

$$\sigma = \begin{bmatrix} t_1^{(1)} & t_1^{(2)} & t_1^{(3)} \\ t_2^{(1)} & t_2^{(2)} & t_2^{(3)} \\ t_3^{(1)} & t_3^{(2)} & t_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Las componentes de la diagonal principal presentan los esfuerzos normales en las direcciones de los ejes coordenados, mientras que el resto de componentes representan esfuerzos cortantes

#### 4.2.3.2 Vector de esfuerzo.

Al igual que en los tensores de deformación unitaria, la simetría del tensor de esfuerzo hace que, de sus nueve componentes en un determinado sistema cartesiano, sólo seis sean distintas. Como consecuencia de esto, es común trabajar en ingeniería con un vector de esfuerzo que agrupe las componentes mínimas necesarias. Dicho vector es formado con las componentes del triangulo superior de la matriz del tensor de esfuerzo

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (19)$$



Para problemas bidimensionales  $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \mathbf{0}$  , y por tanto el vector de esfuerzo se reduce a

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Este será el vector empleado en la formulación de la metodología a lo largo del presente documento debido a la naturaleza de los problemas a solucionar.

#### 4.2.3.3 Fórmula de Cauchy

Por medio del tensor de esfuerzos es posible expresar el vector de tracción  $\vec{t}$  en un punto  $P$  cualquiera, cuya superficie tenga normal unitaria  $\vec{n}$  . Si se extrae un elemento de volumen en forma de tetraedro, y se aplica la segunda ley de Newton se obtiene (luego de un cuidadoso análisis)

$$\vec{t} = \vec{n} \sigma = \sigma^T \vec{n} \quad (21)$$

#### 4.2.3.4 Ecuaciones de equilibrio

**4.2.3.4.1 Equilibrio interno.** Un elemento infinitesimal de volumen debe estar en equilibrio en un sólido que está en equilibrio. Al admitir que las componentes de los esfuerzos son funciones continuas, se toma en cuenta la posibilidad de un incremento en los esfuerzos tal como se observa en la figura siguiente (5)

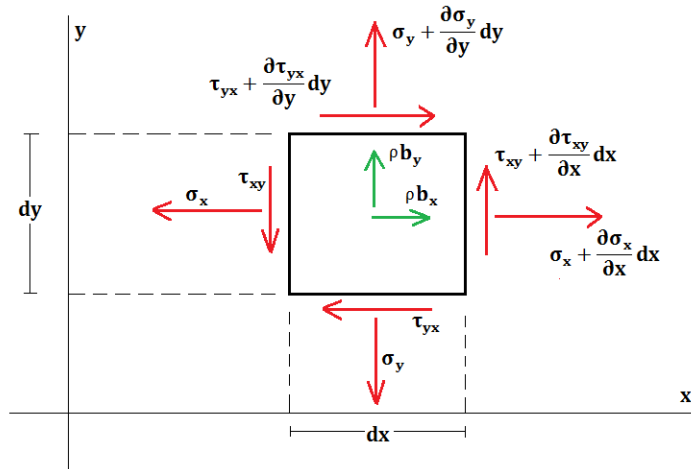


Ilustración 6 Estado de esfuerzo en un elemento diferencial

Al asegurar el equilibrio rotacional del elemento diferencial, se obtiene el Teorema de Reciprocidad de los esfuerzos cortantes o Teorema de los esfuerzos cortantes conjugados  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . De esta manera, los subíndices para los esfuerzos son conmutativos, y por lo tanto, el tensor de esfuerzo es simétrico, es decir  $\sigma = \sigma^T$ , o bien  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Al asegurar el equilibrio traslacional se obtiene el siguiente par de ecuaciones

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho b_y = 0$$

Escritas en su forma compacta

$$\nabla \cdot [\sigma] + \rho \vec{b} = 0 \quad (22)$$

Estas son las ecuaciones de equilibrio, comúnmente llamadas ecuaciones de Cauchy.

**4.2.3.4.2 Equilibrio externo.** Además de las últimas ecuaciones deben cumplirse las condiciones de contorno, sobre la superficie del sólido, que relacionan el vector normal a la misma  $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}^T$  (dirigido hacia el exterior) con las fuerzas por unidad de superficie que actúan en el mismo punto de la superficie  $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ .

Para ello se emplea la ecuación de Cauchy <sup>3</sup>  $\vec{t}(\mathbf{P}, \vec{n}) = \vec{n} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \vec{n}$

$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z$$

$$t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z$$

#### 4.2.4 RELACIONES CONSTITUTIVAS

Se puede observar que en la deducción de todas las ecuaciones previas no se han usado las propiedades mecánicas del material, lo cual significa que son aplicables a materiales elásticos, plásticos o viscoelásticos. (5) De alguna manera, debe existir una relación esfuerzo-deformación que caracteriza la forma en que el material responde cuando es sometido a cargas externas. Estas relaciones se ajustan normalmente a medidas experimentales, y se conocen como relaciones constitutivas, las cuales definen el modelo constitutivo del material. (6)

---

<sup>3</sup>  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzo específicamente en el punto de interés P

Estas relaciones deben cumplir dos grandes condiciones

1. *Obedecer las leyes de la Termodinámica*: esto implica que, el trabajo realizado por los esfuerzos internos debe ser almacenado como energía interna en el sólido o disipado en forma de calor (1ª. Ley de la Termodinámica), y además, el trabajo total realizado sobre una porción de material que es sometida a un ciclo de deformación cerrado (comienza y finaliza con la misma energía interna de deformación), debe ser positivo o cero (2ª. Ley de la Termodinámica). (6)
2. *Satisfacer la condición de objetividad o indiferencia del marco referencial*: las funciones que relacionan esfuerzos con deformaciones deben transformarse correctamente bajo un cambio de base y origen del sistema. (6)

#### **4.2.4.1 Ley de Hooke Generalizada**

Muchos materiales en ingeniería , bajo el rango elástico, se comportan siguiendo aproximadamente una relación lineal entre los esfuerzos y las deformaciones: al incrementar los esfuerzos linealmente se incrementan las deformaciones linealmente, y viceversa.

En realidad existe un buen número de modelos constitutivos complejos que describen comportamientos más complicados en otros tipos de materiales, pero en el presente documento solo se abordarán los materiales con comportamiento elástico y lineal (ya sean isotrópicos o anisotrópicos), los cuales predominan en la gran mayoría de materiales de aplicaciones prácticas. La forma más general de establecer una relación lineal entre los esfuerzos y las deformaciones (sin incluir deformaciones unitarias por efectos térmicos) está dada por

$$\vec{\sigma} = \mathbf{C} \vec{\varepsilon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \quad (23)$$

**C:** Tensor de Rigidez Elástica

Como se pretende solucionar problemas bidimensionales, solo se necesitan las deformaciones y los esfuerzos presentes en los vectores de esfuerzo y deformación definidos anteriormente.

De esta manera, es posible reducir lo anterior a (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \quad (24)$$

Cabe mencionar que el tensor de Rigidez Elástica es simétrico, es decir  $C_{ij} = C_{ji}$

El tensor de rigidez Elástica para materiales isotrópicos, bajo condiciones de esfuerzo plano es (2)

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Ilustración 7 Tensor de rigidez elástica (esfuerzo plano)

Y bajo condiciones de deformación plana es (2)

$$\mathbf{c} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Ilustración 8 Tensor de rigidez elástica (deformación plana)

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson.

Para materiales ortotrópicos el tensor de rigidez elástica resulta así

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Los valores bajo de las constantes del tensor bajo condiciones de esfuerzo plano están dadas por (1)

$$\begin{aligned} \nu_{12}E_2 &= \nu_{21}E_1 \\ c_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad c_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ c_{12} &= \nu_{21}c_{11} = \nu_{12}c_{22}, \quad c_{66} = G_{12} \end{aligned}$$

Ilustración 9 Constantes elásticas material ortotrópico (esfuerzo plano)

Y bajo condiciones de deformación unitaria plana estan dadas por (1)

$$c_{11} = \frac{E_1(1 - \nu_{12})}{1 - \nu_{12} - 2\nu_{12}\nu_{21}}, \quad c_{22} = \frac{E_2(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{(1 + \nu_{12})(1 - \nu_{12} - 2\nu_{12}\nu_{21})}$$

$$c_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12} - 2\nu_{12}\nu_{21}}, \quad c_{66} = G_{12}$$

Ilustración 10 Constantes elásticas material ortotrópico (deformación plana)

Donde

$E_1$  y  $E_2$  : módulo de elasticidad en las direcciones principales coincidentes con las direcciones de los ejes coordenados  $(x, y)$  respectivamente

$\nu_{12}$  : Coeficiente de Poisson

Para materiales más complicados, es necesario determinar experimentalmente cada una de las constantes del tensor de rigidez elástica.

## 4.2.5 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL

### 4.2.5.1 Solucion en el dominio

Luego de haber definido la ley de Hooke, se puede concretar un tipo particular de problema elástico que se adecúa muy bien a un gran número de aplicaciones prácticas de ingeniería: el problema elástico lineal. Este está basado en un modelo constitutivo lineal (en este caso es la ley de Hooke generalizada) y además, una relación entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos expresada en ecuaciones lineales.

El problema elástico lineal viene gobernado por las siguientes ecuaciones:

1. Ecuación de equilibrio de Cauchy (balance de la cantidad de movimiento)
2. Ecuación Constitutiva (Ley de Hooke generalizada)
3. Ecuación geométrica (Relación entre deformaciones y desplazamientos)

Estas ecuaciones involucran como incógnitas 3 componentes de desplazamientos, 6 componentes de deformación unitaria y 6 componentes de esfuerzo (todas como función de la posición). Las tres ecuaciones anteriores constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: 15 ecuaciones diferenciales para 15 incógnitas. El problema queda bien determinado cuando se imponen adecuadamente las condiciones de contorno, las cuales pueden ser de Neumann (condiciones de contorno en esfuerzos), de Dirichlet (condiciones de contorno en desplazamientos), o mixtas (desplazamiento - esfuerzo). La resolución del problema elástico lineal puede hacerse bajo dos planteamientos

- a) Planteamiento en desplazamientos (Ecuaciones de Navier)
- b) Planteamiento en esfuerzos (Ecuaciones de Beltrami- Mitchell)

En el presente documento se empleará el planteamiento en desplazamientos, el cual es obtenido así:

Si se reemplazan las relaciones deformación unitaria – desplazamiento (dadas por el vector de deformación unitaria) en las relaciones constitutivas del material (ley de Hooke generalizada), y luego estos esfuerzos que resultan se insertan en las ecuaciones de equilibrio, se obtiene un conjunto de dos ecuaciones del problema elástico para dar solución a dos componentes de desplazamiento en el plano.



Con la ayuda de una herramienta computacional de algebra simbólica y licencia OpenSource llamada wxMaxima, se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio bidimensional en términos de los desplazamientos.

En los anexos se encuentra el código para ver como se obtuvieron las siguientes ecuaciones generales en wxMaxima

$$\left(\frac{d^2}{dx dy}\right) v C66 + \left(\frac{d^2}{dy^2}\right) u C66 + \left(\frac{d^2}{dy^2}\right) v C62 + \left(\frac{d^2}{dx dy}\right) u C61 + \left(\frac{d^2}{dx^2}\right) v C16 + \left(\frac{d^2}{dx dy}\right) u C16 + \left(\frac{d^2}{dx dy}\right) v C12 + \left(\frac{d^2}{dx^2}\right) u C11 + f_x = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) v C66 + \left(\frac{d^2}{dx dy}\right) u C66 + \left(\frac{d^2}{dx dy}\right) v C62 + \left(\frac{d^2}{dx^2}\right) u C61 + \left(\frac{d^2}{dx dy}\right) v C26 + \left(\frac{d^2}{dy^2}\right) u C26 + \left(\frac{d^2}{dy^2}\right) v C22 + \left(\frac{d^2}{dx dy}\right) u C21 + f_y = 0$$

Ilustración 11 Ecuaciones de equilibrio en términos del campo de desplazamiento

#### 4.2.5.2 Solución en el contorno: condiciones de borde

La solución particular del problema elástico lineal anisotrópico se obtiene no solo resolviendo las ecuaciones de equilibrio interno, sino imponiendo unas condiciones de borde. En problemas de elasticidad, las condiciones de contorno pueden ser de tres tipos diferentes:

**4.2.5.2.1 Condiciones de contorno esenciales (de tipo Dirichlet):** se especifica el vector de desplazamiento (variable primaria) en una parte del borde  $\Gamma_u$ . Esto es de forma general  $\vec{u} = \vec{u}_0$ .

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y, z) \\ v_0(x, y, z) \\ w_0(x, y, z) \end{Bmatrix} \text{ en } \Gamma_u$$

Para el caso de problemas bidimensionales, se tiene que

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{v}_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{Bmatrix} \text{ en } \Gamma_u \quad (26)$$

**4.2.5.2.2 Condiciones de contorno naturales (de tipo Neumann):** se especifica el vector de tracción (variable secundaria) en una parte del borde  $\Gamma_t$ . Esto es de forma general  $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{t}}_0$ .

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \\ \mathbf{t}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{x_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{t}_{y_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{t}_{z_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{Bmatrix}$$

Para el caso de problemas bidimensionales, se tiene que

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{x_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{t}_{y_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{Bmatrix} \text{ en } \Gamma_t \quad (27)$$

De acuerdo al primer postulado de Cauchy, el vector de tracción está dado por

$$\vec{\mathbf{t}} = \sigma \vec{\mathbf{n}}$$

Por lo tanto la condición de contorno natural queda así

$$\vec{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{x_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{t}_{y_0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{Bmatrix} \text{ en } \Gamma_t$$

Nuevamente se emplea wxMaxima para obtener como resultan finalmente las tracciones en términos de los desplazamientos, obteniendo lo siguiente

Tracción en  $x$

$$n_y \left( \frac{d}{dx} v \right) c_{66} + n_y \left( \frac{d}{dy} u \right) c_{66} + n_y \left( \frac{d}{dy} v \right) c_{62} + n_y \left( \frac{d}{dx} u \right) c_{61} + n_x \left( \frac{d}{dx} v \right) c_{16} + n_x \left( \frac{d}{dy} u \right) c_{16} + n_x \left( \frac{d}{dy} v \right) c_{12} + n_x \left( \frac{d}{dx} u \right) c_{11}$$

Tracción en  $y$

$$n_x \left( \frac{d}{dx} v \right) c_{66} + n_x \left( \frac{d}{dy} u \right) c_{66} + n_x \left( \frac{d}{dy} v \right) c_{62} + n_x \left( \frac{d}{dx} u \right) c_{61} + n_y \left( \frac{d}{dx} v \right) c_{26} + n_y \left( \frac{d}{dy} u \right) c_{26} + n_y \left( \frac{d}{dy} v \right) c_{22} + n_y \left( \frac{d}{dx} u \right) c_{21}$$

**Ilustración 12** Componentes del vector de tracción en términos de los desplazamientos

**4.2.5.2.3 Condiciones de contorno mixtas:** se especifican ambas variables en una misma parte del borde.

#### **4.2.6 PRINCIPIOS PARA LA FORMULACIÓN INTEGRAL PONDERADA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL**

La gran mayoría de problemas de Medios Continuos que surgen en Física e Ingeniería están apropiadamente definidos a partir de ecuaciones diferenciales y condiciones de borde impuestas sobre la función desconocida o funciones desconocidas. No basta con conocer la expresión matemática que rige el problema, sino también encontrar soluciones aproximadas alternativas a las soluciones analíticas que, en casi todos los casos, resulta muy compleja o casi imposible de determinar. Las ecuaciones diferenciales parciales de gobierno representan la formulación fuerte de las ecuaciones del sistema.

Por ejemplo, en el área de Mecánica de Sólidos, encontramos que

$$L^T C L \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{b}} = \rho \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \quad (28)$$

son las ecuaciones de equilibrio dinámico para sólidos elásticos, en términos de los desplazamientos. Donde  $L$  una matriz operador diferencial,  $C$  es la matriz de constantes elásticas,  $\bar{\mathbf{u}}$  es el vector de desplazamientos,  $\bar{\mathbf{b}}$  es el vector de fuerzas de cuerpo externas. Lo ideal sería obtener la solución exacta de las ecuaciones del sistema en formulación fuerte, sin embargo, esto resulta bastante complicado para las aplicaciones prácticas en ingeniería. Los métodos que intentan resolver la formulación fuerte de una ecuación diferencial, presentan limitaciones en cuanto a la representación del dominio y además son menos estables (2)

Por otro lado, se define una formulación débil como una formulación en integral ponderada de una ecuación diferencial, en la cual la diferenciación es distribuida entre la variable dependiente y la función de peso, y además se incluyen las condiciones de borde naturales del problema. Una formulación débil puede producir un conjunto estable de ecuaciones algebraicas del sistema, y da ecuaciones que producen resultados mucho más precisos.

Para una ecuación diferencial de gobierno de orden  $2k$ -ésimo, la formulación fuerte asume que la variable de campo posee una consistencia de orden  $2k$ . Sin embargo, para la misma ecuación diferencial, la formulación débil requiere una consistencia de orden  $k$ . Así, una formulación débil posee dos características deseables: primero, requiere menor continuidad en la variable dependiente y a menudo arroja un conjunto de ecuaciones algebraicas simétrico en los coeficientes, y segundo, las condiciones de borde naturales del problema son incluidas en la formulación débil y por lo tanto, la solución aproximada solo debe satisfacer las condiciones de borde esenciales del problema. (2)

El propósito de desarrollar una formulación en integral ponderada de una ecuación diferencial (puede ser la formulación débil por ejemplo) es tener los medios para obtener  $n$  relaciones algebraicas linealmente independientes entre los coeficientes  $u_i$  de la aproximación general propuesta, que es de la forma (1)

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{a}_i \quad (29)$$

Esto se logra al elegir  $n$  funciones de base linealmente independientes en la formulación integral. Cabe mencionar que una formulación integral ponderada, de forma general, es una expresión equivalente a la ecuación diferencial, pero no incluye ninguna condición de borde.

Existen básicamente dos grandes categorías de principios usados muy a menudo para construir formulaciones débiles, o en general, formulaciones en integrales ponderadas de la ecuación diferencial. (2)

Estos son:

- Principios Energéticos Variacionales
- Métodos de Residuos Ponderados

Entre los principios variacionales más conocidos encontramos el Principio de Hamilton y el Principio de mínima energía potencial, ambos basados en funcionales energéticos que deben cumplir ciertas restricciones. Estos principios poseen la ventaja de que no necesitan conocer la formulación fuerte de la ecuación del sistema.

Sin embargo, como no todos los problemas físicos pueden ser expresados en términos de funcionales, el rango de problemas solubles con estos principios energéticos se ve limitado. Por otra parte, el Método de Residuos Ponderados constituye una herramienta matemática muy simple pero poderosa para obtener formulaciones integrales, que es aplicable, en principio, para cualquier ecuación diferencial parcial que gobierne problemas de ingeniería.

#### 4.2.6.1 Método de Residuos Ponderados

Se considera una ecuación diferencial de forma general así

$$A(\mathbf{u}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (30)$$

Donde  $\mathbf{u}$  es la variable primaria,  $\mathcal{L}$  es su operador diferencial lineal,  $\mathbf{p}$  es un término independiente de  $\mathbf{u}$ , y  $\Omega$  es el dominio del problema. Además, se consideran las respectivas condiciones de borde del problema, cada una de las cuales pueden ser expresadas de forma general así

$$B(\mathbf{u}) = \mathcal{M}(\mathbf{u}) + \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma \quad (31)$$

Donde  $\mathcal{M}$  es un operador diferencial lineal de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{r}$  es un término independiente de  $\mathbf{u}$ , y  $\Gamma$  es el contorno del dominio del problema.

En general, resulta difícil obtener la solución exacta  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\vec{x})$  que satisfaga la ecuación diferencial anterior y sus respectivas condiciones de borde. Por lo tanto se busca una aproximación  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(\vec{x})$  que satisfaga la ecuación diferencial en un sentido de integral ponderada (formulación integral de la ecuación diferencial) sobre un dominio de cuadratura, logrando de esta forma minimizar alguna medida del error (o residuo) presente al incluir la aproximación en lugar de la solución exacta en la formulación integral. (7)

Esta es la idea central de los Métodos de Residuos Ponderados. Si se define a  $\hat{u}$  como la aproximación de la variable<sup>4</sup>  $u$ , entonces, al sustituir dicha aproximación en la ecuación diferencial, se puede notar que

$$A(\hat{u}) = \mathcal{L}(\hat{u}) + p \neq 0$$

De esta forma, se observa que se genera un residuo, o error

$$R_\Omega = A(\hat{u}) = \mathcal{L}(\hat{u}) + p \quad \text{en } \Omega \quad (32)$$

Puesto que  $\hat{u} = \hat{u}(\vec{x})$ , el residuo  $R_\Omega$  es una función de la posición también, es decir

$$R_\Omega = R_\Omega(x) \quad (33)$$

Como función de la posición, se puede forzar que el área bajo la curva (o bajo la superficie) de esta función sea cero de forma ponderada a través de unas funciones de peso independientes.

Al intentar disminuir el residuo sobre el dominio  $\Omega$ , surgen expresiones integrales del error que ponderan a  $R$  de distintas maneras y cuya forma general es la siguiente (7)

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega \, d\Omega = 0 \quad (34)$$

$$l = 1, 2, \dots, n$$

$W_l$  es la función de peso<sup>5</sup>  $l$ -ésima. Estas funciones de peso deben ser linealmente independientes para que las ecuaciones algebraicas resultantes también lo sean. La convergencia a la solución exacta, esto es  $\hat{u} \rightarrow u$ , se da cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto solo será cierto si  $R_\Omega \rightarrow 0$  en todos los puntos del dominio, como es lo deseable.

---

<sup>4</sup> Puede ser una variable escalar o vectorial

<sup>5</sup> También llamada función de ponderación

Como la expresión anterior no satisface alguna o ninguna de las condiciones de borde, el residuo en el dominio  $R_\Omega$  debe complementarse con el residuo en el borde  $R_\Gamma$  que surge de sustituir la aproximación  $\hat{u}$  en lugar de la solución exacta  $u$  en las condiciones de borde. Así

$$B(\hat{u}) = \mathcal{M}(\hat{u}) + r \neq 0$$

$$R_\Gamma = B(\hat{u}) = \mathcal{M}(\hat{u}) + r \quad \text{en } \Gamma \quad (35)$$

A fin de reducir los residuos en el dominio y en el borde, se propone el siguiente planteo en residuos ponderados (7)

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega \, d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_l R_\Gamma \, d\Gamma = 0 \quad (36)$$

En donde las funciones de peso,  $W_l$  y  $\overline{W}_l$ , pueden ser elegidas en forma independiente<sup>6</sup>. Resulta claro que a medida que aumenta el número de funciones para las cuales se satisface la expresión anterior, mejor será la aproximación de  $u$ .

Se emplea una solución aproximada definida como una combinación lineal de ciertos coeficientes de ajustes  $u_i$  y funciones de base  $N_i$ <sup>7</sup> (7)

$$u \cong \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (37)$$

Si esta expresión es sustituida en la ecuación integral anterior, resulta un sistema lineal en el que la matriz de coeficientes y el término independiente tienen la siguiente forma

$$K_{li} = \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}(N_i) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_l \mathcal{M}(N_i) \, d\Gamma \quad (38)$$

<sup>6</sup> O bien, pueden elegirse las mismas funciones de ponderación

<sup>7</sup> Estas funciones de base pueden ser definidas en una, dos o tres dimensiones.



$$f_l = - \int_{\Omega} W_l p \, d\Omega - \int_{\Gamma} \overline{W}_l r \, d\Gamma \quad (39)$$

En la práctica pueden utilizarse distintos tipos de funciones de peso y cada una dará lugar a un método de residuos ponderados en particular. A continuación se presentan algunas de las opciones más comúnmente utilizadas (1).

**4.2.6.1.1 Método de colocación de puntos.** En este caso, las funciones de peso  $W_l$  están dadas por  $W_l = \delta(x - x_l)$  donde  $\delta(x - x_l)$  es la función delta de Dirac. Elegir estas funciones de peso en la formulación integral equivale a que  $R_\Omega$  sea cero ( $\hat{u} = u$ ) en los puntos  $x_l$  elegidos, es decir, que  $\hat{u}$  aproxima exactamente a  $u$  en  $n$  puntos elegidos.

**4.2.6.1.2 Método de colocación de subdominios.** En este caso las funciones de peso quedan definidas por

$$W_l = \begin{cases} 1, & x_l \leq x \leq x_{l+1} \\ 0, & x < x_l, \quad x > x_{l+1} \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots, n$$

**4.2.6.1.3 Método de Galerkin.** Este es el más popular de los métodos de residuos ponderados. Se eligen como funciones de peso a las mismas funciones utilizadas como funciones de base de la aproximación  $W_l = N_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ . Se observa que una ventaja computacional de este método es que, en general, la matriz  $K$  resulta simétrica.

Es el método de residuos ponderados empleados en el presente trabajo.

**4.2.6.1.4 Método de Mínimos Cuadrados.** En este método se determinan los coeficientes de ajuste al minimizar la integral del cuadrado del residuo

$$\frac{\partial}{\partial u_l} \int_{\Omega} R^2 d\Omega = 0 \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial u_l} R d\Omega = 0 \quad l = 1, 2, \dots, n$$

Donde se observa que se emplean las funciones de peso  $W_l = \frac{\partial R}{\partial u_l}$ .

#### 4.2.7 INTEGRACION NUMERICA

Al desarrollar la formulación integral ponderada de una ecuación diferencial de gobierno, surgen ecuaciones con integrales sobre el dominio y sobre la frontera del mismo.

La evaluación exacta de tales integrales no es siempre posible debido a la complejidad algebraica de los integrandos, razón por la cual se procede a emplear procedimientos de integración numérica. La idea básica detrás de todas las técnicas de integración numérica es encontrar una función  $P(\vec{x})$  que sea una buena aproximación a  $F(\vec{x})$  y que resulte simple de integrar.

Los métodos de integración comúnmente usados pueden ser clasificados en dos grupos básicos:

1. La fórmula de Newton-Cotes que emplea valores de la función en puntos de base igualmente espaciados.
2. La fórmula de cuadratura de Gauss que emplea puntos de base desigualmente espaciados

#### 4.2.7.1 Cuadratura de Newton-Cotes

Para  $r$  puntos de base igualmente espaciados, la fórmula de integración de Newton-Cotes está dada por

$$\int_a^b F(x) dx = (b - a) \sum_{i=1}^r F(x_i) W_i \quad (40)$$

Donde  $W_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de ponderación, y  $x_i$  es el  $i$ -ésimo punto base, los cuales están igualmente espaciados. Con  $r = 1$  da la fórmula del rectángulo, con  $r = 2$  da la Regla Trapezoidal.  $F(x)$  es aproximada por un  $P_1(x)$ . El error en esta aproximación está dado por

$$E = O(h^3)$$

Donde  $h$  es el espaciamiento entre los puntos base. La notación  $O(h)$  se lee como “del orden de  $h$ ”, la cual es usada para indicar el orden del error en términos del espaciamiento  $h$ . (1)

Con  $r = 3$  da la Regla de Simpson de un tercio ya anteriormente mencionada, cuyo error es del orden de  $h^5$ .

Los coeficientes de ponderación para  $r = 1, 2, \dots, 7$  están dados en la siguiente tabla

$r$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$	$W_7$
1	1						
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$				
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
5	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$		
6	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$	
7	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$

Tabla 1 Coeficientes de ponderación para la fórmula de Newton Cotes

(Fuente: J. N. Reddy, (1993), An Introduction to the Finite Element Method, Second Edition, McGraw-Hill, Inc.)

La localización del punto base para  $r = 1$  es  $x_1 = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b)$ .

Para  $r > 1$ , las localizaciones de los puntos bases son

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + \Delta x, \quad \dots, \quad x_r = a + (r - 1)\Delta x = b$$

$$\Delta x = \frac{(b - a)}{(r - 1)}$$

Para un número  $r$  par, la formula es exacta cuando  $F(x)$  es un polinomio de grado  $r + 1$  o menor. Para  $r$  impar, la formula es exacta para un polinomio de grado  $r$  o menor.

Por el contrario, un polinomio de grado  $p$ -ésimo es integrado exactamente al elegir  $r = p + 1$  puntos de base.

#### 4.2.7.2 Cuadratura de Gauss-Legendre

En la cuadratura de Newton-Cotes las localizaciones de los puntos de base han sido especificadas. Si los  $x_i$  no son especificados, entonces habrán en total  $2r + 2$  parámetros indeterminados, los pesos  $W_i$  y los puntos de base  $x_i$ , los cuales definen un polinomio de grado  $2r + 1$ .

La cuadratura de Gauss-Legendre está basada en la siguiente idea: los puntos de base  $\xi_i$  y los coeficientes de ponderación  $W_i$  son elegidos de tal forma que la suma de los  $r + 1$  valores de la función apropiadamente ponderados produce la integral exacta cuando  $F(x)$  es un polinomio de grado  $2r + 1$  o menos. (1)

La formula de la cuadratura de Gauss-Legendre está dada por

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{F}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^r \hat{F}(\xi_i) W_i \quad (41)$$

Donde  $W_i$  son los coeficientes de ponderación y los  $\xi_i$  son los puntos de base (que en este caso son las raíces de los polinomios de Legendre  $P_{r+1}(\xi)$ ).  $\hat{F}$  es el integrando transformado así

$$\hat{F}(\xi) = F(x(\xi)) J(\xi)$$

Donde  $J$  es el jacobiano de la transformación.

Los coeficientes de ponderación para  $r = 1, 2, \dots, 6$ , junto con los puntos de base, están dados en la siguiente tabla

2 Coeficientes de ponderación y puntos de base para la cuadratura de Gauss Legendre

Points $\xi_i$	$r$	Weights $w_i$
0.000000000	One-point formula	2.000000000
$\pm 0.5773502692$	Two-point formula	1.000000000
0.000000000 $\pm 0.7745966692$	Three-point formula	0.888888889 0.555555555
$\pm 0.3399810435$ $\pm 0.8611363116$	Four-point formula	0.6521451548 0.3478548451
0.000000000 $\pm 0.5384693101$ $\pm 0.9061798459$	Five-point formula	0.568888889 0.4786286705 0.2369268850
$\pm 0.2386191861$ $\pm 0.6612093865$ $\pm 0.9324695142$	Six-point formula	0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924

(Fuente: J. N. Reddy, (1993), An Introduction to the Finite Element Method, Second Edition, McGraw-Hill, Inc.)

#### 4.2.8 PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS PARA INTEGRALES DE LINEA

Al emplear la metodología de Galerkin basada en

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma = 0$$

es evidente notar que surgirán términos que impliquen integraciones sobre el borde desde un punto inicial a otro punto final siguiendo una trayectoria definida por la frontera del dominio.

El segundo término de la ecuación anterior normalmente conlleva términos de la forma

$$\int_c f(x, y) d\Gamma$$

Para poder realizar tales integrales es necesario parametrizar la curva de integración.

Si la curva puede ser descrita a través de un parámetro  $t$  de la siguiente manera

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

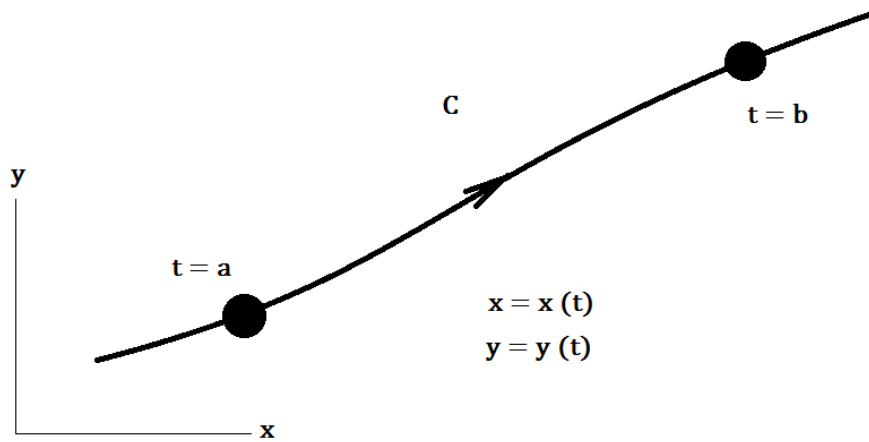


Ilustración 13 Curva de integración definida entre dos nodos

La integral de línea anterior puede ser escrita así (8)

$$\int_C f(x,y) \, d\Gamma = \int_a^b f(x(t),y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt \quad (42)$$

Normalmente para definir las curvas, se emplea algún tipo de interpolación que una los límites de integración. Si solo se consideran los límites de integración, es decir, dos puntos, la interpolación será de tipo lineal. Si se emplean tres puntos, la interpolación será de tipo cuadrática, y si se emplean cuatro puntos la interpolación será de tipo cúbica. De forma general, la relación entre las coordenadas cartesianas y el parámetro será así

$$x = x(t) = \sum_{i=1}^n x_i N_i(t) \quad (43)$$

$$y = y(t) = \sum_{i=1}^n y_i N_i(t) \quad (44)$$



Donde  $(x_i, y_i)$  son las coordenadas del punto  $i$ -ésimo,  $n$  es el número de puntos empleados en la interpolación, y  $N_i(t)$  es la función de forma  $i$ -ésima que aproxima (modela) la curva de integración. Esto permite definir con el orden deseado de la forma de la curva de integración, independiente del mallado en el dominio.

#### 4.2.9 MINIMOS CUADRADOS PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

Un sistema lineal  $Ax = b$  es inconsistente si no tiene solución. El método de mínimos cuadrados consiste en modificar el problema de manera que no sea indispensable que la ecuación matricial  $Ax = b$  se satisfaga. En cambio, se busca otro vector  $\tilde{x}$  tal que  $A\tilde{x}$  sea lo más cercano a  $b$ . El problema de aproximación será hallar aquella combinación lineal de columnas de la matriz  $A$  lo más cercana posible al vector  $b$ .

Se sabe que  $Ax = b$  es consistente si y solo si  $b$  pertenece al espacio columna de  $A$ . Si  $W$  es el espacio generado por las columnas de  $A$ , el vector más cercano a  $b$  es el vector proyección de  $b$  sobre  $W$ .

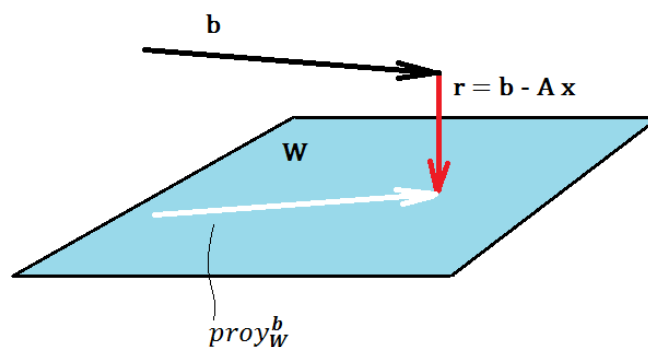


Ilustración 14 Esquema de solución por mínimos cuadrados

Si se define el vector residuo como  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}$ , la condición de minimización del residuo será que el vector residuo sea ortogonal al espacio  $W$ , o bien a cada columna de  $\mathbf{A}$ . Cada una de las condiciones de perpendicularidad se pueden agrupar en una sola

$$\mathbf{A}^T \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

O bien

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

Por lo tanto, la mejor aproximación es

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (45)$$

Este método será empleado para la solución de sistemas lineales donde hay más ecuaciones que incógnitas, y algunas ecuaciones son redundantes o cuasi redundantes.

## 5. METODOLOGÍA GENERAL PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL ANISOTRÓPICO 2D

Las ecuaciones diferenciales que rigen el problema elástico lineal anisotrópico no presentan soluciones analíticas fáciles de determinar, incluso para análisis sencillos, y como consecuencia, es necesario realizar aproximaciones que brinden soluciones numéricas al problema. A partir de aquí se introducen cada uno de los pasos que componen la metodología

### 5.1 APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTO.

Para la solución del problema elástico se emplea el planteamiento en desplazamientos de las ecuaciones de equilibrio. En este sentido, es necesario establecer una aproximación al campo de desplazamiento  $\vec{u} = \{u, v\}^T$  en el interior del sólido, donde cada componente representa una variable escalar que indica el desplazamiento en la dirección de los ejes coordenados

Si  $\vec{x} = \{x, y\}^T$  es el vector de posición de un punto del sólido, una aproximación para los desplazamientos, de forma general, puede ser escrita de la siguiente manera

$$u \approx \hat{u}(\vec{x}) = N_i(\vec{x}) a_i = \{N_1(\vec{x}) \quad N_2(\vec{x}) \quad \dots \quad N_n(\vec{x})\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (46)$$

$$v \approx \hat{v}(\vec{x}) = N_j(\vec{x}) b_j = \{N_1(\vec{x}) \quad N_2(\vec{x}) \quad \dots \quad N_n(\vec{x})\} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad (47)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n = \text{NumFuncBase}$$

Donde las  $N_i(\vec{x})$ ,  $W_j(\vec{x})$  y  $W_k(\vec{x})$  son funciones de base que definen la forma de la solución (por eso también son llamadas funciones de forma), y cada uno de sus coeficientes son valores constantes incógnitas que permiten ajustar la solución numérica de acuerdo a algún criterio de minimización del error.

Es posible definir estas funciones de base de muchas formas diferentes. Por ejemplo, el convencional Método de Elementos Finitos desarrolla sus funciones de forma con base a unos elementos finitos que discretizan el dominio. De esta manera cada elemento posee sus funciones de forma, y por lo tanto, tales funciones son particionadas, o a trozos, y además deben cumplir una serie de requerimientos (en cuando a continuidad y consistencia) para lograr la convergencia de la solución.

Además, se pueden optar funciones definidas globalmente sobre todo el dominio si así se desea. Como es notable, una gran ventaja de este método es que se puede definir cualquier base de funciones para la aproximación, siempre y cuando sean diferenciables hasta el orden que lo requiera la formulación de integral pondera. Por consiguiente, es posible introducir información a priori de la solución aproximada al insertar funciones de base se ajusten bien (por ejemplo, de acuerdo a la literatura) al tipo de solución del problema.

## **5.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DEL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL ANISOTRÓPICO EN FUNCIÓN DE LA APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTO: DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO**

Como se ha establecido una aproximación al campo de desplazamientos, esta debe ser incluida dentro de las ecuaciones que rigen el problema elástico lineal anisotrópico.

Se emplea wxMaxima para obtener la forma en que resultan las ecuaciones de equilibrio obtenidas anteriormente, ahora en términos de la aproximación del campo de desplazamiento.

$$b_j \left( \frac{d^2}{dx dy} N_j \right) C_{66} + a_i \left( \frac{d^2}{dy^2} N_i \right) C_{66} + b_j \left( \frac{d^2}{dy^2} N_j \right) C_{62} + a_i \left( \frac{d^2}{dx dy} N_i \right) C_{61} + b_j \left( \frac{d^2}{dx^2} N_j \right) C_{16} + a_i \left( \frac{d^2}{dx dy} N_i \right) C_{16} + b_j \left( \frac{d^2}{dx dy} N_j \right) C_{12} + a_i \left( \frac{d^2}{dx^2} N_i \right) C_{11} + f_x = 0$$

$$b_j \left( \frac{d^2}{dx^2} N_j \right) C_{66} + a_i \left( \frac{d^2}{dx dy} N_i \right) C_{66} + b_j \left( \frac{d^2}{dx dy} N_j \right) C_{62} + a_i \left( \frac{d^2}{dx^2} N_i \right) C_{61} + b_j \left( \frac{d^2}{dx dy} N_j \right) C_{26} + a_i \left( \frac{d^2}{dy^2} N_i \right) C_{26} + b_j \left( \frac{d^2}{dy^2} N_j \right) C_{22} + a_i \left( \frac{d^2}{dx dy} N_i \right) C_{21} + f_y = 0$$

**Ilustración 15 Ecuaciones de equilibrio en términos de la aprox. del campo de desplazamiento**

Lo anterior en realidad son componentes del residuo, así

1ª. Componente del residuo

$$A_1(\hat{u}, \hat{v}) = C_{66} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} b_j + C_{66} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} a_i + C_{62} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} b_j + C_{61} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} a_i + C_{16} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} b_j$$

$$+ C_{16} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} a_i + C_{12} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} b_j + C_{11} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} a_i + f_x = 0$$

2ª. Componente del residuo

$$A_2(\hat{u}, \hat{v}) = C_{66} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} b_j + C_{66} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} a_i + C_{62} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} b_j + C_{61} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} a_i + C_{26} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} b_j$$

$$+ C_{26} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} a_i + C_{22} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} b_j + C_{21} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} a_i + f_y = 0$$

De esta forma, el residuo en el domino está dado por

$$\vec{R}_\Omega = \begin{Bmatrix} A_1(\hat{u}, \hat{v}) \\ A_2(\hat{u}, \hat{v}) \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio pueden ser formuladas como integrales ponderadas con el Método de Residuos Ponderados.

$$\int_{\Omega} W_l \overline{R}_{\Omega} d\Omega$$

Cada uno de los operadores diferenciales que aparecen en las componentes del residuo o error, son convertidos en matrices, esto en sí constituye la discretización de las ecuaciones diferenciales.

Se define entonces a

$$\left\langle \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}, W_l \right\rangle = M_{xxli} = [M_{xx}]$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}, W_l \right\rangle = M_{yyli} = [M_{yy}]$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y}, W_l \right\rangle = M_{xyli} = [M_{xy}]$$

$$\langle f_x, W_l \rangle = f_{xl} = \{F_x\}$$

$$\langle f_y, W_l \rangle = f_{yl} = \{F_y\}$$

$$a_i = \{a\}$$

$$b_j = \{b\}$$

Si se toman las  $N_i = W_l$  entonces estamos empleando el Método de Galerkin, el cual es un caso particular del Método de Residuos Ponderados.

Aplicando Galerkin a cada componente del residuo se obtiene

1ª. Componente del residuo en el dominio

$$C_{66}[M_{xy}]\{b\} + C_{66}[M_{yy}]\{a\} + C_{62}[M_{yy}]\{b\} + C_{61}[M_{xy}]\{a\} + C_{16}[M_{xx}]\{b\} \\ + C_{16}[M_{xy}]\{a\} + C_{12}[M_{xy}]\{b\} + C_{11}[M_{xx}]\{a\} + \{F_x\}$$

2ª. Componente del residuo en el dominio

$$C_{66}[M_{xx}]\{b\} + C_{66}[M_{xy}]\{a\} + C_{62}[M_{xy}]\{b\} + C_{61}[M_{xx}]\{a\} + C_{26}[M_{xy}]\{b\} \\ + C_{26}[M_{yy}]\{a\} + C_{22}[M_{yy}]\{b\} + C_{21}[M_{xy}]\{a\} + \{F_y\}$$

Ordenando los residuos anteriores, resulta:

1ª. Componente del residuo en el dominio

$$(C_{66}[M_{yy}] + C_{61}[M_{xy}] + C_{16}[M_{xy}] + C_{11}[M_{xx}])\{a\} \\ + (C_{66}[M_{xy}] + C_{62}[M_{yy}] + C_{16}[M_{xx}] + C_{12}[M_{xy}])\{b\} + \{F_x\}$$

2ª. Componente del residuo en el dominio

$$(C_{66}[M_{xy}] + C_{61}[M_{xx}] + C_{26}[M_{yy}] + C_{21}[M_{xy}])\{a\} \\ + (C_{66}[M_{xx}] + C_{62}[M_{xy}] + C_{26}[M_{xy}] + C_{22}[M_{yy}])\{b\} + \{F_y\}$$

Si hacemos

$$[M_{a1}] = C_{66}[M_{yy}] + C_{61}[M_{xy}] + C_{16}[M_{xy}] + C_{11}[M_{xx}]$$

$$[M_{b1}] = C_{66}[M_{xy}] + C_{62}[M_{yy}] + C_{16}[M_{xx}] + C_{12}[M_{xy}]$$

$$[M_{a2}] = C_{66}[M_{xy}] + C_{61}[M_{xx}] + C_{26}[M_{yy}] + C_{21}[M_{xy}]$$

$$[M_{b2}] = C_{66}[M_{xx}] + C_{62}[M_{xy}] + C_{26}[M_{xy}] + C_{22}[M_{yy}]$$

Las componentes del residuo resultan así:

1ª. Componente del residuo en el dominio

$$[M_{a1}]\{a\} + [M_{b1}]\{b\} + \{F_x\}$$

2ª. Componente del residuo en el dominio

$$[M_{a2}]\{a\} + [M_{b2}]\{b\} + \{F_y\}$$

De forma general, al aplicar Galerkin sobre el residuo en el dominio, se obtiene lo siguiente

$$\int_{\Omega} W_l \overrightarrow{R_{\Omega}} d\Omega = \begin{bmatrix} [M_{a1}] & [M_{b1}] \\ [M_{a2}] & [M_{b2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{Bmatrix}$$

Si hacemos

$$[M_D] = \begin{bmatrix} [M_{a1}] & [M_{b1}] \\ [M_{a2}] & [M_{b2}] \end{bmatrix}$$
$$\{f_D\} = \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{Bmatrix}$$

Se obtiene finalmente que

$$\int_{\Omega} W_l \overrightarrow{R_{\Omega}} d\Omega = [M_D] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} + \{f_D\} \quad (49)$$



### 5.3 CONDICIONES DE CONTORNO EN TÉRMINOS DE LA APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTO

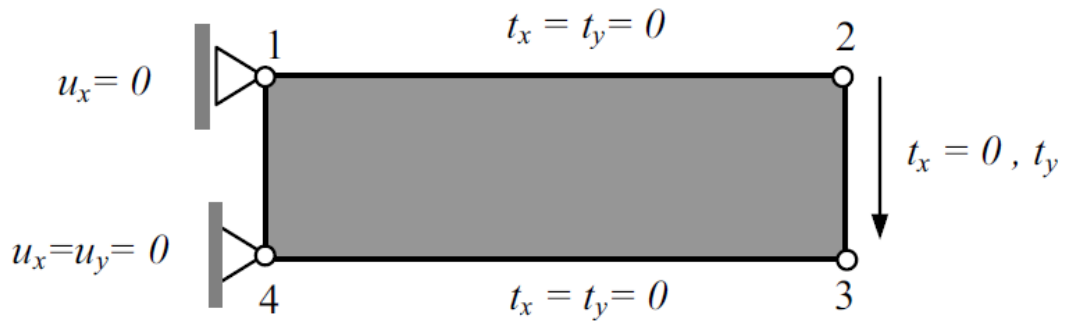


Ilustración 16 Problema de valor en la frontera

(Fuente: Beer, G., Smith, I., Duenser, C., (2008), The boundary element method with programming, for engineering and scientist)

#### 5.3.1 Condiciones de borde de tipo Dirichlet

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_o(x, y) \\ \mathbf{v}_o(x, y) \end{Bmatrix} \text{ en } \Gamma_u$$

El residuo en el borde, en desplazamientos, está dado por

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma_u} = \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_o \\ \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_o \\ \mathbf{N}_j \mathbf{b}_j - \mathbf{v}_o \end{Bmatrix} \quad (50)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n = \text{NumFuncBase}$$

Se aplica Galerkin a este vector de residuo, y se obtiene

$$\int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \overrightarrow{R_{\Gamma_u}} d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \begin{Bmatrix} N_i \mathbf{a}_i - \mathbf{u}_o \\ N_j \mathbf{b}_j - \mathbf{v}_o \end{Bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \begin{Bmatrix} \bar{W}_l N_i \mathbf{a}_i - \bar{W}_l \mathbf{u}_o \\ \bar{W}_l N_j \mathbf{b}_j - \bar{W}_l \mathbf{v}_o \end{Bmatrix} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \overrightarrow{R_{\Gamma_u}} d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \begin{Bmatrix} \bar{W}_l N_i \mathbf{a}_i \\ \bar{W}_l N_j \mathbf{b}_j \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \begin{Bmatrix} \bar{W}_l \mathbf{u}_o \\ \bar{W}_l \mathbf{v}_o \end{Bmatrix} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \overrightarrow{R_{\Gamma_u}} d\Gamma = \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l N_i \mathbf{a}_i d\Gamma \\ \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l N_j \mathbf{b}_j d\Gamma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \mathbf{u}_o d\Gamma \\ \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \mathbf{v}_o d\Gamma \end{Bmatrix}$$

$$\int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \overrightarrow{R_{\Gamma_u}} d\Gamma = \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l N_i d\Gamma \mathbf{a}_i \\ \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l N_j d\Gamma \mathbf{b}_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \mathbf{u}_o d\Gamma \\ \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \mathbf{v}_o d\Gamma \end{Bmatrix}$$

Si hacemos

$$[M_{d1}] = \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l N_i d\Gamma$$

$$[M_{d2}] = \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l N_j d\Gamma$$

$$\{d_x\} = \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \mathbf{u}_o d\Gamma$$

$$\{d_y\} = \int_{\Gamma_u} \bar{W}_l \mathbf{v}_o d\Gamma$$

Entonces

$$\int_{\Gamma_u} \overline{W}_l \overrightarrow{R}_{\Gamma_u} d\Gamma = \begin{Bmatrix} [M_{d1}] \{a\} \\ [M_{d2}] \{b\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{d_x\} \\ \{d_y\} \end{Bmatrix}$$

$$\int_{\Gamma_u} \overline{W}_l \overrightarrow{R}_{\Gamma_u} d\Gamma = \begin{bmatrix} [M_{d1}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [M_{d2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{d_x\} \\ \{d_y\} \end{Bmatrix}$$

Ahora bien, si hacemos

$$[M_{desp}] = \begin{bmatrix} [M_{d1}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [M_{d2}] \end{bmatrix}$$

$$\{v_{desp}\} = \begin{Bmatrix} \{d_x\} \\ \{d_y\} \end{Bmatrix}$$

Entonces finalmente

$$\int_{\Gamma_u} \overline{W}_l \overrightarrow{R}_{\Gamma_u} d\Gamma = [M_{desp}] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} - \{v_{desp}\} \quad (51)$$

### 5.3.2. Condiciones de borde de tipo Neumann

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{x_0}(x, y) \\ t_{y_0}(x, y) \end{Bmatrix} \text{ en } \Gamma_t$$

$$\overrightarrow{R}_{\Gamma_t} = \overrightarrow{B}_{\Gamma_t}(\hat{u}, \hat{v}) = \begin{Bmatrix} t_x - t_{x_0}(x, y) \\ t_y - t_{y_0}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Es necesario dejar cada componente del vector de tracción en términos de la aproximación del campo de desplazamiento y luego aplicar Galerkin al vector residuo que resulta

Sabemos que

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{16}\gamma_{xy} = C_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{12}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{16}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \sigma_{yy} &= C_{21}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{26}\gamma_{xy} = C_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{22}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{26}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{xy} &= C_{61}\varepsilon_{xx} + C_{62}\varepsilon_{yy} + C_{66}\gamma_{xy} = C_{61}\frac{\partial u}{\partial x} + C_{62}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

Empleando la aproximación, los esfuerzos resultan así

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_{11}\frac{\partial N_i}{\partial x}a_i + C_{12}\frac{\partial N_j}{\partial y}b_j + C_{16}\frac{\partial N_i}{\partial y}a_i + C_{16}\frac{\partial N_j}{\partial x}b_j \\ &= \left(C_{11}\frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{16}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)a_i + \left(C_{12}\frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{16}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)b_j \\ \sigma_{yy} &= C_{21}\frac{\partial N_i}{\partial x}a_i + C_{22}\frac{\partial N_j}{\partial y}b_j + C_{26}\frac{\partial N_i}{\partial y}a_i + C_{26}\frac{\partial N_j}{\partial x}b_j \\ &= \left(C_{21}\frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{26}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)a_i + \left(C_{22}\frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{26}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)b_j \\ \tau_{xy} &= C_{61}\frac{\partial N_i}{\partial x}a_i + C_{62}\frac{\partial N_j}{\partial y}b_j + C_{66}\frac{\partial N_i}{\partial y}a_i + C_{66}\frac{\partial N_j}{\partial x}b_j \\ &= \left(C_{61}\frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{66}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)a_i + \left(C_{62}\frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{66}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)b_j\end{aligned}$$

Las componentes del vector de tracción son

$$t_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y$$

$$t_y = \tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y$$

Reemplazando los esfuerzos en las componentes del vector de tracción, se tiene que

$$t_x = \left( C_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{16} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) a_i n_x + \left( C_{12} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) b_j n_x \\ + \left( C_{61} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) a_i n_y + \left( C_{62} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) b_j n_y$$

$$t_y = \left( C_{61} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) a_i n_x + \left( C_{62} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) b_j n_x \\ + \left( C_{21} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) a_i n_y + \left( C_{22} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{26} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) b_j n_y$$

En términos de los coeficientes incógnitas tenemos que

$$t_x = \left[ \left( C_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{16} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) n_x + \left( C_{61} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) n_y \right] a_i \\ + \left[ \left( C_{12} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) n_x + \left( C_{62} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) n_y \right] b_j$$

$$t_y = \left[ \left( C_{61} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) n_x + \left( C_{21} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) n_y \right] a_i \\ + \left[ \left( C_{62} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) n_x + \left( C_{22} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{26} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) n_y \right] b_j$$

Si hacemos que

$$t_{1i} = \left( C_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{16} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) n_x + \left( C_{61} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) n_y$$

$$t_{2j} = \left( C_{12} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) n_x + \left( C_{62} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) n_y$$

$$t_{3i} = \left( C_{61} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) n_x + \left( C_{21} \frac{\partial N_i}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) n_y$$

$$t_{4j} = \left( C_{62} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) n_x + \left( C_{22} \frac{\partial N_j}{\partial y} + C_{26} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) n_y$$

Las componentes del vector de tracción quedan así

$$t_x = t_{1i} a_i + t_{2j} b_j$$

$$\mathbf{t}_y = t_{3_i} \mathbf{a}_i + t_{4_j} \mathbf{b}_j$$

Y el residuo en tracción resulta ser así

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma_t} = \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\Gamma_t}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = \begin{cases} t_{1_i} \mathbf{a}_i + t_{2_j} \mathbf{b}_j - t_{x_0} \\ t_{3_i} \mathbf{a}_i + t_{4_j} \mathbf{b}_j - t_{y_0} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n = \text{NumFuncBase}$$

Por lo tanto, al aplicar Galerkin se obtiene finalmente lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma_t} d\Gamma &= \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l \begin{cases} t_{1_i} \mathbf{a}_i + t_{2_j} \mathbf{b}_j - t_{x_0} \\ t_{3_i} \mathbf{a}_i + t_{4_j} \mathbf{b}_j - t_{y_0} \end{cases} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \begin{cases} \overline{\mathbf{W}}_l t_{1_i} \mathbf{a}_i + \overline{\mathbf{W}}_l t_{2_j} \mathbf{b}_j - \overline{\mathbf{W}}_l t_{x_0} \\ \overline{\mathbf{W}}_l t_{3_i} \mathbf{a}_i + \overline{\mathbf{W}}_l t_{4_j} \mathbf{b}_j - \overline{\mathbf{W}}_l t_{y_0} \end{cases} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma_t} d\Gamma &= \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_t} (\overline{\mathbf{W}}_l t_{1_i} \mathbf{a}_i + \overline{\mathbf{W}}_l t_{2_j} \mathbf{b}_j - \overline{\mathbf{W}}_l t_{x_0}) d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} (\overline{\mathbf{W}}_l t_{3_i} \mathbf{a}_i + \overline{\mathbf{W}}_l t_{4_j} \mathbf{b}_j - \overline{\mathbf{W}}_l t_{y_0}) d\Gamma \end{array} \right\} \\ \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma_t} d\Gamma &= \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{1_i} \mathbf{a}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{2_j} \mathbf{b}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{x_0} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{3_i} \mathbf{a}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{4_j} \mathbf{b}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{y_0} d\Gamma \end{array} \right\} \\ \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma_t} d\Gamma &= \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{1_i} d\Gamma \mathbf{a}_i + \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{2_j} d\Gamma \mathbf{b}_j - \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{x_0} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{3_i} d\Gamma \mathbf{a}_i + \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{4_j} d\Gamma \mathbf{b}_j - \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{y_0} d\Gamma \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Si hacemos

$$[\mathbf{M}_{t1}] = \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{W}}_l t_{1_i} d\Gamma$$

$$[M_{t2}] = \int_{\Gamma_t} \bar{W}_l t_{2i} d\Gamma$$

$$[M_{t3}] = \int_{\Gamma_t} \bar{W}_l t_{3i} d\Gamma$$

$$[M_{t4}] = \int_{\Gamma_t} \bar{W}_l t_{4i} d\Gamma$$

$$\{t_x\} = \int_{\Gamma_t} \bar{W}_l t_{x0} d\Gamma$$

$$\{t_y\} = \int_{\Gamma_t} \bar{W}_l t_{y0} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_t} \bar{W}_l \overrightarrow{R_{\Gamma_t}} d\Gamma = \begin{Bmatrix} [M_{t1}]\{a\} + [M_{t2}]\{b\} - \{t_x\} \\ [M_{t3}]\{a\} + [M_{t4}]\{b\} - \{t_y\} \end{Bmatrix}$$

$$\int_{\Gamma_t} \bar{W}_l \overrightarrow{R_{\Gamma_t}} d\Gamma = \begin{Bmatrix} [M_{t1}]\{a\} + [M_{t2}]\{b\} \\ [M_{t3}]\{a\} + [M_{t4}]\{b\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{t_x\} \\ \{t_y\} \end{Bmatrix}$$

$$\int_{\Gamma_t} \bar{W}_l \overrightarrow{R_{\Gamma_t}} d\Gamma = \begin{bmatrix} [M_{t1}] & [M_{t2}] \\ [M_{t3}] & [M_{t4}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{t_x\} \\ \{t_y\} \end{Bmatrix}$$

Si hacemos

$$[M_{trac}] = \begin{bmatrix} [M_{t1}] & [M_{t2}] \\ [M_{t3}] & [M_{t4}] \end{bmatrix}$$

$$[v_{trac}] = \begin{Bmatrix} \{t_x\} \\ \{t_y\} \end{Bmatrix}$$

Entonces el residuo en tracción resulta así

$$\int_{\Gamma_t} \bar{W}_l \overrightarrow{R_{\Gamma_t}} d\Gamma = [M_{trac}] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} - [v_{trac}] \quad (53)$$

## 5.4 SOLUCIÓN COMPLETA AL PROBLEMA ELÁSTICO

La solución completa al problema elástico está dada a partir de

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{\mathbf{w}}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma} d\Gamma = \mathbf{0}$$

La frontera del dominio tiene una parte en tracciones y otra en desplazamientos

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \overline{\mathbf{w}}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma_u} d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{w}}_l \overrightarrow{\mathbf{R}}_{\Gamma_t} d\Gamma = \mathbf{0}$$

Reemplazando todo lo obtenido anteriormente, se tiene que

$$[M_D] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} + \{f_D\} + [M_{desp}] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} - \{v_{desp}\} + [M_{trac}] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} - [v_{trac}] = 0$$

Ordenando términos semejantes, tenemos que

$$([M_D] + [M_{desp}] + [M_{trac}]) \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} + \{f_D\} - \{v_{desp}\} - [v_{trac}] = 0$$

Si hacemos

$$[K] = [M_D] + [M_{desp}] + [M_{trac}]$$

$$\{f\} = -(\{f_D\} - \{v_{desp}\} - [v_{trac}])$$

Entonces finalmente se obtiene

$$[K] \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} = \{f\} \quad (54)$$

Esta matriz de rigidez ya contiene las condiciones de borde impuestas, así que no es necesario realizar ninguna técnica de imposición de desplazamiento nodal como en el Método de Elementos Finitos (ej. eliminar



una fila correspondiente al nodo donde el desplazamiento es conocido, y cosas así) y demás métodos basados en mallas.

Con las ecuaciones de equilibrio interno y externo en términos de los coeficientes de ajustes incógnitas, se define completamente el problema elástico lineal anisotrópico. Solo resta implementar estas ecuaciones en un software de computación numérica.

## 6. IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL

Para implementar la metodología desarrollada hasta ahora, es necesario el uso de un software que permita realizar todos los cálculos numéricos requeridos. En el presente trabajo se decidió trabajar con Scilab.

### 6.1 SCILAB

Scilab © es un software matemático creado en 1990 por investigadores del INRIA y de la École nationale des ponts et chaussées (ENPC), de licencia OpenSource, disponible en múltiples sistemas operativos (Mac OS X, GNU/Linux, Windows), con un lenguaje de programación de alto nivel y diversas herramientas matemáticas aptas para la simulación de sistemas físicos. En el presente trabajo se emplea la versión 5. 4.0 de Scilab.

### 6.2 PRESENTACIÓN DE SUBROUTINAS

Con el fin de implementar la metodología propuesta, se desarrolla un conjunto de subrutinas que constituyen el algoritmo principal. A continuación se presentan cada una de las subrutinas:

- I. **BaseFunc.sce:** define las funciones de base a utilizar. La presente metodología brinda la libertad de utilizar cualquier tipo de funciones de base, particionadas según una discretización o definidas de manera global. El analista debe definir manualmente las funciones de base que se utilizarán en la simulación. Esta subrutina debe contener una función nombrada "Ni" con argumentos  $(x, y, i)$ , la cual arroja el valor de la función de forma  $i$ -ésima en el punto  $(x, y)$ .
- II. **DerivBaseFunc.sce:** define las derivadas de las funciones de base respecto a las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . Lógicamente estas funciones deben ser las derivadas de las funciones definidas

en FuncBase.sce. Esta subrutina debe contener un conjunto de funciones (D1x, D1y, D2x, D2y, D2xy) cada una con argumentos (x, y, i).

- III. **DomainBoundDef.sce:** se deben cargar las siguientes matrices:
- “elem” la cual define los elementos y los nodos que los conforman (conectividad).
  - “dnod” que define la posición de cada nodo en el interior del dominio.
  - “bnod” que define la posición de cada nodo en el contorno del dominio.

Para esto, es necesario ingresar a esta subrutina e insertar cada una de estas matrices. El código trae unas predefinidas a manera de ejemplo. Se observa que se define la representación del contorno independiente de la discretización en el dominio. Las matrices elem y dnod definen los “elementos” sobre los cuales se harán las integrales, mientras que la matriz bnod define el modelado de la frontera. Es necesario además ingresar el espesor del sólido medido a lo largo del ejez. Todas las medidas son en metros.

- IV. **DomainIntgr.sce:** se crea una función que realiza las integrales en el dominio utilizando el comando int2d de Scilab, empleando la discretización definida en la subrutina anterior.
- V. **DomainGalerkin.sce:** se definen funciones en Scilab que sirven para ponderar el residuo de funciones escalares o vectoriales, empleando las funciones de base como funciones de ponderación.

- VI. **DiscretDE.sce:** se convierten los operadores diferenciales de la E.D en matrices. Se define el tipo de material junto con sus propiedades mecánicas relevantes, el tipo de problema, la densidad, y se forma la matriz  $M_D$  y el vector  $f_D$ .
- VII. **BoundIntgr.sce:** se crea una función para realizar las integrales en el contorno con la cuadratura de Gauss.
- VIII. **BoundModel.sce:** se definen las funciones de forma que logran parametrizar las curvas de integración. De igual manera se definen las derivadas de las coordenadas respecto al parámetro. Se obtiene el Jacobiano de la transformación para hacer el cambio de variable en las integrales. Finalmente se pide al usuario el tipo de parametrización que desea y los nodos a emplear para modelar el contorno.
- IX. **DirichletBC.sce:** se pide al usuario los nodos para definir las curvas de integración, al igual que el tipo de restricción cinemática y los valores de desplazamientos conocidos. Se forma la matriz  $M_{despl}$  y el vector  $v_{despl}$ .
- X. **NeumannBC.sce:** Se pide al usuario los nodos para definir las curvas de integración, al igual que el tipo de tracción y sus valores conocidos. Se forma la matriz  $M_{trac}$  y el vector  $v_{trac}$ .
- XI. **LeastSqSol.sce:** se acoplan las matrices y vectores obtenidos anteriormente para formar el sistema lineal que define el equilibrio en el dominio y en el contorno, así se forma la matriz  $K$  y el

vector  $f$ . Luego se soluciona el sistema lineal por el método de mínimos cuadrados, y se obtienen los coeficientes de ajuste.

- XII. **PresentSol.sce**: presentación de los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones, a través de gráficas y si se desea, por valores discretos.

**Todas las subrutinas se encuentran en los anexos.**

## 7. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La metodología presentada a largo del presente trabajo pretende, en últimas, ofrecer una solución numérica a los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones unitarias, en el dominio y en el contorno de sólidos lineales isotrópicos o anisotrópicos sometidos a cargas externas, y comportándose dentro del rango elástico.

Con base a dicha metodología de análisis, se desarrolló un conjunto de subrutinas en Scilab ©, que forman un código funcional, capaz de dar solución aproximada a problemas de esfuerzo plano y deformación plana.

Con el fin de evaluar la validez de los resultados obtenidos con el código, es necesario comparar la respuesta que éste arrojó frente a la respuesta de algún problema clásico de elasticidad que presente soluciones analíticas encontradas en la literatura. Para esto, se tomará un caso de estudio sencillo que no requieren de rigurosidad en cuanto a la representación del dominio y la frontera.

Luego de confrontar ambas soluciones, se presentan conclusiones respecto a la veracidad y eficiencia no solo del modelo matemático propuesto para resolver numéricamente cada caso de estudio sino además de la implementación computacional, y de esta manera se verifica si se cumplieron los objetivos propuestos en el presente trabajo.

## 7.1 CASO DE ESTUDIO

### Viga en voladizo sometida a flexión, cargada en su extremo

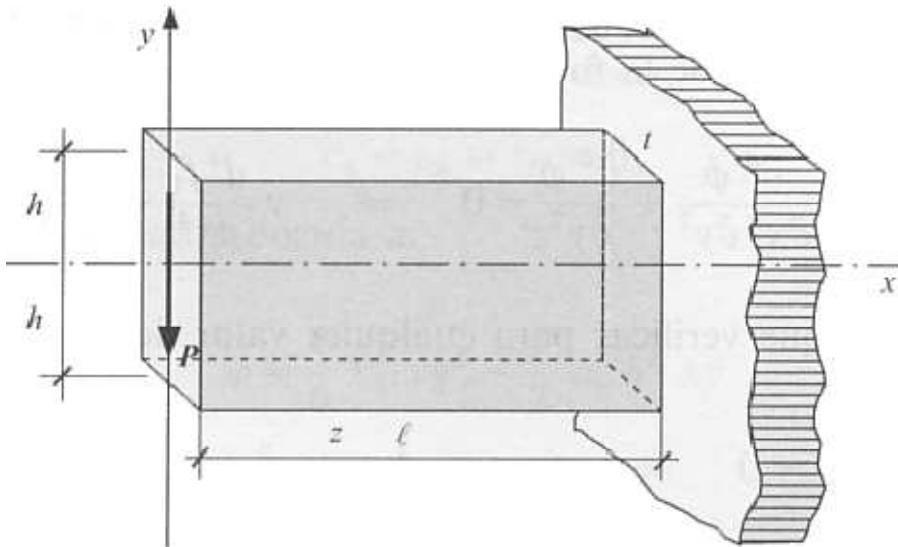


Ilustración 17 Viga en voladizo sometida a flexión<sup>8</sup>

Se desarrolla el presente caso de estudio con un material isotrópico, digamos acero estructural A 36 ( $\rho = 7850 \text{ Kg}/\text{m}^3$ ), con propiedades mecánicas (9)

$$E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu = 0.29$$

Los datos del problema son

$$L = 3 \text{ m}$$

$$t = 0.1 \text{ m}$$

<sup>8</sup> Imagen tomada de BERROCAL, Luis Ortíz. Elasticidad. Madrid : Mc. Graw- Hill, 1998. 1998. 84-481-2046-9, pag.227.

$$2h = 0.5 \text{ m}$$

$$F = 10000 \text{ N}$$

Debido a la geometría del dominio ( $t \ll 2h$ ) y a la condición de carga, el presente problema puede ser considerado un problema de esfuerzo plano.  
(9)

Si se toma como punto origen de coordenadas cartesianas al extremo inferior izquierdo de la viga, las condiciones de frontera son

- $u = 0$  y  $v = 0$  en todos los puntos dados por  $x = L$  y  $-h \leq y \leq h$
- $t_x = 0$  y  $t_y = 0$  en todos los puntos dados por  $0 \leq x \leq L$  y  $y = h$
- $t_x = 0$  y  $t_y = 0$  en todos los puntos dados por  $0 \leq x \leq L$  y  $y = -h$
- $t_x = 0$  y  $t_y = -F/h$  en todos los puntos dados por  $x = 0$  y  $-h \leq y \leq h$

### 7.1.1 Solución Analítica

Para este problema, una solución analítica encontrada en la literatura<sup>9</sup> para los esfuerzos, a partir de una función de Airy polinómica es (9)

$$\sigma_{xx} = \frac{F x}{I_z} y$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2 I_z} (h^2 - y^2)$$

---

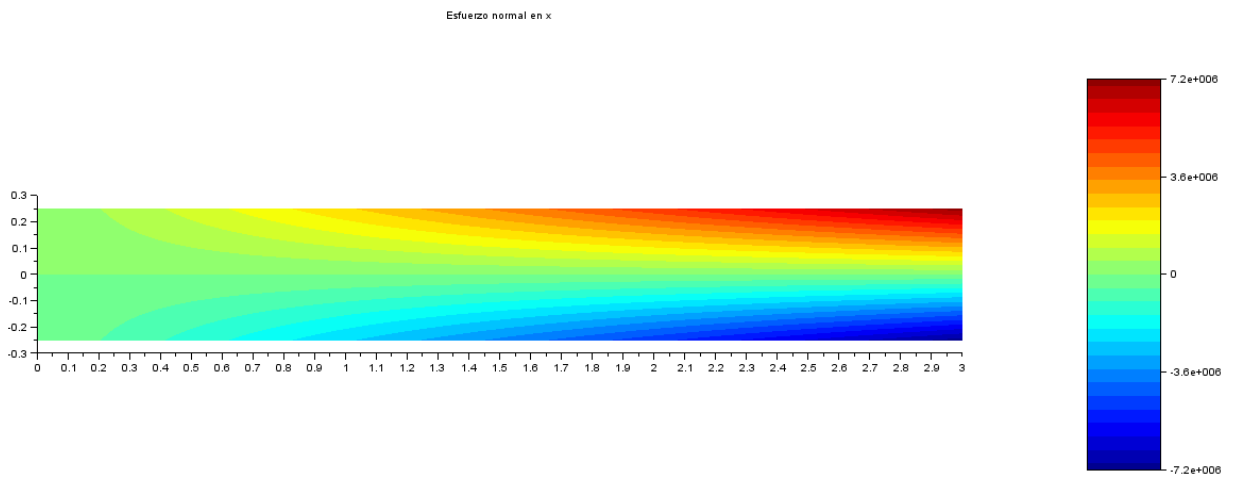
<sup>9</sup> Solución analítica tomada: de BERROCAL, Luis Ortíz. Elasticidad. Madrid : Mc. Graw- Hill, 1998. 84-481-2046-9, pag.229.



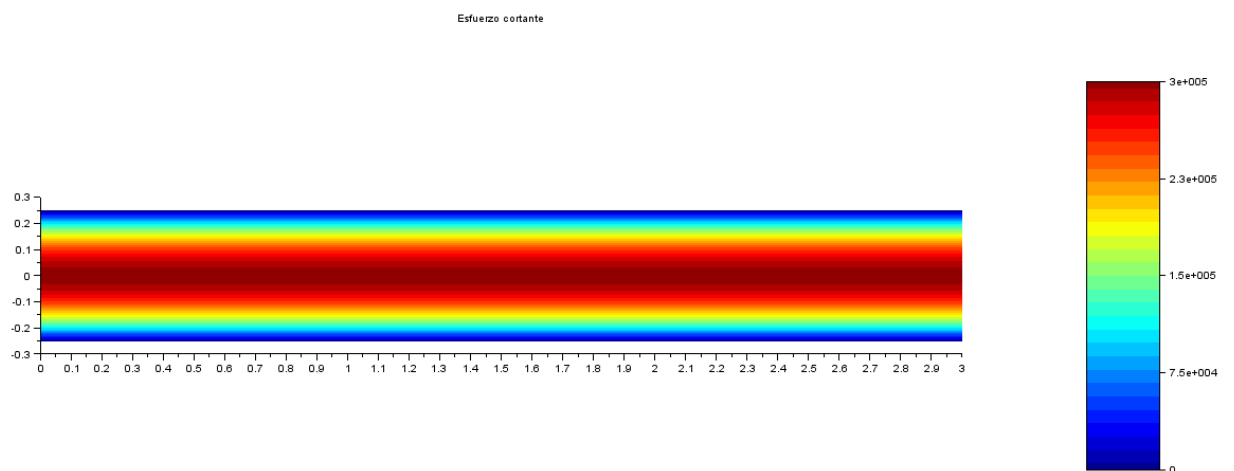
Donde  $I_z$  es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje alrededor del cual se flexa la viga.

A continuación se procede a graficar estas soluciones analíticas, con los datos suministrados, empleando Scilab. Los códigos empleados para estos resultados mostrados se encuentran en los anexos.

### Esfuerzo normal en $x$



### Esfuerzo cortante



## 7.1.2 Solución numérica

### 7.1.2.1 Funciones de base

Las funciones de base a emplear en el presente código son funciones polinómicas definidas sobre todo el dominio, y son de la forma

$$N_i(x, y, i) = x^{EX(i)} y^{EY(i)} \quad (55)$$

Donde  $EX(i)$  y  $EY(i)$  son exponentes menores o iguales a un número llamado **orden** en el código, porque precisamente definen el orden de la base polinomial. Esta constante **orden** representa una variable de entrada en el código. Se eligió esta base porque las derivadas pueden obtenerse sistemáticamente empleando wxMaxima<sup>10</sup>.

Es muy importante aclarar que, pueden utilizarse cualquier tipo de funciones de base definidas sobre todo el dominio, pues el código no está restringido a unas funciones como tal, a diferencia del MEF, el cual está limitado a funciones de base polinómicas definidas a trozos según una discretización del dominio.

Se pueden emplear las funciones de base del MEF, sin embargo habría que modificar un poco la subrutina **DomainIntgr.sce**, con el fin de realizar las integraciones sobre cada elemento finito.

En la subrutina **BaseFunc.sce** se añadió, a manera de ejemplo, unas funciones de base radial (RBF), que también pueden emplearse.

---

<sup>10</sup> wxMaxima es un paquete de algebra simbólica de licencia OpenSource.

### 7.1.2.2 Discretización del dominio

Para solucionar el problema anterior con el código desarrollado se emplea la siguiente discretización del dominio.<sup>11</sup>

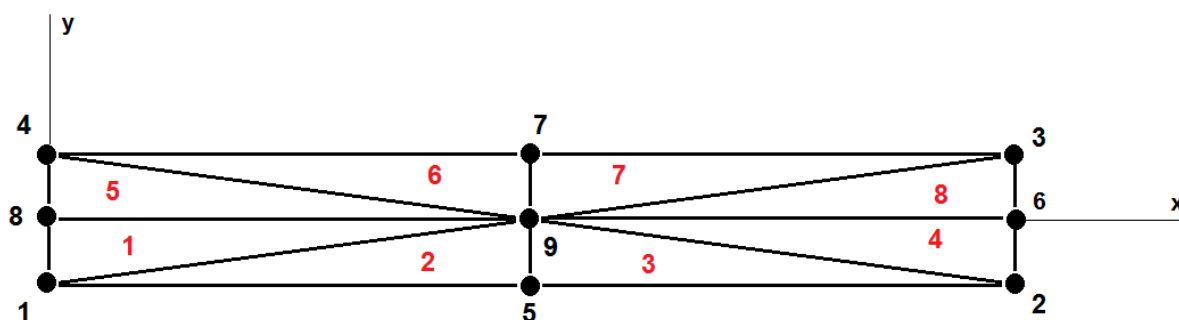


Ilustración 18 Discretización del dominio

Se muestran en negro la enumeración de los nodos, y en rojo la enumeración de las celdas triangulares.<sup>12</sup>

La matriz de **Nodos** es

Tabla 3 Coordenadas de los nodos

Numero del nodo	Coordenada en $x$	Coordenada en $y$
1	0	$-h$
2	$L$	$-h$
3	$L$	$h$
4	0	$h$
5	$L/2$	$-h$
6	$L$	0
7	$L/2$	$h$
8	0	0
9	$L/2$	0

<sup>11</sup> La discretización del dominio es realizada sólo con el fin de realizar las integraciones en Scilab empleando el comando *int2d*. No existen funciones de base particionadas, sino globales.

<sup>12</sup> Quizás pueden llamarse también elementos triangulares.

La matriz de **Elementos** es

Tabla 4 Conectividad de nodos

Numero del elemento	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3
1	1	9	8
2	1	5	9
3	2	9	5
4	2	6	9
5	9	4	8
6	9	7	4
7	9	3	7
8	6	3	9

El código ya tiene incluido en la subrutina **DomainBoundDef.sce** estas matrices y las constantes.

Para el presente problema se ingresó **orden= 6**

Con las funciones de base dictadas en 7.1.3.1, y con la discretización del dominio estipulada, el tiempo empleado por mi computador (procesador Intel Core i3, 2.53 GHz y memoria RAM de 4 Gb,) para ejecutar la discretización de las ecuaciones de equilibrio interno fue de 0:01:58.34 (poco menos de 2 minutos).

### 7.1.2.3 Representación del contorno

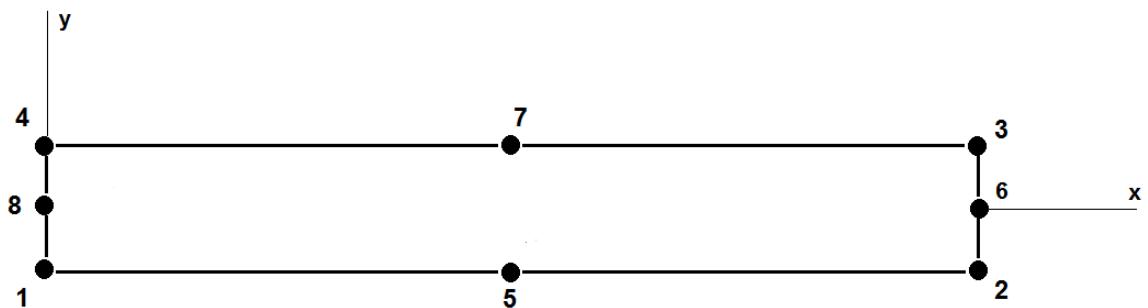
Ahora bien, para representar al contorno, se emplean también nodos ubicados en él. Cabe aclarar que, pueden utilizarse los nodos de la discretización del dominio, pero si se desea, se puede utilizar otra configuración de nodos en diferentes posiciones, y cualquier cantidad de nodos, lo que llevaría a definir a la matriz de **Nodos\_borde**.

*Es precisamente esto lo que permite aplicar condiciones de borde de forma más flexible, puesto que las restricciones en el contorno no se apegan al*

*mallado realizado para la discretización en el dominio, sino que están definidas de acuerdo a la representación del borde que desee el usuario.*

De esta manera, es posible añadir más nodos, donde se quiera, sin necesidad de remallar el dominio, tal cual sucede en el contexto de los métodos libres de malla.

Para el presente caso de estudio se empleará como matriz **Nodos\_borde** a la matriz **Nodos**. Así, la representación del borde es de la siguiente manera como se muestra en la figura



Pueden añadirse nodos donde se desee. En ese caso, hay que añadir los números correspondientes a esos nodos junto con sus respectivas posiciones en la matriz **Nodos\_borde**.

En cuanto al “tipo de frontera” que se pide como variable de entrada en el código, se define la frontera interna a aquella que es contenida por el sólido, (por ejemplo, orificios internos, huecos, etc.), mientras que las fronteras externas son aquellas que delimitan el contorno del sólido. Esto muestra que, empleando la presente metodología, es posible representar cualquier tipo de frontera que se presente en el dominio.

#### 7.1.2.4 Tipo de parametrización del contorno

Pueden emplearse tres tipos de parametrización del contorno

1. **Parametrización lineal**, emplea dos nodos para definir la curva de integración, elaborando una interpolación lineal con funciones de forma lineales.
2. **Parametrización cuadrática**, emplea tres nodos para definir la curva de integración, elaborando una interpolación cuadrática con funciones de forma cuadráticas.
3. **Parametrización cúbica**, emplea cuatro nodos para definir la curva de integración, elaborando una interpolación cúbica con funciones de forma cúbicas.

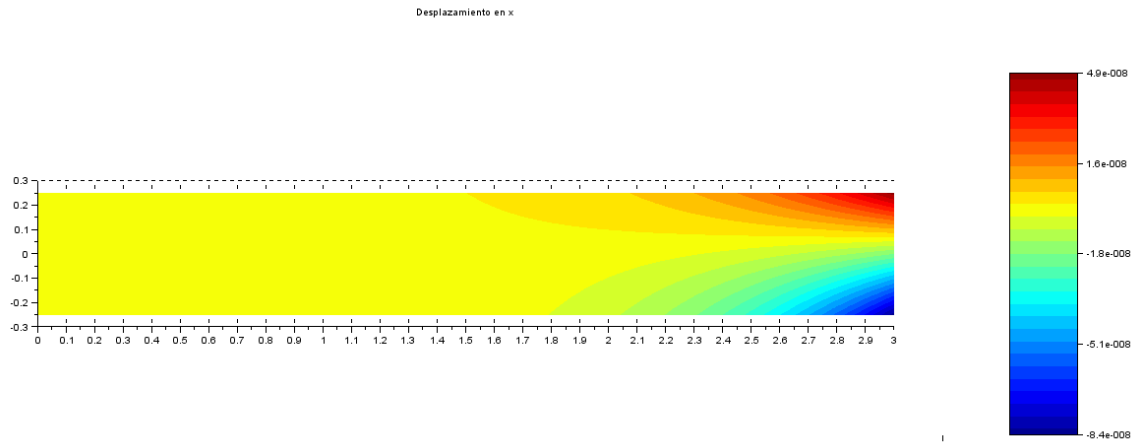
Pueden utilizarse diferentes tipos de parametrización para cada condición de borde (sea Dirichlet o sea Neumann) en cada frontera.

Para el presente ejemplo, se realizará una parametrización cuadrática para definir la curva de integración necesaria en la única condición de borde de tipo Dirichlet.

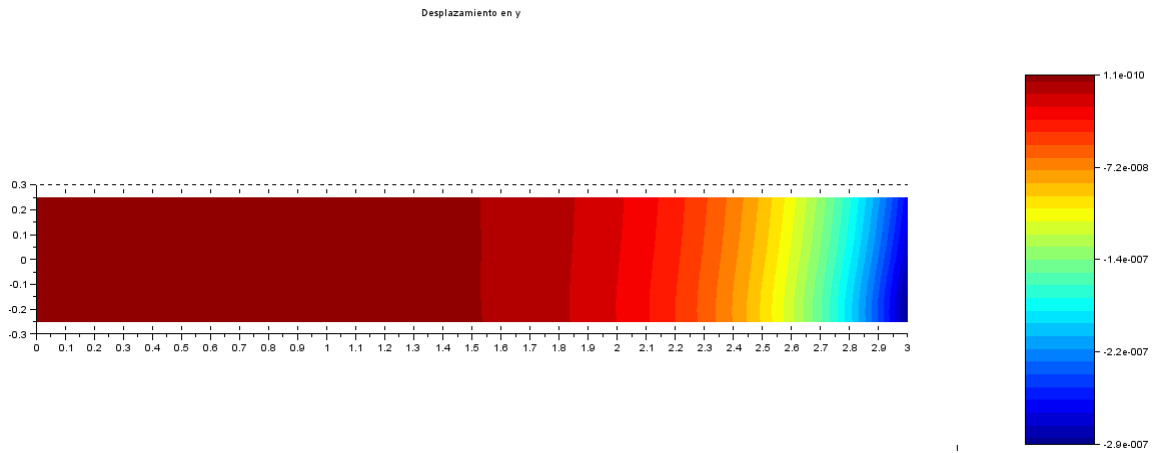
#### 7.1.2.5 Gráficas

Las soluciones obtenidas a partir del código se pueden mostrar a través de valores discretos extraídos de las funciones definidas en la subrutina **PresentSol.sce**, o bien por medio de gráficas, como se mostrará a continuación.

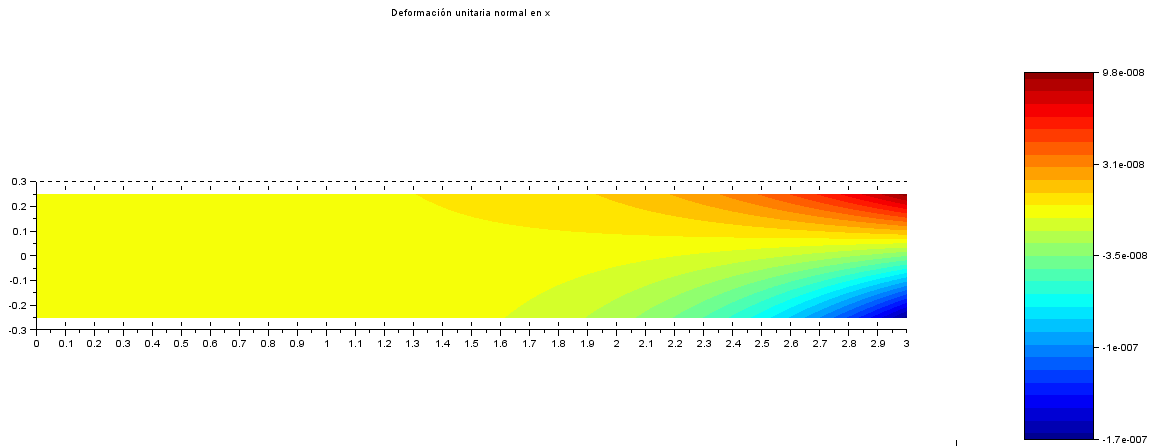
## Desplazamiento en $x$



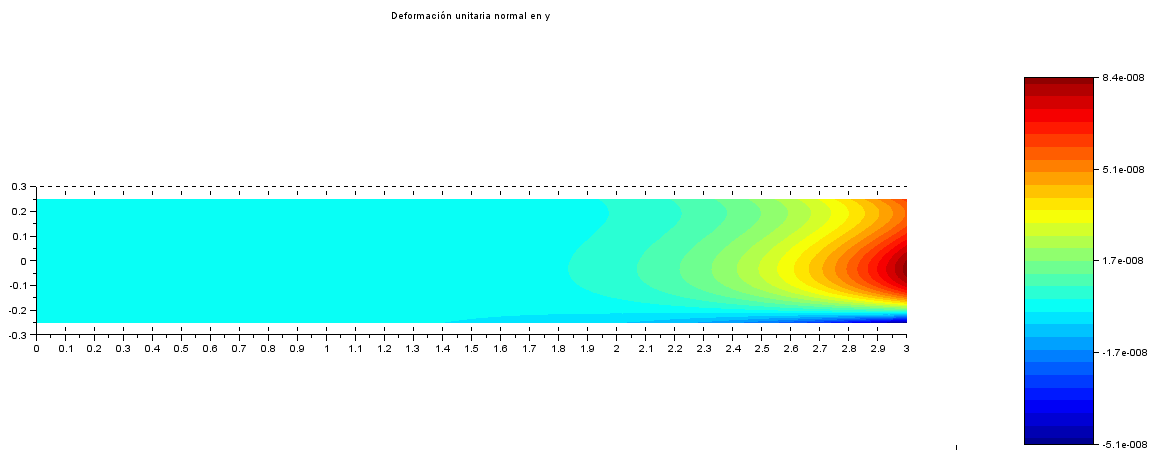
## Desplazamiento en $y$



## Deformación unitaria normal en $x$

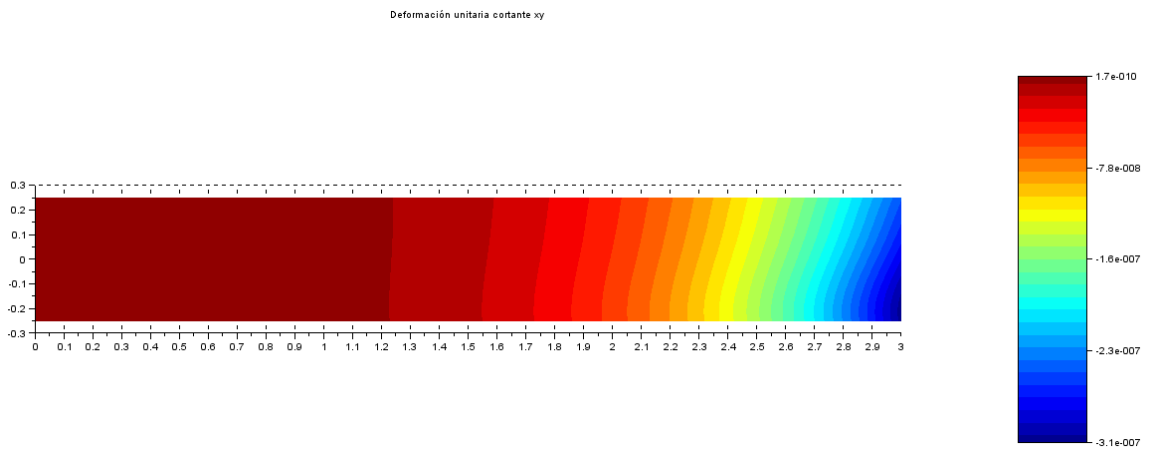


## Deformación unitaria normal en $y$

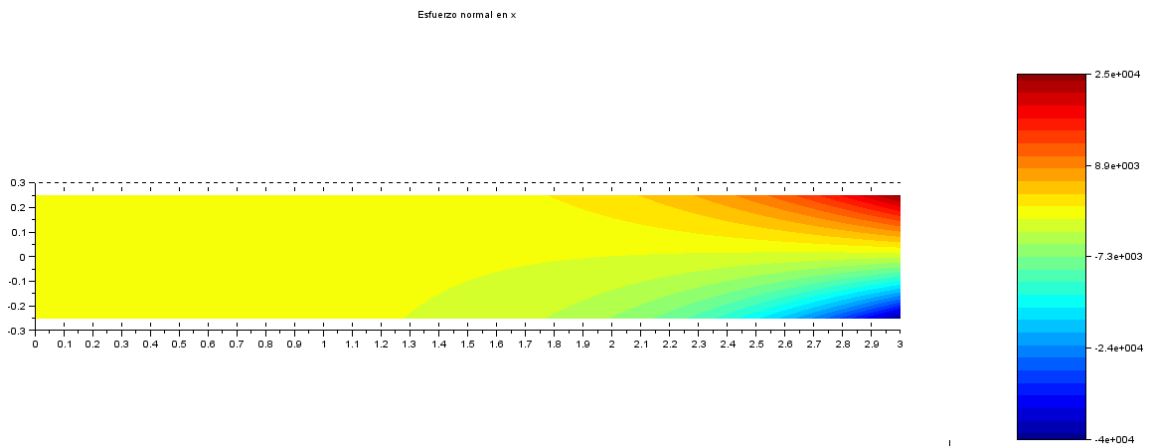




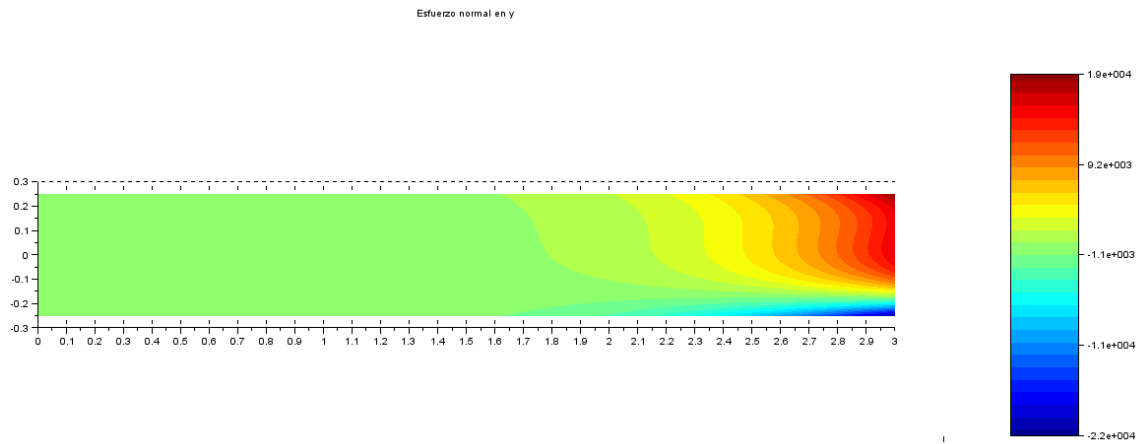
## Deformación unitaria cortante



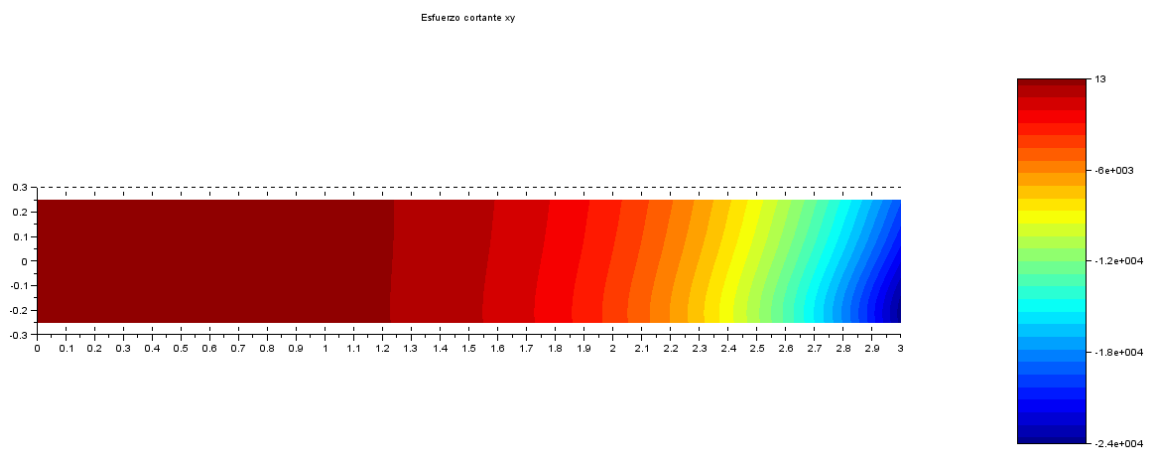
## Esfuerzo normal en $x$



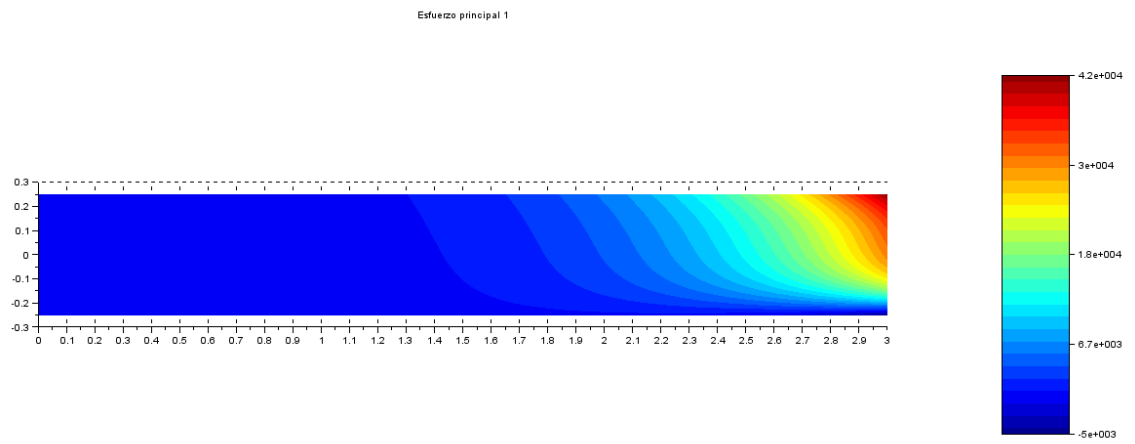
## Esfuerzo normal en y



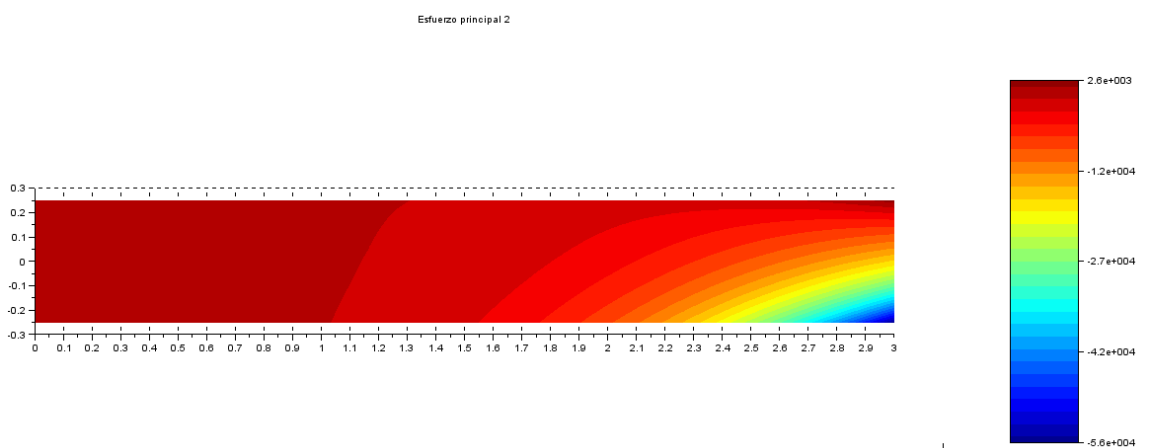
## Esfuerzo cortante



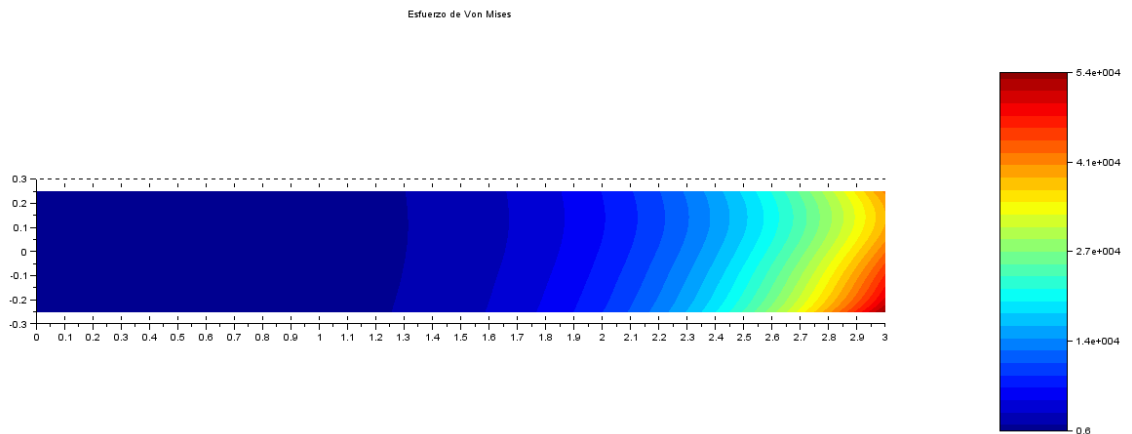
## Esfuerzo principal 1



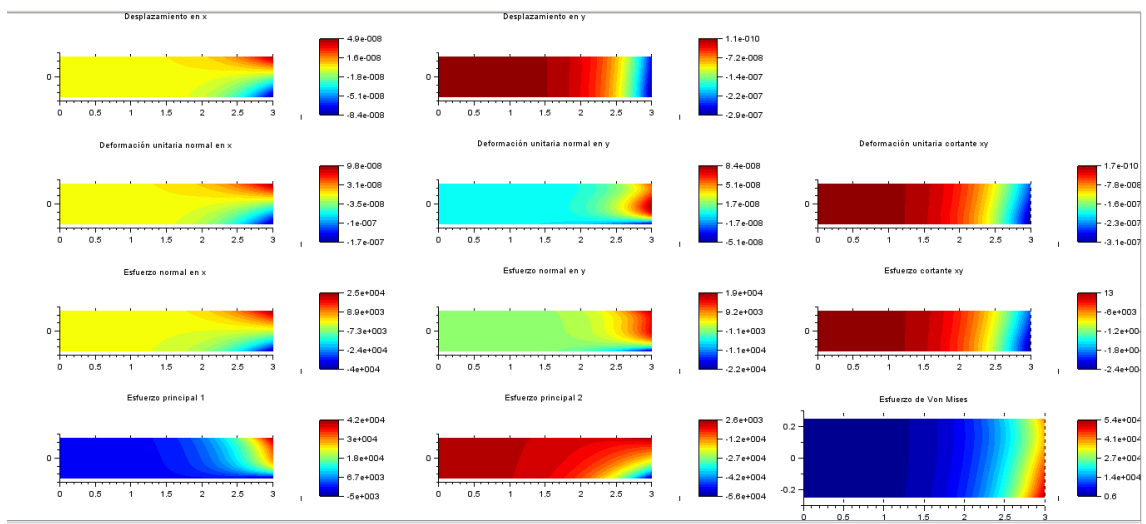
## Esfuerzo principal 2



## Esfuerzo de Von Mises



Lo que muestra el código finalmente es un conjunto de gráficas así como los que se muestran en la siguiente figura



En la primera fila se ilustra el campo de desplazamiento en  $x$  y luego el campo de desplazamiento en  $y$ .

En la segunda fila se ilustra el campo de deformación unitaria normal en  $x$ , luego el campo de deformación unitaria normal en  $y$  y el campo de deformación unitaria normal cortante.

En la tercera fila se muestra el campo de esfuerzo normal en  $x$ , luego el campo de esfuerzo normal en  $y$ , y el campo de esfuerzo cortante.

En la cuarta fila se grafican los esfuerzos principales, 1 y 2, y luego se grafica el campo de esfuerzo de Von Mises.

#### **7.1.2.6. Observaciones**

Se puede observar a través de la solución para los desplazamientos que se cumple muy bien la condición de borde de tipo Dirichlet. Además, se observa que la solución del esfuerzo normal en  $x$  obtenida por el código es bastante similar a la solución analítica. Por otro lado, la solución del esfuerzo cortante obtenido por el código difiere un poco a la solución analítica. Una posible justificación a esta discrepancia es que, la solución analítica<sup>13</sup> desprecia el peso del sólido, mientras que en el código no, pues se toma en cuenta el efecto gravitacional. Así, los valores de los esfuerzos cambian notablemente y se obtienen estados de esfuerzo y deformación levemente diferentes a las soluciones analíticas.

Una de las fuentes de error en la solución puede ser originada en la discretización del dominio empleada para el desarrollo de las integrales sobre éste. Otra fuente de error es precisamente la integración numérica realizada

---

<sup>13</sup> La solución analítica es desarrollada a partir de una función de Airy polinómica.

con la función *int2d* de Scilab, pues además de poder presentar errores por redondeo, también resulta ser un poco lenta en comparación con la cuadratura Gaussiana.

Teóricamente la solución converge cuando se utilizan infinitas funciones de base. Sin embargo, esto en la realidad no es posible. Para resolver esto, podría estimarse el comportamiento de la convergencia de la solución del presente modelo matemático de la misma manera en que se analiza la convergencia por el MEF, por lo cual se podrían utilizar funciones de base definidas sobre un mallado, y notar como converge la solución a medida que hay un *refinamiento p* o un *refinamiento h*<sup>14</sup>.

De hecho, se espera que con funciones de base particionadas según una discretización, tal como en el MEF, se obtengan resultados muchos más precisos y detallados, puesto que se logra capturar el comportamiento de la solución de forma local y no globalmente como se presentó en este documento. Así, se observa que, la solución dependerá muchísimo de las funciones de base empleadas.

Para trabajos futuros, se pretende emplear funciones de base particionadas, definidas según la discretización del dominio que un enmallador<sup>15</sup> realice. De igual manera, se espera desarrollar un código que, con base en la discretización empleada, permita representar el contorno a partir de un conjunto de nodos, independientes de la malla (o bien, conjunto de celdas). Además se pretende más adelante, acoplar este código de análisis a un programa que ofrezca el post-procesamiento<sup>16</sup>, con el fin de desarrollar las gráficas de la solución sobre dominios de formas más sofisticadas.

---

<sup>14</sup> Refinamiento en el orden de las funciones empleadas, y refinamiento en el mallado, respectivamente.

<sup>15</sup> Enmallador de licencia OpenSource

<sup>16</sup> Por ejemplo, gmesh, el cual es de licencia OpenSource.

Implementando todas estas mejoras, se espera desarrollar, dentro del grupo de investigación GIMAT, bajo la dirección del profesor Edgardo Arrieta, un software robusto<sup>17</sup>, que permita resolver de forma versátil, cualquier problema de elasticidad lineal, bajo el contexto de los métodos libres de malla, basado en el Método de Galerkin.

---

<sup>17</sup> Posiblemente con interfaz gráfica

## 8. CONCLUSIONES

En el presente proyecto de grado se implementó una metodología alternativa para imponer las condiciones de borde en problemas de elasticidad lineal anisotrópica bidimensional dentro del contexto de los métodos libres de malla, y obtener la respectiva solución en el dominio. Con base a esta técnica, se desarrolló un código en Scilab que permite resolver numéricamente el problema completo.

Los resultados obtenidos por el código, en el caso de estudio presentado, distaron levemente de las soluciones analíticas encontradas en la literatura, sin embargo ofrecen una buena aproximación con las funciones de base empleadas. Cabe mencionar que hace falta validar, mediante estudios posteriores, los resultados numéricos obtenidos, lo cual incluye desarrollar un análisis de convergencia en la solución en el borde.

Resultó importante incursionar en este proyecto porque permitió fortalecer los conocimientos obtenidos en los cursos siguientes coterminales: Mecánica de Medios Continuos, Mecánica de Sólidos y Métodos Numéricos avanzados. De hecho, el desarrollo del documento, junto con el código en Scilab, podrían constituir una herramienta de enseñanza didáctica de los cursos antes mencionados.

El presente trabajo pretende ser un inicio para el estudio del amplio mundo de la simulación en ingeniería empleando métodos numéricos, basados en mallas o libres de malla. Se espera continuar en esta línea de investigación para más adelante abordar problemas de optimización de forma con metodologías libres de malla y en general en el área de modelado computacional de fenómenos físicos en ingeniería.



## 9. BIBLIOGRAFÍA

1. **REDDY, J. N.** *An Introduction to the Finite Element Method*. s.l. : McGraw-Hill, 1993. 0-07-051355-4.
2. **LIU, G. R.** *MESHFREE METHODS: Moving beyond the Finite Element Method*. s.l. : CRC Press, 2010.
3. **OLIVELLA, Xavier Oliver y DE SARACÍBAR BOSCH, Carlos Agelet.** *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Barcelona : Edicions UPC, 2000. 84-8301-582-X.
4. **MALVERN, Lawrence E.** *Introduction to the Mechanics of a continuous medium*. New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1969.
5. **POPOV, P.Popov.** *Mecánica de Sólidos*. México : Pearson Educación, 2000. 970-17-0398-7.
6. **BOWER, Allan F.** *Applied Mechanics of Solids*. s.l. : CRC Press, 2010. 978-1-4398-0247-2.
7. **ZIENKIEWICZ, O. C. y TAYLOR, R. L.** *The Finite Element Method, Volume 1 : The basis* . s.l. : Butterworth-Heinemann, 2000.
8. **B. THOMAS, George.** *Cálculo Varias Variables*. Mexico : Pearson Educacion , 2005. 0-321-185587.
9. **BERROCAL, Luis Ortíz.** *Elasticidad*. Madrid : Mc. Graw- Hill, 1998. 84-481-2046-9.
10. **REDDY, J. N.** *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. Blacksburg, Virginia : John Wiley and sons, 1984. 0-471-89673-X.
11. **LEKHNITSKII, S. G.** *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow : Mir Publishers, 1981.
12. **VERCHER MARTINEZ, Ana.** *Mejora de los elementos de transición en XFEM aplicado a Mecánica de la Fractura Elástica Lineal*. Valencia : s.n., 2010.
13. **MOHAMMADI, Soheil.** *Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures*. Malden : Blackwell Publishing, 2008. 978-1-4051-7060-4.

14. *Structured Extended Finite Element Methods for solids defined by implicit surfaces.* **BELYTSCHKO, Ted, y otros.** s.l. : John Wiley & Sons, Ltd., 2002.

15. *Classification and Overview of Meshfree Methods.* **THOMAS, Peter Fries y HERMANN, Georg Matthies.** 2004, pág. 122.

16. *A stabilized and coupled Meshfree/Meshbased Method for Fluid-Structure Interaction Problemas.* **THOMAS, Peter Fries.** 2005, pág. 157.

17. *Simulaciones numéricas mediante métodos con y sin malla. Estimación de error y aplicaciones.* **ALONSO SANTOS, Beatriz.** 2003, pág. 269.

18. **ICONTEC.** Norma Técnica Colombiana NTC 1486. *Documentación. Presentación de tesis, trabajos de grado y otros trabajos de investigación.* . 2008.

