

MODELAMIENTO COMPUTACIONAL POR ELEMENTOS FINITOS  
PARA EL ESTUDIO DE RECIPIENTES DE PLÁSTICO REFORZADO  
CON FIBRA DE VIDRIO SOMETIDOS A CARGAS IMPULSIVAS

CARLOS HERRERA VILLA  
YURY DANIEL MORA GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA  
CARTAGENA DE INDIAS DT Y C.

2003

MODELAMIENTO COMPUTACIONAL POR ELEMENTOS FINITOS  
PARA EL ESTUDIO DE RECIPIENTES DE PLÁSTICO REFORZADO  
CON FIBRA DE VIDRIO SOMETIDOS A CARGAS IMPULSIVAS

CARLOS HERRERA VILLA  
YURY DANIEL MORA GONZÁLEZ

**Trabajo de grado, presentado para optar al título de Ingeniero  
Mecánico**

DIRECTOR  
JAIRO F. USECHE VIVERO  
ING. MECANICO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA  
CARTAGENA DE INDIAS DT Y C.

2003

---

---

---

---

---

---

---

Firma del presidente del jurado

---

Firma del jurado

---

Firma del jurado

Cartagena, de 2003

**A Dios, a mis padres, hermanos y a todas  
aquellas personas de confieron en  
que esta meta pudo realizarse.**

**Yury Daniel Mora G.**

**A Jehová, a mis padres y amigos que brindaron  
su apoyo y confianza para alcanzar  
esta meta en mi vida**

*Carlos A. Herrera Villa*

## **AGRADECIMENTOS**

Especial agradecimiento al ingeniero Jairo Useche Vivero por su gran colaboración durante todo el transcurso de este proyecto. También agradecemos a Rotofibra Ltda. por toda su participación en este trabajo.

## CONTENIDO

|  | Pág. |
|--|------|
| INTRODUCCION                                     |      |
| 1. CONCEPTOS BASICOS                             | 4    |
| 1.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO                    | 4    |
| 1.2 ESFUERZO                                     | 5    |
| 1.2.1 Componentes de Esfuerzo                    | 6    |
| 1.3 RESULTANTE DE FUERZA INTERNA                 | 8    |
| 1.4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO       | 10   |
| 1.5 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN                   | 12   |
| 1.6 RELACIONES DESPLAZAMIENTO – DEFORMACION      | 12   |
| 1.6.1 Ecuaciones de compatibilidad.              | 16   |
| 2. TEORÍA DE PLACAS                              | 18   |
| 2.1 COMPORTAMIENTO GENERAL DE PLACAS             | 19   |
| 2.2 RELACIONES DE DEFORMACIÓN – CURVATURA        | 20   |
| 2.3 ESFUERZOS Y RESULTANTES DE ESFUERZOS         | 22   |
| 2.4 VARIACIÓN DEL ESFUERZO DENTRO DE UNA PLACA   | 24   |
| 2.5 ECUACIÓN PARA LA DEFLEXIÓN DE PLACAS         | 27   |
| 2.6 ENERGIA DE DEFORMACION DE LA PLACA           | 28   |
| 2.7 PRINCIPIO DE TRABAJO VIRTUAL                 | 29   |
| 2.8 PRINCIPIO DE LA ENERGÍA POTENCIAL MINIMA     | 30   |
| 2.9 PLACAS ANISOTRÓPICAS                         | 31   |
| 2.9.1 Relaciones Básicas                         | 32   |
| 2.9.2 Determinación de la matriz de elasticidad. | 34   |
| 2.9.3 Placas de multicapas isotrópicas           | 37   |
| 2.9.4 Placas compuestas laminadas                | 39   |

|  |    |
|--|----|
| 3. FORMULACION POR ELEMENTOS FINITOS   | 42 |
| 3.1 ANALISIS DE PLACAS EN EL PLANO   | 42 |
| 3.2 ANALISIS DE PLACAS A FLEXION   | 44 |
| 3.3 MATRIZ COMBINADA   | 47 |
| 3.4 ELEMENTOS FINITOS  | 48 |
| 3.4.1 Transformación isoparamétrica.   | 49 |
| 3.4.2 Elementos conformes  | 52 |
| 3.5 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS GLOBALES   | 55 |
| 3.5.1 Elementos orientados en forma arbitraria   | 57 |
| 3.6 INTEGRACIÓN NUMÉRICA   | 58 |
| 3.6.1 Integrales bidimensionales   | 60 |
| 3.7 AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS PARA UN CUADRILATERO DE CUATRO NODOS                  | 61 |
| 3.8 ANÁLISIS DINÁMICO  | 63 |
| 3.8.1 Comportamiento Dinámico de las estructuras elásticas con amortiguamiento lineal. | 63 |
| 3.8.2 Método de integración del tiempo de <i>Newmark</i>                               | 64 |
| 4 VALIDACION DEL MODELO  | 67 |
| 4.1 DESCRIPCION DEL MODELO COMPUTACIONAL   | 67 |
| 4.2 VALIDACION ANALITICA   | 67 |
| 4.2.1 Viga en voladizo cargada puntualmente en el extremo libre                        | 68 |
| 4.2.2 Viga en voladizo con carga distribuida uniforme                                  | 70 |
| 4.2.3 Viga en voladizo sometida a carga axial  | 72 |
| 4.2.4 Cilindro recto sometido a compresión   | 74 |
| 4.2.5 Placa sujeta a una carga uniforme  | 76 |
| 4.2.6 Placa laminada sujeta a una carga uniforme                                       | 78 |
| 4.2.7 Análisis de resultados   | 87 |
| 4.3 VALIDACION DINAMICA CON UN MODELO REAL   | 88 |
| 4.3.1 Validación dinámica en una lámina de PRFV  | 89 |
| 4.3.2 Calibración de los coeficientes de Rayleigh                                      | 91 |

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 5 APLICACIÓN DEL MODELO         | 94  |
| 5.1 DESCRIPCION DEL ENSAYO      | 94  |
| 5.2 MATERIALES DEL TANQUE       | 94  |
| 5.2.1 VFG-Woven Roving 800      | 95  |
| 5.2.2 Mat 450                   | 95  |
| 5.2.3 Cristalán 805             | 95  |
| 5.3 SIMULACION ESTATICA         | 95  |
| 5.3.1. Resultados del análisis. | 97  |
| 5.4 SIMULACION DINAMICA         | 99  |
| 5.4.1 Análisis de resultados    | 101 |
| 5.5 ESTUDIO COMPARATIVO         | 102 |
| 5.5.1 Análisis de resultados    | 102 |
| <br>                            |     |
| CONCLUSIONES                    | 104 |
| RECOMENDACIONES                 | 106 |
| BIBLIOGRAFIAS                   | 107 |
| ANEXOS                          | 109 |

## LISTA DE FIGURAS

|  | Pág. |
|--|------|
| Figura 1. Diagrama de cuerpo libre de la sección cortada                             | 6    |
| Figura 2. Esfuerzos en un elemento en 3D   | 6    |
| Figura 3. Representación en dos dimensiones del elemento de esfuerzos                | 7    |
| Figura 4. Resultante de las fuerzas internas y componentes de $dF$                   | 8    |
| Figura 5. Elementos con esfuerzos y fuerzas de cuerpo                                | 10   |
| Figura 6. Esfuerzo normal en una barra   | 13   |
| Figura 7. Deformaciones en el elemento 2D  | 14   |
| Figura 8. Comportamiento de una placa  | 19   |
| Figura 9. Resultante de esfuerzos positivos y cargas en el elemento placa            | 25   |
| Figura 10. Lamina ortotrópica  | 34   |
| Figura 11. Placa laminada simétricamente construida                                  | 37   |
| Figura 12. Laminado compuesto  | 39   |
| Figura 13. Elemento Transformado   | 50   |
| Figura 14. Coordenadas locales y globales  | 55   |
| Figura 15. Coordenadas locales y globales para un elemento cuadrilátero transformado | 57   |
| Figura 16. Cuadratura <i>Gaussiana</i> en dos dimensiones                            | 61   |
| Figura 17. Ajuste por mínimos cuadrados para un cuadrilátero                         | 61   |
| Figura 18. Viga en voladizo cargada puntualmente en el extremo libre.                | 68   |
| Figura 19. Número de Elementos vs % de Error   | 69   |
| Figura 20. Número de Elementos vs Deflexión  | 69   |
| Figura 21. Viga en voladizo con carga distribuida uniforme                           | 70   |
| Figura 22. Número de Elementos vs % de Error   | 71   |
| Figura 23. Número de Elementos vs Deflexión  | 71   |
| Figura 24. Viga en voladizo sometida a carga axial                                   | 72   |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 25. Número de Elementos vs % de Error                             | 73  |
| Figura 26. Número de Elementos vs Deflexión                              | 73  |
| Figura 27. Cilindro recto  | 74  |
| Figura 28. Desplazamientos en dirección Y con enmallado de 512 elementos | 75  |
| Figura 29. Desplazamientos totales con enmallado de 512 elementos        | 75  |
| Figura 30. Desplazamientos en dirección Z                                | 77  |
| Figura 31. Giro totales  | 77  |
| Figura 32. Placa laminada sujeta a una carga uniforme                    | 78  |
| Figura 33. Desplazamiento en Z   | 83  |
| Figura 34. Giros Totales   | 83  |
| Figura 35. Esfuerzos en dirección X en la capa 1                         | 84  |
| Figura 36. Esfuerzos en dirección X en la capa 5                         | 84  |
| Figura 37. Esfuerzos en dirección Y en la capa 1                         | 85  |
| Figura 38. Esfuerzos en dirección Y en la capa 5                         | 85  |
| Figura 39. Esfuerzo cortante XY en la capa 1                             | 86  |
| Figura 40. Esfuerzo cortante XY en la capa 5                             | 86  |
| Figura 41. Estado inicial de la placa                                    | 88  |
| Figura 42. Comportamiento dinámico de la placa                           | 88  |
| Figura 43. Adquisición de datos  | 89  |
| Figura 44. Variación del desplazamiento en el tiempo.                    | 91  |
| Figura 45. Comparación de resultados.                                    | 93  |
| Figura 46. Distribución de fuerzas en tanque de 10000 Litros             | 96  |
| Figura 47. Desplazamientos en dirección X y Y                            | 97  |
| Figura 48. Desplazamientos totales                                       | 97  |
| Figura 49. Esfuerzos normales  | 98  |
| Figura 50. Esfuerzos cortantes   | 98  |
| Figura 51. Desplazamiento vs tiempo en la zona inferior                  | 99  |
| Figura 52. Desplazamiento vs tiempo en la zona media                     | 100 |
| Figura 53. Desplazamiento vs tiempo en la zona superior                  | 100 |

## LISTA DE TABLAS

|  | Pág. |
|--|------|
| Tabla 1. Funciones de interpolación de Hermite $f$                                 | 53   |
| Tabla 2. Puntos de Gauss y Pesos para cuadratura Gaussiana                         | 59   |
| Tabla 3. Resultados del análisis por elementos finitos                             | 68   |
| Tabla 4. Resultados del análisis por elementos finitos                             | 70   |
| Tabla 5. Resultados del análisis por elementos finitos                             | 72   |
| Tabla 6. Comparación de resultados   | 74   |
| Tabla 7. Aproximación de la ecuación de la deflexión máxima                        | 76   |
| Tabla 8. Resultados utilizados diferentes mallas                                   | 77   |
| Tabla 9. Valores de los coeficientes $\alpha$ como una función de $n$ y $m$        | 79   |
| Tabla 10. Valores de los coeficientes $\beta$ y $\gamma$ como función de $m$ y $n$ | 79   |
| Tabla 11. Variación de esfuerzos en el centro de la placa.                         | 81   |
| Tabla 12. Resultados del análisis por elementos finitos                            | 82   |
| Tabla 13. Datos de la lámina   | 90   |
| Tabla 14. Resultados de la prueba  | 90   |
| Tabla 15. Resultados de la pruebas   | 93   |
| Tabla 16. Datos del tanque   | 96   |
| Tabla 17. Comparación de resultados  | 102  |

## LISTA DE ANEXOS

|   | Pág. |
|---|------|
| ANEXO A. TRANSFORMACION DEL DIFERENCIAL DE AREA (dA)  | 109  |
| ANEXO B. SOLUCION DE NAVIER PARA UNA PLACA RECTANGULAR<br>SOPORTADA SIMPLEMENTE Y CARGADA UNIFORMEMENTE | 113  |
| ANEXO C. SOLUCION DE UNA PLACA LAMINADA SOPORTADAS<br>SIMPLEMENTE Y SUJETA A UNA CARGA UNIFORME         | 116  |
| ANEXO D. CODIGO DE PROGRAMCION EN MATLAB  | 120  |

## RESUMEN

La formulación por elementos finitos para el estudio de tanques fabricados en plásticos reforzados en fibra de vidrio se comenzará desarrollando un elemento de placa que tenga la capacidad de analizar fuerzas en las tres direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Este elemento es un cuadrilátero de cuatro nodos que puede ser no simétrico, el cual tiene la capacidad de calcular desplazamiento y giros en las tres direcciones de los ejes coordenados.

Conociendo que las paredes del tanque están fabricadas con material compuesto y que estas se conforman por capas, las cuales tienen diferentes propiedades, el estudio se hace por medio de un elemento laminado y la matriz elástica de este se halla de forma diferente a la de un elemento no laminado. No obstante este elemento sufre una transformación de coordenadas para que funcione en cualquier geometría. Con los anteriores análisis se pueden calcular la matriz de rigidez para cada elemento y con esta conformar la matriz de rigidez global. Y así, poder calcular desplazamiento, giros y esfuerzos que se presentan en toda la geometría.

Los análisis anteriores hacen parte del análisis estático, sin embargo para el estudio dinámico se hará uso de la matriz de rigidez descrita anteriormente y adicionalmente las matrices de masa y amortiguamiento, las cuales depende directamente de las funciones de formas del elemento. Con estas matrices y el vector de fuerzas se pueden calcular la variación del desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo. Estos cálculos se logran gracias a método de integración del tiempo de *Newmark*.

## INTRODUCCION

Hoy en día los Plásticos Reforzados con Fibra de Vidrio (PRFV) desempeñan un papel fundamental en la fabricación de piezas y recipientes para la industria, ya que esto presentan las ventajas de poco peso respecto a los metales, son más resistentes a la corrosión y buena resistencia mecánica. Estas y muchas más ventajas son lo que hacen que los PRFV sean una excelente alternativa a la hora de fabricar diferentes productos.

Aunque los PRFV presentan muchas ventajas en su fabricación y a lo largo de su vida útil, su diseño convencional puede dejar ciertas incertidumbres al diseñador ya que este es un material compuesto que combina diferentes propiedades. Además la gran mayoría de las empresas no cuentan con herramientas o procedimientos que le permitan optimizar y evaluar sus diseños.

En vista de la falta de herramientas que permitan evaluar y optimizar los diseños se hace necesario incorporar en la línea de producción de estas empresas una herramienta que lo permita. En la actualidad existen dichas herramientas como son softwares especializados que permiten al diseñador evaluar su diseño desde un punto de vista ingenieril, además traen consigo ahorro de tiempo y dinero. El análisis estructural de estos softwares se basa en métodos numéricos, como es el caso del método de elementos finitos.

El método de elementos finitos es un método numérico que facilita la solución de problemas de ingeniería. Analizando un problema específico como es el caso de tanque de paredes delgadas, que es el problema a analizar en este trabajo de grado. El cual pretende estudiar el comportamiento elástico en tanque fabricados en PRFV cuando son sometidos a una carga estática o dinámica, teniendo

presente que se omitirán los efectos por temperatura ya que las cambio de temperatura durante la operación de estos tanques son mínimas y se mantienen en un rango de temperaturas (temperatura ambiente) donde las propiedades del material no cambian, por tanto sus efectos son despreciables para el estudio.

El estudio comprende el desarrollo de desplazamientos, giros y esfuerzos en los tanques cuando son expuestos a las cargas ya mencionadas. El tener esta información es de gran importancia para el diseñador ya que le permite observar el comportamiento real de su diseño, y así efectuar cambios si son necesarios de acuerdo a los resultados. Sin embargo, los resultados arrojados por modelamiento numérico están ligado a un porcentaje de error, que dependerán de la cantidad de factores de diseño omitidos en el análisis, el tipo de elemento, método de soluciones de las ecuaciones y cantidad de elementos. No obstante, es necesario aclarar que estos errores son bastante pequeños y no desvirtúan los resultados de manera considerable, de tal forma la solución es confiable.

# 1. CONCEPTOS BASICOS

## 1.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

**Fuerzas externas**, son las que actúan sobre el cuerpo y pueden clasificarse en fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo. *Las fuerzas de cuerpo*, están asociadas con el cuerpo en estudio y se distribuyen en toda la amplitud del mismo. No son consecuencia de un contacto directo con otros cuerpos. Se especifican en términos de fuerzas por unidad de volumen y entre ellas podemos citar las fuerzas gravitacionales, las de inercia, las magnéticas, entre otras. Las componentes de la intensidad de estas fuerzas según los ejes coordenados, las denominaremos.  $F_x$ ,  $F_y$ , y  $F_z$ . *Las fuerzas de superficie*, son una consecuencia del contacto físico entre dos cuerpos. **Las fuerzas internas**, son las fuerzas que están junto con las partículas que conforman el elemento.

Cuando en un sistema de fuerzas, que actúa sobre un cuerpo tiene como resultante cero, el cuerpo se dice que esta en equilibrio. El equilibrio de fuerzas es el estado en el cual las fuerzas aplicadas son balanceadas. En un problema tridimensional, las condiciones de equilibrio requiere el cumplimiento de las siguientes ecuaciones de estática:

|  |            |
|--|------------|
| $\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad \sum F_y = 0 & \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \quad \sum M_y = 0 & \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$ | <b>1.1</b> |
|--|------------|

En un problema en el plano, donde todas las fuerzas actúan sobre el plano  $xy$ , hay solo tres ecuaciones de estática:

|  |            |
|--|------------|
| $\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$ | <b>1.2</b> |
|--|------------|

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son puntos sobre el plano.

Reemplazando una sumatoria de fuerzas por un equivalente sumatoria de momento en la ecuación anterior, obtenemos otra alternativa a la condición de equilibrio:

|  |             |
|--|-------------|
| $\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$ | <b>1.2a</b> |
|--|-------------|

Asumiendo que la línea de conectividad entre los puntos  $A$  y  $B$  no es perpendicular al eje  $x$ :

|  |             |
|--|-------------|
| $\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0$ | <b>1.2b</b> |
|--|-------------|

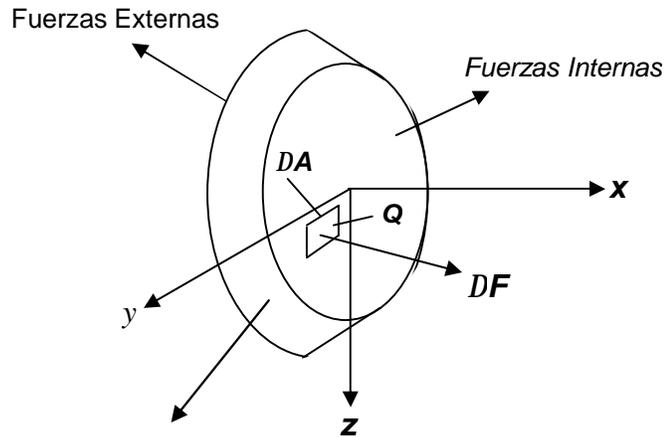
donde los puntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  no son colineales.

Una estructura se dice que es estáticamente determinada cuando todas las fuerzas en los miembros pueden obtenerse usando solo las condiciones de equilibrio. En el caso contrario, una estructura es llamada estáticamente indeterminada.

## 1.2 ESFUERZO

Considere un cuerpo en equilibrio, sujeto al sistema de fuerzas externas. Con el fin de investigar las fuerzas interiores en algún punto  $Q$ , se realiza un corte en  $Q$  por un plano imaginario que divide el cuerpo en dos porciones. El equilibrio de fuerzas que actúan en una porción requiere la presencia de fuerzas interiores en el lugar de la sección. Estas fuerzas interiores aplicadas a ambas porciones, son continuamente distribuidas sobre la superficie cortada.

**Figura 1.** Diagrama de cuerpo libre de la sección cortada

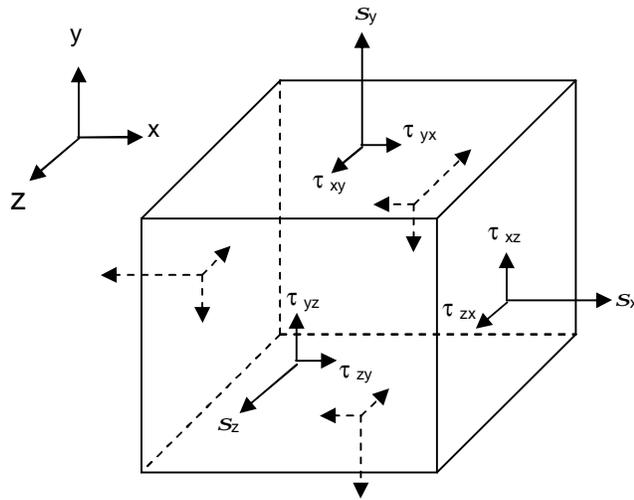


Sobre la superficie cortada, en el punto Q se localiza un  $DA$ , la cual es influenciada por una fuerza  $DF$ . En general  $DA$  no queda a lo largo de “x”, “y” y “z”. Donde sus componentes son  $DF_x$  normal,  $DF_y$ ,  $DF_z$  tangente a  $DA$ . Entonces el esfuerzo normal  $\sigma_x$ , y el esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  pueden definirse como:

|   |            |
|---|------------|
| $s_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA}; \quad t_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dF_y}{dA}; \quad t_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{dF_z}{dA}$ | <b>1.3</b> |
|---|------------|

### 1.2.1 Componentes de Esfuerzo

**Figura 2.** Esfuerzos en un elemento en 3D



Un cubo de dimensiones infinitesimales aislado de un sólido expondría el caso general del estado tridimensional de esfuerzos. Se considera que el esfuerzo mostrado es el mismo en las caras mutuamente paralelas, y uniformemente distribuida en cada cara. Sin embargo, en general los esfuerzos variarían de una cara a una cara paralela y también variarían encima de una cara particular. Un total de nueve componentes de esfuerzo escalar, definiendo el estado de esfuerzo a un punto, puede escribirse en la siguiente forma:

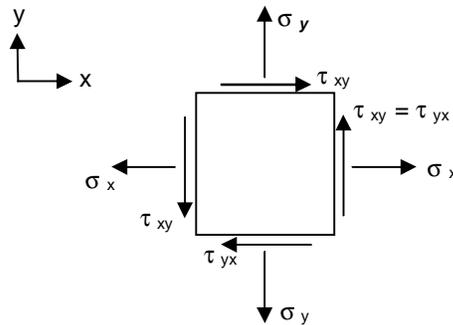
|   |            |
|---|------------|
| $t_{ij} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & s_y & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & s_z \end{bmatrix}$ | <b>1.4</b> |
|---|------------|

Esta es una representación en matriz del esfuerzo. La anotación del subíndice doble se interpreta como sigue: El primer subíndice denota la dirección de una normal a la cara en que la componente del esfuerzo actúa; el segundo denota la dirección del esfuerzo.

En el caso de esfuerzo bidimensional, sólo las caras de “x” e “y” del elemento está sujeto a los esfuerzos, y todo los esfuerzos actúan paralelo al eje “xy”. Para conveniencia, dibujamos a menudo una vista bidimensional del elemento de

esfuerzo plano. Cuando sólo dos esfuerzos normales están presentes, el estado de esfuerzo se denomina en término biaxial.

**Figura 3.** Representación en dos dimensiones del elemento de esfuerzos

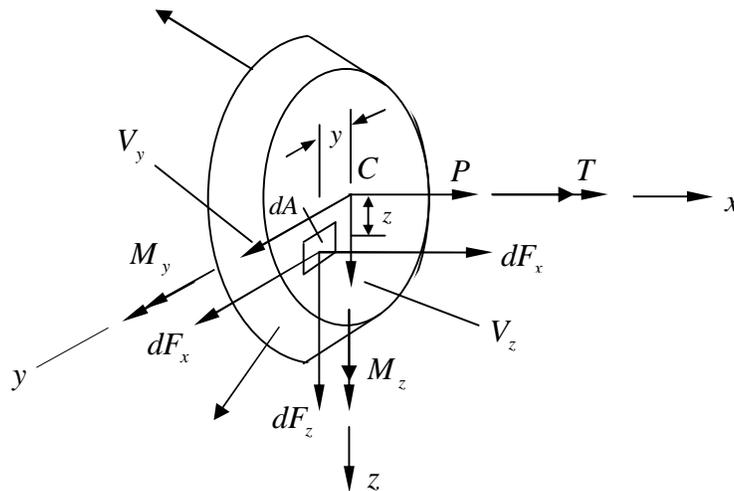


*Convención de signos.* Cuando la componente de esfuerzo actúa en una cara positiva en una dirección de la coordenada positiva, el componente de esfuerzo es positiva, también cuando actúa en una cara negativa en una dirección de la coordenada negativa. Pero un esfuerzo es considerado negativo cuando actúa en una cara positiva en dirección negativa de coordenada (o viceversa). De acuerdo, los esfuerzos de tensión siempre son positivos y los esfuerzos de compresión siempre son negativos.

### 1.3 RESULTANTE DE FUERZA INTERNA

Las fuerzas distribuidas dentro de un miembro pueden representarse por una fuerza estáticamente equivalente y un vector del momento que actúan a cualquier punto arbitrario de una sección. Éstas resultantes de fuerzas internas, también llamadas resultantes de esfuerzo, consisten en fuerza axial, cortante y momentos. Estas son expuestas usualmente en un corte imaginario del plano incluyendo el centroide  $C$  a través del elemento y resultado en componentes normal y tangencial a la sección cortada.

**Figura 4.** Resultante de las fuerzas internas y componentes de  $dF$



Cada fuerza interior y componente del momento refleja un efecto diferente de la carga aplicada en un miembro. Estos efectos son como sigue, con referencia a la figura 4:

*La fuerza axial  $P$  tiende a alargar o acortar al miembro.*

*Fuerzas cortantes  $V_y$  y  $V_z$  tienden a cortar una parte del miembro relativa a la parte adyacente.*

*El torque  $T$  es responsable para torcer al miembro.*

*Los momentos de flexión  $M_y$  y  $M_z$  causan la flexión del miembro.*

La convención de signos adoptado para el esfuerzo también se aplica a la fuerza y componentes del momento.

Para establecer la relación entre las componentes de los esfuerzos y las resultantes de fuerza interna, considere un área infinitesimal  $dA$  de la sección cortada mostrada en la figura 4. Este área ha actuado en las componentes de  $dF$ , como  $dF_x = s_x dA$ ,  $dF_y = t_{xy} dA$  y  $dF_z = t_{xz} dA$ . Obviamente, los componentes de esfuerzos en la sección cortada causan las resultantes de fuerza interna en esa

sección. Por consiguiente, la suma de las fuerzas incrementales en las direcciones de “x”, “y” y “z” son:

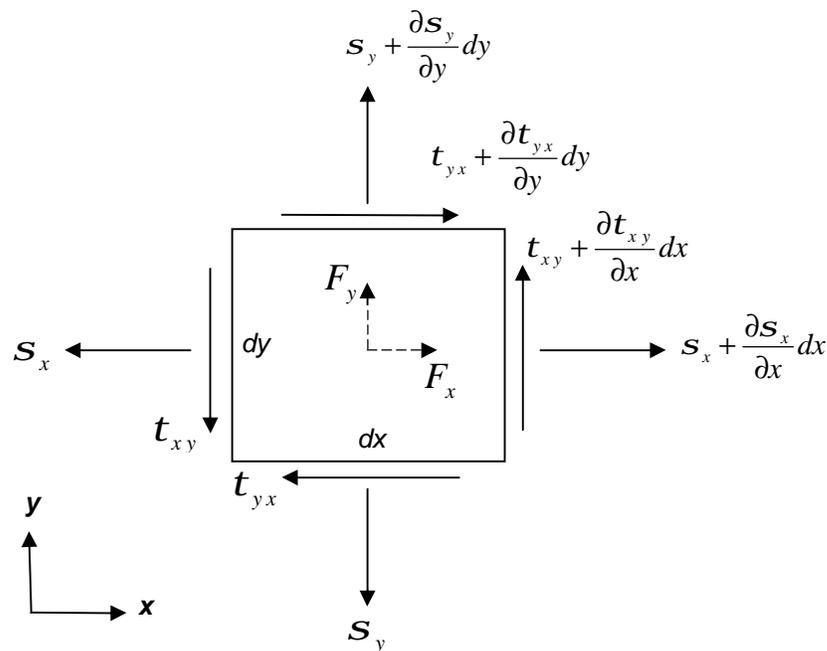
|   |            |
|---|------------|
| $P = \int s_x dA \quad V_y = \int t_{xy} dA \quad V_z = \int t_{xz} dA$ | <b>1.5</b> |
|---|------------|

Similarmente, las sumas de los momentos de las mismas fuerzas sobre los ejes “x”, “y” y “z” da como resultado:

|  |            |
|--|------------|
| $T = \int (t_{xz}y - t_{xy}z) dA \quad M_y = \int s_x z dA \quad M_z = -\int s_x y dA$ | <b>1.6</b> |
|--|------------|

#### 1.4 ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO

**Figura 5.** Elementos con esfuerzos y fuerzas de cuerpo



Para un caso bidimensional, la acción de esfuerzos en un elemento de lados,  $dx$  y  $dy$ , y de unidad de espesor se muestra en la figura 5. Las componentes “x” y

“y” de las fuerzas del cuerpo por unidad de volumen,  $F_x$  y  $F_y$ , son independientes de la componente “z” de la fuerza del cuerpo  $F_z = 0$ .

Si establecemos el equilibrio de fuerzas en el sentido del eje “x”, considerando un valor unitario de “z”, tendremos:

|  |  |
|--|--|
| $F_x dx dy + \left[ s_x + \frac{\partial s_x}{\partial x} dx \right] dy - s_x dy + \left[ t_{yz} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} dy \right] dx - t_{yx} dx = 0$ |  |
|--|--|

que una vez simplificada se convierte en:

|   |  |
|---|--|
| $\left[ \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + F_x \right] dx dy = 0$ |  |
|---|--|

Como el producto “ $dx dy$ ” no es cero, debe serlo la expresión entre corchetes, por lo que, finalmente, obtenemos:

|  |            |
|--|------------|
| $\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + F_x = 0$ | <b>1.7</b> |
|--|------------|

Si hacemos el mismo análisis para la dirección del eje Y:

|  |            |
|--|------------|
| $\frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$ | <b>1.8</b> |
|--|------------|

Estas ecuaciones de equilibrio se pueden generalizar considerando el plano tridimensional

|  |            |
|--|------------|
| $\begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + F_z &= 0 \end{aligned}$ | <b>1.9</b> |
|--|------------|

En consecuencia, para un cuerpo en equilibrio los esfuerzos varían de punto a punto según las ecuaciones anteriores. Podemos aplicar la condición de equilibrio

$$\sum M_z = 0$$

|   |  |
|---|--|
| $\left(\frac{\partial s_y}{\partial y} dy dx\right) \frac{dx}{2} - \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} dx dy\right) \frac{dy}{2} + \left(t_{xy} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} dx\right) dy dx - \left(t_{yx} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dy$ $+ F_y dx dy \frac{dx}{2} - F_x dy dx \frac{dy}{2} = 0$ |  |
|---|--|

Despreciando los términos que contengan triples productos de  $dx$  y  $dy$ , la ecuación anterior se convierte en:

|                   |  |
|-------------------|--|
| $t_{xy} = t_{yx}$ |  |
|-------------------|--|

Considerando el caso tridimensional y tomando momentos respecto a cada uno de los ejes veríamos que:

|   |  |
|---|--|
| $t_{xy} = t_{yx} \quad t_{xz} = t_{zx} \quad t_{yz} = t_{zy}$ |  |
|---|--|

por lo que podemos decir que sólo seis de las nueve componentes de la esfuerzo.

## 1.5 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Este expresa que el estado de equilibrio debido a varias acciones exteriores es igual a la superposición de las soluciones que corresponden a cada uno de los estados si cada acción exterior actuara independientemente. Esta regla es válida siempre que la cantidad (deformación o esfuerzo) obtenida sea directamente proporcional a las cargas aplicadas.

## 1.6 RELACIONES DESPLAZAMIENTO – DEFORMACION

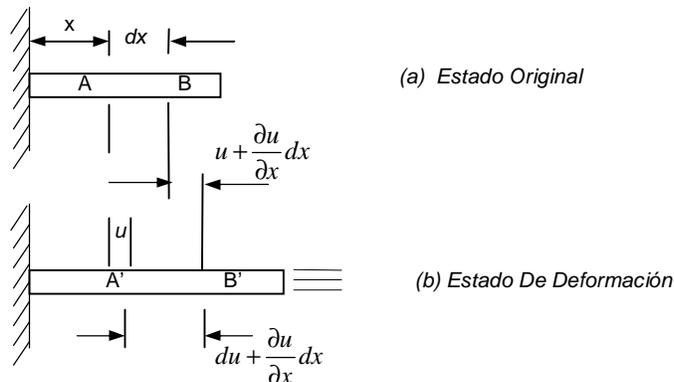
Se dice que un cuerpo está deformado cuando las posiciones relativas de sus puntos han cambiado. En el movimiento como sólido rígido, dichas posiciones permanecen estables.

Cuando se aplican fuerzas exteriores a un cuerpo, la posición de cada punto, en general, se modifica. Se define el desplazamiento de un punto como el vector que

une el punto original con el desplazado. Se denomina a las componentes “x”, “y”, “z” del desplazamiento con las letras  $u$ ,  $v$ ,  $w$  respectivamente. Por tanto, un punto que estuviera inicialmente en la posición  $(x, y, z)$  se moverá al punto  $(x+u, y+v, z+w)$ . En general,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  serán función de  $x, y, z$ .

Se considerará un modelo unidimensional para entender claramente el concepto de deformación.

**Figura 6.** Esfuerzo normal en una barra



En la figura 6 puede verse una barra sometida a una fuerza axial. Inicialmente, los puntos A y B están separados una distancia  $dx$ . Dichos puntos, bajo el efecto de la fuerza se desplazan a los puntos A' y B', y vemos que la distancia entre ambos ha aumentado ligeramente. Si definimos la deformación como el cambio unitario de longitud, se tiene:

|   |  |
|---|--|
| $e_x = \frac{(\partial u / \partial x) dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ |  |
|---|--|

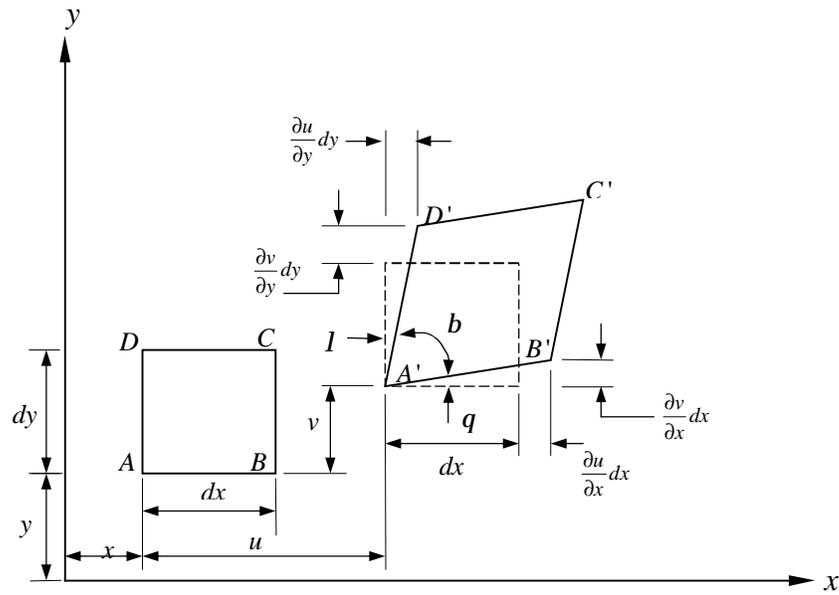
Se considerará un cuerpo en un estado de deformación plana, que se define por:

|   |  |
|---|--|
| $u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad w = 0$ |  |
|---|--|

En este caso, todos los puntos del plano “xy”, permanecen en el plano después de la deformación. La deformación consta de dos tipos *normal* y *tangencial*. La deformación normal  $\epsilon$  en una dirección dada se define como el cambio unitario de longitud de una línea que estaba originalmente orientada según la mencionada

dirección. Es positiva si el cambio en la longitud consiste en un alargamiento, y negativa si se trata de un acortamiento.

**Figura 7.** Deformaciones en el elemento 2D



La deformación tangencial está asociada con dos direcciones y se define como el cambio en el ángulo recto original entre dos ejes (en radianes). Es positiva si el ángulo original decrece. El signo que se le da depende del sistema de coordenadas.

|  |  |
|--|--|
| $e_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dx}{dx}$ $e_y = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{A'D' - dy}{dy}$ $g_{xy} = \frac{p}{2} - b = q - l$ |  |
|--|--|

donde el signo negativo de  $\lambda$  se basa en el hecho de que, para los giros, son positivos aquéllos que van en sentido contrario a las agujas del reloj. Si las componentes del desplazamiento del punto A son “u” y “v”, el punto B se desplazará  $u + (\partial u / \partial x) dx$  y  $v + (\partial v / \partial x) dx$  ya que “y” es constante a lo largo de la

línea  $AB$ . Análogamente, las componentes del desplazamiento del punto  $D$  son  $u + (\partial u / \partial y) dy$  y  $v + (\partial v / \partial y) dy$ . En consecuencia se puede escribir:

|  |  |
|--|--|
| $(A'B')^2 = [dx(1 + e_x)]^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2$ |  |
|--|--|

de forma que:

|  |  |
|--|--|
| $e^2 + 2e_x + 1 = 1 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ |  |
|--|--|

Pero como se consideran deformaciones infinitesimales, los términos elevados al cuadrado son despreciables (en un orden de magnitud) y se puede escribir finalmente:

|   |             |
|---|-------------|
| $e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ | <b>1.10</b> |
|---|-------------|

Por otro lado, también se podrá escribir de acuerdo con la figura 6

|  |  |
|--|--|
| $q = \frac{(\partial u / \partial x) dx}{dx + (\partial u / \partial x) dx}$ |  |
|--|--|

ya que para desplazamientos infinitesimales se considerará la tangente igual al ángulo, es decir  $\tan q = q$ . Por otro lado el segundo término del denominador también se puede despreciar, ya que  $\partial u / \partial x \ll 1$ . Como lo mismo es cierto en el cálculo de  $\lambda$ , podemos escribir:

|  |  |
|--|--|
| $q = \frac{\partial u}{\partial x} \quad l = -\frac{\partial u}{\partial y}$ |  |
|--|--|

con lo que la deformación tangencial quedará:

|  |  |
|--|--|
| $g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ |  |
|--|--|

donde las dos derivadas parciales son positivas si  $AB$  y  $AD$  giran hacia adentro como es el caso de la figura.

En el caso de un sistema tridimensional en el que el elemento original es un prisma rectangular, las componentes de la deformación serían:

|  |             |
|--|-------------|
| $e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ $e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ $e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ | <b>1.11</b> |
|--|-------------|

donde se observa también el efecto simétrico con los esfuerzos:

|   |  |
|---|--|
| $g_{xy} = g_{yx} \quad g_{yz} = g_{zy} \quad g_{zx} = g_{xz}$ |  |
|---|--|

**1.6.1 Ecuaciones de compatibilidad.** Se analizará en detalle las ecuaciones 1.11 que se dedujeron. Se trata de un conjunto de seis ecuaciones para cada componente de la deformación, pero en función de sólo tres componentes del desplazamiento. Si se especifican estas últimas en función de  $x, y, z$ , se obtienen las deformaciones. Sin embargo se puede razonar a la inversa y partir del hecho de que las seis deformaciones sean funciones dadas de las mismas variables  $x, y, z$ . En este caso se tienen seis ecuaciones para el cálculo de tres incógnitas  $u, v, w$ . Ese sistema de ecuaciones sería indeterminado y no tendría solución para los desplazamientos, a no ser que las componentes de la deformación estuvieran relacionadas de alguna otra manera. En otras palabras, las componentes de las deformaciones no se pueden definir arbitrariamente, si se desea encontrar funciones de desplazamiento únicas y continuas. Por tanto, deben existir al menos tres ecuaciones adicionales que nos permitan establecer la relación biunívoca entre deformaciones y desplazamientos. Si se deriva la primera de las ecuaciones 1.11 dos veces con respecto a “ $y$ ”, y la segunda dos veces respecto a “ $x$ ” y sumamos los resultados, se tiene:

|   |  |
|---|--|
| $\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$ |  |
|---|--|

Y si se deriva la cuarta ecuación respecto a “ $x$ ” y respecto a “ $y$ ”, se tendrán:

|   |  |
|---|--|
| $\frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ |  |
|---|--|

y como el orden de la derivación es indiferente:

|   |  |
|---|--|
| $\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y}$ |  |
|---|--|

De forma similar se pueden obtener cinco ecuaciones más. Las seis ecuaciones las se escriben a continuación:

|   |             |
|---|-------------|
| $\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y \partial z}$ $\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g_{xz}}{\partial z \partial x}$ $2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z} \right)$ $2 \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z} \right)$ $2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z} \right)$ | <b>1.12</b> |
|---|-------------|

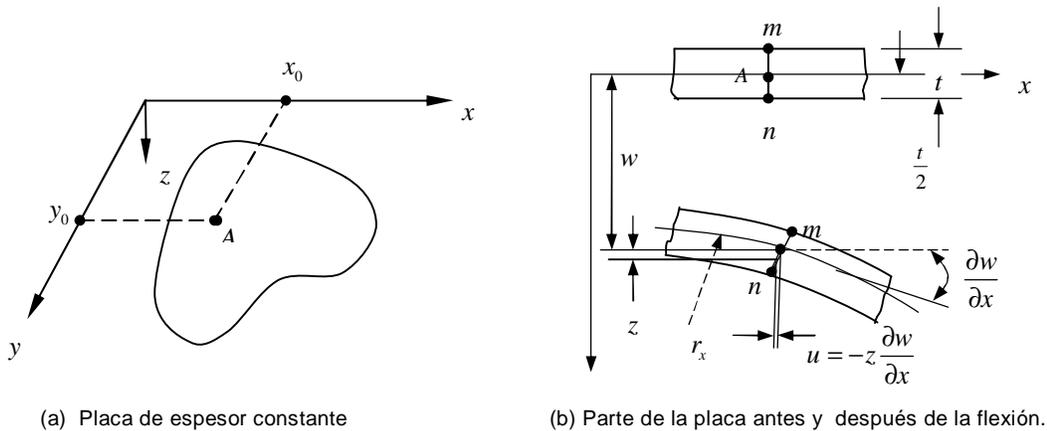
Estas ecuaciones se denominan: *ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant*. Las componentes de las deformaciones deben cumplir estas seis ecuaciones para que exista solución en desplazamientos.

## 2. TEORÍA DE PLACAS

Las placas son los elementos estructurales inicialmente planos, con un espesor mucho más pequeño que las otras dimensiones. Se tratarán las placas de tal forma que sea común dividir el espesor  $t$  en las mitades de un mismo plano paralelo a las caras. Este plano recibe el nombre de plano medio de la placa. El espesor del plano es moderado en una dirección normal al medio plano. Las placas pueden ser clasificadas en tres grupos: placas delgadas con las desviaciones pequeñas, placas delgadas con las desviaciones grandes y placa de espesor. Según el criterio a menudo aplicado para definir una placa delgada (para los propósitos de cálculos técnicos) la proporción del espesor a la longitud del plano debe ser menos que  $1/20$ . Consideraremos sólo desviaciones pequeñas de placas delgadas, unas simplificaciones consistentes con la magnitud de deformación normalmente encontrada en las estructuras de las placas. Como es notado previamente, a menos que por otra parte especificado, se asumirán que la placa y materiales de la cubierta son homogéneos e isotrópicos.

## 2.2 COMPORTAMIENTO GENERAL DE PLACAS

**Figura 8.** Comportamiento de una placa



(a) Placa de espesor constante

(b) Parte de la placa antes y después de la flexión.

Considere una placa libre de carga, mostrada en la figura 8a, en que el plano  $xy$  coincide con el medio plano y que la desviación de  $x$  es cero. Los componentes de desplazamiento a un punto, ocurriendo en las direcciones de  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , se denota por  $u$ ,  $v$  y  $w$ , respectivamente. Cuando debido a la carga lateral, la deformación tiene lugar, el medio plano a cualquier punto  $A(x_a, y_a)$  tiene desviación  $w$  (figura 8b). Los supuestos fundamentales de la teoría de pequeñas deformaciones doblamiento o llamada clásica o teoría de costumbre para isotrópicos, laminas homogéneas, elásticas, delgadas, esta basado en la geometría de deformaciones. Ellos pueden empezarse como:

1. La deformación del plano medio es pequeña comparada con el espesor de la placa. La inclinación de la superficie inclinada es muy pequeña y el cuadrado de la inclinación es despreciable comparado con la unidad.
2. El plano medio permanece libre subsecuente al pandeo.
3. La sección ( $mm$ ) inicialmente normal al plano medio permanece plana y normal a la superficie después del pandeo. Esto quiere decir que las deformaciones angulares verticales  $g_{xz}$  y  $g_{yz}$  son despreciables. La deflexión de la placa esta asociada principalmente al pandeo de las deformaciones. De

esto se deduce que la deformación normal  $e_z$  resultante de las cargas transversales también es omitida.

4. El esfuerzo normal al plano medio,  $s_z$ , es pequeño comparado con las otras componentes de esfuerzo y puede ser despreciable.

Los supuestos anteriores se conocen como las **hipótesis de Kirchhoff** <sup>[1]</sup>, son análogas a las deflexión de la teoría de vigas. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, pueden encontrarse simplificaciones respecto al estado de deformación y esfuerzo. Esto resulta menos complejo, un problema tridimensional de placas reducido a dos dimensiones. Consecuentemente, las ecuaciones de gobierno de placas pueden ser derivadas de manera sencilla.

## 2.2 RELACIONES DE DEFORMACIÓN – CURVATURA

Como consecuencia del supuesto 3, las relaciones de desplazamiento-deformación se reducen a:

|   |  |  |            |
|---|--|--|------------|
| $e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$     | $e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$  | $g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$     | <b>2.1</b> |
| $e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ | $g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ | $g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ |            |

Integrando  $e_z$ , se obtiene:

|               |  |
|---------------|--|
| $w = w(x, y)$ |  |
|---------------|--|

[1] UGURAL, Ansel C. Stresses in Plates and Shells. 2 ed. New Jersey: Mac Graw Hill, 1981. 502 p.

Como las deflexiones laterales no varían sobre el espesor de la placa, integramos las expresiones  $g_{xz}$  y  $g_{yz}$  da como resultado

|   |  |
|---|--|
| $u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y)$ |  |
|---|--|

Donde  $u_0(x, y)$  y  $v_0(x, y)$  representan, respectivamente, los valores de  $u$  y  $v$  en el plano medio. Basándose en el supuesto 2 se puede concluir:

|   |            |
|---|------------|
| $u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$ | <b>2.2</b> |
|---|------------|

Sustituyendo al ecuación (2.2) en la (2.1), se tiene:

|   |            |
|---|------------|
| $e_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad e_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad g_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ | <b>2.3</b> |
|---|------------|

Estas ecuaciones son para cualquier punto en la placa.

El radio de curvatura de un plano curvo es definido como la tasa de cambio del ángulo de declinación de la curva respecto a la distancia a lo largo de la curva. Tomando el supuesto 1 y derivando parcialmente la ecuación 2.3 representa las curvas de la placa. La curvatura  $k$  (*kappa*) en la superficie media en el plano paralelo a los planos  $xz$ ,  $yz$ , y  $xy$  son, respectivamente:

|  |            |
|--|------------|
| $\frac{1}{r_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = k_x \quad \frac{1}{r_y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = k_y \quad \frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = k_{xy}$ | <b>2.4</b> |
|--|------------|

donde  $k_{xy} = k_{yx}$ . La curvatura  $k_x$  y el radio de curvatura  $r_x$  en la superficie media en el plano  $xz$  mostrado en la figura 8b. Similarmente,  $k_x$  y  $r_r$  pueden estar en el plano  $yz$ . Las ecuaciones 3.4 en la declinación varía sobre la placa. La ultimas de estas expresiones también es llamada como *torcedura del plano medio* con respecto a los ejes "x" y "y". Las relaciones de curvatura-deformación, están dadas por:

|  |            |
|--|------------|
| $e_x = -zk_x \quad e_y = -zk_y \quad t_{xy} = -2zk_{xy}$ | <b>2.5</b> |
|--|------------|

## 2.7 ESFUERZOS Y RESULTANTES DE ESFUERZOS

En el caso de un estado tridimensional de esfuerzos, los esfuerzos y deformaciones relacionadas por la ley de *Hooke* generalizada, válida para materiales homogéneos isotrópico.

|  |            |
|--|------------|
| $e_x = \frac{1}{E} [s_x - n(s_y + s_z)] \quad g_{xy} = \frac{t_{xy}}{G}$ $e_y = \frac{1}{E} [s_y - n(s_x + s_z)] \quad t_{xz} = \frac{g_{xz}}{G}$ $e_z = \frac{1}{E} [s_z - n(s_x + s_y)] \quad t_{yz} = \frac{t_{yz}}{G}$ | <b>2.6</b> |
|--|------------|

Donde  $t_{ij} = t_{ji}$  ( $i, j = x, y, z$ ). Las constantes  $E$ ,  $n$ ,  $G$  representan los módulos de elasticidad longitudinal o módulo de *Young*, radio de *Possion* y módulo de elasticidad transversal.

|                        |            |
|------------------------|------------|
| $G = \frac{E}{2(1+n)}$ | <b>2.7</b> |
|------------------------|------------|

Sustituyendo  $e_z = g_{yz} = g_{xz} = 0$  en las ecuaciones 2.6, si obtiene:

|  |  |
|--|--|
| $s_x = \frac{E}{1-n^2} (e_x + ne_y) \quad s_y = \frac{E}{1-n^2} (e_y + ne_x) \quad t_{xy} = Gg_{xy}$ |  |
|--|--|

Introduciendo las curvaturas de la placa, las ecuaciones 2.4 y 2.5 toma la forma:

|  |            |
|--|------------|
| $s_x = -\frac{Ez}{1-n^2} (k_x + nk_y) = -\frac{Ez}{1-n^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $s_y = -\frac{Ez}{1-n^2} (k_y + nk_x) = -\frac{Ez}{1-n^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ $t_{xy} = -\frac{Ez}{1-n^2} k_{xy} = -\frac{Ez}{1-n^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ | <b>2.8</b> |
|--|------------|

Los esfuerzos distribuidos sobre el espesor de la placa produce momentos flectores, momentos torsores y fuerzas cortantes. Hay momentos y fuerzas por unidad de longitud que también son llamados esfuerzos resultantes.

|  |  |
|--|--|
| $\int_{-t/2}^{t/2} z s_x dy dz = dy \int_{-t/2}^{t/2} z s_x dz = M dy$ |  |
|--|--|

Similarmente, las expresiones para los otros resultantes son derivados:

|  |            |
|--|------------|
| $\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} z dz$ | <b>2.9</b> |
|--|------------|

donde  $M_{xy} = M_{yx}$  y

|  |             |
|--|-------------|
| $\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix} dz$ | <b>2.10</b> |
|--|-------------|

Es importante mencionar que la teoría de láminas delgadas omite los efectos de las componentes de deformación  $g_{xz} = t_{xz}/G$  y  $g_{yz} = t_{yz}/G$  en la flexión. Las fuerzas verticales  $Q_x$  y  $Q_y$  o son despreciables. Las ecuaciones de momentos flectores y torsores en términos de la curvatura y la deflexión, se obtiene sustituyendo la ecuación 2.8 en 2.9

|   |             |
|---|-------------|
| $M_x = -D(k_x + n k_y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $M_y = -D(k_y + n k_x) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ $M_{xy} = -D(1-n)k_{xy} = -D(1-n) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ | <b>2.11</b> |
|---|-------------|

donde

|                              |             |
|------------------------------|-------------|
| $D = \frac{Et^3}{12(1-n^2)}$ | <b>2.12</b> |
|------------------------------|-------------|

es la *rigidez flexional* de la placa. Los signos negativos está de acuerdo con la convención de signos para el momento y curvatura. La fuerza de cortante vertical  $Q_x$  y  $Q_y$  se relacionan en  $w$ , y en la derivación de las ecuaciones de equilibrio.

Cabe anotar que si un elemento placa, de ancho la unidad y con su eje paralelo al eje  $x$ , es libre de mover la cara bajo la carga transversal, la cima y superficie del fondo se deforma en forma de silla o antielástica, aparecería una curvatura  $k_y$ . La rigidez flexionante sería entonces  $Et^3/12$ . El resto de la lámina previene la curvatura, sin embargo; debido a esta acción, una parte de la lámina presenta rigidez mayor que una viga por un factor  $1/(1-n^2)$ , aproximadamente 10 por ciento.

Las componentes de esfuerzo en dos dimensiones se encuentran ecuación 2.8 sustituyendo por 2.11 y empleando 2.12. De esta manera obtenemos

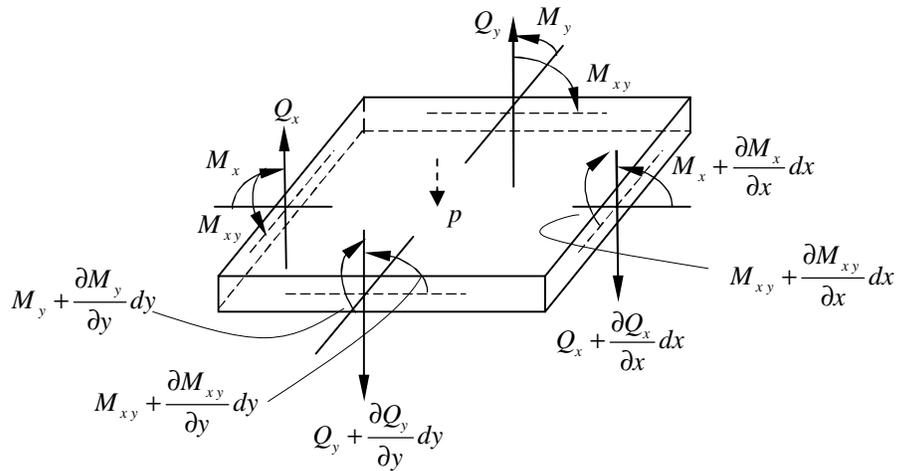
|   |             |
|---|-------------|
| $s_x = \frac{12M_x z}{t^3} \quad s_y = \frac{12M_y z}{t^3} \quad t_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3}$ | <b>2.13</b> |
|---|-------------|

Los esfuerzos máximos ocurren en el fondo y superficie de la cima (en  $z = \pm t/2$ ) de la lámina.

## 2.8 VARIACIÓN DEL ESFUERZO DENTRO DE UNA PLACA

Las componentes de esfuerzos generalmente varían de un punto a otro en la placa cargada. Estas variaciones son gobernadas por las condiciones de equilibrio de la estática. El cumplimiento de estas condiciones establece las relaciones conocidas como ecuaciones de equilibrio. Podríamos reducir el sistema de ecuaciones a una relación expresada en términos de momento.

**Figura 9.** Resultante de esfuerzos positivos y cargas en el elemento placa



Considerando un elemento  $dx dy$  de la placa sujeto a una distribución de cargas uniformes por unidad de área  $p$ . Asumiendo el peso de la placa como una cantidad pequeña, esto no afecta la exactitud de los resultados. Como el elemento es muy pequeño, para simplificar las componentes de fuerzas y momento puede considerarse una distribución uniforme en cada cara. En la figura 11 es mostrado por un vector que representa el valor de la carga aplicada en cada cara.

Con cambiar la localización, como por ejemplo, del la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha, una de las componentes de momento, por ejemplo,  $M_x$ , actuando en la cara negativa  $x$  varía el valor relativo a la cara positiva  $x$ . Esta variación con la posición puede ser expresada por una expansión truncada de Taylor:

|  |  |
|--|--|
| $M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$ |  |
|--|--|

La derivada parcial es usada porque  $M_x$  es una función de “x” y “y”. Tratando todas las componentes similarmente, el estado de resultante de esfuerzos mostrado en la figura es obtenido.

La sumatoria de fuerzas en la dirección “z” es:

|   |  |
|---|--|
| $\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0$ |  |
|---|--|

de la cual

|   |             |
|---|-------------|
| $\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$ | <b>2.14</b> |
|---|-------------|

El equilibrio de momento al eje “x” esta gobernado por:

|  |  |
|--|--|
| $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + Q_y dx dy = 0$ |  |
|--|--|

|  |             |
|--|-------------|
| $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0$ | <b>2.15</b> |
|--|-------------|

Los términos de los productos infinitesimales tal como el momento de  $p$  y el momento debido al cambio en  $Q_y$  han sido obtenidos.

Similarmente, del equilibrio de momentos al eje y, tenemos:

|  |             |
|--|-------------|
| $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0$ | <b>2.16</b> |
|--|-------------|

Finalmente, la introducción de las expresiones para  $Q_x$  y  $Q_y$  de las ecuaciones 2.14 y 2.16 en 2.15:

|  |             |
|--|-------------|
| $\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$ | <b>2.17</b> |
|--|-------------|

Esta es la *ecuación diferencial de equilibrio* para flexión en placas delgadas.

Las expresiones para las fuerzas cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$  pueden ser escritas en términos de la deflexión  $w$ , de las ecuaciones 2.15 y 2.16 con 2.11:

|   |             |
|---|-------------|
| $Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)$ $Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w)$ | <b>2.18</b> |
|---|-------------|

donde

|  |  |
|--|--|
| $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ |  |
|--|--|

este es el operador *Laplace*.<sup>[2]</sup>

## 2.9 ECUACIÓN PARA LA DEFLEXIÓN DE PLACAS

La ecuación diferencial básica para la deflexión de placas puede obtenerse fácilmente introduciendo en la ecuación 2.17 las expresiones de  $M_x, M_y, M_{xy}$  dadas en 2.11 y se obtiene:

|   |             |
|---|-------------|
| $\frac{\partial^2 k_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 k_y}{\partial y^2} = \frac{p}{D}$ | <b>2.19</b> |
|---|-------------|

Lo anterior fue la ecuación de equilibrio en términos de las curvaturas. Una forma alternativa de la ecuación 2.19 es determinada por la inserción de la definición de curvatura de la ecuación 2.4

|  |             |
|--|-------------|
| $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$ | <b>2.20</b> |
|--|-------------|

[2] UGURAL, Ansel C. Stresses in Plates and Shells. 2 ed. New Jersey: Mac Graw Hill, 1981. 502 p.

Esta ecuación, la primera derivada por *Laplace* en 1811, también puede escribirse como:

|                          |             |
|--------------------------|-------------|
| $\nabla^4 = \frac{p}{D}$ | <b>2.21</b> |
|--------------------------|-------------|

en la cual  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = (\nabla^2)^2$ . Cuando no hay cargas laterales actuando en la placa,

|  |             |
|--|-------------|
| $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$ | <b>2.22</b> |
|--|-------------|

La ecuación 2.20 es la *ecuación diferencial de gobierno para deflexión de placas delgadas*

## 2.10 ENERGIA DE DEFORMACION DE LA PLACA

La energía de deformación en un cuerpo elástico para un estado general de esfuerzo <sup>[3]</sup> esta expresado por:

|   |             |
|---|-------------|
| $U = \frac{1}{2} \iiint_V (s_x e_x + s_y e_y + s_z e_z + t_{xy} g_{xy} + t_{xz} g_{xz} + t_{yz} g_{yz}) dx dy dz$ | <b>2.23</b> |
|---|-------------|

omitiendo los valores de  $s_z, t_{xz}, t_{yz}$

|   |  |
|---|--|
| $U = \frac{1}{2} \iiint_V (s_x e_x + s_y e_y + t_{xy} g_{xy}) dx dy dz$ |  |
|---|--|

y tomando los valores de

|   |  |
|---|--|
| $s_x = \frac{E}{1-n^2} (e_x + n e_y) \quad s_y = \frac{E}{1-n^2} (e_y + n e_x) \quad t_{xy} = G g_{xy}$ |  |
|---|--|

y reduciendo la expresión y dejándola en función de esfuerzos y las constantes elásticas

[3] UGURAL, Ansel C. Stresses in Plates and Shells. 2 ed. New Jersey: Mac Graw Hill, 1981. 502 p.

|   |             |
|---|-------------|
| $U = \frac{1}{2} \iiint_V \left[ \frac{1}{2E} (s_x^2 + s_y^2 - 2ns_x s_y) + \frac{1}{2G} t_{xy}^2 \right] dx dy dz$ | <b>2.24</b> |
|---|-------------|

Para una placa de espesor uniforme la ecuación 2.24 puede ser escrita en términos de la deflexión  $w$  y usando las ecuaciones 2.8 y 2.12 se tiene:

|  |             |
|--|-------------|
| $U = \frac{1}{2} \iint_A D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-n) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$ | <b>2.25</b> |
|--|-------------|

o

|   |             |
|---|-------------|
| $U = \frac{1}{2} \iint_A D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-n) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$ | <b>2.26</b> |
|---|-------------|

donde  $A$  es el área de la superficie.

La ecuación 2.26 es conocida como curvatura Gaussiana. Se observa que la energía de deformación es no-lineal en función de la deformación o el esfuerzo. El principio de superposición no es válida para la energía de deformación.

## 2.10 PRINCIPIO DE TRABAJO VIRTUAL

Suponga un cuerpo elástico el cual experimenta un incremento de desplazamiento virtual. Este desplazamiento no necesita realmente ocurrir y no necesita ser infinitesimal. Cuando el desplazamiento es tomado infinitesimal, como es frecuentemente hecho, es razonable considerar el sistema de fuerza actuando en el cuerpo como constante. El trabajo virtual <sup>[4]</sup> hecho por las fuerzas de superficie  $p$  por unidad de área en el cuerpo del estado inicial al estado de equilibrio es expresado como:

[4] ORTIZ BERROCAL, Luis. Elasticidad. 3 ed. Madrid: Mac Graw Hill, 1998. 549 p.

|   |  |
|---|--|
| $dW = \int_A (p_x du + p_y dv + p_z dw) dA$ |  |
|---|--|

donde A es la superficie de frontera y  $du, dv, dw$  son los desplazamientos virtuales en las direcciones x, y, z. La notación  $d$  denota la cantidad de variación. La energía de deformación requerida de un cuerpo de volumen  $V$  como un resultado de la deformación virtual es:

|  |             |
|--|-------------|
| $dU = \int_V (s_x de_x + s_y de_y + s_z de_z + t_{xy} dg_{xy} + t_{xz} dg_{xz} + t_{yz} dg_{yz}) dV$ | <b>2.27</b> |
|--|-------------|

El trabajo virtual hecho durante los desplazamientos virtuales son ceros:  $dW - dU = 0$ . El principio de trabajo virtual para un cuerpo elástico es representado:

|           |  |
|-----------|--|
| $dW = dU$ |  |
|-----------|--|

## 2.11 PRINCIPIO DE LA ENERGÍA POTENCIAL MINIMA

Considerando que el desplazamiento virtual no altera la forma del cuerpo y las fuerzas de superficie son estimadas como constantes, la ecuación puede escribirse como:

|                       |             |
|-----------------------|-------------|
| $d\Pi = d(U - W) = 0$ | <b>2.28</b> |
|-----------------------|-------------|

Esta expresión

|               |             |
|---------------|-------------|
| $\Pi = U - W$ | <b>2.29</b> |
|---------------|-------------|

Se muestra la energía del cuerpo. La ecuación 2.28 representa la condición de la energía potencial estacionaria del sistema. Esta puede mostrarse para equilibrio estable la energía potencial es un mínimo. Para todo el desplazamiento satisfacen las condiciones de frontera y de equilibrio, la energía potencial será asumida un valor mínimo. Esto es referido como el principio de la energía potencial mínima.

La energía potencial almacenada en la placa bajo una carga lateral distribuida  $p(x,y)$  es

|  |             |
|--|-------------|
| $\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V (s_x e_x + s_y e_y + t_{xy} g_{xy}) dx dy dz - \iint_A (pw) dx dy$ | <b>2.30</b> |
|--|-------------|

Para el caso de una placa de espesor constante

|  |             |
|--|-------------|
| $\Pi = \frac{1}{2} \iint_A (M_x k_x + M_y k_y + M_{xy} k_{xy}) dx dy - \iint_A (pw) dx dy$ | <b>2.31</b> |
|--|-------------|

Una explicación física de los términos de  $U$  en esta expresión es: como  $\partial^2 w / \partial x^2 = k_x$  representa la curvatura de la placa en el plano  $xz$ , el ángulo correspondiente el momento  $M_y dy$  es igual a  $-(\partial^2 x / \partial x^2) dx$ . La energía de deformación o el trabajo hecho por los momentos  $M_y dy$  es  $-\frac{1}{2} M_x k_x dx dy$ . La energía de deformación debida a  $M_y dx$  y  $M_{xy} dy$  son interpretadas similarmente. El principio de la energía potencial, referido en la ecuación 2.31 es expresada en la forma:

|  |             |
|--|-------------|
| $d\Pi = - \iint_A (M_x dk_x + M_y dk_y + M_{xy} dk_{xy}) dx dy - \iint_A (pw) dx dy = 0$ | <b>2.32</b> |
|--|-------------|

## 2.12 PLACAS ANISOTRÓPICAS

Las placas analizadas han sido asumidas de ser homogéneas y de material isotrópico. De manera que, las placas de materiales anisotrópicos tienen importantes aplicaciones debido a su excepcional rigidez. Un material no isotrópico o anisotrópico es quien las propiedades dependen de la dirección. El más simple entre ellos, el ortotrópico, es aquel en el que las propiedades del material difieren en dos direcciones mutuamente perpendiculares. Algunos materiales como la madera pueden ser modelados por propiedades ortotrópicas asumiendo que los efectos locales son ignorados. Ejemplos de estos son cubiertas de metal enrollada y corrugada, filtros en construcciones de placas sándwichs, madera laminada, compuestos de fibras reforzadas, concreto reforzado.

Un material que tiene dos o más constituyentes es considerando un compuesto. Usualmente, los componentes consisten de materiales reforzados de alta fuerza (acero, vidrio, fibra) incrustado alrededor de un material (resina, concreto, nylon) llamado matriz. De este modo, un material compuesto tiene un relativo gran radio de fuerza a peso, tan bien como sus deseables características. Una placa de material compuesto u ortotrópico es ampliamente usado en muchas de las aplicaciones espaciales, en construcciones, en contenedores a presión en componentes de ingeniería tal como bombas diafragma y acoplamientos.

**2.9.1 Relaciones Básicas.** La solución de los problemas de flexión de placas ortotrópicas requiere la reformulación de las leyes de Hooke <sup>[5]</sup>.

|   |             |
|---|-------------|
| $s_x = E_x e_x + E_{xy} e_y$ $s_y = E_y e_y + E_{xy} e_x$ $t_{xy} = G g_{xy}$ | <b>2.33</b> |
|---|-------------|

En forma matricial es:

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{bmatrix} \rightarrow s = E e$ | <b>2.34</b> |
|---|-------------|

Donde los cuatro módulos  $E_x, E_y, E_{xy}$  y  $G$  son todos independientes entre si.

|  |             |
|--|-------------|
| $E_x = \frac{E'_x}{1 - n_x n_y} \quad E_y = \frac{E'_y}{1 - n_x n_y}$ $E_{xy} = \frac{E'_x n_y}{1 - n_x n_y} = \frac{E'_y n_x}{1 - n_x n_y}$ | <b>2.35</b> |
|--|-------------|

Aquí  $n_x, n_y$  y  $E'_x, E'_y$  son los radios de Poisson efectivos y los módulos de elasticidad efectivos, respectivamente. Los subíndices “x” y “y” relaciona las direcciones. El modulo cortante de elasticidad  $G$  es el mismos para ambos materiales isotrópico y ortotrópico.

[5] **ORTIZ BERROCAL, Luis.** Elasticidad. 3 ed. Madrid: Mac Graw Hill, 1998. 549 p.

Las relaciones esfuerzo-deformación son basados en consideraciones geométricas y estas no cambian en las placas ortotrópicas.

|   |             |
|---|-------------|
| $e_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad e_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad g_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ | <b>2.36</b> |
|---|-------------|

Los esfuerzos son obtenidos introduciendo la ecuación 2.36 en 2.33

|  |             |
|--|-------------|
| $s_x = -z \left( E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $s_y = -z \left( E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ $t_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ | <b>2.37</b> |
|--|-------------|

Para los momentos integramos la ecuación 2.10:

|  |             |
|--|-------------|
| $M_x = - \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $M_y = - \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ $M_{xy} = -2G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ | <b>2.38</b> |
|--|-------------|

donde

|  |  |
|--|--|
| $D_x = \frac{t^3 E_x}{12} \quad D_y = \frac{t^3 E_y}{12} \quad D_{xy} = \frac{t^3 E_{xy}}{12} \quad G_{xy} = \frac{t^3 G}{12}$ |  |
|--|--|

Las expresiones para  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  y  $G_{xy}$  representa la rigidez de flexional y la rigidez de torcional de una placa ortotrópica, respectivamente. Podemos obtener las fuerzas cortantes en la placa sustituyendo la ecuación 2.38 en 2.17 y 2.16

|   |             |
|---|-------------|
| $Q_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $Q_y = - \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ | <b>2.39</b> |
|---|-------------|

donde

|                        |  |
|------------------------|--|
| $H = D_{xy} + 2G_{xy}$ |  |
|------------------------|--|

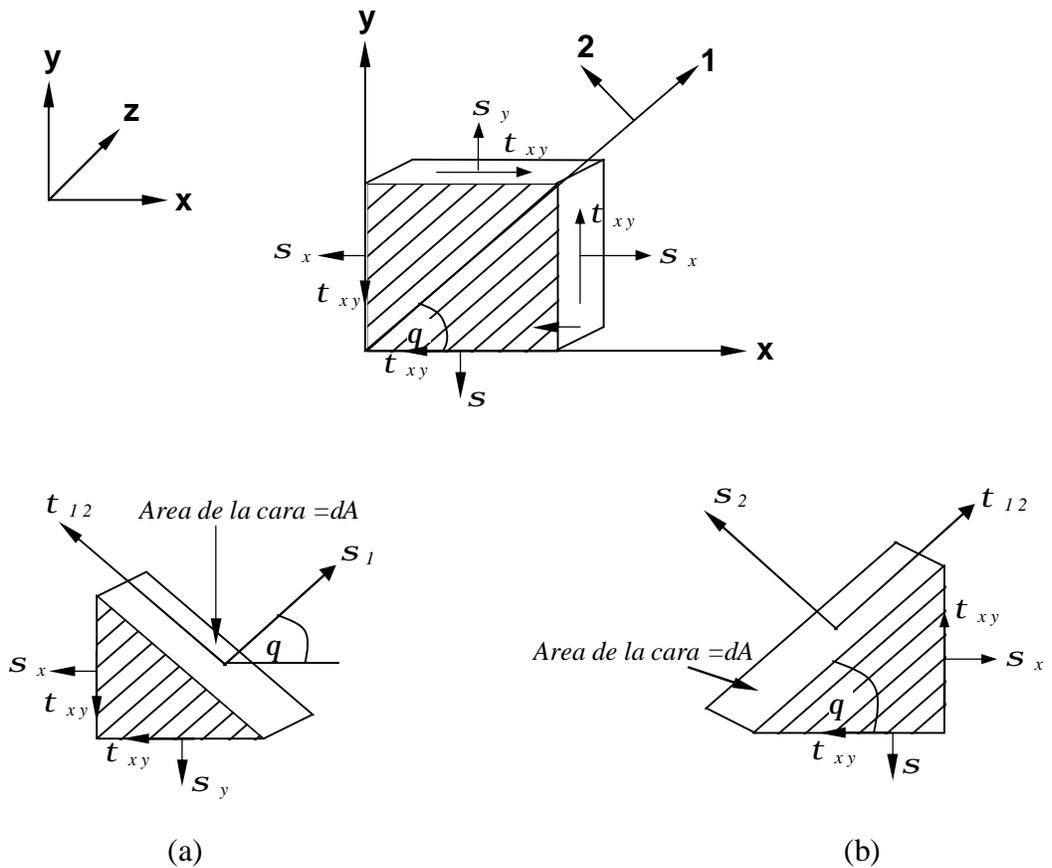
La ecuación diferencial de gobierno de la deflexión para una placa ortotrópica es

|   |             |
|---|-------------|
| $D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p$ | <b>2.40</b> |
|---|-------------|

### 2.9.2 Determinación de la matriz de elasticidad.

El cálculo de la matriz de elasticidad para materiales isotrópicos fue descrita en las secciones anteriores. Sin embargo, para materiales ortotrópicos en los cuales la orientación de los ejes del material no coincide con la de los ejes globales, es necesario calcular una nueva matriz elástica que relacione los ejes del material con los globales.

**Figura 10.** Lamina ortotrópica



Del diagrama de cuerpo libre de la figura 10 y sumando fuerzas en la dirección 1:

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{aligned} \sum F_1 = 0 \\ s_1 dA - s_x (dA \cos q) \cos q - s_y (dA \sin q) \sin q \\ - t_{xy} (dA \cos q) \sin q - t_{xy} (dA \sin q) \cos q = 0 \end{aligned}$ | <b>2.41</b> |
|---|-------------|

Del diagrama de cuerpo libre de la figura 10b y sumando la fuerzas en la dirección 2:

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{aligned} \sum F_2 = 0 \\ s_2 dA - s_x (dA \sin q) \sin q - s_y (dA \cos q) \cos q \\ + t_{xy} (dA \cos q) \sin q + t_{xy} (dA \sin q) \cos q = 0 \end{aligned}$ | <b>2.42</b> |
|---|-------------|

Del diagrama de cuerpo libre de la figura 10b y sumando fuerzas en la dirección 1:

|  |             |
|--|-------------|
| $\begin{aligned} \sum F_2 = 0 \\ t_{12} dA + s_x (dA \sin q) \cos q - s_y (dA \cos q) \sin q \\ - t_{xy} (dA \cos q) \cos q + t_{xy} (dA \sin q) \sin q = 0 \end{aligned}$ | <b>2.43</b> |
|--|-------------|

Simplificando las ecuaciones 2.41, 2.42, 2.43

|  |             |
|--|-------------|
| $\begin{aligned} s_1 &= s_x \cos^2 q + s_y \sin^2 q + 2t_{xy} \sin q \cos q, \\ s_2 &= s_x \sin^2 q + s_y \cos^2 q + 2t_{xy} \sin q \cos q, \\ t_{12} &= s_x \sin q \cos q + s_y \sin q \cos q + t_{xy} (\cos^2 q - \sin^2 q) \end{aligned}$ | <b>2.44</b> |
|--|-------------|

La ecuación 2.44 puede escribirse en forma matricial como:

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 q & \sin^2 q & 2 \sin q \cos q \\ \sin^2 q & \cos^2 q & -2 \sin q \cos q \\ -\sin q \cos q & \sin q \cos q & \cos^2 q - \sin^2 q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix}$ | <b>2.45</b> |
|---|-------------|

La matriz de 3x3 en la ecuación 2.45 es llamada matriz de transformación y se denota por  $[T]$ . Esta también es usada para transformar deformaciones.

Si se desea transformar del sistema de coordenadas 1-2 al sistema de coordenadas x-y, puede utilizarse la inversa de  $[T]$ , y esta dada por:

|  |             |
|--|-------------|
| $T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 q & \sin^2 q & -2\sin q \cos q \\ \sin^2 q & \cos^2 q & 2\sin q \cos q \\ \sin q \cos q & -\sin q \cos q & \cos^2 q - \sin^2 q \end{bmatrix}$ | <b>2.46</b> |
|--|-------------|

por tanto,

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_{12} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_{12} \end{bmatrix}$ | <b>2.47</b> |
|---|-------------|

Similarmente para deformaciones,

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ g_{12} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix}$ | <b>2.48</b> |
|---|-------------|

Sustituyendo en la ecuación 2.34 en la segunda de la ecuación 2.47:

|  |             |
|--|-------------|
| $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} E \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ g_{12} \end{bmatrix} = T^{-1} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix}$ | <b>2.49</b> |
|--|-------------|

Ahora poniendo la primera parte de la ecuación 2.48 en la ecuación 2.49:

|  |             |
|--|-------------|
| $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}$ | <b>2.50</b> |
|--|-------------|

Por tanto la nueva matriz de elasticidad es:

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} T$ | <b>2.51</b> |
|---|-------------|

las componentes de la matriz de elasticidad ( $E^*$ ) son:

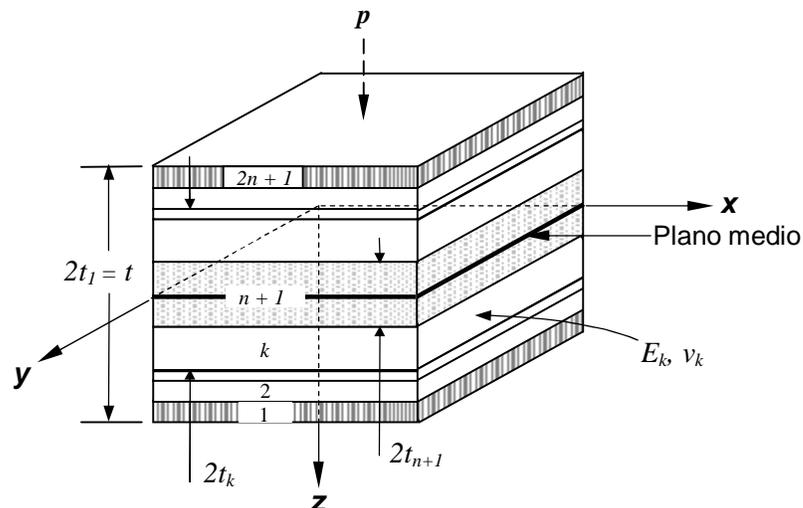
|   |             |
|---|-------------|
| $E_{11}^* = E_{11}m^4 + 2(E_{12} + 2E_{66})m^2n^2 + E_{22}n^4$ $E_{12}^* = (E_{11} + E_{22} - 4E_{66})m^2n^2 + E_{12}(m^4 + n^4)$ $E_{22}^* = E_{11}n^4 + 2(E_{12} + 2E_{66})m^2n^2 + E_{22}m^4$ $E_{16}^* = (E_{11} - E_{12} - 2E_{66})m^3n + (E_{12} - E_{22} + 2E_{66})mn^3$ $E_{26}^* = (E_{11} - E_{12} - 2E_{66})n^3m + (E_{12} - E_{22} + 2E_{66})m^3n$ $E_{66}^* = (E_{11} + E_{22} - 2E_{12} - 2E_{66})m^2n^2 + E_{66}(m^4 + n^4)$ | <b>2.52</b> |
|---|-------------|

donde  $m = \cos q$ ,  $n = \text{sen} q$ . Sustituyendo la ecuación 2.52 en 2.50, se tiene:

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}^* & E_{12}^* & E_{16}^* \\ E_{12}^* & E_{22}^* & E_{26}^* \\ E_{16}^* & E_{26}^* & 2E_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}$ | <b>2.53</b> |
| $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}^* & E_{12}^* & E_{16}^* \\ E_{12}^* & E_{22}^* & E_{26}^* \\ E_{16}^* & E_{26}^* & E_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{bmatrix}$  |             |

### 2.9.3 Placa de multicapas isotrópicas.

Figura 11. Placa laminada simétricamente construida



Una estructura compuesta de un número arbitrario de capas definidas pueden ser frecuentemente aproximadas a una placa laminada. Generalmente, el ensamble

de estas estructura, cada capa posee diferente espesor, orientación de los ejes principales y propiedades anisotrópicas. En este momento se analizaran placas de capas isotrópicas.

*Placas con multicapas.* Son fabricadas de tal manera que ellas actúan como un solo material. Las capas no pueden deslizarse sobre otra, y los desplazamientos permanecen continuos; las deformaciones varían linealmente sobre el espesor. Tal que, las relaciones de esfuerzo-deformación para una capa  $k$ , son expresadas así:

|  |             |
|--|-------------|
| $\mathbf{e}_x^{(k)} = -z_k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \mathbf{e}_y^{(k)} = -z_k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \mathbf{g}_{xy}^{(k)} = -2z_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ | <b>2.54</b> |
|--|-------------|

Las leyes de Hooke son:

|  |             |
|--|-------------|
| $\mathbf{s}_x^{(k)} = \frac{E_k}{1-n_k^2} \left[ \mathbf{e}_x^{(k)} + n_k \mathbf{e}_y^{(k)} \right]$ $\mathbf{s}_y^{(k)} = \frac{E_k}{1-n_k^2} \left[ \mathbf{e}_y^{(k)} + n_k \mathbf{e}_x^{(k)} \right]$ $\mathbf{t}_{xy}^{(k)} = \frac{E_k}{2(1+n_k)} \mathbf{g}_{xy}^{(k)}$ | <b>2.55</b> |
|--|-------------|

Sustituyendo las deformaciones de la ecuación 2.54 en 2.55, integrando sobre cada capa y sumando los resultados, obtenemos los esfuerzos resultantes actuando en el plano medio.

|   |  |
|---|--|
| $\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_k \int_{z-1}^z \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z dz$ |  |
|---|--|

Los esfuerzos para la capa  $k$  son:

|  |  |
|--|--|
| $s_x = -z_k \frac{E_k}{1-n_k^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $s_y = -z_k \frac{E_k}{1-n_k^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + n_k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ $t_{xy} = -z_k \frac{E_k}{1+n_k} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ |  |
|--|--|

El método general de derivar las ecuaciones de gobierno para placas multicapas sigue un patrón idéntico con el que fue descrito en la sección 2.4. Ahora la ecuación 2.21 es:

|                              |             |
|------------------------------|-------------|
| $\nabla^4 w = \frac{P}{D_t}$ | <b>2.56</b> |
|------------------------------|-------------|

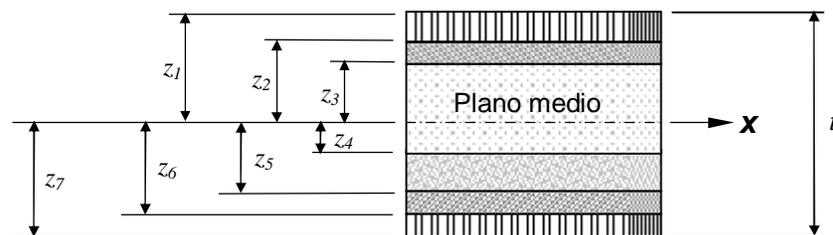
donde  $D_t$  es la rigidez flexional transformada de placas laminadas

Una placa de capas de simetría estructural cerca del plano medio son de importancia. Para una placa de  $2n+1$  de capas isotrópicas simétricas (figura 11) la rigidez flexional transformada esta dada por

|   |             |
|---|-------------|
| $D_t = \frac{2}{3} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{1-n_k^2} (t_k^3 - t_{t+1}^3) + \frac{E_{n+1} t_{n+1}^3}{1-n_{n+1}^2} \right]$ | <b>2.57</b> |
|---|-------------|

### 2.9.4 Placa compuesta laminada

**Figura 12.** Laminado compuesto



En una lámina se presentan fuerzas y momentos (en el plano y en flexión) estos pueden expresarse integrando los esfuerzos a través del espesor  $h$ .

|  |             |
|--|-------------|
| $N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}_p + \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}_b \right] dz$ | <b>2.58</b> |
|--|-------------|

|  |             |
|--|-------------|
| $M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \left[ \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}_p + \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}_b \right] dz$ | <b>2.59</b> |
|--|-------------|

donde los subíndices p y b indican los estados en el plano y en flexión respectivamente.

Las integrales en las ecuaciones 2.58 y 2.59 se realizan sobre cada capa de lámina para luego ser sumadas. Usando el esquema de laminado de la figura 12 las ecuaciones 2.58 y 2.59 pueden escribirse de la siguiente manera:

|  |             |
|--|-------------|
| $N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[ \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}_p + \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}_b \right]_k dz$ | <b>2.60</b> |
|--|-------------|

|  |             |
|--|-------------|
| $M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} z \left[ \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}_p + \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix}_b \right]_k dz$ | <b>2.61</b> |
|--|-------------|

Simplificando las ecuaciones 2.60 y 2.61 y sustituyendo el vector de esfuerzo ( $s = E e$ ), siendo  $E$  la matriz elásticas.

|  |  |
|--|--|
| $N = \sum_{k=1}^n E_k^* \int_z^{z_{k+1}} \left[ \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix}_p + \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix}_b \right] dz = \sum_{k=1}^n E_k^* \int_z^{z_{k+1}} (e_p + e_b) dz$ |  |
|--|--|

$$M = \sum_{k=1}^n E_k^* \int_{z_k}^{z_{k+1}} z \left[ \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix}_p + \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix}_b \right] dz = \sum_{k=1}^n E_k^* \int_{z_k}^{z_{k+1}} z (e_p + e_b) dz$$

sustituyendo la ecuación 2.5, se obtiene:

$$N = \sum_{k=1}^n E_k^* \int_{z_k}^{z_{k+1}} (e + zk)_k dz$$

$$M = \sum_{k=1}^n E_k^* \int_{z_k}^{z_{k+1}} z(e + zk)_k dz$$

Resolviendo las integrales:

$$N = \sum_{k=1}^n E_k^* \left\{ (z_{k+1} - z_k) e + \frac{1}{2} (z_{k+1}^2 - z_k^2) k \right\}_k$$

$$M = \sum_{k=1}^n E_k^* \left\{ \frac{1}{2} (z_{k+1}^2 - z_k^2) e + \frac{1}{3} (z_{k+1}^3 - z_k^3) k \right\}_k$$

los resultados de la integrar pueden escribirse como:

$$A = \sum_{k=1}^n E_k^* (z_{k+1} - z_k), \quad B = \sum_{k=1}^n E_k^* \frac{1}{2} (z_{k+1}^2 - z_k^2), \quad C = \sum_{k=1}^n E_k^* \frac{1}{3} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad \mathbf{2.62}$$

y finalmente se tiene:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{2.63}$$

o

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ k \end{bmatrix} \quad \mathbf{2.64}$$

### 3. FORMULACION POR ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1 ANALISIS DE PLACA EN EL PLANO

Se hará el análisis en el plano sin tener en cuenta las fuerzas inerciales y de amortiguamiento.

Discretización del funcional de energía <sup>[6]</sup> mediante M.E.F.

|   |            |
|---|------------|
| $\Pi = \int_V \mathbf{s}^T \mathbf{e} dV - \int_V f^T u dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T \mathbf{e} d\Omega$ | <b>3.1</b> |
|---|------------|

En el caso bidimensional (para condiciones de frontera homogénea) las componentes de desplazamiento pueden ser aproximadas por:

|   |            |
|---|------------|
| $u \cong \sum_{i=1}^4 N_i u_i = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$ $v \cong \sum_{i=1}^4 N_i v_i = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$ | <b>3.2</b> |
|---|------------|

Las cuales pueden ser escritas en forma vectorial como:

|  |            |
|--|------------|
| $U \cong \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \rightarrow U \cong N \Delta$ | <b>3.3</b> |
|--|------------|

[6] REDDY, J.N. An Introduction to the Finite Element Method. 2 ed. Mc. Graw Hill, 1993, 672 p.

Para el caso de elasticidad bidimensional se tiene las siguientes relaciones:

|   |            |
|---|------------|
| $\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ 2g_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \rightarrow e = TU$ | <b>3.4</b> |
|---|------------|

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| $s = Ee \rightarrow s = ETU$ | <b>3.5</b> |
|------------------------------|------------|

reemplazando

|   |  |
|---|--|
| $d\Pi = \int_V ((ETU)^T d(EU) - f^T dU) dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T dU d\Omega$ |  |
|---|--|

Teniendo en cuenta  $u \cong N\Delta$

|   |  |
|---|--|
| $d\Pi = \int_V ((ETN\Delta)^T d(TN\Delta) - f^T d(N\Delta)) dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T d(N\Delta) d\Omega$ |  |
|---|--|

haciendo  $B = TN$  y tomando factor común  $d\Delta$

|   |  |
|---|--|
| $0 = \int_V ((EB\Delta)^T B - f^T N) d\Delta dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T N d\Delta d\Omega$ |  |
|---|--|

|   |  |
|---|--|
| $0 = \int_V (\Delta^T B^T E B - f^T N) d\Delta dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T N d\Delta d\Omega$ |  |
|---|--|

lo cual debe cumplirse para todo  $d\Delta$  entonces:

|   |  |
|---|--|
| $0 = \int_V (\Delta^T B^T E B - f^T N) dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T N d\Omega$ |  |
|---|--|

|   |  |
|---|--|
| $0 = \int_V \Delta^T B^T E B T dV - \int_V f^T N dV - \int_{\Omega} S_{\Gamma}^T N d\Omega$ |  |
|---|--|

|   |  |
|---|--|
| $\left[ \int_{\Omega} B^T E B d\Omega \int_{-t}^t dz \right] \Delta = \int_{\Omega} N^T f d\Omega \int_{-t}^t dz + \int_{\Gamma} S_{\Gamma}^T N d\Gamma \int_{-t}^t dz$ |  |
|---|--|

|  |  |
|--|--|
| $\left[ t \int_{\Omega} B^T E B d\Omega \right] \Delta = t \int_{\Omega} N^T f d\Omega + t \int_{\Gamma} S_{\Gamma}^T N d\Gamma$ |  |
|--|--|

Lo cual puede ser re-escrito como:

|                |            |
|----------------|------------|
| $K \Delta = f$ | <b>3.6</b> |
|----------------|------------|

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| $K = t \int_{\Omega} B^T E B d\Omega$ | <b>3.7</b> |
|---------------------------------------|------------|

|  |            |
|--|------------|
| $f = t \int_{\Omega} N^T f d\Omega + t \int_{\Gamma} S_{\Gamma}^T N d\Delta d\Gamma$ | <b>3.8</b> |
|--|------------|

donde  $K$  es de  $8 \times 8$  y  $f$  es de  $8 \times 1$

### 3.2 ANALISIS DE PLACAS A FLEXION

Se tendrá en cuenta las mismas consideraciones que en el análisis de membrana:  
Discretización del funcional de energía mediante F.E.M.

|  |  |
|--|--|
| $\Pi = \int_V S^T e dV - \int_V f^T u dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T e d\Omega$ |  |
|--|--|

Las componentes de desplazamiento pueden ser aproximadas por:

|  |            |
|--|------------|
| $w \cong \sum_{i=1}^n f_i w_i = f_1 w_1 + f_2 w_2 + \mathbf{K} + f_n w_n \rightarrow w = f \Delta$ | <b>3.9</b> |
|--|------------|

donde  $f_i$  son las funciones de interpolación de *Hermite*.

Las cuales pueden ser escritas en forma vectorial como:

|  |              |  |  |
|--|--------------|--|--|
| $w \cong [f_{11} \quad f_{21} \quad f_{31} \quad f_{41} \quad \mathbf{L} \quad f_{14} \quad f_{24} \quad f_{34} \quad f_{44}]$ | $\mathbf{M}$ | $\begin{bmatrix} w_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \\ w_4 \\ \frac{\partial w_4}{\partial x} \\ \frac{\partial w_4}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_4}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$ |  |
|--|--------------|--|--|

Para el caso de láminas delgadas se tiene las siguientes relaciones:

|  |             |
|--|-------------|
| $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ 2g_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [w] \rightarrow \mathbf{e} = -z \mathbf{T} \Delta$ | <b>3.10</b> |
|--|-------------|

|   |             |
|---|-------------|
| $\mathbf{s} = \mathbf{E} \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{s} = -z \mathbf{E} \mathbf{T} \Delta$ | <b>3.11</b> |
|---|-------------|

reemplazando

|  |  |
|--|--|
| $d\Pi = \int_V \left( (-z \mathbf{E} \mathbf{T} w)^T d(-z \mathbf{T} w) - f^T dw \right) dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T dw d\Omega$ |  |
|--|--|

Teniendo en cuenta  $w \cong \mathbf{N} \Delta$

|   |  |
|---|--|
| $d\Pi = \int_V \left( (-z E T f \Delta)^T d(-z T f \Delta) - f^T d(f \Delta) \right) dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T d(f \Delta) d\Omega$ |  |
|---|--|

haciendo  $B = TN$  y tomando factor común  $d\Delta$

|   |  |
|---|--|
| $0 = \int_V \left( z^2 (E B \Delta)^T B - r (f \Delta)^T f - f^T f \right) d\Delta dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T f d\Delta d\Omega$ |  |
|---|--|

|  |  |
|--|--|
| $0 = \int_V \left( z^2 \Delta^T B^T E B - f^T f \right) d\Delta dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T f d\Delta d\Omega$ |  |
|--|--|

lo cual debe cumplirse para todo  $d\Delta$  entonces:

|  |  |
|--|--|
| $0 = \int_V \left( \Delta^T B^T E B - f^T f \right) dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T f d\Omega$ |  |
|--|--|

|   |  |
|---|--|
| $0 = \int_V \Delta^T B^T D B dV - \int_V f^T f dV - \int_{\Omega} S_{\Omega}^T f d\Omega$ |  |
|---|--|

|  |  |
|--|--|
| $\left[ \int_V B^T E B dV \right] \Delta = \int_V f^T f dV + \int_{\Omega} S_{\Omega}^T f d\Omega$ |  |
|--|--|

|   |  |
|---|--|
| $\left[ \int_{\Omega} B^T E B d\Omega \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \right] \Delta = \int_{\Omega} f^T f d\Omega \int_{-t/2}^{t/2} dz + \int_{\Gamma} S_{\Gamma}^T f d\Gamma \int_{-t/2}^{t/2} dz$ |  |
|---|--|

|   |  |
|---|--|
| $\left[ \frac{t^3}{12} \int_{\Omega} B^T E B d\Omega \right] \Delta = t \int_{\Omega} f^T f d\Omega + t \int_{\Gamma} S_{\Gamma}^T f d\Gamma$ |  |
|---|--|

Lo cual puede ser re-escrito como:

|                |  |
|----------------|--|
| $K \Delta = f$ |  |
|----------------|--|

|  |             |
|--|-------------|
| $K = \frac{t^3}{12} \int_{\Omega} B^T E B d\Omega$ | <b>3.12</b> |
|--|-------------|

|  |             |
|--|-------------|
| $f = t \int_{\Omega} f^T f d\Omega + t \int_{\Gamma} S_{\Gamma}^T f d\Gamma$ | <b>3.13</b> |
|--|-------------|

donde  $K$  es de  $16 \times 16$  y  $f$  es de  $16 \times 1$

### 3.5 MATRIZ COMBINADA

Considérese una placa sometida simultáneamente a acciones en su plano y a flexión. Cada una de estas acciones (en su plano y a flexión) fueron descritas en las secciones 3.1 y 3.2 respectivamente. Los efectos en el plano dieron como resultado una matriz de rigidez ( $K_p^e$ ) de  $8 \times 8$ , un vector de fuerza ( $f^e$ ) de  $8 \times 1$  y un vector de desplazamiento ( $\Delta$ ) de  $8 \times 1$ .

|  |             |
|--|-------------|
| $f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ | <b>3.14</b> |
|--|-------------|

Lo anterior representan las fuerzas y desplazamientos en  $x$  y en  $y$  para un nodo. Los efectos a flexión dieron como resultado una matriz de rigidez ( $K_b^e$ ) de  $16 \times 16$ , un vector de fuerza ( $f^e$ ) de  $16 \times 1$  y un vector de desplazamiento ( $\Delta$ ) de  $16 \times 1$ .

|  |             |
|--|-------------|
| $f = \begin{bmatrix} f_z \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} w \\ q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{bmatrix}$ | <b>3.15</b> |
|--|-------------|

Lo anterior representan las fuerzas y desplazamientos en  $z$ , y momentos y giros en “ $x$ ”, “ $y$ ” y “ $xy$ ” para un nodo.

La matriz de rigidez y el vector de fuerzas utilizados para el análisis de placas sometidas a cargas combinadas (en el plano y a flexión) son expresados:

|  |             |
|--|-------------|
| $K^e = \begin{bmatrix} & & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ & K_p^e & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ & & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & & \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & K_b^e \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & & \end{bmatrix}$ | <b>3.16</b> |
|--|-------------|

|  |             |
|--|-------------|
| $f = [f_{x1} \quad f_{y1} \quad \mathbf{L} \quad f_{x4} \quad f_{y4} \quad \mathbf{M} \quad f_{z1} \quad M_{x1} \quad \mathbf{L} \quad M_{y4} \quad M_{z4}]^T$ | <b>3.17</b> |
|--|-------------|

### 3.4 ELEMENTOS FINITOS

La elección las funciones de forma está condicionada no sólo por la geometría de los dominios locales o elementos finitos, sino también por el tipo de problema de campo que se intenta resolver (elasticidad, plasticidad, transferencia de calor, electromagnetismo, etc) y por la manera de abordarlo (número de campos independientes).

Dentro de cada dominio elemental o elemento finito, el campo independiente se aproxima o interpola mediante funciones de forma que cumplen las condiciones siguientes:

1. Cada función de forma está asociada a un punto dentro del elemento, de manera que vale 1 en ese punto y se anula en los puntos asociados a las otras funciones de forma. Estos puntos especiales dentro de cada elemento reciben el nombre de nodos.
2. Las funciones de forma correspondientes a cada elemento están definidas de manera que hay continuidad del campo independiente al pasar de un

elemento a otro, es decir, al agregar las aproximaciones locales para construir la aproximación extendida al dominio completo se obtiene una función continua.

3. Las funciones de forma son capaces de representar de manera exacta campos con un mínimo orden de variación, el cual depende del tipo de problema.
4. Las funciones de forma dentro de cada elemento son suficientemente lisas o “suaves” como para permitir el cálculo de las derivadas que sean necesarias para el planteamiento de la forma débil del problema.

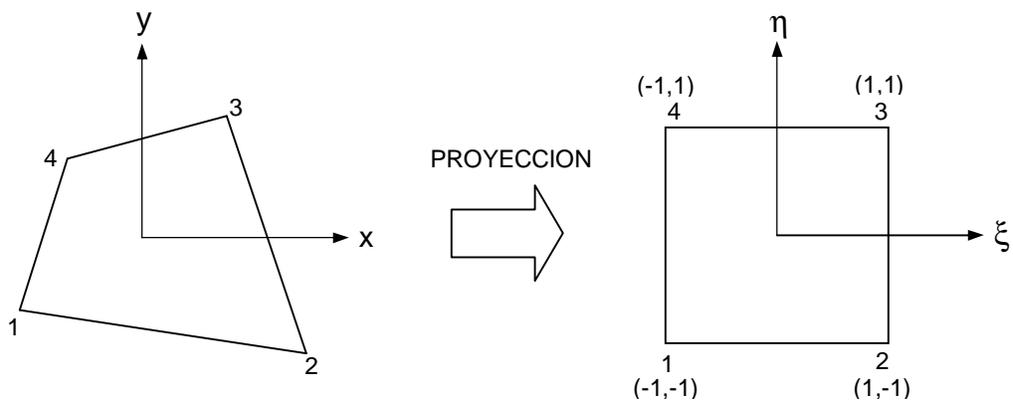
Es muy ventajoso trabajar siempre, independientemente del elemento concreto, con el mismo dominio de interpolación y con las mismas funciones de forma. De esta manera se simplificaría la evaluación de estas funciones y de sus derivadas y se conseguiría realizar las integrales siempre sobre el mismo dominio de integración, operación programable mucho más fácilmente.

Existen dominio en que los elementos finitos como cuadrado o triángulos no son capaces de enmallarlo, por tanto se necesitan elemento que puedan amoldarse a casi cualquier geometría. Esto es posible por medio de la transformación isoparamétrica, la cual es aplicable tanto para triángulos como para cuadriláteros. Para este estudio se transformarán elementos cuadrados de cuatro nodos, ya que estos resultan ser más precisos que los triángulos de tres nodos.

**3.4.1 Transformación isoparamétrica.** Se puede llevarse a cabo por medio de las siguientes operaciones:

1. Se proyecta el dominio elemental o elemento finito en un dominio estándar

**Figura 13. Elemento Transformado**



2. La proyección puede interpretarse también como un cambio de variables dentro de cada dominio local:

$$\text{Cambio de Variable} \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

es decir,

|   |             |
|---|-------------|
| $x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$ $y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4$ | <b>3.18</b> |
|---|-------------|

3. Las funciones de interpolación o funciones de forma se definen en coordenadas locales:

|   |   |             |
|---|---|-------------|
| $N_1 = \frac{1}{4}(1-x)(1-h)$ $N_2 = \frac{1}{4}(1+x)(1-h)$ | $N_3 = \frac{1}{4}(1+x)(1+h)$ $N_4 = \frac{1}{4}(1-x)(1+h)$ | <b>3.19</b> |
|---|---|-------------|

o

|   |             |
|---|-------------|
| $N_i = \frac{1}{4}(1 + x x_i)(1 + h h_i)$ | <b>3.20</b> |
|---|-------------|

donde  $x_i$  y  $h_i$  son las coordenadas del nodo  $i$ .

4. Se expresa las derivadas de la función  $N_i(x,y)$  en términos de las coordenadas locales  $x,h$ . Usando la regla de la cadena de diferenciación, se obtiene

|   |  |
|---|--|
| $\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}}$ $\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}}$ |  |
|---|--|

o bien

|   |             |
|---|-------------|
| $\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{h}} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$ | <b>3.21</b> |
|---|-------------|

donde **J** es la matriz Jacobiana

|  |             |
|--|-------------|
| $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}} \end{bmatrix}$ | <b>3.22</b> |
|--|-------------|

La ecuación 3.21 puede invertirse,

|  |             |
|--|-------------|
| $\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{h}} \end{Bmatrix}$ | <b>3.23</b> |
|--|-------------|

Esto requiere que la matriz jacobiana sea no-singular. Estas expresiones se usarán para la obtención de la matriz de rigidez del elemento.

El diferencial de área esta dado por

|                                  |             |
|----------------------------------|-------------|
| $d\Omega = dx dy = \det J dx dh$ | <b>3.24</b> |
|----------------------------------|-------------|

Para así obtener

|  |             |
|--|-------------|
| $K^e = t_e \int_{\Omega} B^T D B \det J dx dh$ | <b>3.25</b> |
|--|-------------|

Es importante tener en cuenta, que si el elemento está muy distorsionado (tiene ángulos muy distintos del recto), la interpolación de  $N_i(x,y)$  en el espacio real puede ser muy distinta de la que tiene lugar en coordenadas locales  $x,h$ . Esto quiere decir que, las funciones de forma reales pueden llegar a ser incluso cualitativamente muy diferentes de los polinomios definidos en coordenadas locales. Una interpolación polinómica lineal en el dominio estándar no tiene por qué ser también lineal en el espacio real. Es posible que ni siquiera sea completamente polinómica. La distorsión de los elementos da lugar así en la práctica a una degradación de la calidad de la solución aproximada.

**3.4.2 Elementos conformes.** Para este análisis la formulación por elementos finitos requiere la continuidad de  $w$  (ecuación 3.9) y de su primera derivada son llamadas continuidad  $C^1$ .

Un elemento rectangular con cuatro nodos, con  $(w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y)$  en cada nodo, requiere 12 términos ( $n=12$ ) en el polinomio de interpolación de  $w$  para obtener la expresión:

|  |             |
|--|-------------|
| $w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^3 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$ | <b>3.26</b> |
|--|-------------|

Esta expresión no es un polinomio completo de cuarto orden; es un polinomio de tercer orden.

Para un elemento rectangular de cuatro nodos ( $n=12$ ), no es posible conseguir la continuidad a través de las fronteras de los elementos de  $w$  y  $\partial w/\partial h$ , si se utilizan tres grados de libertad por nodo. Los elementos que violen cualquier condición de continuidad son conocidos como elementos *no-conformes* [7]. De esa manera el elemento rectangular de cuatro nodos con un polinomio de 12 términos es un elemento no-conforme.

[7] REDDY, J.N. An Introduction to the Finite Element Method. 2 ed. Mc. Graw Hill, 1993, 672 p.

Un elemento de cuatro nodos con cuatro grados de libertad ( $w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial^2 w/\partial x \partial y$ ) requiere un polinomio completo de cuarto orden. Y a este se le conoce como un elemento es conforme.

Las funciones de interpolación que cumplen con la anterior condición son las funciones de Hermite, y son:

**Tabla 1.** Funciones de interpolación de Hermite  $f^{[8]}$

|                                      |  |  |
|--------------------------------------|--|--|
| $w$                                  | $\frac{1}{16}(x+x_i)^2(x-x_i-2)(h+h_i)^2(h-h_i-2)$       | Para un nodo $i$<br>( $i = 1, 2, 3, 4$ ) |
| $\partial w/\partial x$              | $-\frac{1}{16}x_i(x+x_i)^2(x-x_i-1)(h+h_i)^2(h-h_i-2)$   |  |
| $\partial w/\partial h$              | $-\frac{1}{16}(x+x_i)^2(x-x_i-2)h_i(h+h_i)^2(h-h_i-1)$   |  |
| $\partial^2 w/\partial x \partial h$ | $\frac{1}{16}x_i(x+x_i)^2(x-x_i-1)h_i(h+h_i)^2(h-h_i-1)$ |  |

Para el cálculo de  $B$  en la matriz de rigidez en placas con elementos de cuatro grados de libertad se calcula de la siguiente manera:

---

[8] REDDY, J.N. An Introduction to the Finite Element Method. 2 ed. Mc. Graw Hill, 1993, 672 p.

|  |             |
|--|-------------|
| $\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x_e}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial y_e}{\partial x}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial x_e}{\partial x} \frac{\partial y_e}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial x_e}{\partial h}\right)^2 & \left(\frac{\partial y_e}{\partial h}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial x_e}{\partial h} \frac{\partial y_e}{\partial h}\right) \\ \left(\frac{\partial x_e}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x_e}{\partial h}\right) & \left(\frac{\partial y_e}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y_e}{\partial h}\right) & \left(\frac{\partial x_e}{\partial h}\right)\left(\frac{\partial y_e}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial x_e}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y_e}{\partial h}\right) \end{bmatrix}^{-1}$ $\times \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial h^2} \\ \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial x \partial h} \end{Bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_e}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 y_e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 x_e}{\partial h^2} & \frac{\partial^2 y_e}{\partial h^2} \\ \frac{\partial^2 x_e}{\partial x \partial h} & \frac{\partial^2 y_e}{\partial x \partial h} \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} \end{pmatrix}$ | <b>3.27</b> |
|--|-------------|

donde  $f_i$  son las funciones de forma de Hermite

|  |             |
|--|-------------|
| $\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial f_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial f_i^e}{\partial h} \end{Bmatrix}$ | <b>3.28</b> |
|--|-------------|

finalmente la matriz  $B$  es:

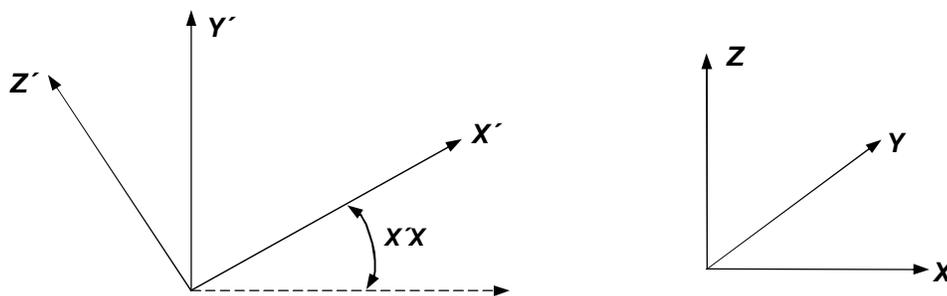
|   |             |
|---|-------------|
| $B = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1^e}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_2^e}{\partial x^2} & \mathbf{L} & \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f_1^e}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_2^e}{\partial x^2} & \mathbf{L} & \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f_1^e}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f_2^e}{\partial x \partial y} & \mathbf{L} & \frac{\partial^2 f_i^e}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$ | <b>3.29</b> |
|---|-------------|

### 3.5 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS GLOBALES

La matriz de rigidez deducida en la sección anterior utiliza un sistema de coordenadas locales, ya que los efectos de flexión y de las acciones “en el plano” se obtenían originalmente en dicho sistema.

Para ensamblar los elementos y para escribir las ecuaciones de equilibrio apropiadas será necesario una transformación de coordenadas locales (designadas por  $x'$  y  $z'$ ) a un sistema global común (coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

**Figura 14.** Coordenadas locales y globales



Además será más conveniente al principio definir los nodos del elemento por sus coordenadas globales y a partir de ellas calcular las coordenadas locales, para lo cual necesitamos una transformación inversa.

La figura 14 muestra los dos sistemas de coordenadas. Las fuerzas y los desplazamientos de un nodo se transforman de sistema global a sistema local por una matriz  $L$  de tal forma que

|   |             |
|---|-------------|
| $\Delta'_i = L \Delta_i \quad f'_i = L f_i$ | <b>3.30</b> |
|---|-------------|

donde

|  |             |
|--|-------------|
| $L = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ | <b>3.31</b> |
|--|-------------|

y  $I$  es una matriz de dimensiones 3 X 3 de los cosenos directores de los ángulos que forman entre si los dos sistemas de ejes, o sea

|   |             |
|---|-------------|
| $I = \begin{bmatrix} I_{x'x} & I_{x'y} & I_{x'z} \\ I_{y'x} & I_{y'y} & I_{y'z} \\ I_{z'x} & I_{z'y} & I_{z'z} \end{bmatrix}$ | <b>3.32</b> |
|---|-------------|

donde  $I_{x'x}$  es el coseno del ángulo formado por los ejes "x" y "x'", etc.

Por tanto, para el conjunto de fuerzas que actúan sobre los nodos de un elemento podemos escribir

|                             |             |
|-----------------------------|-------------|
| $[\Delta']^e = T[\Delta]^e$ | <b>3.33</b> |
|-----------------------------|-------------|

por ende la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas globales se obtiene por

|                      |             |
|----------------------|-------------|
| $K^e = T^T [K']^e T$ | <b>3.34</b> |
|----------------------|-------------|

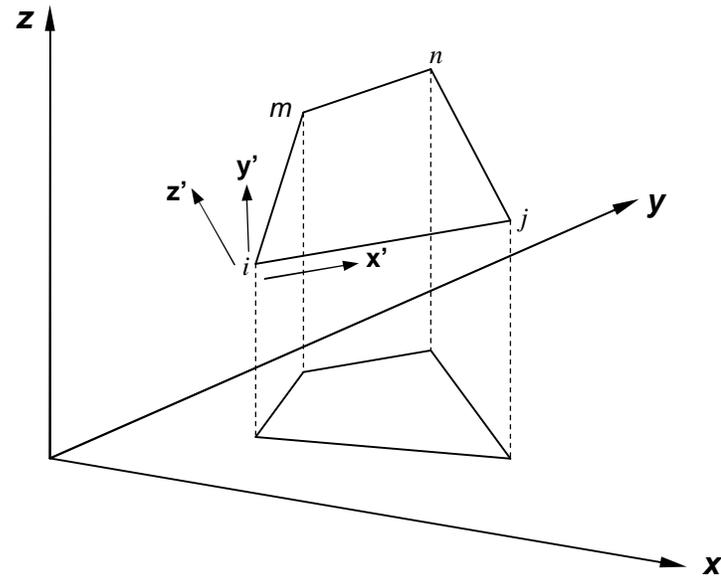
en las dos ecuaciones anteriores T viene dado por

|  |             |
|--|-------------|
| $T = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & \mathbf{L} \\ 0 & L & 0 & \\ 0 & 0 & L & \\ \mathbf{M} & & & \end{bmatrix}$ | <b>3.35</b> |
|--|-------------|

que es una matriz diagonal formada por un número de matrices L igual al numero de nodos del elemento.

### 3.5.1 Elementos orientados en forma arbitraria

**Figura 15.** Coordenadas locales y globales para un elemento cuadrilátero transformado



Una de las direcciones de los ejes locales puede elegirse arbitrariamente, se tomara la del eje  $x'$  orientada en la dirección del lado  $ij$  del elemento, tal como se muestra en la figura 14.

El lado esta definido por el vector  $V_{ij}$  y en función de las coordenadas locales que se tienen.

|  |             |
|--|-------------|
| $V_{ij} = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}$ | <b>3.36</b> |
|--|-------------|

los cosenos directores se obtienen dividiendo las componentes de este vector por su longitud, o sea, definiendo un vector unitario

|   |             |
|---|-------------|
| $v_{x'} = \frac{1}{l_{ij}} \begin{bmatrix} l_{x'x} \\ l_{x'y} \\ l_{x'z} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_{ij}} \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \end{bmatrix}$ | <b>3.37</b> |
|---|-------------|

donde  $l_{ij} = \sqrt{x_{ji}^2 + y_{ji}^2 + z_{ji}^2}$  y  $x_{ij} = x_j - x_i$ , etc.

Es preciso establecer la dirección de  $z'$ , que debe ser normal al plano del elemento. Según las propiedades del producto vectorial de los dos vectores, puede obtenerse dicha dirección a partir de un vector que sea el producto vectorial de los dos lados del elemento.

|                                 |             |
|---------------------------------|-------------|
| $V_{z'} = V_{ij} \times V_{im}$ | <b>3.38</b> |
|---------------------------------|-------------|

representa un vector normal al plano del elemento.

Los cosenos directores del eje  $z'$  se identifican sencillamente con los cosenos directores  $V_{z'}$ , obteniéndose un vector unitario

|  |             |
|--|-------------|
| $v_{z'} = \begin{bmatrix} I_{z'x} \\ I_{z'y} \\ I_{z'z} \end{bmatrix}$ | <b>3.39</b> |
|--|-------------|

finalmente, los cosenos directores del eje  $y'$  se establecen de una manera similar a partir de un vector normal a las direcciones  $x'$  y  $z'$

|  |             |
|--|-------------|
| $v_{y'} = \begin{bmatrix} I_{y'x} \\ I_{y'y} \\ I_{y'z} \end{bmatrix}$ | <b>3.40</b> |
|--|-------------|

### 3.6 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Considere el problema de evaluar numéricamente una integral unidimensional de la forma

|                           |             |
|---------------------------|-------------|
| $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ | <b>3.41</b> |
|---------------------------|-------------|

El método de cuadratura *Gaussiana*<sup>[9]</sup> para evaluar  $I$  se da a continuación. Este

[9] CHANDRUPATLA, Tirupathi. Introducción al Estudio de Elemento Finito en Ingeniería. 2 ed. Mexico: Pearson, 1999, 462p

método ha demostrado ser muy útil en el trabajo con elementos finitos. La extensión a integrales en dos y tres dimensiones puede obtenerse fácilmente.

Consideremos la aproximación de  $n$  puntos

|  |             |
|--|-------------|
| $I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n)$ | <b>3.42</b> |
|--|-------------|

donde  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son los pesos y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son los puntos de muestreo o puntos de Gauss. La idea detrás de la cuadratura *gaussiana* es seleccionar los  $n$  puntos de Gauss y los  $n$  pesos de manera que la ecuación 3.42 proporcione una respuesta para polinomios  $f(x)$  de un grado tan grande como se quiera. En otras palabras, la idea es que si la fórmula de integración de los  $n$  puntos es exacta para todos los polinomios hasta un grado tan alto como sea posible, entonces la fórmula funcionará bien aun si  $f$  no es un polinomio.

**Tabla 2.** Puntos de Gauss y Pesos para cuadratura Gaussiana <sup>[10]</sup>

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

| Número de puntos, $n$ | Localización $x_i$                  | Pesos, $w_i$ |
|-----------------------|-------------------------------------|--------------|
| 1                     | 0.0                                 | 2.0          |
| 2                     | $\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$ | 1.0          |
| 3                     | $\pm 0.7745966692$                  | 0.5555555556 |
|                       | 0.0                                 | 0.8888888889 |
| 4                     | $\pm 0.8611363116$                  | 0.3478548451 |
|                       | $\pm 0.3399810436$                  | 0.6521451549 |
| 5                     | $\pm 0.9061798459$                  | 0.2369268851 |
|                       | $\pm 0.5384693101$                  | 0.4786286705 |
|                       | 0.0                                 | 0.5688888889 |
| 6                     | $\pm 0.9324695142$                  | 0.1713244924 |
|                       | $\pm 0.6612093865$                  | 0.3607615730 |
|                       | $\pm 0.2386191861$                  | 0.4679139346 |

[10] CHANDRUPATLA, Tirupathi. Introducción al Estudio de Elemento Finito en Ingeniería. 2 ed. Mexico:Pearson,1999, 462 p.

### 3.6.1 Integrales bidimensionales

La extensión de una cuadratura *gaussiana* a integrales bidimensionales de la forma

|  |             |
|--|-------------|
| $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,h) dx dh$ | <b>3.43</b> |
|--|-------------|

es consecuencia natural ya que

|  |  |
|--|--|
| $I \approx \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, h_i) \right] dh$ |  |
|--|--|

|  |  |
|--|--|
| $I \approx \sum_{j=1}^n w_j \left[ \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, h_i) \right]$ |  |
|--|--|

|   |             |
|---|-------------|
| $I \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(x_i, h_i)$ | <b>3.44</b> |
|---|-------------|

Para ilustrar el uso de la ecuación 3.44 considere la rigidez del elemento para un elemento cuadrilátero

|  |             |
|--|-------------|
| $k^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B \det J dx dh$ | <b>3.45</b> |
|--|-------------|

donde **B** y **det J** son funciones de **x** y **h**.

Sea *f* el elemento *ij*-ésimo en el integrando. Es decir, sea

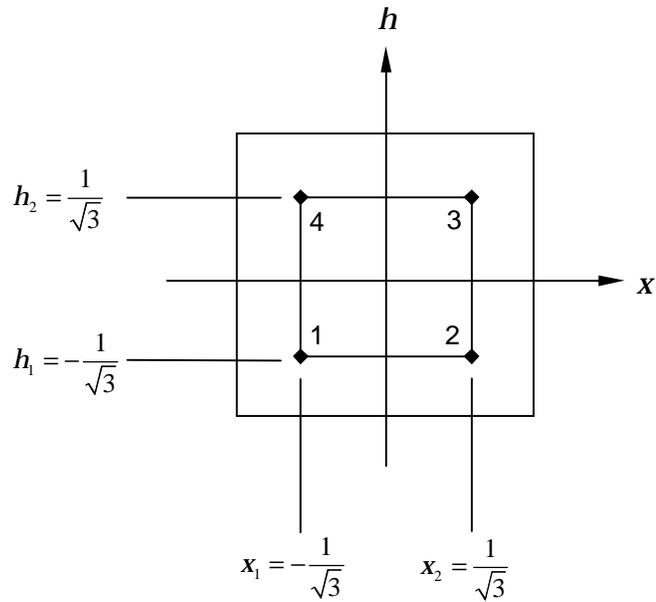
|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| $f(x,h) = t (B^T D B \det J)_{ij}$ |  |
|------------------------------------|--|

Entonces, si usamos una regla de 2 x 2, obtenemos

|  |             |
|--|-------------|
| $k_{ij} \approx w_1^2 f(x_1, h_1) + w_1 w_2 f(x_1, h_2) + w_2 w_1 f(x_2, h_1) + w_2^2 f(x_2, h_2)$ | <b>3.46</b> |
|--|-------------|

donde  $w_1 = w_2 = 1.0$ ,  $x_1 = h_1 = -0.5773502692$ , y  $x_2 = h_2 = 0.5773502692$ . Los puntos de Gauss para la regla de dos puntos usada anteriormente se muestran en la

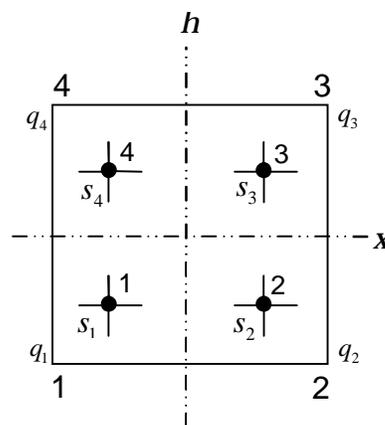
**Figura 16.** Cuadratura *Gaussiana* en dos dimensiones



$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, h) \approx w_1^2 f(x_1, h_1) + w_1 w_2 f(x_1, h_2) + w_2 w_1 f(x_2, h_1) + w_2^2 f(x_2, h_2)$$

### 3.7 AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS PARA UN CUADRILATERO DE CUATRO NODOS

**Figura 17.** Ajuste por mínimos cuadrados para un cuadrilátero



Si  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$  es el vector de valores nodales del elemento que son determinados por ajuste de mínimos cuadrados, entonces se define usando el error en cuatro puntos interiores. Si  $s = [s_1, s_2, s_3, s_4]^T$  representa el vector de valores interpolados en los cuatro puntos interiores y  $a = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$  representa los valores reales de las variables (figura 17), el error puede ser definido como

|  |             |
|--|-------------|
| $e = \sum_e (s - a)^T (s - a)$ $e = \sum_e (s^T s - 2s^T a - a^T a)$ | <b>3.47</b> |
|--|-------------|

Los cuatro puntos interiores se toman generalmente como los cuatros puntos de integración de Gauss. Los valores del esfuerzo concuerdan bien en esos puntos.

Si  $N$  denota

|  |             |
|--|-------------|
| $N = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_2^1 & N_3^1 & N_4^1 \\ N_1^2 & N_2^2 & N_3^2 & N_4^2 \\ N_1^3 & N_2^3 & N_3^3 & N_4^3 \\ N_1^4 & N_2^4 & N_3^4 & N_4^4 \end{bmatrix}$ | <b>3.48</b> |
|--|-------------|

donde  $N_j^i$  es la función de forma  $N_j$  evaluada en el punto interior  $i$ , entonces  $s$  puede escribirse como

|          |             |
|----------|-------------|
| $s = Nq$ | <b>3.49</b> |
|----------|-------------|

Insertando esto en la ecuación 3.47, el error  $e$  toma la forma

|  |  |
|--|--|
| $e = \sum_e q^T N^T Nq - 2q^T N^T a + a^T a$ |  |
|--|--|

notando que  $N^T N$  es similar a la rigidez del elemento  $K^e$  y que  $N^T a$  lo es al vector de fuerza del elemento, puede efectuarse el ensamble de la rigidez y del vector fuerza. Las ecuaciones de la matriz ensamblada ponerse como

|          |             |
|----------|-------------|
| $KQ = F$ | <b>3.50</b> |
|----------|-------------|

La solución de este conjunto de ecuaciones da  $Q$ , que es el vector de los valores nodales de la variable considerada para el ajuste por mínimos cuadrados de los valores del elemento.

### 3.8 ANÁLISIS DINÁMICO

**3.8.1 Comportamiento Dinámico de las estructuras elásticas con amortiguamiento lineal.** Cuando los desplazamientos de un cuerpo elástico varían en función del tiempo, entran en juego dos tipos de fuerzas adicionales. Las primeras son las fuerzas de inercia, que para una aceleración definida por  $\ddot{\Delta}$  se pueden reemplazar por sus equivalentes estáticas

|                    |  |
|--------------------|--|
| $-r \ddot{\Delta}$ |  |
|--------------------|--|

Las componentes de esta fuerza se definen en las mismas direcciones que las del desplazamiento  $\Delta$ ; el coeficiente  $\rho$  es simplemente la densidad.

La segunda fuerza es la producida por las resistencias (rozamientos) opuestas al movimiento. Estas últimas pueden ser debidas a movimientos microscópicos, a la resistencia del aire, etc., estando en general relacionadas no linealmente con la velocidad  $\dot{\Delta}$ .

Sin embargo para simplificar los cálculos siguientes sólo consideraremos las resistencias lineales de tipo viscoso, que en un problema estático equivalente dan lugar a fuerzas por unidad de volumen de intensidad.

|                   |  |
|-------------------|--|
| $-m \dot{\Delta}$ |  |
|-------------------|--|

En la expresión anterior,  $m$  es una propiedad que se supone puede ser evaluada numéricamente.

Las fuerzas (nodales) aplicadas a un elemento están definidas por:

|   |             |
|---|-------------|
| $f^e = - \int_{V^e} N^T b dV = - \int_{V^e} N^T b dV + \int_{V^e} N^T r \ddot{\Delta} dV + \int_{V^e} N^T m \dot{\Delta}$ | <b>3.51</b> |
|---|-------------|

Donde la primera fuerza es precisamente la debida a las cargas repartidas exteriores, no siendo por tanto necesarias mayores consideraciones acerca del particular.

Sustituyendo la ecuación 3.51 en las ecuaciones generales de equilibrio se obtiene finalmente, tras el ensamble, la ecuación diferencial matricial <sup>[11]</sup> siguiente:

|   |             |
|---|-------------|
| $M \ddot{\Delta} + C \dot{\Delta} + K \Delta + f = 0$ | <b>3.52</b> |
|---|-------------|

En la cual  $K$  y  $f$  son las matrices globales de rigidez y de fuerzas. Las nuevas matrices  $C$  y  $M$  son las matrices globales de masa y amortiguamiento y se ensamblan a partir de las submatrices elementales dadas por:

|  |             |
|--|-------------|
| $C^e = \int_{V^e} N^T \mathbf{m} N dV$ | <b>3.53</b> |
|--|-------------|

|  |             |
|--|-------------|
| $M^e = \int_{V^e} N^T \mathbf{r} N dV$ | <b>3.54</b> |
|--|-------------|

La determinación de la matriz de amortiguamiento  $C$  es difícil en la práctica, ya que se desconoce la viscosidad  $\mu$ . A menudo se hace la hipótesis de que la matriz de amortiguamiento sea una combinación lineal de las matrices de rigidez y de masa, es decir

|                          |             |
|--------------------------|-------------|
| $C = \alpha M + \beta K$ | <b>3.55</b> |
|--------------------------|-------------|

donde  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan experimentalmente. Esta forma de expresar el amortiguamiento se conoce como “*amortiguamiento de Rayleigh*”

### 3.8.2 Método de integración del tiempo de *Newmark*

Tenemos la siguiente ecuación:

|   |             |
|---|-------------|
| $M \ddot{\Delta} + C \dot{\Delta} + K \Delta = f$ | <b>3.56</b> |
|---|-------------|

[11] REDDY, J.N. An Introduction to the Finite Element Method. 2 ed. Mc. Graw Hill, 1993, 672 p.

donde

$[M]$  = Matriz de Masa

$[C]$  = Matriz de Amortiguamiento

$[K]$  = Matriz de Rigidez

$\{\ddot{\Delta}\}$  = Vector de Aceleración

$\{\dot{\Delta}\}$  = Vector de Velocidad

$\{\Delta\}$  = Vector de Desplazamiento

El método de Newmark <sup>[12]</sup> usa expansión de diferencia finita en el intervalo  $Dt$  :

|   |             |
|---|-------------|
| $\dot{\Delta}_{n+1} = \dot{\Delta}_n + \left[ (1-d)\ddot{\Delta}_n + d\ddot{\Delta}_{n+1} \right] \Delta t$ | <b>3.57</b> |
|---|-------------|

|   |             |
|---|-------------|
| $\Delta_{n+1} = \Delta_n + \dot{\Delta}_n \Delta t + \left[ (1/2-a)\ddot{\Delta}_n + a\ddot{\Delta}_{n+1} \right] \Delta t^2$ | <b>3.58</b> |
|---|-------------|

donde

$a, d$  = Parámetros de integración de Newmark

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n$$

$\{\Delta_n\}$  = Vector de desplazamiento en el tiempo  $t_n$

$\{\dot{\Delta}_n\}$  = Vector de velocidad en el tiempo  $t_n$

$\{\ddot{\Delta}_n\}$  = Vector de aceleración en el tiempo  $t_n$

$\{\Delta_{n+1}\}$  = Vector de desplazamiento en el tiempo  $t_{n+1}$

$\{\dot{\Delta}_{n+1}\}$  = Vector de velocidad en el tiempo  $t_{n+1}$

$\{\ddot{\Delta}_{n+1}\}$  = Vector de aceleración en el tiempo  $t_{n+1}$

Las ecuaciones de gobierno son evaluadas en un tiempo  $t_{n+1}$

|   |             |
|---|-------------|
| $M \ddot{\Delta}_{n+1} + C \dot{\Delta}_{n+1} + K \Delta_{n+1} = f$ | <b>3.59</b> |
|---|-------------|

---

[12] ANSYS Theory Referente. 001099. Ninth Edition. SAS IP, Inc.

La solución para los desplazamientos en un tiempo  $t_{n+1}$  se obtiene

|   |             |
|---|-------------|
| $\Delta_{n+1} = a_0 [\Delta_{n+1} - \Delta_n] - a_2 \dot{\Delta}_n - a_3 \ddot{\Delta}_n$ | <b>3.60</b> |
|---|-------------|

|  |             |
|--|-------------|
| $\dot{\Delta}_{n+1} = \dot{\Delta}_n + a_6 K \Delta_n + a_7 \ddot{\Delta}_{n+1}$ | <b>3.61</b> |
|--|-------------|

donde

|   |             |
|---|-------------|
| $a_0 = \frac{1}{a \Delta t^2} \quad a_4 = \frac{d}{a} - 1$ $a_1 = \frac{d}{a \Delta t} \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d}{a} - 2 \right)$ $a_2 = \frac{1}{a \Delta t} \quad a_6 = \Delta t (1 - d)$ $a_3 = \frac{1}{2a} - 1 \quad a = d \Delta t$ | <b>3.62</b> |
|---|-------------|

Notando que  $\{\ddot{\Delta}_{n+1}\}$  en la ecuación 3.60 puede ser sustituida dentro de 3.61, las ecuaciones para  $\{\ddot{\Delta}_{n+1}\}$  y  $\{\dot{\Delta}_{n+1}\}$  pueden ser solo expresados en términos desconocidos  $\{u_{n+1}\}$ . Las ecuaciones para  $\{\ddot{\Delta}_{n+1}\}$  y  $\{\dot{\Delta}_{n+1}\}$  son combinadas con 3.59:

|  |             |
|--|-------------|
| $(a_0 M + a_1 C + K) \Delta_{n+1} = f +$ $M (a_0 \Delta_n + a_2 \dot{\Delta}_n + a_3 \ddot{\Delta}_n) + C (a_1 \Delta_n + a_4 \dot{\Delta}_n + a_5 \ddot{\Delta}_n)$ | <b>3.63</b> |
|--|-------------|

Una vez obtenido la solución para  $\{u_{n+1}\}$ , las velocidades y aceleraciones son actualizadas con las ecuaciones 3.60 y 3.61.

Los parámetros de *Newmark* son relacionados así:

|  |             |
|--|-------------|
| $a = \frac{1}{4} (1 + g)^2, \quad d = \frac{1}{2} + g$ | <b>3.64</b> |
|--|-------------|

donde  $\gamma$  = amplitud del facto de decaimiento

La ecuación 3.64 es estable siempre y cuando  $g \geq 0$

#### 4 VALIDACION DEL MODELO

#### **4.1 DESCRIPCION DEL MODELO COMPUTACIONAL**

La herramienta utilizada para desarrollar el modelo computacional por elementos finitos fue **MATLAB**. Matlab es el nombre abreviado de “MATrix LABoratory”, es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. Como caso particular puede también trabajar con números escalares, tanto reales como complejos. Una de las capacidades más atractivas es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones. Y también posee un lenguaje de programación propio.

El modelo computacional fue desarrollado para realizar cálculos de desplazamientos y esfuerzos en placas cuando estas están sometidas a cargas en el plano, a flexión o combinadas, de modo estático o dinámico. Fabricadas en materiales isotrópicos, ortotrópicos o laminados. Aspectos suficientes para el análisis en cuestión.

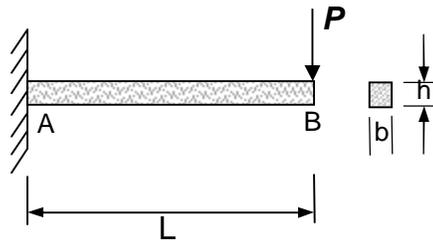
Por medio de la visualización gráfica de matlab se puede analizar la distribución de desplazamiento y esfuerzos a lo largo de toda la placa. Con esto es posible encontrar con mayor facilidad cuáles son las áreas en las cuales se dan los mayores o menores desplazamientos y esfuerzos.

#### **4.2 VALIDACION ANALITICA**

A continuación se hará una comparación de los resultados obtenidos por una solución analítica vs solución por elementos finitos, para comprobar que la formulación del modelo arroja resultados coherentes.

#### 4.2.1 Viga en voladizo cargada puntualmente en el extremo libre.

Figura 18. Viga en voladizo cargada puntualmente en el extremo libre.



| Datos del Problema           |       |       |      |
|------------------------------|-------|-------|------|
| L (m)                        | 2     | P (N) | 2000 |
| h (m)                        | 0.2   | b (m) | 0.20 |
| E (N/m <sup>2</sup> )        | 200e9 |       |      |
| Calcular                     |       |       |      |
| Desplazamiento en el punto B |       |       | mm   |

#### Solución Analítica

$$y_B = \frac{PL^3}{3EI}; \quad I = \frac{1}{12}b \cdot h^3; \quad t_{xy} = \frac{P}{A}; \quad A = b \cdot h;$$

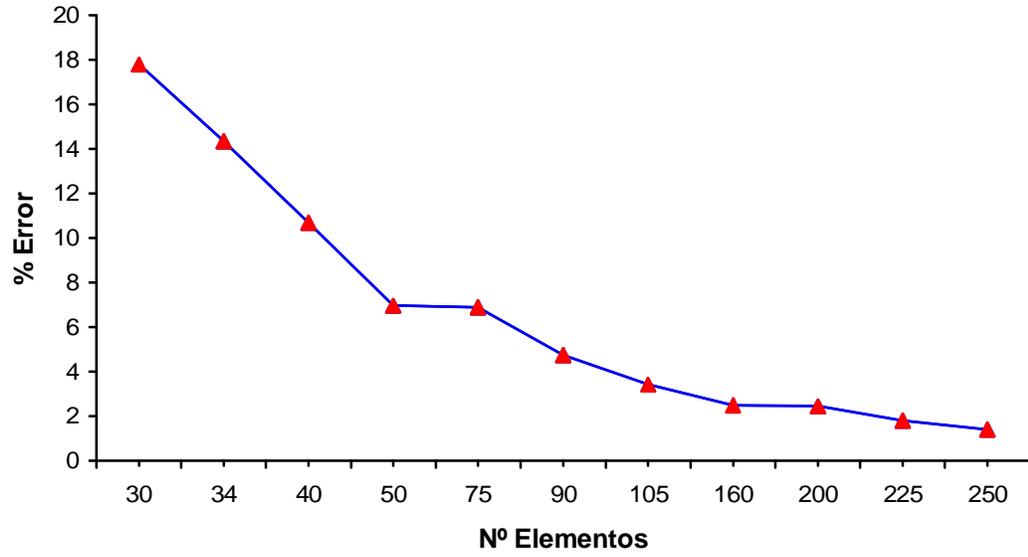
$$I = \frac{1}{12}(0.2)(0.2)^3 = 1.334 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$y_B = \frac{(2000) \cdot (2)^3}{(3) \cdot (200 \times 10^9) \cdot (1.334 \times 10^{-4})} = 0.0002 \text{ m} \rightarrow y_B = 0.2 \text{ mm}$$

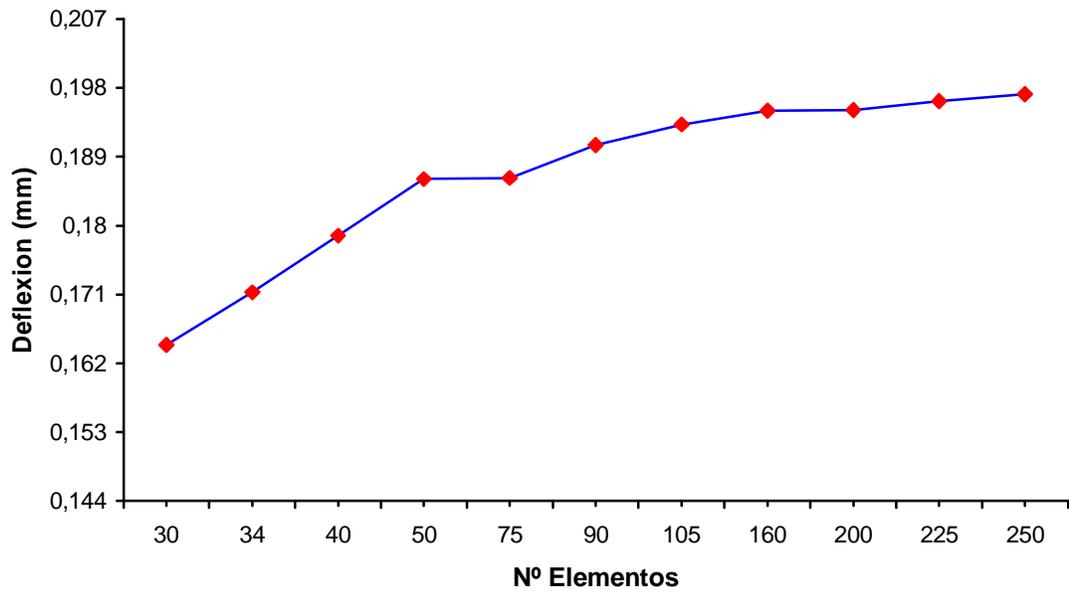
Tabla 3. Resultados del análisis por elementos finitos

| Nº Elementos | Nº Nodos | a:b    | Div x | Div y | Nodo Analisis | Deflexión (mm) | Error (%) |
|--------------|----------|--------|-------|-------|---------------|----------------|-----------|
| 30           | 48       | 1:1.3  | 15    | 2     | 32            | 0.1644         | 17.8      |
| 34           | 54       | 1:1.17 | 17    | 2     | 36            | 0.1713         | 14.35     |
| 40           | 63       | 1:1    | 20    | 2     | 42            | 0.1787         | 10.70     |
| 50           | 78       | 1:1.25 | 25    | 2     | 52            | 0.1861         | 6.95      |
| 75           | 104      | 1.33:1 | 25    | 3     | 52            | 0.1862         | 6.90      |
| 90           | 124      | 1:1    | 30    | 3     | 62            | 0.1905         | 4.76      |
| 105          | 144      | 1:1.16 | 35    | 3     | 72            | 0.1932         | 3.42      |
| 160          | 205      | 1:1    | 40    | 4     | 82            | 0.1950         | 2.50      |
| 200          | 255      | 1:1.25 | 40    | 5     | 153           | 0.1951         | 2.45      |
| 225          | 276      | 1.1:1  | 45    | 5     | 138           | 0.1963         | 1.80      |
| 250          | 306      | 1:1    | 50    | 5     | 153           | 0.1972         | 1.40      |

**Figura 19.** Número de Elementos vs % de Error

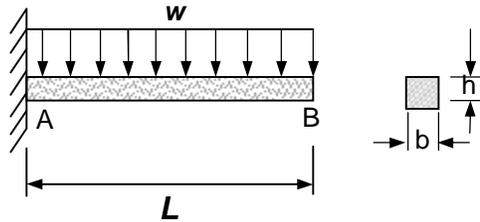


**Figura 20.** Número de Elementos vs Deflexión



#### 4.2.2 Viga en voladizo con carga distribuida uniforme

Figura 21. Viga en voladizo con carga distribuida uniforme



| Datos del Problema    |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| L (m)                 | 2                     |
| w (N/m)               | 5000                  |
| h (m)                 | 0.20                  |
| b (m)                 | 0.20                  |
| E (N/m <sup>2</sup> ) | 200 x 10 <sup>9</sup> |
| Calcular              |                       |
| Desplazamiento en B   | mm                    |

Solu  
ción  
Anal  
ítica  
For

$$\text{mulas } y_B = \frac{wL^4}{8EI}; \quad I = \frac{1}{12}b \cdot h^3; \quad t_{xy} = \frac{P}{A}; \quad A = b \cdot h;$$

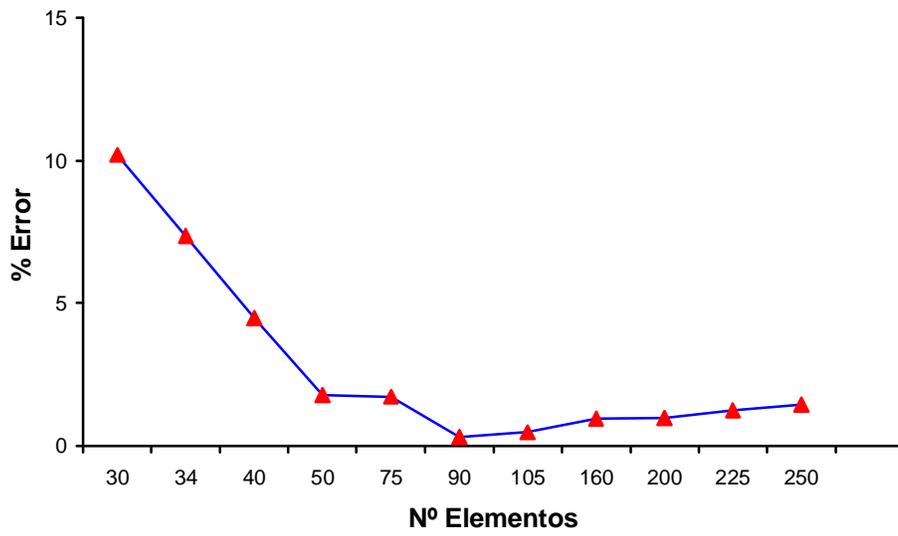
$$I = \frac{1}{12}(0.2)(0.2)^3 = 1.334 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$y_B = \frac{(5000) \cdot (2)^4}{(8) \cdot (200 \times 10^9) \cdot (1.334 \times 10^{-4})} = 3.75 \times 10^{-4} \text{ m} \rightarrow y_B = 0.375 \text{ mm}$$

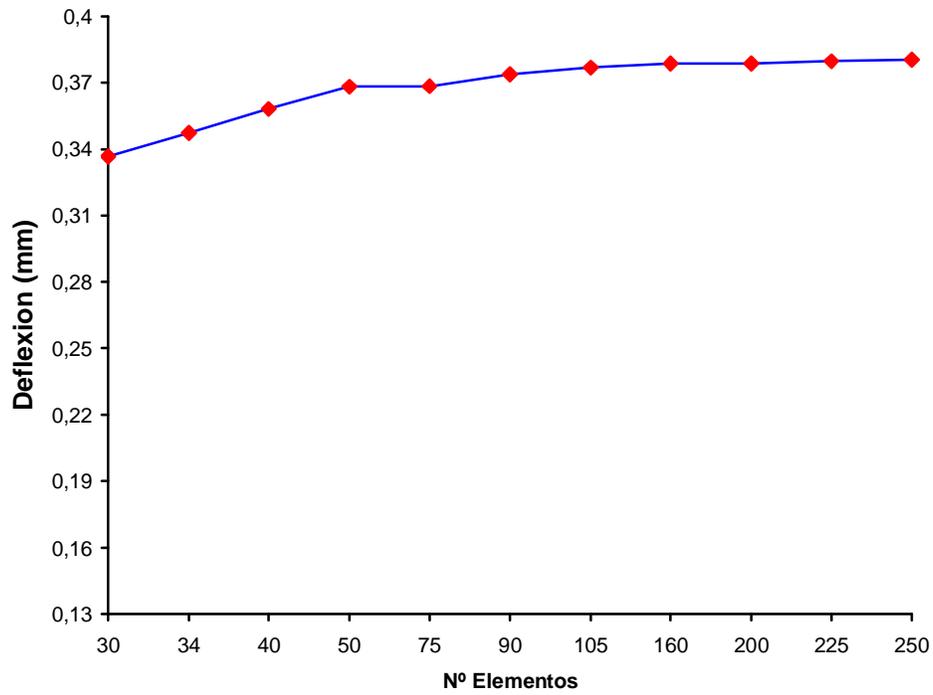
Tabla 4. Resultados del análisis por elementos finitos

| Nº Elementos | Nº Nodos | a:b    | Div x | Div y | Nodos Cargados | Deflexión (mm) | Error (%) |
|--------------|----------|--------|-------|-------|----------------|----------------|-----------|
| 30           | 48       | 1:1.3  | 15    | 2     | 34 - 48        | 0.3367         | 10.20     |
| 34           | 54       | 1:1.17 | 17    | 2     | 38 - 54        | 0.3474         | 7.36      |
| 40           | 63       | 1:1    | 20    | 2     | 44 - 63        | 0.3582         | 4.48      |
| 50           | 78       | 1:1.25 | 25    | 2     | 54 - 78        | 0.3683         | 1.78      |
| 75           | 104      | 1.33:1 | 25    | 3     | 80 - 104       | 0.3685         | 1.73      |
| 90           | 124      | 1:1    | 30    | 3     | 95 - 124       | 0.3738         | 0.32      |
| 105          | 144      | 1:1.16 | 35    | 3     | 110 - 144      | 0.3768         | 0.48      |
| 160          | 205      | 1:1    | 40    | 4     | 166 - 205      | 0.3786         | 0.96      |
| 200          | 255      | 1:1.25 | 40    | 5     | 207 - 246      | 0.3787         | 0.98      |
| 225          | 276      | 1.1:1  | 45    | 5     | 232 - 276      | 0.3797         | 1.25      |
| 250          | 306      | 1:1    | 50    | 5     | 257 - 306      | 0.3804         | 1.44      |

**Figura 22.** Número de Elementos vs % de Error

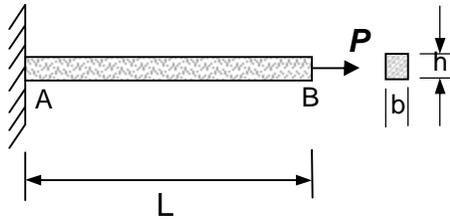


**Figura 23.** Número de Elementos vs Deflexión



### 4.2.3 Viga en voladizo sometida a carga axial

Figura 24. Viga en voladizo sometida a carga axial



| <b>Datos del Problema</b>    |                       |       |      |
|------------------------------|-----------------------|-------|------|
| L (m)                        | 2                     | a (m) | 0.20 |
| P (N)                        | 50000                 | b (m) | 0.20 |
| E (N/m <sup>2</sup> )        | 200 x 10 <sup>9</sup> |       |      |
| <b>Calcular</b>              |                       |       |      |
| Desplazamiento en el punto B |                       |       | mm   |
| Esfuerzo en el punto B       |                       |       | MPa  |

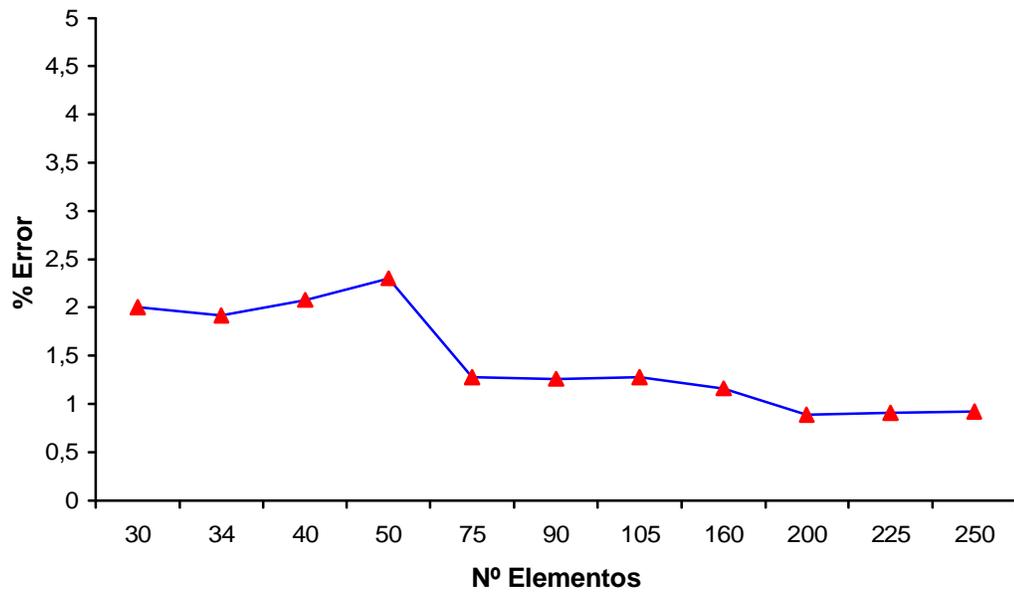
$$s = \frac{P}{A} \rightarrow s = \frac{50000}{0.04} = 1250000 \rightarrow s = 1.25 \text{ MPa}$$

$$d = \frac{PL}{EA} = \frac{(50000)(2)}{(200 \times 10^9)(0.04)} = 1.25 \times 10^{-5} \text{ m} \rightarrow d = 0.0125 \text{ mm}$$

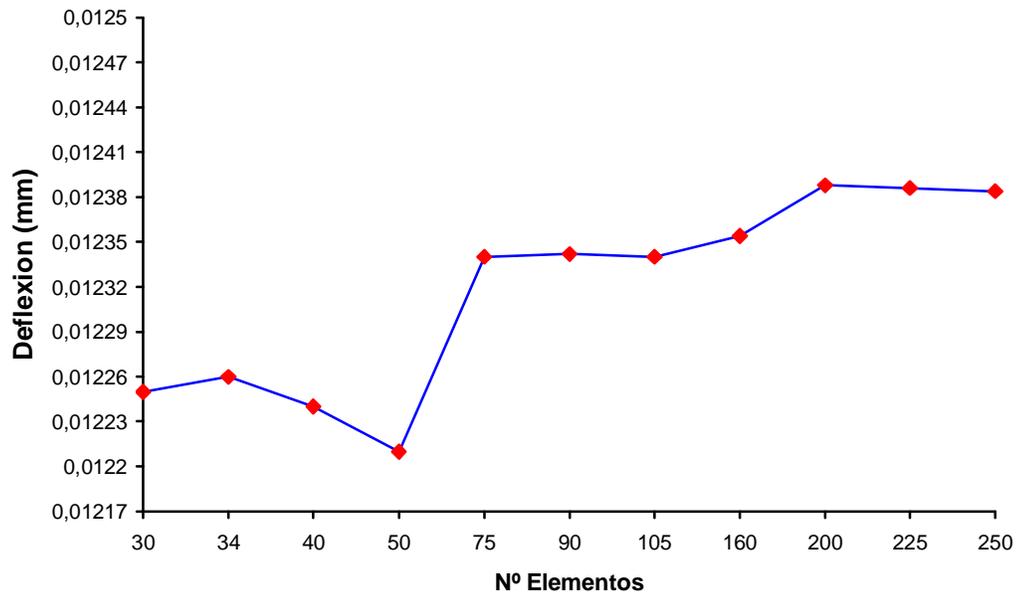
Tabla 5. Resultados del análisis por elementos finitos

| Nº Elementos | Nº Nodos | a:b    | Div x | Div y | $\delta$ (mm) | Error (%) | Esfuerzos MPa | Error (%) |
|--------------|----------|--------|-------|-------|---------------|-----------|---------------|-----------|
| 30           | 48       | 1:1.3  | 15    | 2     | 0.012250      | 2         | 1.25          | 0         |
| 34           | 54       | 1:1.17 | 17    | 2     | 0.012260      | 1.92      | 1.25          | 0         |
| 40           | 63       | 1:1    | 20    | 2     | 0.012240      | 2.08      | 1.25          | 0         |
| 50           | 78       | 1:1.25 | 25    | 2     | 0.012210      | 2.3       | 1.25          | 0         |
| 75           | 104      | 1.33:1 | 25    | 3     | 0.012340      | 1.28      | 1.25          | 0         |
| 90           | 124      | 1:1    | 30    | 3     | 0.012342      | 1.26      | 1.25          | 0         |
| 105          | 144      | 1:1.16 | 35    | 3     | 0.012340      | 1.28      | 1.25          | 0         |
| 160          | 205      | 1:1    | 40    | 4     | 0.012354      | 1.16      | 1.25          | 0         |
| 200          | 255      | 1:1.25 | 40    | 5     | 0.012388      | 0.89      | 1.25          | 0         |
| 225          | 276      | 1.1:1  | 45    | 5     | 0.012386      | 0.91      | 1.25          | 0         |
| 250          | 306      | 1:1    | 50    | 5     | 0.012384      | 0.92      | 1.25          | 0         |

**Figura 25.** Número de Elementos vs % de Error



**Figura 26.** Número de Elementos vs Deflexión



#### 4.2.4 Cilindro recto sometido a compresión

Considere un cilindro sujeto a dos cargas a compresión en la mitad de su longitud, las cuales tienen un valor de 100 lb. Las propiedades y dimensiones del cilindro son  $E = 10.5 \times 10^6$  psi,  $\nu = 0.3125$ , y  $L = 10.35$  pulg,  $r = 4.953$  pulg y  $t = 0.094$  pulg. El cilindro está sujeto a lo largo de su longitud a  $90^\circ$  de la fuerza aplicada.

Figura 27. Cilindro recto

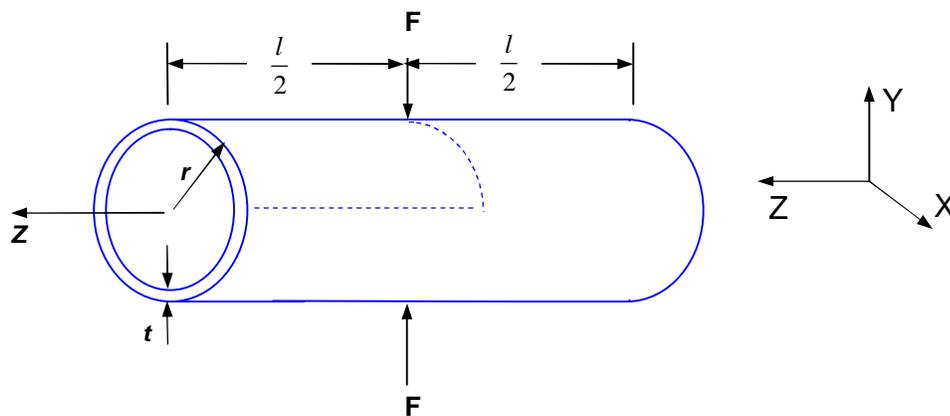
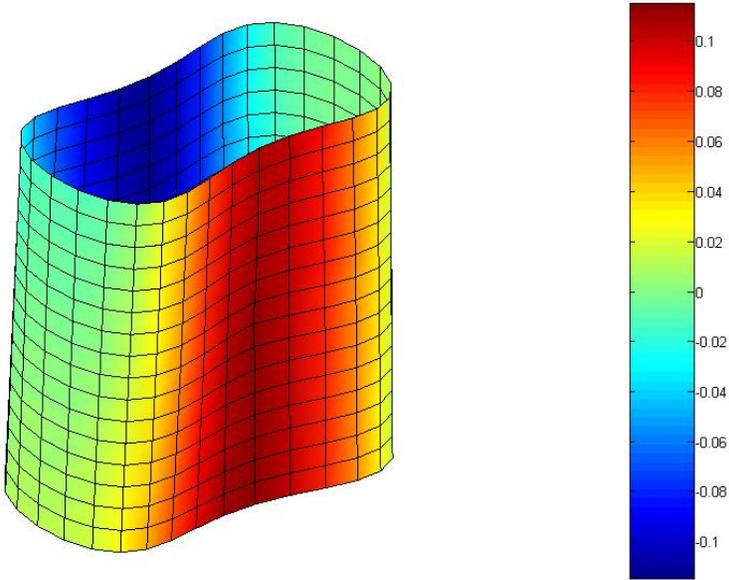


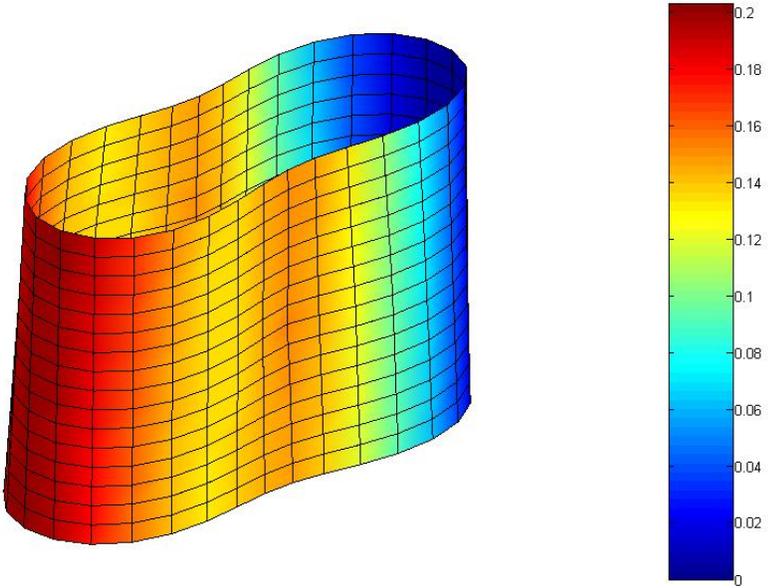
Tabla 6. Comparación de resultados

| Elemento            | Sol. Analítica | Sol. Computacional | Error (%) |
|---------------------|----------------|--------------------|-----------|
| Shell 90            | 0.1139         | 0.1138             | 0.087     |
| Shell 160           | 0.1139         | 0.1149             | 0.877     |
| Solución por Matlab |                |                    |           |
| 512 Elementos       | 0.1139         | 0.1145             | 0.527     |

**Figura 28.** Desplazamientos en dirección Y con enmallado de 512 elementos



**Figura 29.** Desplazamientos totales con enmallado de 512 elementos



#### 4.2.5 Placa sujeta a una carga uniforme

Considere una placa cuadrada ( $a=b$ ) cuya longitud es de 0.5 m y tiene un espesor de 3 mm. La placa esta soportada simplemente en todos sus bordes y se le aplica una presión uniforme de 2500 Pa en su superficie. Las propiedades de la placa son:

$$E_1 = E_2 = 70 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.33$$

Tomando la ecuación B9 del anexo B tenemos:

$$w_{\max} = l \frac{p_0 a^4}{D}$$

donde

$$l = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{16(-1)^{[(m+n)/2]-1}}{p^6 m n (m^2 + n^2)^2}$$

**Tabla 7.** Aproximación de la ecuación de la deflexión máxima

| $m$   | $n$   | $\lambda$ |
|-------|-------|-----------|
| 1     | 1     | 0.0041606 |
| 1     | 1,3   | 0.0041606 |
| 1,3   | 1,3   | 0.0041606 |
| 1,3   | 1,3,5 | 0.0041606 |
| 1,3,5 | 1,3,5 | 0.0041606 |

La solución de para la deflexión máxima para  $m=5$  y  $n=5$  es

$$w_{\max} = 0.0041606 \frac{p_0 a^4}{D}$$

Introduciendo los datos del problema se tiene:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 176.7478 \rightarrow w_{\max} = 0.0041606 \frac{(2500)(0.5)^4}{176.7478}$$

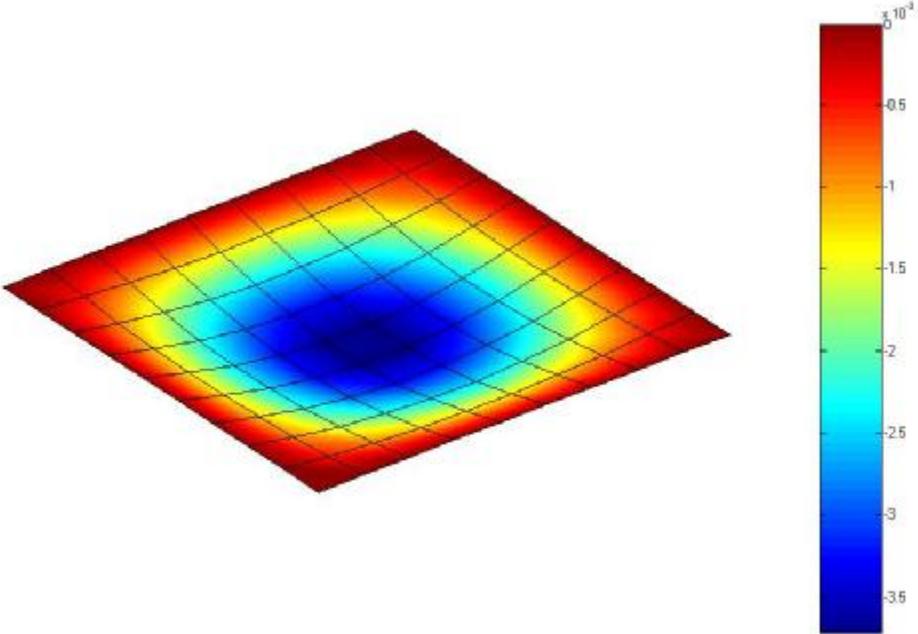
Finalmente la deflexión máxima es:

$$w_{\max} = 3.678 \text{ mm}$$

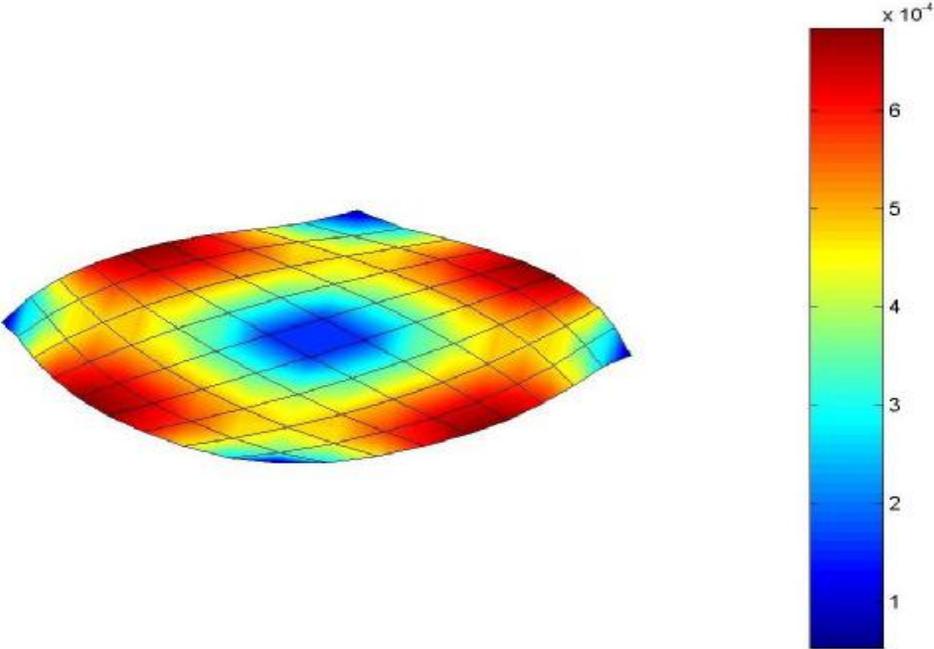
**Tabla 8.** Resultados utilizados diferentes mallas

| Elementos | Deflexión | Error (%) |
|-----------|-----------|-----------|
| 64        | 3.716     | 1.03      |
| 81        | 3.720     | 1.14      |

**Figura 30.** Desplazamientos en dirección Z

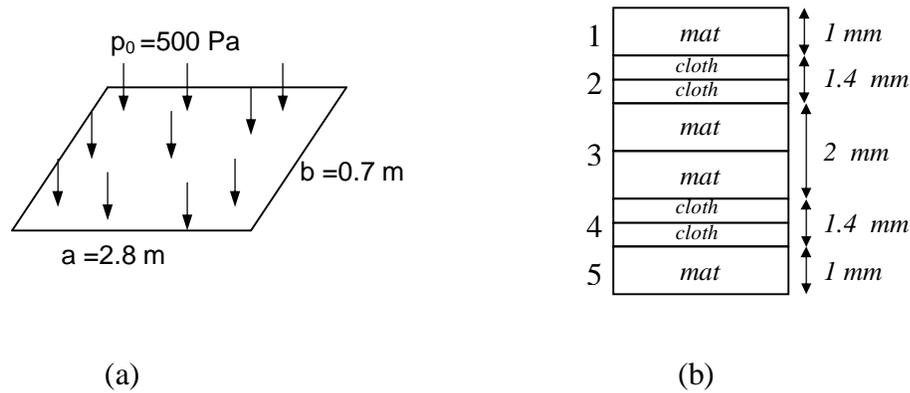


**Figura 31.** Giro totales



#### 4.2.6 Placa laminada sujeta a una carga uniforme

Figura 32. Placa laminada sujeta a una carga uniforme



Considere el caso de una placa rectangular con largo de  $a = 2.8 \text{ m}$  y ancho de  $b = 0.78 \text{ m}$  que esta sujeta a una presión uniforme de  $500 \text{ Pa}$ . La placa esta hecha de un laminado simétrico de cinco capas. La capas 1,3 y 5 son capas de *mat* reforzadas de  $450 \text{ g/m}^2$ , y sus propiedades son:

|  |  |
|--|--|
| $E_1 = E_2 = 7.72 \text{ GPa}$ $n_{12} = 0.33$ $G_{12} = 2.91 \text{ GPa}$ |  |
|--|--|

La capa 3 es doble. Las capas 2 y 4 son dobles con reforzados con *cloth* de  $500 \text{ g/m}^2$  y sus propiedades son:

|  |  |
|--|--|
| $E_1 = E_2 = 13.8 \text{ GPa}$ $n_{12} = 0.12$ $G_{12} = 1.87 \text{ GPa}$ |  |
|--|--|

Calculando la matriz elástica ( $E$ ) para cada material, se obtiene:

Para las capas de *mat* 1, 3, 5:

|  |  |
|--|--|
| $E_{11} = 8.66 \text{ GPa}$ $E_{12} = 2.86 \text{ GPa}$          |  |
| $E_{22} = E_{11} = 8.66 \text{ GPa}$ $E_{66} = 2.91 \text{ GPa}$ |  |

Para las capas *cloth* 2, 4:

|  |  |
|--|--|
| $E_{11} = 14 \text{ GPa}$ $E_{12} = 1.68 \text{ GPa}$          |  |
| $E_{22} = E_{11} = 14 \text{ GPa}$ $E_{66} = 1.87 \text{ GPa}$ |  |

La matriz elástica para un laminado se obtiene con la tercera ecuación de 2.62:

|   |  |  |
|---|--|--|
| $C_{11} = 272.64 \text{ Nm}$<br>$C_{22} = C_{11} = 272.64 \text{ Nm}$ | $C_{12} = 64.834 \text{ Nm}$<br>$C_{66} = 67.358 \text{ Nm}$ |  |
|---|--|--|

De la ecuación C7, el coeficiente  $D_{2m-1,2n-1}$  esta expresado como:

|   |  |
|---|--|
| $D_{2m-1,2n-1} = 272.64(2m-1)^4 + 6385.64(2m-1)^2(2n-1)^2 + 69796.68(2n-1)^4$ |  |
|---|--|

**Tabla 9.** Valores de los coeficientes  $\alpha$  como una función de  $n$  y  $m$

| m  | n  | $\alpha \times 10^{-5} (\text{Pa}^{-1})$ |
|----|----|--|
| 1  | 1  | 1.308                                    |
| 2  | 2  | 1.0807                                   |
| 3  | 3  | 1.1302                                   |
| 4  | 4  | 1.1169                                   |
| 5  | 5  | 1.1213                                   |
| 6  | 6  | 1.1196                                   |
| 7  | 8  | 1.1203                                   |
| 8  | 9  | 1.1199                                   |
| 10 | 20 | 1.1200                                   |
| 15 | 15 | 1.1201                                   |
| 20 | 20 | 1.1201                                   |

La máxima deflexión  $w_{max}$  es deducida de la ecuación C18 Los valores de  $\alpha$  en la serie como una función de  $m$  y  $n$  están dados en la Tabla 9, en la cual

|  |  |
|--|--|
| $a = 1.201 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ |  |
|--|--|

Donde la máxima deflexión con  $a=2.8 \text{ m}$  y  $p_0=500 \text{ Pa}$ :

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $w_{max} = 5.728 \text{ mm}$ |  |
|------------------------------|--|

**Tabla 10.** Valores de los coeficientes  $\beta$  y  $\gamma$  como función de  $m$  y  $n$

| m | n | $\beta \times 10^{-6} (\text{Pa}^{-1})$ | $\gamma \times 10^{-5} (\text{Pa}^{-1})$ |
|---|---|---|--|
| 1 | 1 | 13.08                                   | 1.308                                    |
| 2 | 2 | -6.904                                  | 1.0484                                   |
| 3 | 3 | 5.383                                   | 1.1000                                   |
| 4 | 4 | -1.1328                                 | 1.0865                                   |
| 5 | 5 | 2.4327                                  | 1.0906                                   |
| 6 | 6 | 3.5091                                  | 1.0890                                   |

|     |     |        |        |
|-----|-----|--------|--------|
| 7   | 7   | 1.6454 | 1.0897 |
| 8   | 8   | 0.7943 | 1.0893 |
| 10  | 10  | 0.9604 | 1.0894 |
| 15  | 15  | 1.1910 | 1.0895 |
| 30  | 30  | 1.1313 | 1.0894 |
| 60  | 60  | 1.1371 | 1.0894 |
| 100 | 100 | 1.1378 | 1.0894 |
| 150 | 150 | 1.1379 | 1.0894 |

El calculo del esfuerzo (C24) necesita la determinación de las series  $\beta$  (C21) y  $\gamma$  (C22), los cuales son determinados en la tabla 10

|   |  |  |
|---|--|--|
| $b = 1.1379 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ | $g = 1.894 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ |  |
|---|--|--|

Los esfuerzos en el plano en la capa *mat*, en el centro de la placa, son:

|  |  |
|--|--|
| $s_{xx}^m = A_{xx}^m z$ $s_{yy}^m = A_{yy}^m z$ $s_{xy}^m = 0$ |  |
|--|--|

donde,

|   |  |
|---|--|
| $A_{xx}^m = \frac{16 p_0 a^2}{p^4} (E_{11}^m b + E_{12}^m R^2 g)$ $A_{yy}^m = \frac{16 p_0 a^2}{p^4} (E_{12}^m b + E_{22}^m R^2 g)$ |  |
|---|--|

Introduciendo todos los valores, se obtiene:

|   |  |  |
|---|--|--|
| $A_{xx}^m = 3.2721 \times 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ | $A_{yy}^m = 9.774 \times 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ |  |
|---|--|--|

Similarmente los esfuerzos en el *cloth* son:

|  |  |
|--|--|
| $s_{xx}^c = A_{xx}^c z$ $s_{yy}^c = A_{yy}^c z$ $s_{xy}^c = 0$ |  |
|--|--|

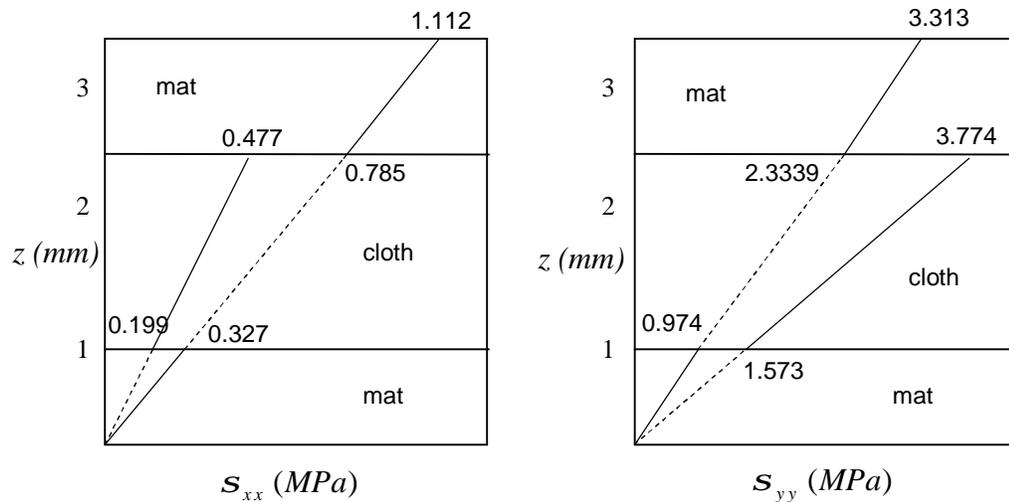
y,

|   |  |
|---|--|
| $A_{xx}^c = \frac{16p_0a^2}{p^4} (E_{11}^c b + E_{12}^c R^2 g)$ $A_{yy}^c = \frac{16p_0a^2}{p^4} (E_{12}^c b + E_{22}^c R^2 g)$ |  |
|---|--|

Introduciendo los valores en A se tiene:

|   |   |  |
|---|---|--|
| $A_{xx}^m = 1.9883 \times 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ | $A_{yy}^m = 1.5727 \times 10^8 \text{ Nm}^{-1}$ |  |
|---|---|--|

**Tabla 11.** Variación de esfuerzos en el centro de la placa.



Los esfuerzos transversales cortantes son determinados por:

|   |  |
|---|--|
| $\frac{\partial}{\partial x} s_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} s_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} s_{xz} = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} s_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} s_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} s_{yz} = 0$ |  |
|---|--|

El esfuerzo cortante en un punto (x,y) de la placa son escrito de la forma:

|  |  |
|--|--|
| $s_{xz}^k = B_{xz}^k(x, y)z^2 + const$ $s_{yz}^k = B_{yz}^k(x, y)z^2 + const$ $k = m, c$ |  |
|--|--|

Las constantes son determinadas considerando la continuidad de los esfuerzos y ellas desaparecen en las caras inferior y superior.

Capa 1 (*mat*):

|  |  |
|--|--|
| $s_{iz}^1 = B_{iz}^m(x, y)(z^2 - h_0^2), \quad i = x, y \quad h_0 = 3.4mm$ |  |
|--|--|

Capa 2 (*cloth*)

|   |  |
|---|--|
| $s_{iz}^2 = B_{iz}^c(x, y)(z^2 - h_1^2) + B_{iz}^m(x, y)(h_1^2 - h_0^2)$ $i = x, y \quad h_0 = 2.4mm$ |  |
|---|--|

Capa 3 (*mat*)

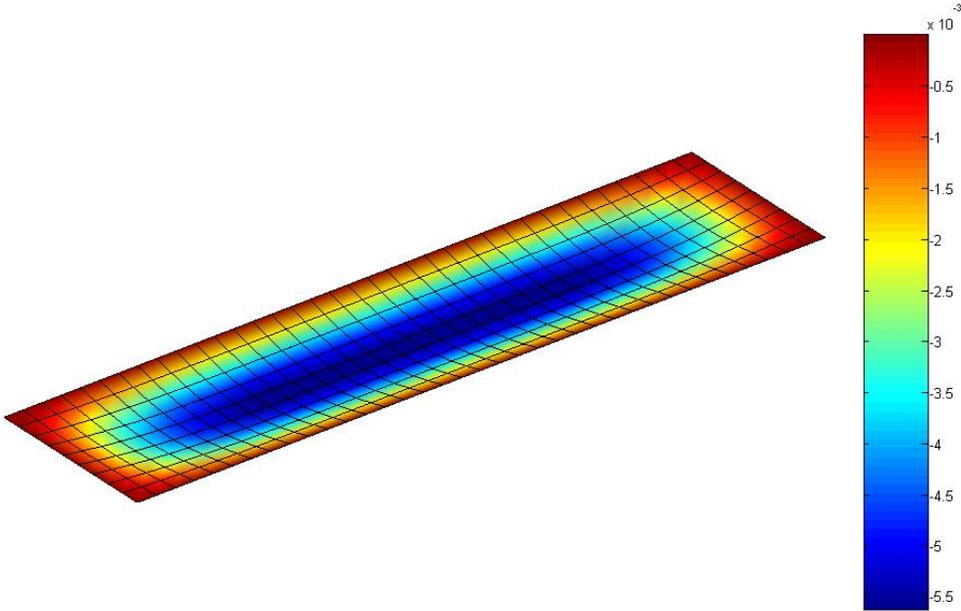
|   |  |
|---|--|
| $s_{iz}^2 = B_{iz}^m(x, y)(z^2 - h_2^2 + h_1^2 - h_0^2) + B_{iz}^c(x, y)(h_2^2 - h_1^2)$ $i = x, y \quad h_0 = 1mm$ |  |
|---|--|

La distribución de esfuerzos en las capas 4 y 5 son simétricas a la distribución en las capas 1 y 2.

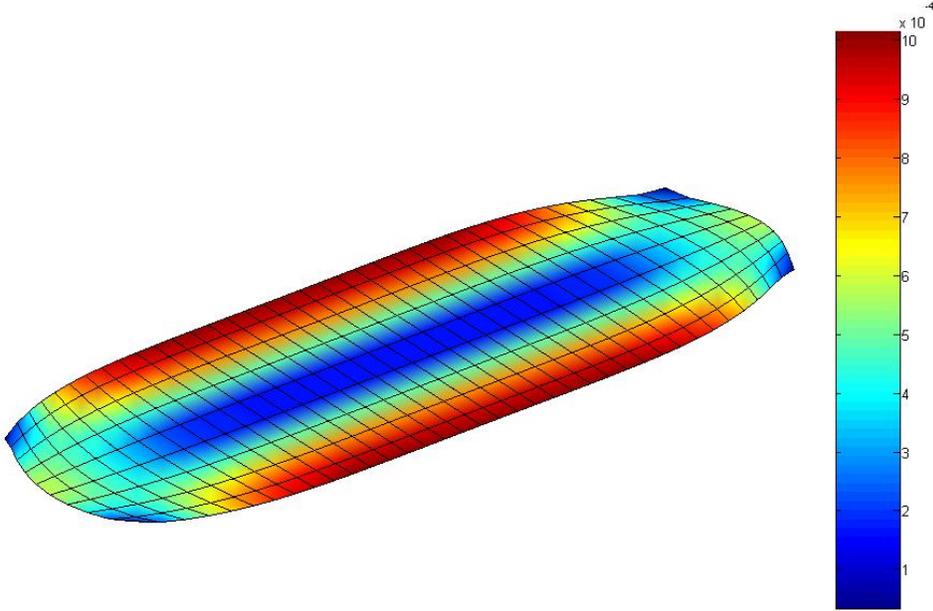
**Tabla 12.** Resultados del análisis por elementos finitos

| Nº Elementos | Nº Nodos | a:b | Divisiones<br>x | Divisiones<br>y | δ<br>(mm) | Error<br>(%) |
|--------------|----------|-----|-----------------|-----------------|-----------|--------------|
| 324          | 370      | 1:1 | 9               | 36              | 5.6       | 1.75         |

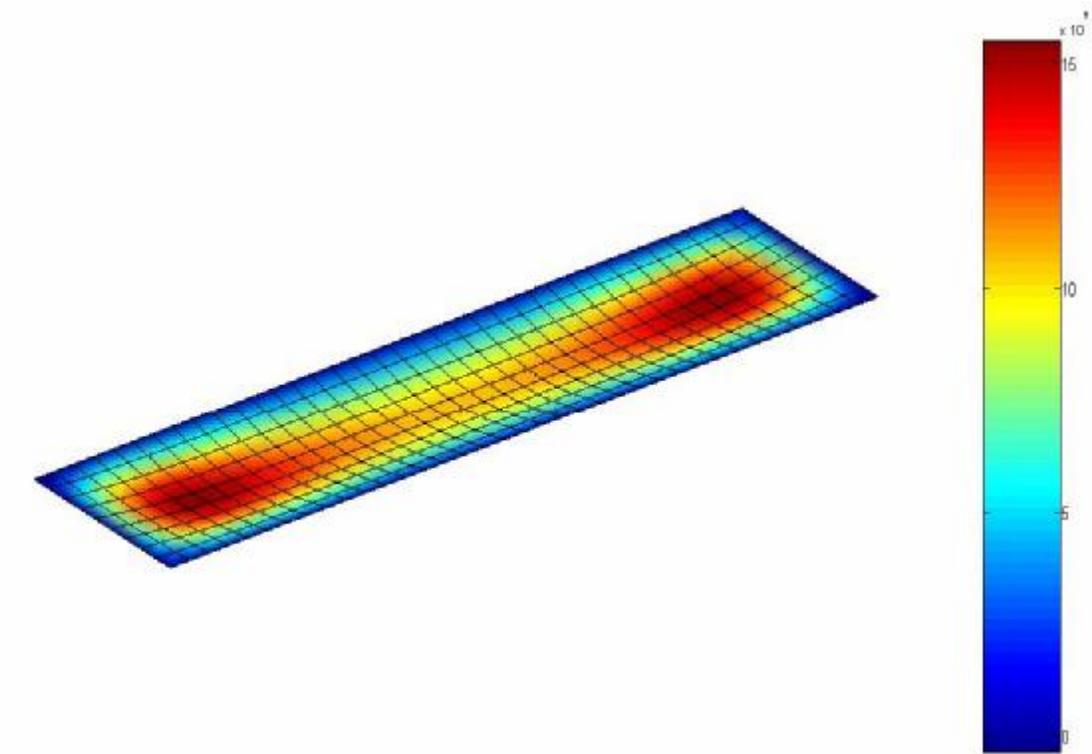
**Figura 33.** Desplazamiento en Z



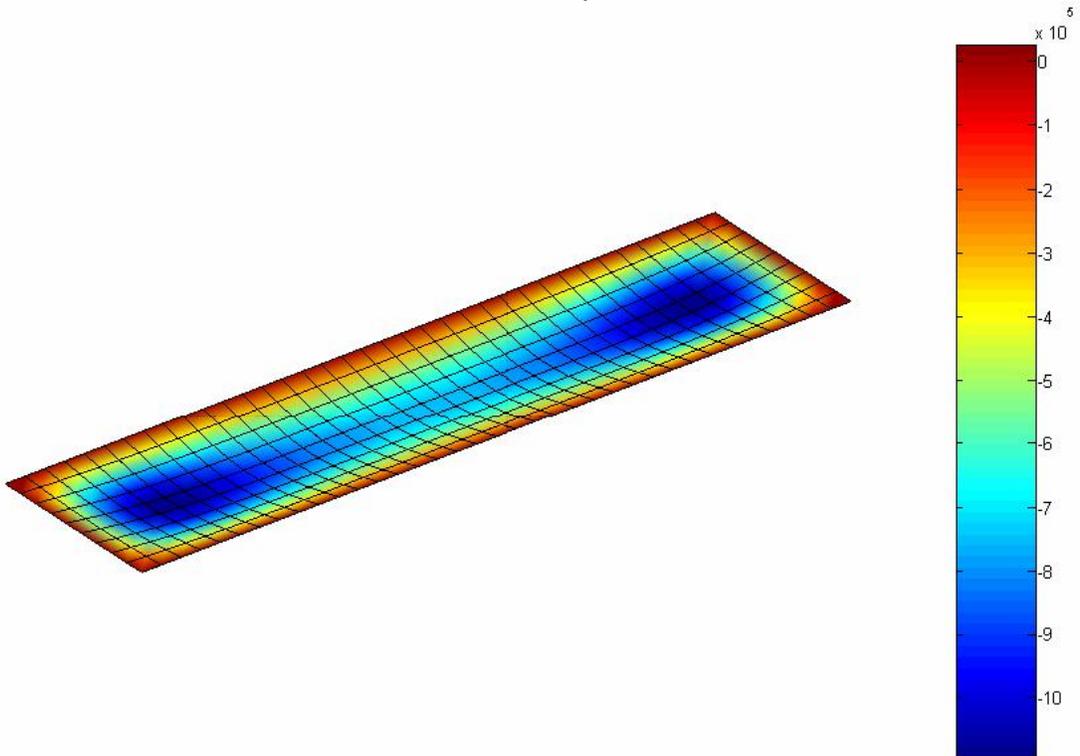
**Figura 34.** Giros Totales



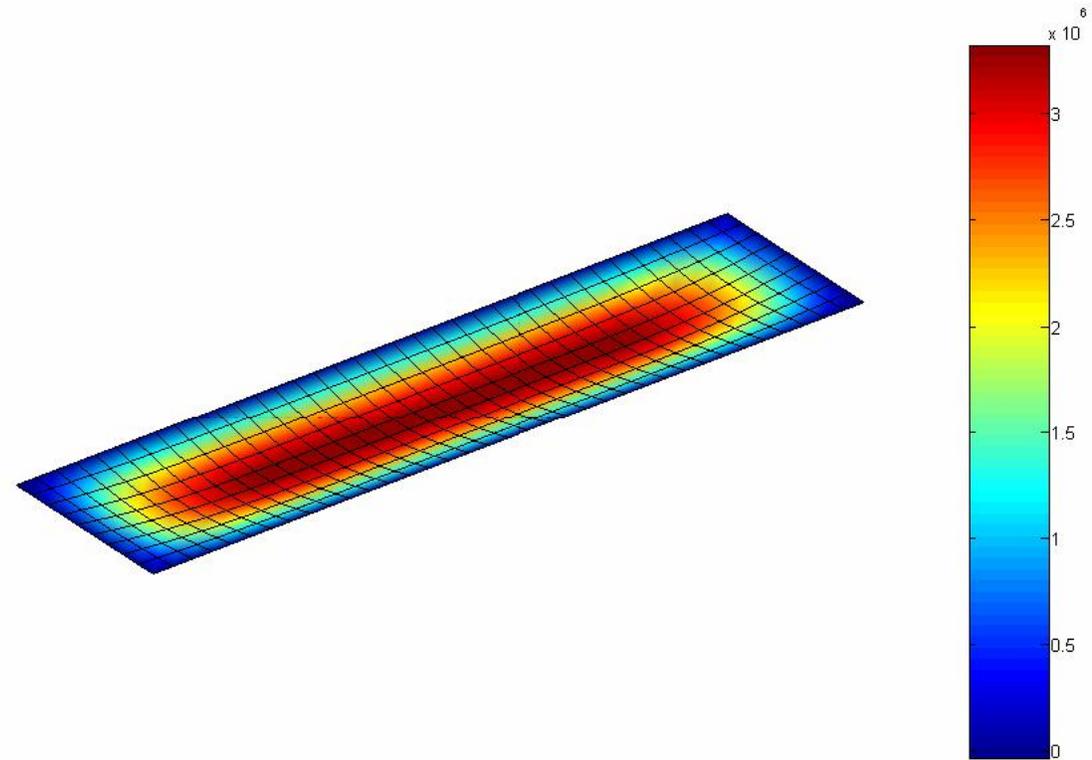
**Figura 35.** Esfuerzos en dirección X en la capa 1



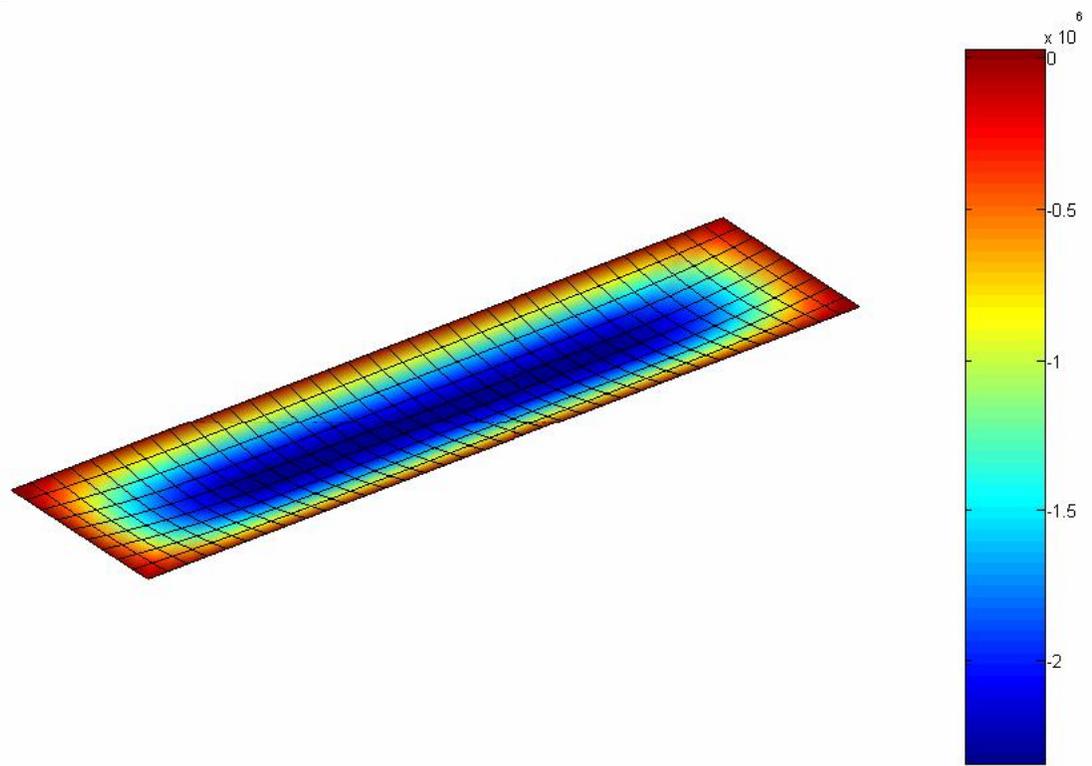
**Figura 36.** Esfuerzos en dirección X en la capa 5



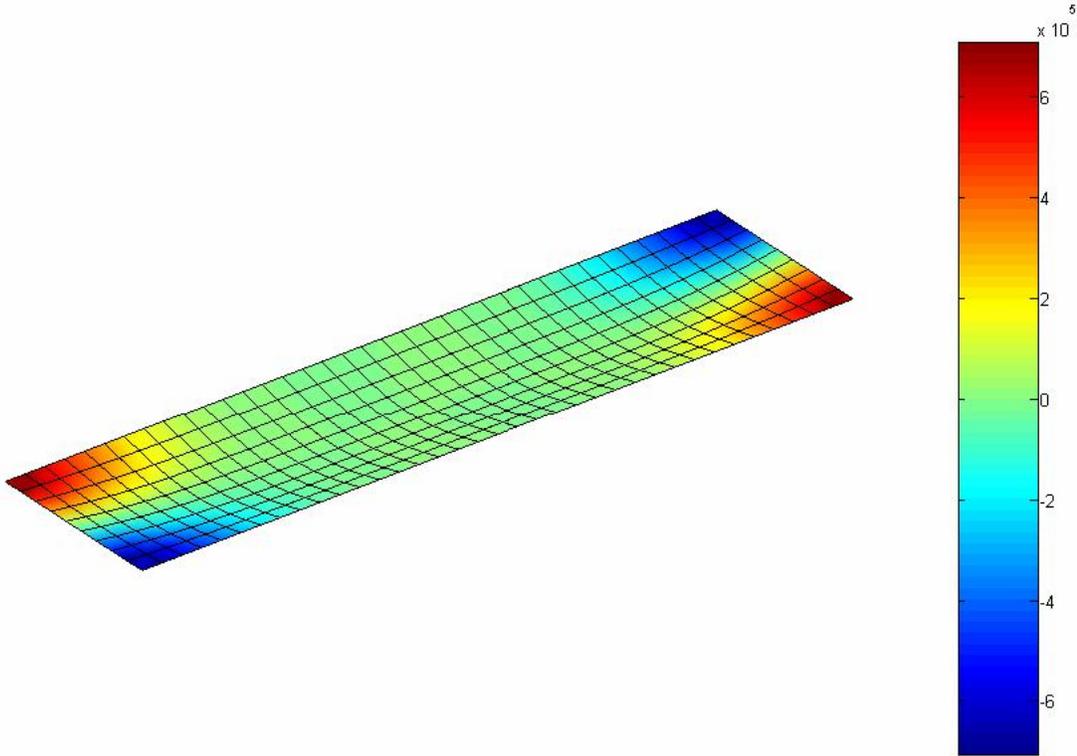
**Figura 37.** Esfuerzos en dirección Y en la capa 1



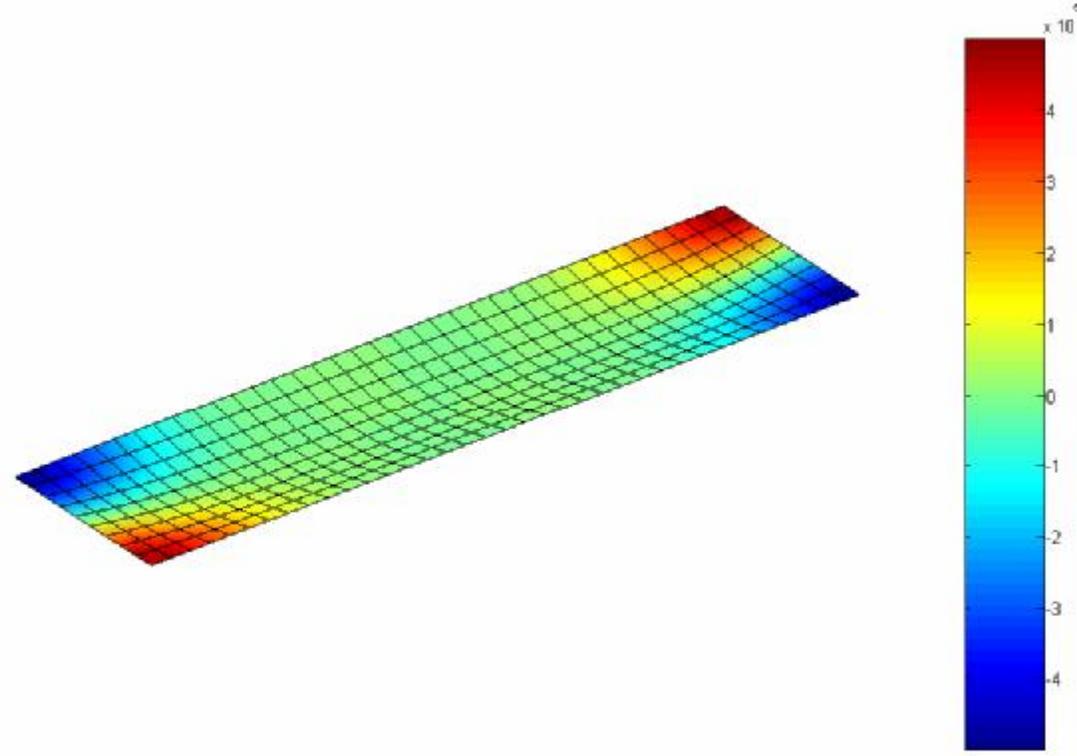
**Figura 38.** Esfuerzos en dirección Y en la capa 5



**Figura 39.** Esfuerzo cortante XY en la capa 1



**Figura 40.** Esfuerzo cortante XY en la capa 5



**4.2.7 Análisis de resultados.** Antes de analizar los resultados es necesario aclarar que para los ejercicios de vigas sometidos a carga a flexión es mejor trabajar con elementos tipo barra, los cuales dan mejores resultados que los elementos cuadriláteros que se utilizaron en el modelo. Sin embargo, para efectos de validación son útiles estos elementos (cuadriláteros) ya que permiten comparar la veracidad de los resultados de estos.

En los ejercicios de vigas desarrollados anteriormente que estaban sometidos a cargas de flexiones se notó que los resultados de desplazamientos más cercanos al valor real, se dieron en mallas más refinadas. Sin embargo un refinamiento demasiado grande de la malla ocasiona un aumento en el error y además un gasto innecesario de tiempo de cómputo.

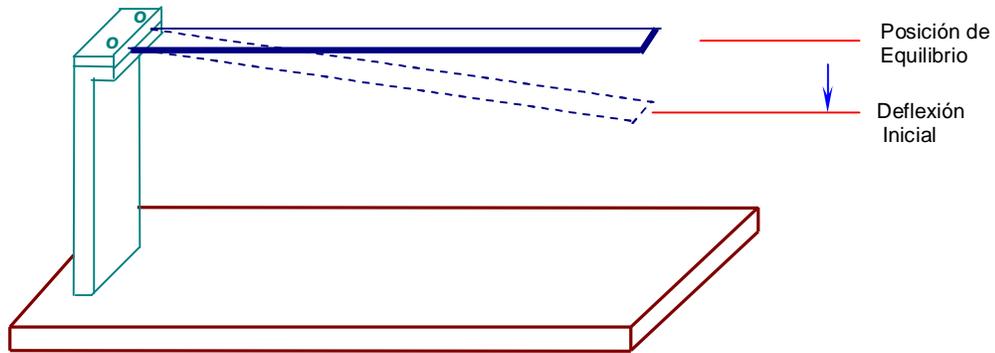
En la sección 4.2.3 cualquiera de las mallas podría considerarse como óptima siempre y cuando no sea de interés conocer de manera gráfica la distribución de esfuerzo, debido a que con pocos elementos no se aprecia una correcta distribución de esfuerzos. A medida que se fue aumentando el número de elementos en la malla, la distribución de esfuerzos se hizo más clara.

En los ejercicios de placa simple y laminada en las gráficas se ven deformadas por efecto de giro y desplazamiento, las cuales han sido exageradas para efecto de visualización, sin embargo en la realidad estos valores no son observables a simple vista. En las gráficas de giros da la impresión que los nodos de los bordes presentarían giros, sin embargo los que giran son los nodos próximos a estos.

### 4.3 VALIDACION DINAMICA CON UN MODELO REAL

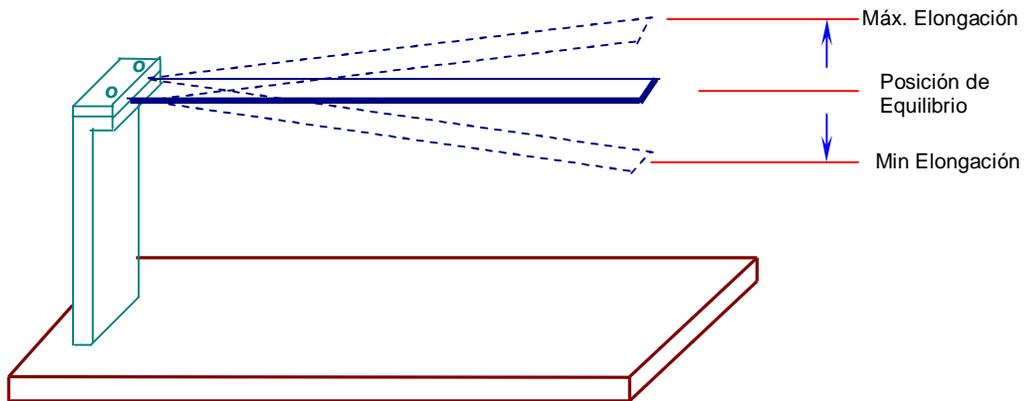
Los datos reales se obtuvieron por medio de una prueba realizada a una placa en voladizo la cual se deflectó hacia abajo y luego se suelta.

**Figura 41.** Estado inicial de la placa



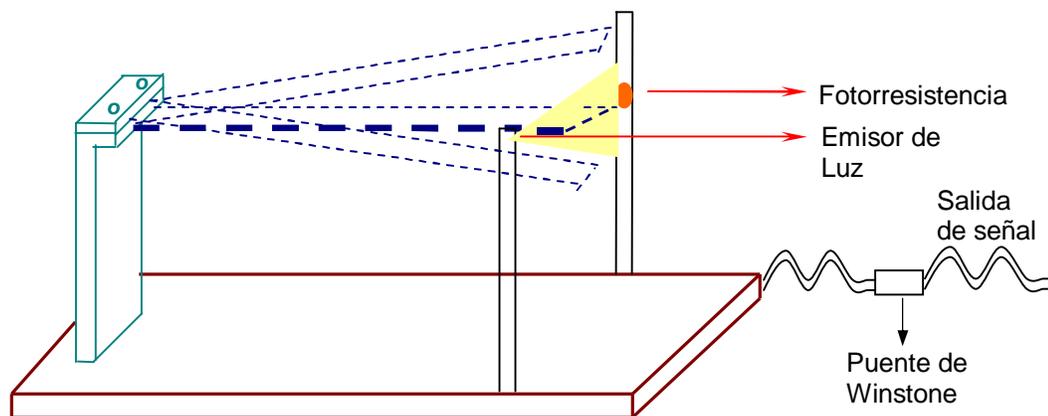
Una vez se suelta el extremo libre este empieza a vibrar hasta quedar en reposo. Los desplazamientos que se dan durante la vibración son registrados mediante un dispositivo electrónico. El dispositivo electrónico utilizado para registrar los desplazamientos a través del tiempo en el extremo libre de la placa consta básicamente de dos etapas.

**Figura 42.** Comportamiento dinámico de la placa



La primera etapa se encarga de crear una señal que define los desplazamientos, esta señal resulta de la variación en la cantidad de luz recibida por una fotorresistencia que se encuentra en un costado del extremo libre de la placa, y la luz que esta recibe proviene de un haz de luz emitido por una pequeña lámpara localizada al frente de la fotorresistencia, es decir al otro costado del extremo libre de la placa en la posición de equilibrio de esta. Al vibrar la placa permite que la cantidad de luz directa que recibe la fotorresistencia varíe y la resistencia de esta también, este cambio de resistencia luego es enviado a un “Puente de *Winstone*” el cual se encarga de convertir la variación de resistencia en una variación de voltaje y estos voltajes son utilizados para medir los desplazamientos

**Figura 43.** Adquisición de datos



La segunda etapa se encarga de recibir la variación de voltaje y visualizarlos, dicha visualización se lleva a cabo mediante un osciloscopio que recibe la señal emitida en la primera etapa.

Previamente se toman valores de voltajes correspondientes a determinados desplazamientos y con estos hallamos una ecuación por regresión lineal para poder determinar el desplazamiento correspondiente a cada valor de voltaje mostrado por la grafica que saca el osciloscopio.

**4.3.1 Validación dinámica en una lámina de PRFV.** La lámina en voladizo esta fabricada por un laminado de tres capas fibra (mat+roving+mat). Cada una de las láminas es considerada isotrópica y por tanto el ángulo de orientación respecto a los ejes de referencia es cero para cada lámina.

**Tabla 13.** Datos de la lámina

| Material | Dimensiones |         |       |                                |
|----------|-------------|---------|-------|--------------------------------|
|          | L (m)       | t (m)   | b (m) | $\rho$<br>(kg/m <sup>3</sup> ) |
| PRFV     | 0.25        | 0.0032  | 0.04  | 1593.75                        |
| Capas    | Propiedades |         |       |                                |
|          |             | E (GPa) | $\nu$ | t (mm)                         |
|          | Mat 450     | 7.72    | 0.33  | 1.1                            |
| Roving   | 13.34       | 0.12    | 1.0   |                                |

**Tabla 14.** Resultados de la prueba

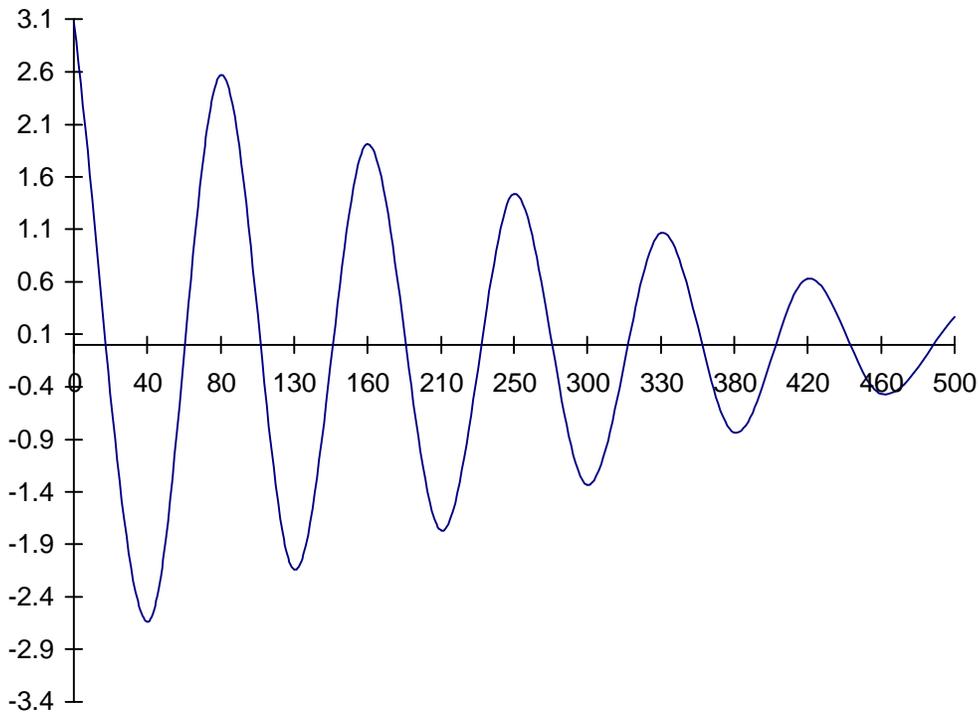
| Tiempo (ms) | Desplazamiento (cm) |
|-------------|---------------------|
| 0           | 3.0712              |
| 40          | -2.637              |
| 80          | 2.5702              |
| 130         | -2.136              |
| 160         | 1.9022              |
| 210         | -1.7686             |
| 250         | 1.4346              |
| 300         | -1.3344             |
| 330         | 1.0672              |
| 380         | -0.8334             |
| 420         | 0.633               |
| 460         | -0.466              |
| 500         | 0.2656              |

El rango de tiempo considerando en la tabla 13 (500 milisegundos) es un tiempo suficiente para analizar la rigidez del material en cuestión, además permite hallar

los coeficientes de amortiguamiento (coeficientes de *Rayleigh*), los cuales son indispensables para el análisis dinámico de cualquier material.

Después de los 500 milisegundos se siguieron dando oscilaciones mucho más pequeñas, que no son tenidas en cuenta debido a que no son indispensables para el cálculo de los coeficientes de amortiguamiento, además el tenerlas en cuentas implica más tiempo de análisis y a su vez un aumento en el tiempo de computo en el momento de modelar el efecto.

**Figura 44.** Variación del desplazamiento en el tiempo.



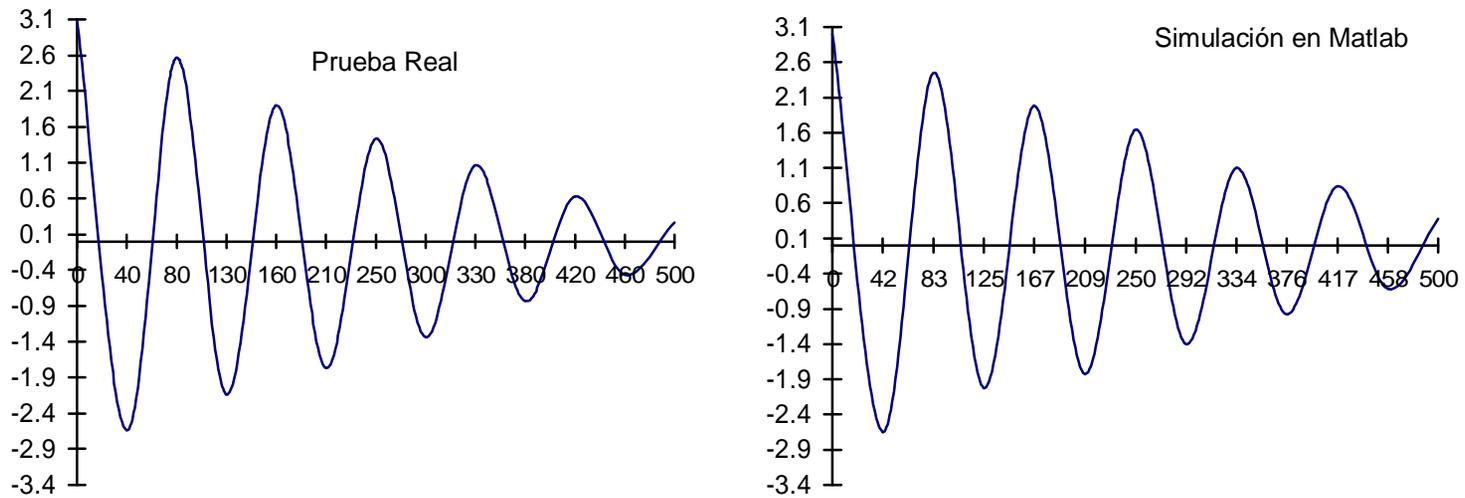
**4.3.2 Calibración de los coeficientes de Rayleigh.** En la sección anterior se explicó como obtener los desplazamientos respecto al tiempo de una placa

empotrada en un extremo. Haciendo uso de esto es posible obtener los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ , y así calcular el amortiguamiento de *Rayleigh* descrito en la sección 3.8.1

Introduciendo todos los datos anteriores en la formulación por elementos finitos, queda por último calcular cuales son los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  que dan la mejor aproximación a los desplazamientos reales.

Tras de pruebas de ensayo y error los mejores resultados se obtuvieron con los valores de 0.01 y 0.0008 para  $\alpha$  y  $\beta$ .

**Figura 45.** Comparación de resultados



**Tabla 15.** Resultados de pruebas

| Prueba Real |                     | Prueba Matlab |                     |
|-------------|---------------------|---------------|---------------------|
| Tiempo (ms) | Desplazamiento (cm) | Tiempo (ms)   | Desplazamiento (cm) |
| 0           | 3.0712              | 0             | 3.0                 |
| 40          | -2.637              | 42            | -2.65               |
| 80          | 2.5702              | 83            | 2.45                |
| 130         | -2.136              | 125           | -2.02               |
| 160         | 1.9022              | 167           | 1.98                |
| 210         | -1.7686             | 209           | -1.83               |
| 250         | 1.4346              | 250           | 1.65                |
| 300         | -1.3344             | 292           | -1.4                |
| 330         | 1.0672              | 334           | 1.1                 |
| 380         | -0.8334             | 376           | -0.98               |
| 420         | 0.633               | 417           | 0.84                |
| 460         | -0.466              | 458           | -0.62               |
| 500         | 0.2656              | 500           | 0.38                |

## **5 APLICACIÓN DEL MODELO**

### **5.1 DESCRIPCION DE LA PRUEBA REAL**

Una de las aplicaciones del modelo desarrollado en los capítulos anteriores consistirá en analizar el comportamiento de tanques fabricados en PRFV, para lo cual se utilizarán las pruebas de una empresa que trabaje con PRFV. En este caso se trabajará con Rotofibra Ltda. quienes se dedican a la fabricación de recipientes y tuberías en PRFV. Dentro de sus productos de mayor demanda se encuentra los tanques para almacenamiento de líquidos. En esta entidad cada nuevo diseño de tanque es llenado de agua y soltado a una altura promedio de 1,2 metros (altura promedio de un camión de carga) para evaluar su resistencia mecánica. Esta prueba es aplicada a tanques hechos en plásticos, sin embargo es de interés para la empresa conocer el comportamiento de tanques hechos en PRFV cuando se ven sometidos a una situación similar.

El estudio consistirá en simular el comportamiento de tanques fabricados en PRFV cuando son utilizados para almacenar un líquido (en este caso agua) a presión atmosférica, lo cual permitirá observar la distribución de desplazamiento y esfuerzos en el tanque. También se simulará el comportamiento de estos mismos tanques (llenos de agua), pero sometidos a una carga de impacto provocada por la caída de este a una determinada altura.

### **5.2 MATERIALES DEL TANQUE**

Rotofibra Ltda. utiliza como materiales principales para la fabricación de tanques en PRFV los siguientes tipos de fibra *VFG-Woven Roving 800* y *Mat 450*, y como resina la *Cristalán 805*.

**5.2.1 VFG-Woven Roving 800.** Este producto es un tejido hecho de filamentos continuos colocados en forma vertical y horizontal, sin amarras, para laminación manual. Por lo cual puede tomar distintas formas y curvas. Siendo un tejido pesado podrá transferir su configuración a través del Gel Coat si es colocado cerca de la superficie. Entre sus aplicaciones se encuentran la producción de lanchas, cavas, piezas automotrices, gabinetes y artículos del hogar, implementos deportivos, láminas translúcidas, tanques resistentes a la corrosión y un sin número de artículos de diversos tamaños y áreas.

**5.2.2 Mat 450.** Es una colchoneta de hilos cortados, distribuidos multidireccionalmente en un solo plano. Es ideal para moldeo abierto a baja presión, como soporte de *Gel Coat* y como un refuerzo para el laminado estándar. Se usa en sistemas de resinas termofijas, en moldeo manual y como refuerzo para laminado. Algunos usos concretos son: producción de lanchas, cavas, tanques resistentes a la corrosión, piscinas, componentes para camiones, paneles para la construcción, ductos, tuberías y muchas otras partes.

**5.2.3 Cristalán 805.** Es una resina poliéster ortoftálica muy versátil, para aplicaciones de propósito general, con propiedades mecánicas excelentes y buen desempeño en aplicaciones eléctricas. Es apropiada para laminación manual o moldeo a máquina. Los laminados tienen alta resistencia mecánica, buena rigidez y excelente resistencia al impacto. Se desempeñan bien en más de 200 ambientes químicos.

El Cristalán 805 es apropiado para la fabricación de embarcaciones, cabinas, partes para carros, camarotes, cubiertas para máquinas, recipientes para líquidos, etc.

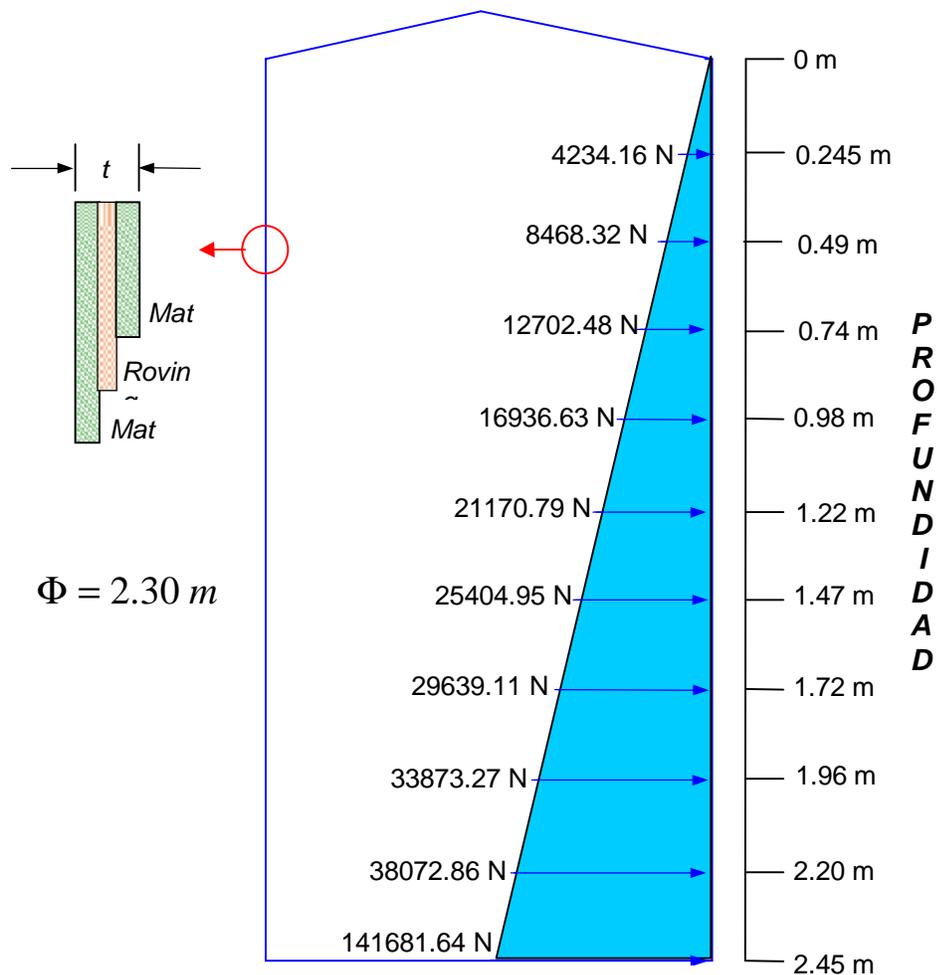
## 5.6 SIMULACION ESTATICA

La simulación se hará a un tanque para almacenar agua a presión atmosférica, el cual tiene una capacidad de almacenamiento de 10000 litros.

**Tabla 16.** Datos del tanque

| Material | Dimensiones |         |       |                          |
|----------|-------------|---------|-------|--------------------------|
|          | L (m)       | t (m)   | D (m) | $r$ (kg/m <sup>3</sup> ) |
| PRFV     | 2.45        | 0.0032  | 2.3   | 1593.75                  |
| Capas    | Propiedades |         |       |                          |
|          |             | E (GPa) | $\nu$ | t (mm)                   |
|          | Mat 450     | 7.72    | 0.33  | 1.1                      |
| Roving   | 13.34       | 0.12    | 1.0   |                          |

**Figura 46.** Distribución de fuerzas en tanque de 10000 Litros



5.3.1. Resultados del análisis.

Figura 47. Desplazamientos en dirección X y Y

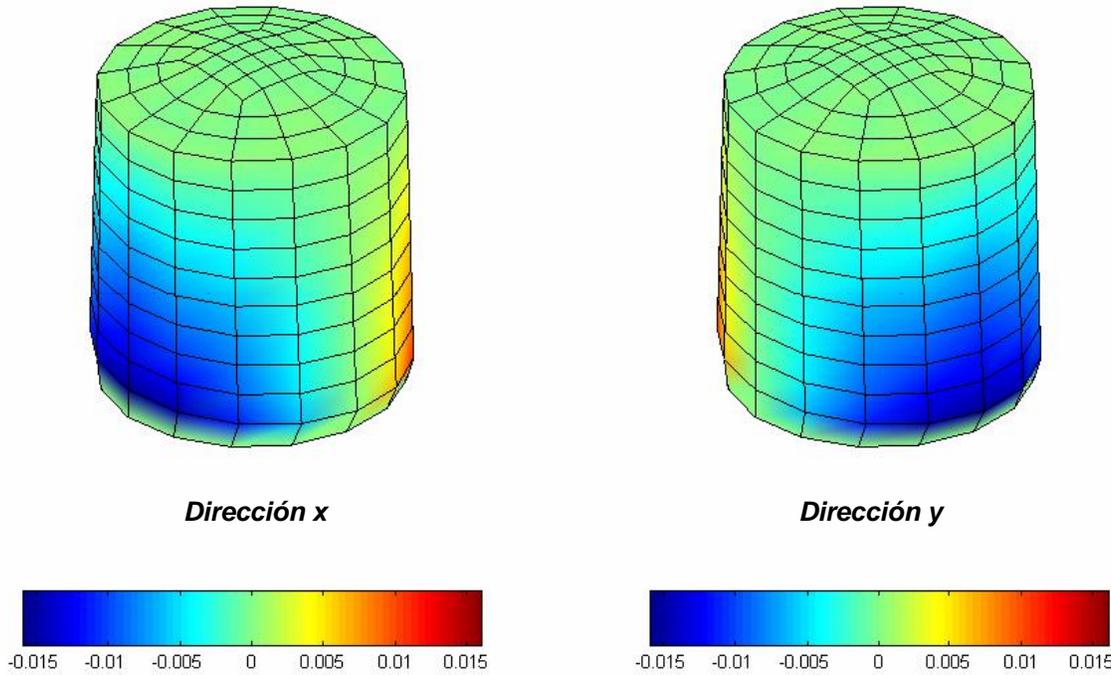
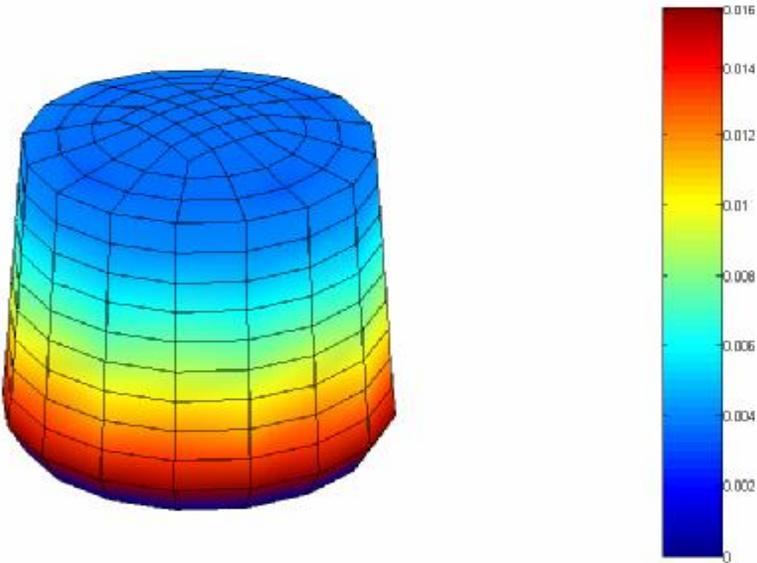
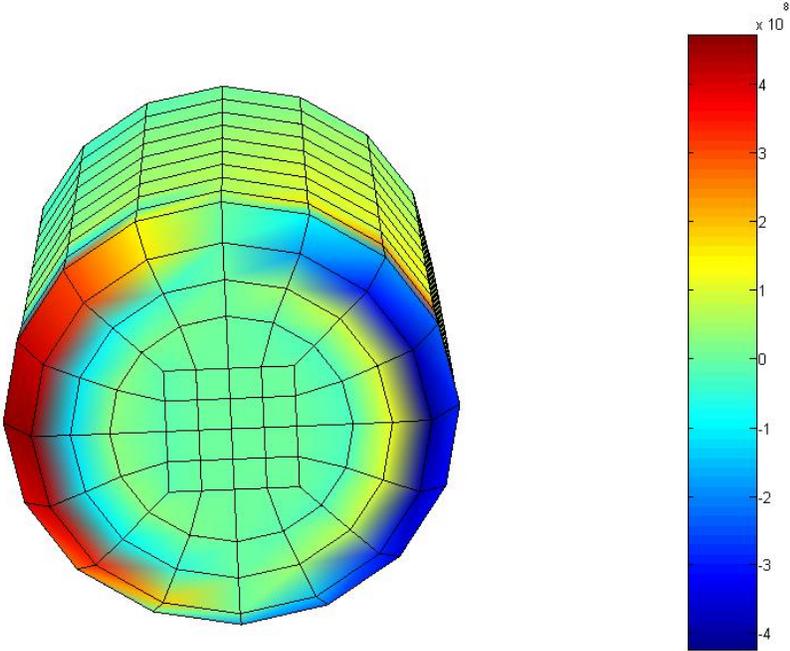


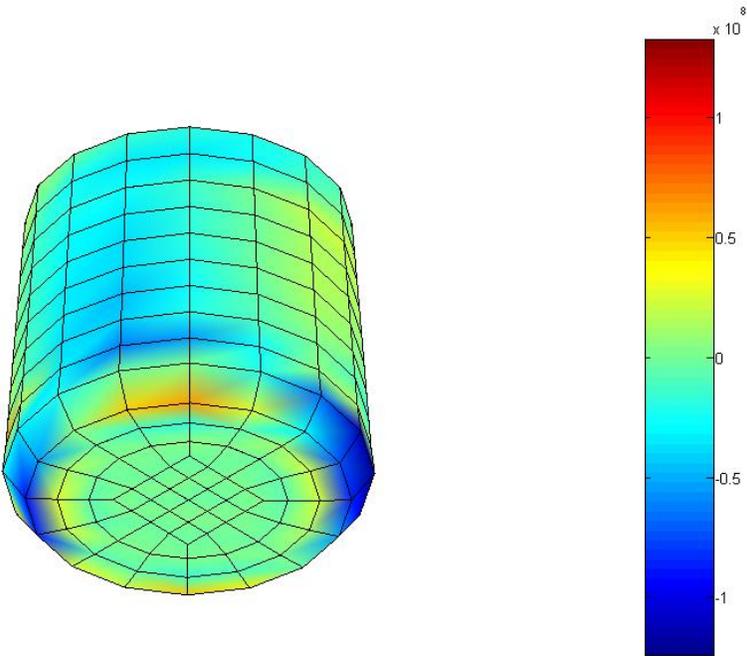
Figura 48. Desplazamientos totales



**Figura 49.** Esfuerzos normales



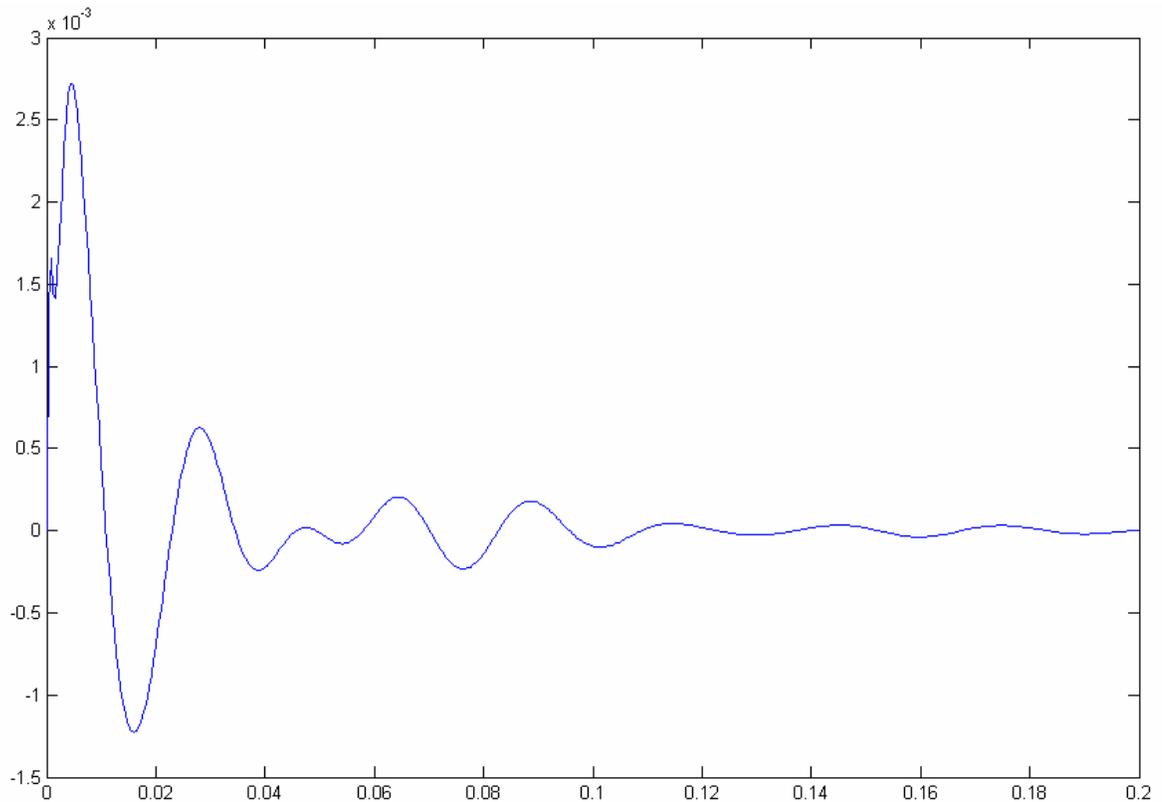
**Figura 50.** Esfuerzos cortantes



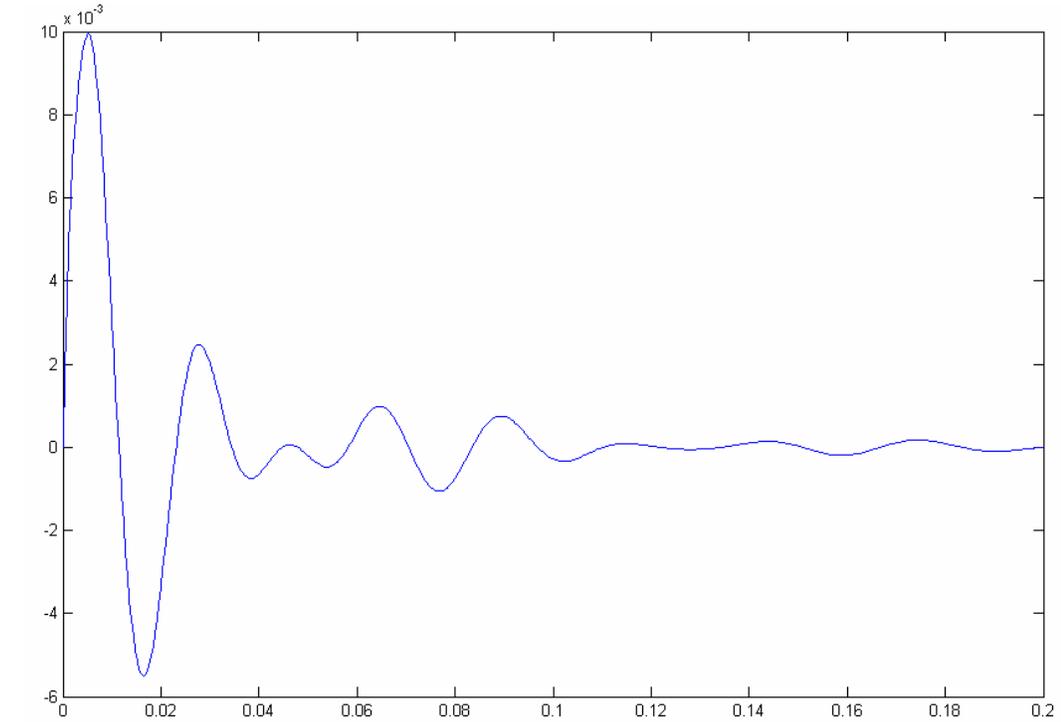
## 5.7 SIMULACION DINAMICA

Para la simulación dinámica se utilizará como modelo el mismo tanque de la sección 5.3, el cual se dejará caer de una altura de 1,2 metros. Se analizará el momento de impacto donde la velocidad en ese instante es de 4.8522 m/s. El tiempo a analizar después del impacto será alrededor de 0.2 segundo, tiempo suficiente para observar el comportamiento dinámico de la estructura. Se estarán utilizando los mismo coeficientes de *Rayleigh* calculados en la sección 4.32 y con diferencial de tiempo de  $4 \times 10^{-4}$ , espacio de tiempo que permite una resolución que refleja todo el comportamiento en el tiempo dado (0.2 seg.) Para este tanque se analizaran tres zonas; inferior, media y superior.

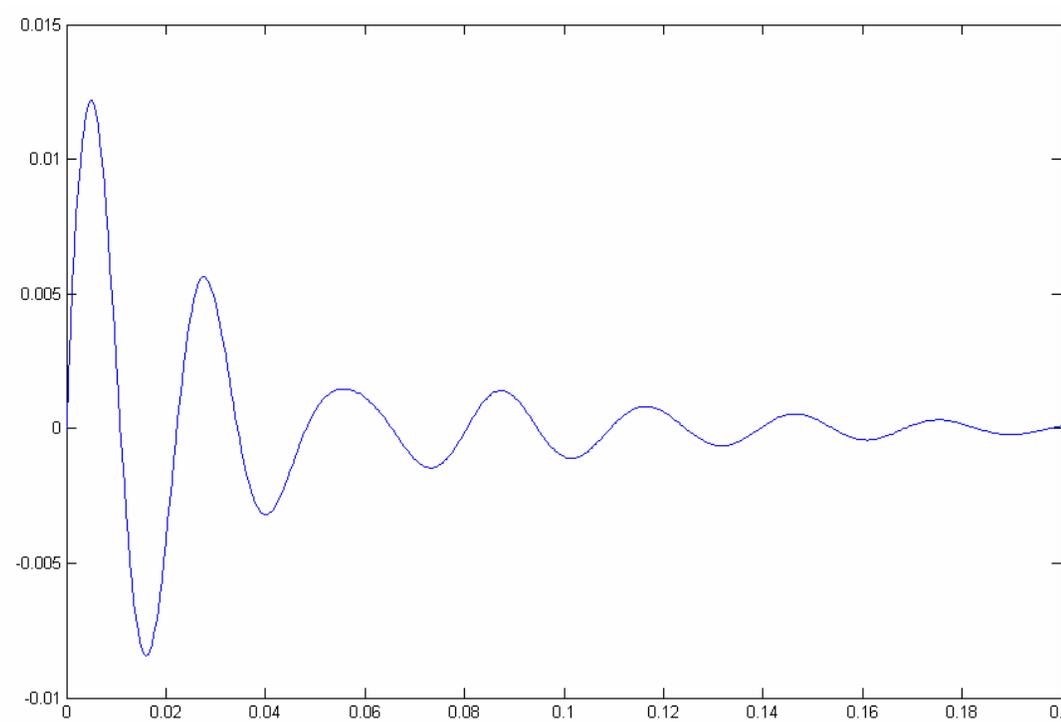
**Figura 51.** Desplazamiento vs tiempo en la zona inferior



**Figura 52.** Desplazamiento vs tiempo en la zona media



**Figura 53.** Desplazamiento vs tiempo en la zona superior



**5.4.1 Análisis de resultados.** En primera medida los desplazamiento en direcciones “x” y “y” son iguales gracias a la simetría de las cargas desarrolladas a lo largo del tanque, también se puede observar que en dirección “z” se desarrollaron desplazamientos, aunque esto fueron pequeños comparado con los de “x” y “y”.

Los mayores desplazamientos se dieron en la parte inferior del tanque, ya que en esta se localizan las presiones más altas. Por tanto, esta zona suele ser crítica, no olvidando que los desplazamientos en esta zona contribuyen que hallan desplazamiento en dirección z a lo largo de todo el tanque.

Los mayores desplazamientos dados en el tanque están alrededor de los 1.5 cm. lo cual es un desplazamiento alto y crítico, por esto la empresa Rotofibra Ltda. utiliza rigidizadores (anillos de refuerzos) a lo largo del tanque. En este caso para un tanque de 10.000 litros utilizan dos rigidizadores.

Se puede observar que los esfuerzos normales tienen un comportamiento similar en cuanto a simetría a los desplazamientos en dirección “x” y “y”

De los tres puntos analizados en la sección 5.4, se nota que el punto ubicado en la parte superior presenta mayores oscilaciones, ya que está más lejos del soporte del tanque. Los puntos ubicados en la zona inferior y media del tanque sigue vibrando después de los 0.2 segundos, pero sus oscilaciones son considerablemente pequeñas.

Observando las pocas oscilaciones en cada punto analizado podemos darnos cuenta que el material de fabricación del tanque es bastante rígido.

## 5.8 ESTUDIO COMPARATIVO

El propósito de esta sección es dar una idea del comportamiento de algunos tanques cuando se varía la configuración del laminado y geometría que fabrican en la actualidad Rotofibra. El estado de fuerzas al que estarán sometidos los diferentes tanques será similar al mostrado en la figura 46 pero de acuerdo a la capacidad de cada uno de ellos.

**Tabla 17.** Comparación de resultados

| Capacidad de Almacenamiento (Litros) | Dimensiones |       | Configuración del laminado | Tanque con tapa (Desp max) (mm) | Tanque sin tapa (Desp max) (mm) |
|--------------------------------------|-------------|-------|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
|                                      | D (m)       | L (m) |                            |                                 |                                 |
| 1000                                 | 0.9         | 1.57  | Mat                        | 3.00                            | 3.00                            |
|                                      |             |       | Mat+Mat                    | 2.10                            | 2.10                            |
|                                      |             |       | Mat+Roving+Mat             | 1.70                            | 1.70                            |
| 5000                                 | 1.7         | 2.2   | Mat+Mat                    | 15.00                           | 14.90                           |
|                                      |             |       | Mat+Roving+Mat             | 8.30                            | 8.20                            |
|                                      |             |       | Mat +Roving+Mat+Roving+Mat | 4.80                            | 4.70                            |
| 20.000                               | 2.8         | 3.0   | Mat+Mat                    | 52.60                           | 52.60                           |
|                                      |             |       | Mat+Roving+Mat             | 29.00                           | 29.00                           |
|                                      |             |       | Mat +Roving+Mat+Roving+Mat | 16.50                           | 16.70                           |

**5.5.1 Análisis de resultados.** En base a los resultados mostrados en la tabla 17 se puede notar claramente la disminución de desplazamiento a medida que se aumenta el número de capas del laminado. También se puede obtener variación en el desplazamiento si la dirección de las mantas de fibra en el laminado tuvieran diferentes ángulos de orientación, pero para este caso las mantas de fibra Mat 450 y Roving 850 tienen propiedades como módulos de elasticidad y Poisson iguales a nivel transversal y longitudinal lo que hace que se que el laminado se comporte igual pesar de variar el ángulo de una fibra con respecto a la otra, por lo cual asumimos ángulo de 0° en el momento de hacer los análisis, llegando a la conclusión que la manta de fibra Mat tiene un comportamiento isotrópico al igual

que la manta de fibra Roving siempre que esta se someta a fuerzas en direcciones ortogonales.

Comparando los datos de las dos últimas columnas de la tabla 17 se observan los resultados de un tanque de un mismo laminado que se someten al mismo estado de fuerza, pero uno con tapa en la parte superior y el otro no, y a pesar de esta diferencia en su estructura la respuesta de los tanque en la mayoría de los casos es igual y donde no, la diferencia es mínima. Esto nos deja ver que la tapa en un tanque de almacenamiento de líquido, de agua en este caso, no afecta de forma considerable el comportamiento del mismo cuando se somete a una carga estática. Sin embargo por lo general se le fabrican con tapa para evitar que el líquido almacenado se vea contaminado. Y al saber que la tapa no tiene mayor incidencia en el tanque, estas se diseñan a partir del criterio del diseñador el cual tendrá en cuenta otros factores, como es el caso de la estética y la corrosión, de hecho el que la tapa sea mas alta en el centro, impide la acumulación de agua o cualquier sustancia y así se evita que el material se descomponga con el transcurrir del tiempo.

La zonas mas afectadas serán las mas próximas al borde inferior donde reposa el tanque, de hecho es en este sitio donde se dan los máximos desplazamientos, los cuales se desarrollan en las dirección “ $x$ ” y “ $y$ ”. Este comportamiento se da de igual forma como se mostró en las figuras 47 a 50

## CONCLUSIONES

- ü A través de todo el estudio se pudo evidenciar que el método de elementos finitos sigue siendo una herramienta para la optimización de los diseños, tal como lo es para el caso de análisis de este trabajo, donde uno de los objetivos era conocer el comportamiento estructural de tanques fabricados en PRFV cuando se sometieran a cargas estáticas y dinámicas.
- ü Otros programas especializados en esta área utilizan elementos Shell para analizar este mismo tipo de problemas, sin embargo con este estudio se pudo demostrar que un elemento de placa cuadrilátero de cuatro nodos funciona bien en geometrías curvas, además que su formulación resulta más sencilla que la del elemento shell.
- ü Al analizar los resultados del comportamiento con diferentes laminados se noto con claridad que a medida que se aumentaba el espesor los desplazamientos eran menores, lo cual a primera vista deja entrever que lo mejor es aumentar el espesor del laminado para evitar grandes deformaciones, sin embargo en realidad esto resulta antieconómico ya que esto requiere más material. Por lo cual, se hace necesario una solución para no tener que aumentar la cantidad de material sin necesidad tampoco de recurrir a otro material que resultaría más costoso a mediano y largo plazo por su mantenimiento.
- ü El análisis estático en los tanques dejó claro que la zona crítica de estos se localiza en los bordes de la parte inferior, por lo cual requieren atención a la hora de fabricarlo y también al momento de la instalarlo, asegurándose que su base quede bien sujeta y además la superficie donde se instala debe estar

debidamente nivelada y libre de cualquier objetos para que no se creen cargas en el fondo del tanque, las cuales son bastante perjudiciales para este.

- ü Para controlar desplazamientos es oportuno hacer uso de rigidizadores a lo largo de los tanques. La ubicación de estos rigidizadores dependerá de la geometría y las condiciones a que este sometido el tanque. Hay que tener en cuenta que el uso de estos rigidizadores se debe hacer con una buena elección del espesor del laminado, teniendo cuidado de no saturar el tanque con estos refuerzos de tal forma que se este sobrediseñando o encareciendo le producto.
  
- ü El análisis del dinámico es de vital importancia, ya que este nos permite observar como responde un tanque cuando se somete a una carga de impacto. Con esta información se pueden determinar los puntos que mas sufren daño un instante después de recibir la carga de impacto, lo cual permite reevaluar el diseño de toda la estructura o de las partes mas afectadas para así evitar problemas de rotura.
  
- ü Los resultados de análisis dinámico dejan ver que la fibra de vidrio es un material compuesto bastante rígido comparado con otros materiales de uso común como el acero. El estudio de este comportamiento es de mucha utilidad para el diseñador ya que le permite cerciorarse que el laminado y la disposición de este sea la adecuada para conseguir determinado comportamiento en su diseño.

## RECOMENDACIONES

- ü Para la programación de elementos finitos es recomendable eliminar ciclos innecesarios así como variables excesivas o repetidas, ya que todo esto provoca en la solución de los problemas lleve mas tiempo de computo.
- ü Es aconsejable la utilización de un software que facilite la programación como lo es Matlab, el cual trae consigo gran cantidad de subrutinas que lo hacen fácil de trabajar.
- ü Una manera segura de depurar el algoritmo es: primero revisar que los conceptos estén bien aplicados, segundo comenzar a revisar del algoritmo más simple al más complejo.

## BIBLIOGRAFIAS

**BERTHELOT, Jean Marie.** Composite Materials Mechanical Behavior and structural Analysis. Springer, 1998. 645 p.

**CHANDRUPATLA, Tirupathi.** Introducción al Estudio de Elemento Finito en Ingeniería. 2 ed. Mexico: Pearson, 1999, 462 p.

**DEREK, Hull.** Materiales Compuestos. Barcelona: Reverté SA, 1987. 254 p.

**DONALDSON, Bruce K.** Análisis of Aircraft Structure an Introduction, New York: Mc-Graw Hill, 1993, 935 p

**ORTIZ BERROCAL, Luis.** Elasticidad. 3 ed. Madrid: Mac Graw Hill, 1998. 549 p.

**REDDY, J.N.** An Introduction to the Finite Element Method. 2 ed. Mc. Graw Hill, 1993, 672 p.

**UGURAL, Ansel C.** Stresses in Plates and Shells. 2 ed. New Jersey: Mac Graw Hill, 1981. 502 p.

**VINSON, J.R.** The Behavior of Structure Composed of Composite Materials. 1 ed. Boston: Martinus Nijhoff Publishers, 1987. 323 p.

**VOLTERRA, Enrico.** Advanced Strength of Materials, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1971, 522 p.

**Zienkiewics, O.** El Método de los Elementos Finitos, Mecánica de sólidos y fluidos  
Volumen 1. 4 ed. Barcelona: Mc-Graw Hill, 1989, 678 p.

**Zienkiewics, O.** El Método de los Elementos Finitos, Mecánica de sólidos y fluidos  
Volumen 2. 4 ed. Barcelona: Mc-Graw Hill, 1989 , 510 p.

## ANEXO A. TRANSFORMACION DEL DIFERENCIAL DE AREA (dA)

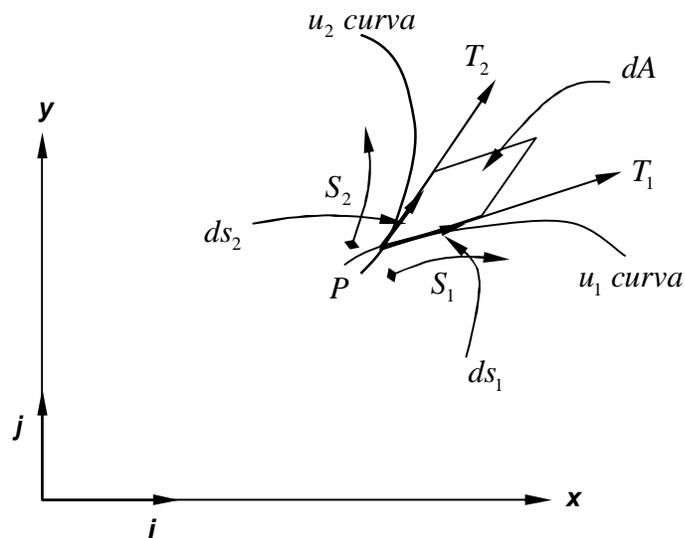
Se necesita expresar  $dx dy$  en las coordenadas locales. Por tanto, considere un mapeo de variables de "x", y "y" a  $u_1$  y  $u_2$ , dado como

|   |           |
|---|-----------|
| $x = x(u_1, u_2) \quad y = y(u_1, u_2)$ | <b>A1</b> |
|---|-----------|

Suponemos que las ecuaciones anteriores pueden intervenir para expresar  $u_1, u_2$  en términos de "x" y "y" que la correspondencia es única.

Si una partícula se mueve desde un punto  $P$ , de tal manera que  $u_2$  se mantiene constante y  $u_1$  varía, entonces se genera una curva en el plano. Llamamos a ésta la curva  $u_2$  es generada manteniendo  $u_1$  constante y permitiendo que  $u_2$  varíe. Sea  $r$  el vector de posición de un punto  $P$ ,

**Figura A1.** Vector posición en un punto P



|               |           |
|---------------|-----------|
| $r = xi + yj$ | <b>A2</b> |
|---------------|-----------|

donde  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  son vectores unitarios a lo largo de  $x$ ,  $y$  respectivamente. Considere los vectores

|   |           |
|---|-----------|
| $T_1 = \frac{\partial r}{\partial u_1} \quad T_2 = \frac{\partial r}{\partial u_2}$ | <b>A3</b> |
|---|-----------|

o, en vista de que existe la ecuación A2,

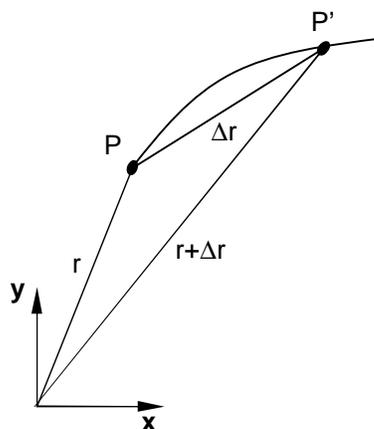
|   |           |
|---|-----------|
| $T_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \mathbf{j} \quad T_2 = \frac{\partial x}{\partial u_2} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \mathbf{j}$ | <b>A4</b> |
|---|-----------|

Podemos demostrar que  $T_1$  es un vector tangente a la curva  $u_1$  y que  $T_2$  es tangente a la curva  $u_2$  (figura A1). Para analizar estos usamos la definición

|   |           |
|---|-----------|
| $\frac{\partial r}{\partial u_1} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta u_1}$ | <b>A5</b> |
|---|-----------|

donde  $\Delta r = r(u_1 + \Delta u_1) - r(u_1)$ . En el límite, la cuerda  $\Delta r$  llega a ser la tangente a la curva  $u_1$  (figura A2). Sin embargo,  $\partial r / \partial u_1$  ( $\partial r / \partial u_2$ ) no es un vector unitario. Para determinar su magnitud, escribimos

**Figura A2.** Vector tangente.



|   |           |
|---|-----------|
| $\frac{\partial r}{\partial u_1} = \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{ds_1}{du_1}$ | <b>A6</b> |
|---|-----------|

donde  $s_1$  es la longitud del arco a lo largo de la curva  $u_1$  y  $ds_1$  es el diferencial de la longitud de arco. La magnitud del vector

|   |  |
|---|--|
| $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_1} = \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s_1}$ |  |
|---|--|

es la razón límite de la cuerda a la longitud del arco que es igual a la unidad. Concluyendo que la magnitud del vector  $\partial \mathbf{r} / \partial u_1$  es  $ds_1 / du_1$ . Tenemos

|   |           |
|---|-----------|
| $\mathbf{T}_1 = \left( \frac{ds_1}{du_1} \right) \mathbf{t}_1 \quad \mathbf{T}_2 = \left( \frac{ds_2}{du_2} \right) \mathbf{t}_2$ | <b>A7</b> |
|---|-----------|

donde  $\mathbf{t}_1$  y  $\mathbf{t}_2$  son vectores unitarios tangentes a las curvas  $u_1$  y  $u_2$ , respectivamente. Usando la ecuación A7. tenemos la representación de los vectores  $\mathbf{ds}_1$  y  $\mathbf{ds}_2$  cuyas longitudes son  $ds_1$  y  $ds_2$

|   |           |
|---|-----------|
| $\mathbf{ds}_1 = \mathbf{t}_1 ds_1 = \mathbf{T}_1 du_1$ $\mathbf{ds}_2 = \mathbf{t}_2 ds_2 = \mathbf{T}_2 du_2$ | <b>A8</b> |
|---|-----------|

El diferencial de área  $\mathbf{dA}$  es un vector con magnitud  $dA$  y dirección normal al área elemental, que en este caso es  $\mathbf{k}$ . El vector  $\mathbf{dA}$ , una vez observadas las ecuaciones A4 y A8 está dado por la regla del determinante

|   |  |
|---|--|
| $\mathbf{dA} = \mathbf{ds}_1 \times \mathbf{ds}_2 = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 du_1 du_2$ |  |
|---|--|

|   |  |
|---|--|
| $= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & 0 \end{vmatrix} du_1 du_2$ |  |
|---|--|

|   |  |
|---|--|
| $= \left( \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial y}{\partial u_2} - \frac{\partial x}{\partial u_2} \frac{\partial y}{\partial u_1} \right) du_1 du_2 \mathbf{k}$ |  |
|---|--|

Marcamos la matriz jacobiana mediante

|  |           |
|--|-----------|
| $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{bmatrix}$ | <b>A9</b> |
|--|-----------|

La magnitud puede escribirse ahora como

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| $dA = \det J \, du_1 \, du_2$ | <b>A10</b> |
|-------------------------------|------------|

que es el resultado deseado. Note que si se trabaja con coordenadas  $x, h$  en vez de  $u_1$  y  $u_2$ , entonces

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| $dA = \det J \, dx \, dh$ | <b>A11</b> |
|---------------------------|------------|

## ANEXO B. SOLUCION DE NAVIER PARA UNA PLACA RECTANGULAR SOPORTADA SIMPLEMENTE Y CARGADA UNIFORMEMENTE

Considérese una placa rectangular de lados  $a$  y  $b$ , simplemente soportada en todo sus bordes y cargada uniformemente  $p(x,y)$ . En general, la solución del problema de flexión es empleando las series de *Fourier* para carga y deflexión

|  |           |
|--|-----------|
| $p(x, y) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$ | <b>B1</b> |
|--|-----------|

|  |           |
|--|-----------|
| $w(x, y) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$ | <b>B2</b> |
|--|-----------|

donde  $p_{mn}$  y  $a_{mn}$  representan los coeficientes a determinar. La deflexión debe satisfacer la ecuación diferencial (2.20) con las siguientes condiciones de contorno

|   |  |
|---|--|
| $w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, x = a)$ $w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y = 0, y = b)$ |  |
|---|--|

La solución correspondiente a la carga  $p(x,y)$  requiere la determinación de los coeficientes de  $p_{mn}$  y  $a_{mn}$ .

Para determinar el coeficiente de *Fourier*, cada lado de la ecuación B1 es multiplicado por

|   |           |
|---|-----------|
| $\operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dx dy$ | <b>B3</b> |
|---|-----------|

e integrando entre los límites de 0,a y 0,b:

|  |  |
|--|--|
| $\int_0^b \int_0^a p(x, y) \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dx dy =$ $\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} p_{mn} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy$ |  |
|--|--|

Por integración directa esta es:

|   |           |
|---|-----------|
| $\int_0^a \sin \frac{mpx}{a} \sin \frac{m'px}{a} dx = \begin{cases} 0 & (m \neq m') \\ a/2 & (m = m') \end{cases}$ $\int_0^a \sin \frac{npy}{b} \sin \frac{n'py}{b} dy = \begin{cases} 0 & (n \neq n') \\ b/2 & (n = n') \end{cases}$ | <b>B4</b> |
|---|-----------|

Los coeficientes de la doble expansión de *Fourier* son:

|  |           |
|--|-----------|
| $\int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{mpx}{a} \sin \frac{m'px}{a} dx dy$ | <b>B5</b> |
|--|-----------|

La evaluación de  $a_{mn}$  en B2 requiere la sustitución de las ecuaciones B1 y B2 en 2.20, dando como resultado:

|   |  |
|---|--|
| $\sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} \left\{ a_{mn} \left[ \left( \frac{mp}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{mp}{a} \right)^2 \left( \frac{np}{b} \right)^2 + \left( \frac{np}{b} \right)^4 \right] - \frac{P_{mn}}{D} \right\} \sin \frac{mpx}{a} \sin \frac{npy}{b} = 0$ |  |
|---|--|

Esta ecuación debe aplicarse para todas las  $x$  y  $y$ . Por tanto,

|  |  |
|--|--|
| $a_{mn} p^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{P_{mn}}{D} = 0$ |  |
|--|--|

donde,

|  |           |
|--|-----------|
| $a_{mn} = \frac{1}{p^4 D} \frac{P_{mn}}{\left[ (m/a)^2 + (n/b)^2 \right]^2}$ | <b>B6</b> |
|--|-----------|

Sustituyendo la ecuación B6, se encuentra que la deflexión en la placa es:

|   |           |
|---|-----------|
| $w = \frac{1}{p^4 D} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} \frac{P_{mn}}{\left[ (m/a)^2 + (n/b)^2 \right]^2} \sin \frac{mpx}{a} \sin \frac{npy}{b}$ | <b>B7</b> |
|---|-----------|

en la cual  $p_{mn}$  esta dado pro la ecuación B5. La ecuación B7 es una solución valida para placas rectangulares son soporte simples sometidas a flexión bajo varias clases de cargas.

Cuando una placa rectangular esta sujeta a una carga uniformemente distribuida  $p(x,y)=p_0$ , el resultado anterior se simplifica considerablemente. Ahora la ecuación B5 después de la integración es

|   |  |
|---|--|
| $p_{mn} = \frac{4p_0}{p^2 mn} (1 - \cos mp)(1 - \cos np) = \frac{4p_0}{p^2 mn} [1 - (1)^m][1 - (-1)^n]$ |  |
|---|--|

o

|   |  |
|---|--|
| $p_{mn} = \frac{4p_0}{p^2 mn} \quad (m, n = 1, 3, \dots)$ |  |
|---|--|

Se observa que  $p_{mn}=0$  para incluso valores de  $m$  y  $n$ , las integrales asumen solo los valores impares. Introduciendo  $p_{mn}$  en B7

|  |           |
|--|-----------|
| $w = \frac{16p_0}{p^6 D} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} \frac{\text{sen}(mpx/a) \text{sen}(npy/b)}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad (m, n = 1, 3, \dots)$ | <b>B8</b> |
|--|-----------|

Claramente, para cargas uniformemente en placas debe deflectarse en forma simétrica. La máxima deflexión ocurre en el centro de la placa ( $x=a/2$ ,  $y=b/2$ ) entonces:

|   |           |
|---|-----------|
| $w_{\max} = \frac{16p_0}{p^6 D} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} \frac{(-1)^{[(m+n)/2]-1}}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}$ | <b>B9</b> |
|---|-----------|

en la ecuación B8  $\text{sen}(mp/2)$  y  $\text{sen}(np/2)$  son reemplazados por  $(-1)^{(m-1)/2}$  y  $(-1)^{(n-1)/2}$  respectivamente.

**ANEXO C. SOLUCION DE UNA PLACA LAMINADA SOPORTADAS  
SIMPLEMENTE Y SUJETA A UNA CARGA UNIFORME**

Considérese una placa rectangular sujeta a una carga distribuida  $p=p(x,y)$ , en el caso de una placa ortotrópica la ecuación es

|   |           |
|---|-----------|
| $D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$ | <b>C1</b> |
|---|-----------|

En el caso general de carga transversal puede expandido como una doble serie de senos de *Fourier*:

|  |           |
|--|-----------|
| $p(x, y) = \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$ | <b>C2</b> |
|--|-----------|

donde el coeficiente  $q_{mn}$  esta dado por:

|   |           |
|---|-----------|
| $p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy$ | <b>C3</b> |
|---|-----------|

La solución del problema de flexión puede ser investigado expresando los desplazamientos en forma una doble serie de *Fourier* :

|  |           |
|--|-----------|
| $w(x, y) = \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$ | <b>C4</b> |
|--|-----------|

La expresión del coeficiente  $a_{mn}$  es obtenida sustituyendo la ecuación C4 en la ecuación C1 y escribiendo  $p(x,y)$  igual a la ecuación C2, es obtiene

|  |           |
|--|-----------|
| $a_{mn} = \frac{p_{mn} / p^4}{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4}$ | <b>C5</b> |
|--|-----------|

La deflexión en un punto (x,y) es:

|   |           |
|---|-----------|
| $w(x, y) = \frac{a^4}{p^4} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} \frac{a_{mn}}{D_{mn}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$ | <b>C6</b> |
|---|-----------|

donde

|   |           |
|---|-----------|
| $D_{mn} = D_{11}m^4 + 2(D_{12} + D_{66})(mnR)^2 + D_{22}(nR)^4$ | <b>C7</b> |
|---|-----------|

y  $R = a/b$ .

Los esfuerzos en el plano son deducidos:

|  |           |
|--|-----------|
| $s_{xx}^k = \left(\frac{a}{p}\right)^2 z \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} \frac{P_{mn}}{D_{mn}} (E_{11}^k m^2 + E_{12}^k n^2 R^2) \sin \frac{mpx}{a} \sin \frac{np y}{b}$ | <b>C8</b> |
|--|-----------|

|  |           |
|--|-----------|
| $s_{yy}^k = \left(\frac{a}{p}\right)^2 z \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} \frac{P_{mn}}{D_{mn}} (E_{12}^k m^2 + E_{22}^k n^2 R^2) \sin \frac{mpx}{a} \sin \frac{np y}{b}$ | <b>C9</b> |
|--|-----------|

|  |            |
|--|------------|
| $s_{xy}^k = -2 \left(\frac{a}{p}\right)^2 z R E_{66}^k \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} m n \frac{P_{mn}}{D_{mn}} \cos \frac{mpx}{a} \cos \frac{np y}{b}$ | <b>C10</b> |
|--|------------|

Las constante de integración son determinadas considerando la continuidad de los esfuerzos cortantes entre las capas y estas son desaparecen en las caras inferior y superior.

En el caso de una carga uniforme, donde  $p(x,y)=const=p_0$  la ecuación C3 es:

|   |            |
|---|------------|
| $p_{mn} = \frac{16p_0}{p^2 mn} \quad \text{si } m \text{ y } n \text{ son impares}$ | <b>C11</b> |
| $p_{mn} = 0 \quad \text{si } m \text{ y } n \text{ son pares}$                      |            |

Esas dos expresiones puede ser reagrupadas en la siguiente forma:

|   |            |
|---|------------|
| $p_{2m-1,2n-1} = \frac{16p_0}{p^2} \frac{1}{(2m-1)(2n-1)}, \quad m, n = 1, 2, \mathbf{K}$ | <b>C12</b> |
|---|------------|

La deflexión C6 en el punto (x,y) es entonces:

|  |            |
|--|------------|
| $w(x, y) = \frac{16p_0 a^4}{p^4} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} \frac{\sin(2m-1) \frac{px}{a} \sin(2n-1) \frac{py}{b}}{(2m-1)(2n-1) D_{2m-1,2n-1}}$ | <b>C13</b> |
|--|------------|

o

|  |            |
|--|------------|
| $w(x, y) = \frac{16p_0 a^4}{p^4} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} c_{mn} \sin(2m-1) \frac{px}{a} \sin(2n-1) \frac{py}{b}$ | <b>C14</b> |
|--|------------|

con

|  |            |
|--|------------|
| $c_{mn} = \frac{1}{(2m-1)(2n-1)D_{2m-1,2n-1}}$ | <b>C15</b> |
|--|------------|

Los esfuerzos en el plano en la capa  $k$  son:

|  |            |
|--|------------|
| $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_{xy} \end{bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$ | <b>C16</b> |
|--|------------|

donde

|   |            |
|---|------------|
| $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{16p_0 a^2}{p^4} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} (2m-1)^2 c_{mn} \sin(2m-1) \frac{px}{a} \sin(2n-1) \frac{py}{b}$ $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{16p_0 a^2 R^2}{p^4} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} (2n-1)^2 c_{mn} \sin(2m-1) \frac{px}{a} \sin(2n-1) \frac{py}{b}$ $-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} =$ $-\frac{32p_0 a^2 R}{p^4} \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} (2m-1)(2n-1) c_{mn} \sin(2m-1) \frac{px}{a} \sin(2n-1) \frac{py}{b}$ | <b>C17</b> |
|---|------------|

La deflexión es máxima en el centro de la placa,  $x=a/2$ ,  $y=b/2$ . los numeradores en la ecuación C13 son entonces:

|  |  |
|--|--|
| $\sin(2m-1) \frac{p}{2} \sin(2n-1) \frac{p}{2} = (-1)^{m+n-2}$ |  |
|--|--|

y la máxima deflexión es:

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| $w_{\max} = \frac{16p_0 a^4}{p^6} a$ | <b>C18</b> |
|--------------------------------------|------------|

donde

|  |            |
|--|------------|
| $a = \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} a_{mn}$ $a_{mn} = (-1)^{m+n-2} c_{mn} = \frac{(-1)^{m+n-2}}{(2m-1)(2n-1)D_{2m+1,2n+1}}$ | <b>C19</b> |
|--|------------|

De la ecuación C16 los esfuerzos en el centro de la placa son expresados como:

|   |            |
|---|------------|
| $\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_{xy} \end{bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}_k \frac{16p_0 a^2}{p^4} \begin{bmatrix} b \\ R^2 g \\ 0 \end{bmatrix}$ | <b>C20</b> |
|---|------------|

donde

|   |            |
|---|------------|
| $b = \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} b_{mn} \quad b_{mn} = (2m-1)^2 a_{mn}$ | <b>C21</b> |
|---|------------|

|   |            |
|---|------------|
| $g = \sum_1^{m=\infty} \sum_1^{n=\infty} g_{mn} \quad g_{mn} = (2n-1)^2 a_{mn}$ | <b>C22</b> |
|---|------------|

con

|  |            |
|--|------------|
| $s_{xx}^k = \frac{16p_0 a^2}{p^4} (E_{11}^k b + E_{12}^k R^2 g) z$ $s_{yy}^k = \frac{16p_0 a^2}{p^4} (E_{12}^k b + E_{22}^k R^2 g) z$ $s_{xy}^k = 0$ | <b>C23</b> |
|--|------------|

o también

|  |            |
|--|------------|
| $s_{xx}^k = A_{xx}^k z$ $s_{yy}^k = A_{yy}^k z$ $s_{xy}^k = 0$ | <b>C24</b> |
|--|------------|

y

|   |            |
|---|------------|
| $A_{xx}^k = \frac{16p_0 a^2}{p^4} (E_{11}^k b + E_{12}^k R^2 g)$ $A_{yy}^k = \frac{16p_0 a^2}{p^4} (E_{12}^k b + E_{22}^k R^2 g)$ | <b>C25</b> |
|---|------------|

## ANEXO D. CODIGO DE PROGRAMACION EN MATLAB

```

function [Bb] = bend(eo, no, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, J, J11, J12, J21, J22);

%Calculo de la transformacion
invJ=inv(J);
Jo=[J11^2, J12^2, 2*J11*J12; J21^2, J22^2, 2*J21*J22; J11*J21, J12*J22,
J21*J12+J11*J22];
JJ=inv(Jo);
JM=[0 0; 0 0; 0.25*(x1-x2)+0.25*(x3-x4), 0.25*(y1-y2)+0.25*(y3-y4)];
Bb=zeros(3,16);
ee=[-1 1 1 -1];, nm=[-1 -1 1 1];
for ii = 1 : 4
    ei=ee(ii);, ni=nm(ii);
    %Segundas derivadas dN/de2
    ddNie = [1/8*(eo*ei - 2)*(no+ni)^2*(no*ni -
2)+1/4*(eo+ei)*ei*(no+ni)^2*(no*ni - 2),...
-1/8*ei*(eo*ei - 1)*(no+ni)^2*(no*ni - 2) -
1/4*ei^2*(eo+ei)*(no+ni)^2*(no*ni - 2),...
-1/8*(eo*ei - 2)*ni*(no+ni)^2*(no*ni - 1) -
1/4*(eo+ei)*ei*ni*(no+ni)^2*(no*ni - 1),...
1/8*ei*(eo*ei - 1)*ni*(no+ni)^2*(no*ni -
1)+1/4*ei^2*(eo+ei)*ni*(no+ni)^2*(no*ni - 1)];
    %Segundas derivadas dN/dn2
    ddNin = [1/8*(eo+ei)^2*(eo*ei - 2)*(no*ni - 2)+1/4*(eo+ei)^2*(eo*ei -
2)*(no+ni)*ni,...
-1/8*ei*(eo+ei)^2*(eo*ei - 1)*(no*ni - 2) -
1/4*ei*(eo+ei)^2*(eo*ei - 1)*(no+ni)*ni,...
-1/8*(eo+ei)^2*(eo*ei - 2)*ni*(no*ni - 1) -
1/4*(eo+ei)^2*(eo*ei - 2)*ni^2*(no+ni),...
1/8*ei*(eo+ei)^2*(eo*ei - 1)*ni*(no*ni -
1)+1/4*ei*(eo+ei)^2*(eo*ei - 1)*ni^2*(no+ni)];
    %Segundas derivadas dN/dnde
    ddNien = [1/4*(eo+ei)*(eo*ei - 2)*(no+ni)*(no*ni -
2)+1/8*(eo+ei)*(eo*ei - 2)*(no+ni)^2*ni+1/8*(eo+ei)^2*ei*(no+ni)*(no*ni -
2)+1/16*(eo+ei)^2*ei*(no+ni)^2*ni,...
-1/4*ei*(eo+ei)*(eo*ei - 1)*(no+ni)*(no*ni - 2) -
1/8*ei*(eo+ei)*(eo*ei - 1)*(no+ni)^2*ni - 1/8*ei^2*(eo+ei)^2*(no+ni)*(no*ni -
2) - 1/16*ei^2*(eo+ei)^2*(no+ni)^2*ni,...
-1/4*(eo+ei)*(eo*ei - 2)*ni*(no+ni)*(no*ni - 1) -
1/8*(eo+ei)*(eo*ei - 2)*ni^2*(no+ni)^2 - 1/8*(eo+ei)^2*ei*ni*(no+ni)*(no*ni -
1) - 1/16*(eo+ei)^2*ei*ni^2*(no+ni)^2,...
1/4*ei*(eo+ei)*(eo*ei - 1)*ni*(no+ni)*(no*ni -
1)+1/8*ei*(eo+ei)*(eo*ei -
1)*ni^2*(no+ni)^2+1/8*ei^2*(eo+ei)^2*ni*(no+ni)*(no*ni -
1)+1/16*ei^2*(eo+ei)^2*ni^2*(no+ni)^2];
    %Primera derivadas dNi/de
    dNie = [1/8*(eo+ei)*(eo*ei - 2)*(no+ni)^2*(no*ni -
2)+1/16*(eo+ei)^2*ei*(no+ni)^2*(no*ni - 2),...
-1/8*ei*(eo+ei)*(eo*ei - 1)*(no+ni)^2*(no*ni - 2) -
1/16*ei^2*(eo+ei)^2*(no+ni)^2*(no*ni - 2),...
-1/8*(eo+ei)*(eo*ei - 2)*ni*(no+ni)^2*(no*ni - 1) -
1/16*(eo+ei)^2*ei*ni*(no+ni)^2*(no*ni - 1),...
1/8*ei*(eo+ei)*(eo*ei - 1)*ni*(no+ni)^2*(no*ni -
1)+1/16*ei^2*(eo+ei)^2*ni*(no+ni)^2*(no*ni - 1)];
    %Primera derivadas dNi/dn

```

```

    dNi n = [ 1/8*(eo+ei)^2*(eo*ei-2)*(no+ni)*(no*ni-
2)+1/16*(eo+ei)^2*(eo*ei-2)*ni*(no+ni)^2,...
-1/8*ei*(eo+ei)^2*(eo*ei-1)*(no+ni)*(no*ni-2)-
1/16*ei*(eo+ei)^2*(eo*ei-1)*ni*(no+ni)^2,...
-1/8*(eo+ei)^2*(eo*ei-2)*ni*(no+ni)*(no*ni-1)-
1/16*(eo+ei)^2*(eo*ei-2)*ni^2*(no+ni)^2,...
1/8*ei*(eo+ei)^2*(eo*ei-1)*ni*(no+ni)*(no*ni-
1)+1/16*ei*(eo+ei)^2*(eo*ei-1)*ni^2*(no+ni)^2];
%Calculo de las primeras derivadas de Ni respecto a x, y
dNi_1=invJ*[dNi e(1); dNi n(1)];, dNi_2=invJ*[dNi e(2); dNi n(2)];
dNi_3=invJ*[dNi e(3); dNi n(3)];, dNi_4=invJ*[dNi e(4); dNi n(4)];
%Calculo de las segundas derivadas de Ni respecto a e y n
ddNi 2=[ ddNi e; ddNi n; ddNi n];
%Calculo de la matrix Bb
Bb(:, i i)=JJ*(ddNi 2(:, 1)-(JM*dNi_1));
Bb(:, i i+4)=JJ*(ddNi 2(:, 2)-(JM*dNi_2));
Bb(:, i i+8)=JJ*(ddNi 2(:, 3)-(JM*dNi_3));
Bb(:, i i+12)=JJ*(ddNi 2(:, 4)-(JM*dNi_4));
end

```

```

function [D] = elas(E1x, E2x, v1x, v2x, Gx, tx, anl)

```

```

DL=zeros(6);, E=zeros(6);, D=DL;
nc=length(E1x);
if length(tx)==2 % No laminado
for k=1:nc
al=anl(k);
E1=E1x(k);, E2=E2x(k);, v1=v1x(k);, v2=v2x(k);, G=Gx(k);, t=tx;
D11=(E1/(1-v1*v2));
D12=(v1*E2/(1-v1*v2));
D22=(E2/(1-v1*v2));
D66=G;
Dx=[D11, D12, 0; D12, D22, 0; 0, 0, D66];
%Calculo de la matriz elastica ortotropica
D11o=D11*(cos(al))^4+2*(D12+2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D22*(sin(al))^4;
D12o=(D11+D22-4*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D12*((sin(al))^4+(cos(al))^4);
D13o=(D11-D12-2*D66)*(sin(al))*(cos(al))^3+(D12-
D22+2*D66)*(sin(al))^3*(cos(al));
D22o=D11*(sin(al))^4+2*(D12+2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D22*(cos(al))^4;
D23o=(D11-D12-2*D66)*(sin(al))^3*(cos(al))+(D12-
D22+2*D66)*(sin(al))*(cos(al))^3;
D33o=(D11+D22-2*D12-
2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D66*((sin(al))^4+(cos(al))^4);
Do=[D11o, D12o, D13o; D12o, D22o, D23o; D13o, D23o, D33o];
Ad=Do*(t(k)-t(k+1));, Bd=zeros(3);, Dd=(1/12)*Do*((t(k))-
(t(k+1)))^3;
DL=[Ad Bd; Bd Dd];
D=D+DL;
end
else
for k=1:nc % laminado
al=anl(k);
E1=E1x(k);, E2=E2x(k);, v1=v1x(k);, v2=v2x(k);, G=Gx(k);, t=tx;
D11=(E1/(1-v1*v2));
D12=(v1*E2/(1-v1*v2));
D22=(E2/(1-v1*v2));

```

```

D66=G;
Dx=[ D11, D12, 0; D12, D22, 0; 0, 0, D66];
%Calculo de la matriz elastica ortotropica

D11o=D11*(cos(al))^4+2*(D12+2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D22*(sin(al))^4;
D12o=(D11+D22-4*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D12*((sin(al))^4+(cos(al))^4);
D13o=(D11-D12-2*D66)*(sin(al))*(cos(al))^3+(D12-D22+2*D66)*(sin(al))^3*(cos(al));

D22o=D11*(sin(al))^4+2*(D12+2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D22*(cos(al))^4;
D23o=(D11-D12-2*D66)*(sin(al))^3*(cos(al))+(D12-D22+2*D66)*(sin(al))*(cos(al))^3;
D33o=(D11+D22-2*D12-2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D66*((sin(al))^4+(cos(al))^4);
Do=[ D11o, D12o, D13o; D12o, D22o, D23o; D13o, D23o, D33o];
Ad=Do*(t(k)-t(k+1));, Bd=0.5*Do*((t(k))^2-(t(k+1))^2);,
Dd=(1/3)*Do*((t(k))^3-(t(k+1))^3);
DL=[Ad Bd; Bd Dd];
D=D+DL;

end
end

```

```
function [E, z] = elas_E(E1x, E2x, v1x, v2x, Gx, tx, anl)
```

```

k=1; %Capa 1
z = tx(k); %Distancia del plano medio a una capa
DL=zeros(6);, E=zeros(6);, D=DL;
al=anl(k);
E1=E1x(k);, E2=E2x(k);, v1=v1x(k);, v2=v2x(k);, G=Gx(k);, t=tx;
D11=(E1/(1-v1*v2));
D12=(v1*E2/(1-v1*v2));
D22=(E2/(1-v1*v2));
D66=G;
Dx=[ D11, D12, 0; D12, D22, 0; 0, 0, D66];
%Calculo de la matriz elastica ortotropica
D11o=D11*(cos(al))^4+2*(D12+2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D22*(sin(al))^4;
D12o=(D11+D22-4*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D12*((sin(al))^4+(cos(al))^4);
D13o=(D11-D12-2*D66)*(sin(al))*(cos(al))^3+(D12-D22+2*D66)*(sin(al))^3*(cos(al));
D22o=D11*(sin(al))^4+2*(D12+2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D22*(cos(al))^4;
D23o=(D11-D12-2*D66)*(sin(al))^3*(cos(al))+(D12-D22+2*D66)*(sin(al))*(cos(al))^3;
D33o=(D11+D22-2*D12-2*D66)*(sin(al))^2*(cos(al))^2+D66*((sin(al))^4+(cos(al))^4);
Do=[ D11o, D12o, D13o; D12o, D22o, D23o; D13o, D23o, D33o];
Ad=Do*(t(k)-t(k+1));, Bd=zeros(3);, Dd=(1/12)*Do*((t(k))-t(k+1))^3;
E=[Do Bd; Bd Do];

```

```
function [Ke] = Kelem(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1, z2, z3, z4, E1x, E2x, v1x, v2x, tx, Gx, anl)
```

```

Ke = zeros(24);, B = zeros(6, 24);
T = trans_matrix(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1, z2, z3, z4);

```

```

xy_2 = trans_coord(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1, z2,
z3, z4); %Transformacion de coordenadas
x1=xy_2(1, 1);, x2=xy_2(1, 2);, x3=xy_2(1, 3);, x4=xy_2(1, 4);
y1=xy_2(2, 1);, y2=xy_2(2, 2);, y3=xy_2(2, 3);, y4=xy_2(2, 4);
[D] = elas(E1x, E2x, v1x, v2x, Gx, tx, anl);
%Matriz de elasticidad
eg = [-0.5773502692; 0.5773502692];
ng = [-0.5773502692; 0.5773502692];
for i = 1:2
    for j = 1:2
        eo = eg(i);
        no = ng(j);
        J11 = -0.25*(1-no)*x1+0.25*(1-no)*x2+0.25*(1+no)*x3-
0.25*(1+no)*x4; %dx/de
        J12 = -0.25*(1-no)*y1+0.25*(1-no)*y2+0.25*(1+no)*y3-
0.25*(1+no)*y4; %dy/de
        J21 = -0.25*(1-eo)*x1-0.25*(1+eo)*x2+0.25*(1+eo)*x3+0.25*(1-
eo)*x4; %dx/dn
        J22 = -0.25*(1-eo)*y1-0.25*(1+eo)*y2+0.25*(1+eo)*y3+0.25*(1-
eo)*y4; %dy/dn
        J = [J11 J12; J21 J22];
        Bp = plane(eo, no, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, J);
        Bb = bend(eo, no,
x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, J, J11, J12, J21, J22);
        B(1:3, 1:8) = Bp;
        B(4:6, 9:24) = Bb;
        Ke = Ke+B'*D*B*det(J);
    end
end
Ke=T'*Ke*T;

```

```

function [M]=mass(xyz_nodos, conx_data, NNT, Nel, tx, d, conex)

load Uknow
M=zeros(6*NNT);
t=2*tx(1); % Espesor total de la lamina
eg=[-0.5773502692; 0.5773502692];
ng=[-0.5773502692; 0.5773502692];
for h=1: Nel
    x1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 2);, y1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 3);,
z1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 4);
    x2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 2);, y2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 3);,
z2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 4);
    x3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 2);, y3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 3);,
z3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 4);
    x4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 2);, y4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 3);,
z4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 4);
    T = trans_matrix(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1,
z2, z3, z4); % Transformacion de matrices
    xy_2 = trans_coord(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4,
z1, z2, z3, z4); %Transformacion de coordenadas
    x1=xy_2(1, 1);, x2=xy_2(1, 2);, x3=xy_2(1, 3);, x4=xy_2(1, 4);
    y1=xy_2(2, 1);, y2=xy_2(2, 2);, y3=xy_2(2, 3);, y4=xy_2(2, 4);
    Me = zeros(24);
    for i=1:2
        for j=1:2
            eo = eg(i);
            no = ng(j);
            Mp = massp(x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, t, d, eo,
no);

```

```

no);
Mb = massb(x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, t, d, eo,
Meo=zeros(24);
Meo(1: 8, 1: 8)=Mp;
Meo(9: 24, 9: 24)=Mb;
Me = Me + Meo;
end
end
Me=T' *Me*T;
for m=1: 24
for n=1: 24
M(conex(h, m), conex(h, n))=M(conex(h, m), conex(h, n))+Me(m, n);
end
end
end
end
% Reducción de la matriz de masa
load Uknow
c = 1;
cmax = 6*NNT;
while c <= cmax
if Uknow(c) == 0
M(:, c) = [];
M(c, :) = [];
Uknow(c) = [];
c = 0;
cmax = cmax - 1;
end;
c = c + 1;
end

```

```
function [Mb]=massb(x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, t, d, eo, no)
```

```

Mb=zeros(16);
N1=zeros(1, 4);, N2=N1;, N3=N1;, N4=N1;
eh=[-1 1 1 -1];, nh=[-1 -1 1 1];
for j=1: 4
ei=eh(j);
ni=nh(j);
Nw=(1/16)*((eo+ei)^2)*(eo*ei-2)*((no+ni)^2)*(no*ni-2);
Nx=- (1/16)*ei*((eo+ei)^2)*(eo*ei-1)*((no+ni)^2)*(no*ni-2);
Ny=- (1/16)*((eo+ei)^2)*(eo*ei-2)*ni*((no+ni)^2)*(no*ni-1);
Nxy=(1/16)*ei*((eo+ei)^2)*(eo*ei-1)*ni*((no+ni)^2)*(no*ni-1);
N1(j)=Nw;
N2(j)=Nx;
N3(j)=Ny;
N4(j)=Nxy;
end
N = [N1 N2 N3 N4];
J11 = -0.25*(1-no)*x1+0.25*(1-no)*x2+0.25*(1+no)*x3-0.25*(1+no)*x4;
J12 = -0.25*(1-no)*y1+0.25*(1-no)*y2+0.25*(1+no)*y3-0.25*(1+no)*y4;
J21 = -0.25*(1-eo)*x1-0.25*(1+eo)*x2+0.25*(1+eo)*x3+0.25*(1-eo)*x4;
J22 = -0.25*(1-eo)*y1-0.25*(1+eo)*y2+0.25*(1+eo)*y3+0.25*(1-eo)*y4;
J=[J11 J12; J21 J22];
Mb = t*d*N' *N*det(J);

```

```
function [Mp] = massp(x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, t, d, eo, no)
```

```

Mp=zeros(8);
N1=(0.25)*(1-eo)*(1-no);
N2=(0.25)*(1+eo)*(1-no);
N3=(0.25)*(1+eo)*(1+no);
N4=(0.25)*(1-eo)*(1+no);
N=[N1 N2 N3 N4 0 0 0 0; 0 0 0 0 N1 N2 N3 N4];
J11 = -0.25*(1-no)*x1+0.25*(1-no)*x2+0.25*(1+no)*x3-0.25*(1+no)*x4;
J12 = -0.25*(1-no)*y1+0.25*(1-no)*y2+0.25*(1+no)*y3-0.25*(1+no)*y4;
J21 = -0.25*(1-eo)*x1-0.25*(1+eo)*x2+0.25*(1+eo)*x3+0.25*(1-eo)*x4;
J22 = -0.25*(1-eo)*y1-0.25*(1+eo)*y2+0.25*(1+eo)*y3+0.25*(1-eo)*y4;
J=[J11 J12; J21 J22];
Mp = t*d*N'*N*det(J);

```

```

function [K]=matrix(conx_data, xyz_nodos, Nel, NNT, E1x, E2x, v1x, v2x,
tx, Gx, anl, conex)

```

```

K=zeros(6*NNT);
for h=1:Nel
    x1=xyz_nodos(conx_data(h,2),2);, y1=xyz_nodos(conx_data(h,2),3);,
z1=xyz_nodos(conx_data(h,2),4);
    x2=xyz_nodos(conx_data(h,3),2);, y2=xyz_nodos(conx_data(h,3),3);,
z2=xyz_nodos(conx_data(h,3),4);
    x3=xyz_nodos(conx_data(h,4),2);, y3=xyz_nodos(conx_data(h,4),3);,
z3=xyz_nodos(conx_data(h,4),4);
    x4=xyz_nodos(conx_data(h,5),2);, y4=xyz_nodos(conx_data(h,5),3);,
z4=xyz_nodos(conx_data(h,5),4);
    Ke = Kelem(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1, z2,
z3, z4, E1x, E2x, v1x, v2x, tx, Gx, anl);
    for m=1:24
        for n=1:24
            K(conex(h,m),conex(h,n))=K(conex(h,m),conex(h,n))+Ke(m,n);
        end
    end
end
end

```

```

function [Bp] = plane(eo, no, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, J)

```

```

Bp=zeros(3,8);
%calcul o de las derivadas de Ni/e,n
DN1c = [-0.25*(1-no); -0.25*(1-eo)];
DN2c = [0.25*(1-no); -0.25*(1+eo)];
DN3c = [0.25*(1+no); 0.25*(1+eo)];
DN4c = [-0.25*(1+no); 0.25*(1-eo)];

DN1x = inv(J)*DN1c;
DN2x = inv(J)*DN2c;
DN3x = inv(J)*DN3c;
DN4x = inv(J)*DN4c;
%Calcul o de la matriz Bp
Bp=[DN1x(1) DN2x(1) DN3x(1) DN4x(1) 0 0 0 0;...
    0 0 0 0 DN1x(2) DN2x(2) DN3x(2) DN4x(2);...
    DN1x(2) DN2x(2) DN3x(2) DN4x(2) DN1x(1) DN2x(1) DN3x(1) DN4x(1)];

```

```

function [S]=stress(conx_data, NNT, xyz_nodos, conex, E1x, E2x, v1x, v2x,
Gx, tx, anl, Nel)

```

```

load U

```

```

%Transformacion de U a coordenadas locales
Tg=zeros(6*NNT);
for h=1:Nel
    x1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 2);,    y1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 3);,
z1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 4);
    x2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 2);,    y2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 3);,
z2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 4);
    x3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 2);,    y3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 3);,
z3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 4);
    x4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 2);,    y4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 3);,
z4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 4);
    T = trans_matrix(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1,
z2, z3, z4);
    for m = 1:24
        for n = 1:24
            Tg(conex(h, m), conex(h, n)) = T(m, n);
        end
    end
end
end
U=inv(Tg)*U;

%Matriz de resultados
sol s=zeros(NNT, 6);
sol s(:, 1)=U(1:NNT');
sol s(:, 2)=U(NNT+1:2*NNT');
sol s(:, 3)=U(2*NNT+1:3*NNT');
sol s(:, 4)=U(3*NNT+1:4*NNT');
sol s(:, 5)=U(4*NNT+1:5*NNT');
sol s(:, 6)=U(5*NNT+1:6*NNT');

%Resultados para cada elemento
F1 = sol(:, 1);, F2 = sol(:, 2);, F3 = sol(:, 3);, F4 = sol(:, 4);, F5 =
sol(:, 5);, F6 = sol(:, 6);
Ux(1:4, conx_data(:, 1)) = F1(conx_data(:, 2:5)');
Uy(1:4, conx_data(:, 1)) = F2(conx_data(:, 2:5)');
Uz(1:4, conx_data(:, 1)) = F3(conx_data(:, 2:5)');
Ox(1:4, conx_data(:, 1)) = F4(conx_data(:, 2:5)');
Oy(1:4, conx_data(:, 1)) = F5(conx_data(:, 2:5)');
Oxy(1:4, conx_data(:, 1)) = F6(conx_data(:, 2:5)');
Ue=[Ux; Uy; Uz; Ox; Oy; Oxy];

%Calculo de esfuerzos

[E, z] = elas_E(E1x, E2x, v1x, v2x, Gx, tx, anl);
ee = [-0.5773502692; 0.5773502692; 0.5773502692; -0.5773502692];
nn = [-0.5773502692; -0.5773502692; 0.5773502692; 0.5773502692];
S = zeros(3, Nel);
for h=1:Nel
    r=1; , s=3;
    xy_2 = trans_coord(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4,
z1, z2, z3, z4);
    x1=xy_2(1, 1);, x2=xy_2(1, 2);, x3=xy_2(1, 3);, x4=xy_2(1, 4);
    y1=xy_2(2, 1);, y2=xy_2(2, 2);, y3=xy_2(2, 3);, y4=xy_2(2, 4);
    for i=1:4
        eo=ee(i);, no=nn(i);
        J11 = -0.25*(1-no)*x1+0.25*(1-no)*x2+0.25*(1+no)*x3-
0.25*(1+no)*x4; %dx/de
        J12 = -0.25*(1-no)*y1+0.25*(1-no)*y2+0.25*(1+no)*y3-
0.25*(1+no)*y4; %dy/de
        J21 = -0.25*(1-eo)*x1-0.25*(1+eo)*x2+0.25*(1+eo)*x3+0.25*(1-
eo)*x4; %dx/dn
    end
end

```

```

J22 = -0.25*(1-eo)*y1-0.25*(1+eo)*y2+0.25*(1+eo)*y3+0.25*(1-
eo)*y4; %dy/dn
J = [J11 J12; J21 J22];
B = zeros(6, 24);
Bp = plane(eo, no, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, J);
Bb = bend(eo, no, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, J, J11, J12, J21, J22);
B(1:3, 1:8) = Bp;
B(4:6, 9:24) = Bb;
Sn = E*B*Ue(:, h);
So = Sn(1:3)+z*Sn(4:6); %Esfuerzos en el
nodo i
S(r: s, h) = So;
r = r+3; , s = s+3;
end
end

function [St]=stress_t(conx_data, NNT, xyz_nodos, conex, E1x, E2x, v1x,
v2x, Gx, tx, anl, Nel)

load Um
load Uknow

%Construyendo los vectores de solución
[m, n, p]=size(Um);
j = 0;
for k=1:p
    for i = 1 : 6*NNT
        if Uknow(i) == 1
            j = j + 1;
            U(i, 1, k) = Um(j, 1, k);
        end
    end
    j=0;
end

%Transformacion de U a coordenadas locales
Tg=zeros(6*NNT);
for h=1:Nel
    x1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 2); , y1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 3); ,
z1=xyz_nodos(conx_data(h, 2), 4);
    x2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 2); , y2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 3); ,
z2=xyz_nodos(conx_data(h, 3), 4);
    x3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 2); , y3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 3); ,
z3=xyz_nodos(conx_data(h, 4), 4);
    x4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 2); , y4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 3); ,
z4=xyz_nodos(conx_data(h, 5), 4);
    T = trans_matrix(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, z1,
z2, z3, z4);
    for m = 1:24
        for n = 1:24
            Tg(conex(h, m), conex(h, n)) = T(m, n);
        end
    end
end

for i=1:p
    U(:, :, i)=inv(Tg)*U(:, :, i);
end

%Matriz de resultados
U_x=U(1:NNT, 1, :);
U_y=U(NNT+1:2*NNT, 1, :);

```

```

U_z=U(2*NNT+1: 3*NNT, 1, :);
U_ox=U(3*NNT+1: 4*NNT, 1, :);
U_oy=U(4*NNT+1: 5*NNT, 1, :);
U_oxy=U(5*NNT+1: 6*NNT, 1, :);
St=zeros(12, Nel, p);
for k=1:p
    F1 = U_x(:, :, 1);, F2 = U_y(:, :, i);, F3 = U_z(:, :, i);, F4 =
U_ox(:, :, i);, F5 = U_oy(:, :, i);, F6 = U_oxy(:, :, i);
    Ux(1: 4, conx_data(:, 1)) = F1(conx_data(:, 2: 5)');
    Uy(1: 4, conx_data(:, 1)) = F2(conx_data(:, 2: 5)');
    Uz(1: 4, conx_data(:, 1)) = F3(conx_data(:, 2: 5)');
    Ox(1: 4, conx_data(:, 1)) = F4(conx_data(:, 2: 5)');
    Oy(1: 4, conx_data(:, 1)) = F5(conx_data(:, 2: 5)');
    Oxy(1: 4, conx_data(:, 1)) = F6(conx_data(:, 2: 5)');
    Ue=[Ux; Uy; Uz; Ox; Oy; Oxy];
    %Calculo de esfuerzos
    [E, z] = elas_E(E1x, E2x, v1x, v2x, Gx, tx, anl);
    ee = [-0.5773502692; 0.5773502692; 0.5773502692; -0.5773502692];
    mn = [-0.5773502692; -0.5773502692; 0.5773502692; 0.5773502692];
    S = zeros(3, Nel);
    for h=1: Nel
        r=1;, s=3;
        xy_2 = trans_coord(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4,
z1, z2, z3, z4);
        x1=xy_2(1, 1);, x2=xy_2(1, 2);, x3=xy_2(1, 3);, x4=xy_2(1, 4);
        y1=xy_2(2, 1);, y2=xy_2(2, 2);, y3=xy_2(2, 3);, y4=xy_2(2, 4);
        for i=1: 4
            eo=ee(i);, no=mn(i);
            J11 = -0.25*(1-no)*x1+0.25*(1-no)*x2+0.25*(1+no)*x3-
0.25*(1+no)*x4; %dx/de
            J12 = -0.25*(1-no)*y1+0.25*(1-no)*y2+0.25*(1+no)*y3-
0.25*(1+no)*y4; %dy/de
            J21 = -0.25*(1-eo)*x1-0.25*(1+eo)*x2+0.25*(1+eo)*x3+0.25*(1-
eo)*x4; %dx/dn
            J22 = -0.25*(1-eo)*y1-0.25*(1+eo)*y2+0.25*(1+eo)*y3+0.25*(1-
eo)*y4; %dy/dn
            J = [J11 J12; J21 J22];
            B = zeros(6, 24);
            Bp = plane(eo, no, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, J);
            Bb = bend(eo, no,
x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, J, J11, J12, J21, J22);
            B(1: 3, 1: 8) = Bp;
            B(4: 6, 9: 24) = Bb;
            Sn = E*B*Ue(:, h);
            So = Sn(1: 3)+z*Sn(4: 6); %Esfuerzos en el
nodo i
            S(r: s, h) = So;
            r = r+3;, s = s+3;
        end
    end
    k
    St(:, :, k)=S;
end

```

```
function time(xyz_nodos, conx_data, NNT, Nel, tx, d, conex)
```

```

load Kr
load desp
U = desp;
% Vector de Desplazamiento
di sp('Calculando la matriz de masa ...')

```

```

M=mass(xyz_nodos, conx_data, NNT, Nel, tx, d, conex);
% Matriz de Masa
Ace = 9.81*ones(size(U));
% Vector de Aceleracion
Vel = zeros(size(U));, Vel(1:651)=4.8522;
F= zeros(size(U));

a = 0.01;, b = 0.0008;
% Coeficientes de Rayleigh
C = a*M + b*Kr;
% Matriz de amortiguamiento

t=0.2;
DT=4e-4;
p1=0.25;, p2=0.5;
% Coeficientes de Newmark
a0=1/(p1*DT^2);, a1=p2/(p1*DT);, a2=1/(p1*DT);, a3=(1/(2*p1))-1;
a4=(p2/p1) - 1;, a5=(DT/2)*((p2/p1) - 2);, a6=DT*(1-p2);, a7=p2*DT;

%Archivo de pelicula
p=length(0:DT:t);, [m, n]=size(U);
Um=zeros(m, n, p);

disp('Resolviendos los sistemas de ecuaciones ...')
Ko = inv(a0*M+a1*C+Kr);
pd=145;
j=1;
for i=0:DT:t
    Um(:,:,j)=U;
    ((t/DT)+1)-j
    U2(j)=U(pd);, Vel2(j)=Vel(pd);, Ace2(j)=Ace(pd);
    Mo = M*((a0*U)+(a2*Vel)+(a3*Ace));, Co = C*(a1*U+a4*Vel+a5*Ace);
    Fo = F+Mo+Co;
    Ut=Ko*Fo;
    Ace1=a0*(Ut-U) - a2*Vel - a3*Ace;
    Vel1=Vel+a6*Ace+a7*Ace1;
    Vel=Vel1;, Ace=Ace1;, U=Ut;
    j=j+1;
end

disp('Guardando datos ...')
save t
save DT
save U2
save Vel2
save Ace2
save Um
disp('Calculo finalizado ...')

function [xy_2] = trans_coord(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3,
y4, z1, z2, z3, z4)

Xo = [0.25*(x1+x2+x3+x4) 0.25*(y1+y2+y3+y4) 0.25*(z1+z2+z3+z4)];
%Vector de posicion Xo
Vij = [(x2-x1) (y2-y1) (z2-z1)];
%Vector Vij (direccion ij)
Vim = [(x4-x1) (y4-y1) (z4-z1)];
%Vector im (direccion im)
Vzo= cross(Vij, Vim);
%Vector unitario Vz'
Vz = Vzo/norm(Vzo);

```

```

Vxo = [(0.5*(x3+x2) - Xo(1)) (0.5*(y3+y2) - Xo(2)) (0.5*(z3+z2) - Xo(3))];
%Vector C-nj
Vx = Vxo/norm(Vxo);
%Vector unitario Vx'
Vy = cross(Vz, Vx);
%Vector unitario Vy'
A = [Vx; Vy; Vz];
%Se transforman a coordenadas nodales
xy_2(:, 1) = A*[x1 y1 z1]';
xy_2(:, 2) = A*[x2 y2 z2]';
xy_2(:, 3) = A*[x3 y3 z3]';
xy_2(:, 4) = A*[x4 y4 z4]';

function [T] = trans_matrix(xyz_nodos, NNT, x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4,
z1, z2, z3, z4)

Tsup = zeros(12);
T = zeros(24);
Xo = [0.25*(x1+x2+x3+x4) 0.25*(y1+y2+y3+y4) 0.25*(z1+z2+z3+z4)];
%Vector de posición Xo
Vij = [(x2-x1) (y2-y1) (z2-z1)];
%Vector Vij (dirección ij)
Vim = [(x4-x1) (y4-y1) (z4-z1)];
%Vector im (dirección im)
Vzo = cross(Vij, Vim);
%Vector unitario Vz'
Vz = Vzo/norm(Vzo);
Vxo = [(0.5*(x3+x2) - Xo(1)) (0.5*(y3+y2) - Xo(2)) (0.5*(z3+z2) - Xo(3))];
%Vector C-nj
Vx = Vxo/norm(Vxo);
%Vector unitario Vx'
Vy = cross(Vz, Vx);
%Vector unitario Vy'
A = [Vx; Vy; Vz];
for i = 1:3
%T es la matriz de transformación global
    k = 4*i - 3;
    for m = 0:3
        for j = 1:4:9
            Tsup(k+m, j+m) = A(i, (j+3)/4);
        end
    end
end
end
T(1:12, 1:12) = Tsup;
T(13:24, 13:24) = Tsup;

```