

**“MODELO MATEMÁTICO Y ANÁLISIS DE
LOCALIZACIÓN DE DEFORMACIONES
PLÁSTICAS EN METALES (PLACA PLANA)”**

**JUAN ALFONSO WILCHES BLANCO
HENRY OLAVE VANEGAS**

**Universidad Tecnológica de Bolívar
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
CARTAGENA DE INDIAS D.T Y C,
23 DE ABRIL DEL 2004**

**“MODELO MATEMATICO Y ANÁLISIS DE
LOCALIZACIÓN DE DEFORMACIONES
PLÁSTICAS EN METALES (PLACA PLANA)”**

**JUAN ALFONSO WILCHES BLANCO
HENRY OLAVE VANEGAS**

**Trabajo de Grado como requisito para optar por el título de
Ingeniero Mecánico**

**Juan Fajardo
Ingeniero Mecánico**

**Universidad Tecnológica de Bolívar
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
CARTAGENA DE INDIAS D.T Y C,
23 DE ABRIL DEL 2004**

PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA:

El proceso de conformado de piezas por deformación plástica es una de las herramientas más utilizadas en la fabricación de productos metálicos debido a su gran versatilidad y menor costo que otros procesos alternativos. Sin embargo presentan algunas limitaciones que dificultan su utilización.

Una de estas limitaciones es la localización de las deformaciones plásticas que aparecen muy frecuentemente en el proceso de conformado de metales muy dúctiles (Deformaciones homogéneas o continua).

Al deformarse plásticamente una pieza metálica frecuentemente se observa que las deformaciones no se distribuyen uniformemente dentro de la pieza, sino que se concentra en bandas angostas (zonas pequeñas de deformaciones muy intensivas) mientras el resto del material prácticamente no experimenta deformación alguna. Este fenómeno se conoce como localización de las deformaciones plásticas.

La localización de las deformaciones plásticas cambia totalmente el comportamiento macroscópico del material. Una vez que se inicia se convierte en el mecanismo predominante en toda la deformación plástica subsecuente y si persiste puede precipitar una fractura por corte. En circunstancia menos extremas, representa un factor perjudicial en la respuesta en servicio y la vida útil de las piezas metálicas conformadas por deformación plástica, cuando se manifiesta; las propiedades mecánicas del material resultan mucho más pobre que las esperadas.

En el caso de la deformación de una probeta plana compacta sometida a una tracción pura, se supone que la deformación es plana y que la maquina de ensayo supone una velocidad pequeña sobre el borde superior e inferior de la probeta, es decir, se supone que el ensayo se realiza controlando la velocidad de la mordaza de la maquina de ensayo.

Como las direcciones principales son respectivamente la dirección en la que se tracciona la probeta y la dirección perpendicular a esta ultima, entonces se provee una localización a lo largo de una banda orientada a 45° respecto a la dirección en la que se tracciona a la probeta.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿ Es posible encontrar formulaciones alternativas capaces de aproximar adecuadamente condiciones que mejoren el problema del fenómeno de localización de deformaciones plásticas y ser capaz de obtener mediante este proceso mejor servicio y vida útil del material?.

¿Es posible encontrar una solución alternativa a la localización de deformación plástica en los metales, para superar las limitaciones existentes?

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Estudiar un modelo matemático y numérico capaz de reproducir este fenómeno (localización de las deformaciones plásticas en metales) y de identificar los factores que influyen en la manifestación del mismo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Evaluar las ecuaciones que caracterizan el movimiento de un medio continuo incomprensible desde el punto de vista Euleriano y plantear el principio de las potencias virtuales.
- Analizar las relaciones constitutivas para la plasticidad y viscoplasticidad, estudiando las características más importantes de estos dos mecanismos (viscoplasticidad y plasticidad) de deformación (inelástica).
- Estudiar y analizar la localización de las deformaciones plásticas para comprender el comportamiento macroscópico del material.
- Formulación de un modelo matemático que gobierne la deformación de un sólido, restringiendo el comportamiento de este (Modelo matemático), como si fuera un flujo no newtoniano (incomprensible).
- Explorar herramientas numéricas que permitan resolver el modelo planteado anteriormente.
- Validación experimental mediante la utilización de los resultados obtenidos en los ítem anteriores.

JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO

Se ha ido trabajando en el fenómeno de localización de deformaciones plásticas utilizando la denominada deformación de flujo para la descripción del movimiento y las características macroscópicas del material y se ha modelado numéricamente este mecanismo de deformación mediante el método de los elementos finitos (adaptamos para que se pueda aproximar la condición de incompresibilidad del flujo plástico).

La deformación tradicional del método de los elementos finitos (la utilizada en el modelo de la deformación de materiales elásticos comprensible), no se puede extender inmediatamente al caso de materiales que experimentan deformaciones plásticas (incompresibles), dado que al imponer la condición de incompresibilidad sobre la solución numérica obtenida con dicho método (elementos finitos) se presenta el denominado problema de bloqueo como consecuencia del cual se obtiene aproximaciones muy pobres, por lo tanto para superar este problema es necesario recurrir a formulaciones alternativas (como el método de los multiplicadores de lagrange, el método de penalización y el método lagrangeano aumentado), basadas en la interpolación simultanea de velocidades y presiones (elementos mixtos).

Estos tres métodos, si bien solucionan el problema de bloqueo y puede entonces proporcionar soluciones aceptables para las velocidades, presentan el inconveniente que la solución para las presiones en cambio puede resultar muy pobre (esta solución se caracteriza por la presencia de modos **espúreo** (no físico) que tiende a contaminarla completamente).

Para solucionar esta dificultad se utiliza un método de eliminación o “ prefiltrado” de estas componentes **espúreas**.

IMPACTO DE LA INVESTIGACIÓN

Por medio del presente proyecto le daremos a conocer a los estudiantes de ingeniería mecánica la forma de manejar las deformaciones plásticas de los metales (dúctiles) de una manera analítica y numérica, para un conocimiento mas para la formación académica.

RESUMEN

Al deformarse plásticamente una pieza metálica frecuentemente se observa que la deformación no se distribuye uniformemente dentro de la pieza sino que se concentra en bandas angostas (zonas pequeñas de deformación muy intensa) mientras el resto del material prácticamente no experimenta deformación alguna. Este fenómeno se conoce como *localización de las deformaciones plásticas*. En este trabajo se estudia un modelo matemático y numérico capaz de reproducir este fenómeno y de identificar los factores que influyen en la manifestación del mismo. El enfoque de análisis utilizado para ello es denominado *formulación de flujo* que se caracteriza por suponer despreciable la parte elástica de las deformaciones y describir el comportamiento inelástico en términos de la viscoplasticidad, lo que permite estudiar la deformación del sólido como si fuera de un fluido viscoso incompresible no newtoniano, es decir, utilizando el punto de vista euleriano (de relativamente fácil implementación numérica). Para resolver las ecuaciones que se derivan de este modelo matemático. (ecuaciones de Stokes) se utiliza el *método de los elementos finitos*. Como la formulación estándar de este método (la formulación basada en interpolación exclusiva del campo de velocidades) es ineficaz para representar flujos incompresibles, es necesario recurrir a formulaciones alternativas capaces de aproximar adecuadamente esta condición. En este trabajo se exploran de estas alternativas (el método de los multiplicadores de lagrange, el método de penalización y el método de los elementos finitos) y se analizan sus alcances y limitaciones y las formas de superarlas.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
1. INTRODUCCION	9
1.1 NOTACION UTILIZADA	14
2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	19
2.1. CONDICION DE IMCOMPRESIBILIDAD	19
2.2. CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO	22
2.2.1. Ecuación de Movimiento	22
2.2.2. Ecuación de Movimiento para flujos incompresibles	24
2.2.3. Principios de las Potencias Virtuales	26
3. RELACIONES CONSTITUTIVAS PARA METALES	30
3.1. PLASTICIDAD	31
3.1.1. Condición de fluencia	35
3.1.2. Ley de endurecimiento	41
3.1.3. Ley de flujo Asociada	48
3.1.4. Tensiones equivalente y Deformación plástica equivalente	60
3.1.5. Relaciones Tensión-Deformación completas para la plasticidad	66
3.2. VISCOPLASTICIDAD	70
3.2.1. Relación constitutiva para la viscoplasticidad	74
3.2.2. Relación constitutiva para la viscoplasticidad asociada con la ley de fluencia de Von Mises.	80
4. FORMULACION DE FLUJO	84
4.1. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO	84
4.2. RELACIÓN CONSTITUTIVA	85
4.3. PLANTEO DIFERENCIAL DEL PROBLEMA	88
5. MODELADO DE FLUJOS INCOMPRESIBLES BIDIMENSIONALES CON EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.	93

5.1	PRINCIPIO DE LAS POTENCIAS VIRTUALES PARA UN ESTADO PLANO DE VELOCIDADES DE DEFORMACIÓN.	94
5.2.	DISCRETIZACIÓN CON EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: SUS LIMITACIONES	102
5.2.1.	Imposición de la condición de incompresibilidad el problema del bloqueo	119
5.3.	METODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	127
5.3.1.	Interpretación geométrica del método de los multiplicadores de Lagrange	130
5.3.2.	Elección del espacio Q_h	133
5.3.3.	Forma matricial de la formulación con multiplicadores de Lagrange.	142
5.3.4.	Existencia de la solución: modos de presión	149
5.3.5.	Prefiltrado de los modos de presión	157
5.4.	METODO DE PENALIZACIÓN	164
5.4.1.	Forma matricial del metodo de penalización	167
5.4.2.	Método de penalización formulado en términos exclusivos de las velocidades: integración reducida.	168
5.4.3.	Convergencia de la solución $N \rightarrow \infty$	170
5.5.	PROCEDIMIENTOS ITERATIVOS PARA MEJORAR LA SOLUCIÓN: METODO DEL LAGRANGEANO AUMENTADO.	171
5.5.1.	Lagrangeano aumentado con filtrado o rigidez de los modos de presión.	189
5.6.	CONCLUSIONES ACERCA DEL COMPORTAMIENTO DE LAS TECNICAS NUMERICAS UTILIZADAS PARA IMPONER LA CONDICIÓN DE INCOMPRESIBILIDAD EL ELEMENTO MIXTO Q1-P0	182
6.	ANALISIS DE LA LOCALIZACIÓN DE LA DEFORMACIÓN PLÁSTICA	193
6.1.	FORMULACIÓN DE FLUJO PARA UN ESTADO PLANO DE DEFORMACIÓN	194
6.2.	EXISTENCIA DE SOLUCIONES DISCONTINUAS	197

6.3.	EJEMPLO: LOCALIZACIÓN DE LA DEFORMACIÓN PLÁSTICA EN UNA PROBETA COMPACTA SOMETIDA A UNA TRACCIÓN PURA.	209
6.3.1.	Solución Analítica	211
6.3.2.	Solución Numérica	219
7.	ANÁLISIS EXPERIMENTAL	224
7.1	MODELAMIENTO COMPUTACIONAL DE UNA PLATINA DE ACERO 1020 PARA LA ZONA PLÁSTICA BASADA EN LA TEORÍA DE ELEMENTOS FINITOS	241
7.2	ANÁLISIS DE RESULTADO	252
8	CONCLUSIONES	254
9	REFERENCIA	258

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Fig. 1.1. Banda de corte obtenida en el ensayo de tracción	10
Fig. 1.2. Banda de corte	10
Fig. 2.1. Evolución de una porción de material que se deforma	21
Fig. 2.2. Fuerza que actúan sobre un material continuo	24
Fig. 3.1. Curva tensión deformación endurecimiento por deformación	33
Fig. 3.2. Curva tensión deformación perfectamente plástico	34
Fig. 3.3. Representación de los rangos elásticos e inelásticos de carga	39
Fig. 3.4. Superficie de fluencia	46
Fig. 3.5. Intercepción de la superficie de fluencia con el plano desviador	47
Fig. 3.6. Crecimiento de la superficie según el modelo de endurecimiento	49
Fig. 3.7. Superficie de fluencia de Von Misses	49
Fig. 3.8. Ensayo de tracción para distintas velocidades de deformación	72
Fig. 3.9. Superficie de fluencia estática y dinámica	78
Fig. 4.1. Flujo de un metal a través de una región del espacio	92
Fig. 5.1. Dominio ocupado por un medio viscoso y condiciones de borde a la que esta sometido	106
Fig. 5.2. Discretización del dominio en elementos finitos	113
Fig. 5.3. Sistemas de coordenadas locales utilizadas en cada elemento	113
Fig. 5.4. Función V_h representativa del espacio H_h	115

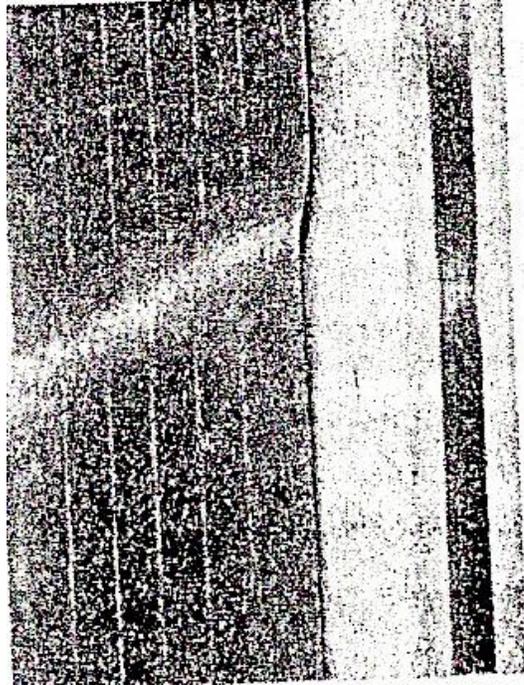
	Pág.
Fig. 5.5. Función base del espacio H_h	116
Fig. 5.6. Función base del espacio Q_h	117
Fig. 5.7. Problema en la cavidad conducida	120
Fig. 5.8. Modo incompresible de un elemento de 4 nodos cuadrados	123
Fig. 5.9. Campo de velocidades proximadas que verifiquen la incompresibilidad	124
Fig. 5.10. Bloqueo de un elemento de la malla utilizada en la Discretización del problema de la cavidad conducida	126
Fig. 5.11. Representación esquemática de la única función aproximada	127
Fig. 5.12. Ejemplo de la cavidad conducida	142
Fig. 5.13. Modo de presión tipo <i>“Damero”</i> o <i>“Checkerboard”</i>	154
Fig. 5.14. Condiciones de borde Utilizadas en el problema de la cavidad conducida	155
Fig. 5.15. Velocidades obtenidas para el problema de la cavidad conducida	187
Fig. 5.16. Presiones obtenidas para el problema de la cavidad conducida	188
Fig. 5.17. Velocidades obtenidas para el problema de la cavidad conducida por el método de la penalización	189
Fig. 5.18. Presiones obtenidas para el problema de la cavidad conducida por el método de la penalización	190
Fig. 5.19. Velocidades obtenidas para el problema de la cavidad conducida por el método de Lagrajeano aumentado	191
Fig. 5.20. Presiones obtenidas para el problema de la cavidad conducida por el método de Lagrajeano aumentado	192

Fig. 6.1. Curva característica	202
7.1 Ensayos	225
7.2 Desplazamiento en X(UX)	247
7.3 Desplazamiento en Y (UY)	248
7.4 Esfuerzos en X(SX)	248
7.5 Esfuerzos en Y (SY)	249
7.6 Esfuerzos de Von Misses	249

INTRODUCCIÓN

EL PROCESO DE CONFORMADO de piezas por deformación plástica es una de las herramientas más utilizadas en la fabricación de productos metálicos debido a su gran versatilidad y menor costo que otros procesos alternativos. Sin embargo presenta algunas limitaciones que dificultan su utilización. Una de ellas es el fenómeno de *localización de las deformaciones plásticas* que aparece muy frecuentemente durante el proceso de conformado de metales muy dúctiles. Este fenómeno consiste en lo siguiente: cuando se deforma un metal dúctil, primero las deformaciones se distribuyen en forma aproximadamente homogénea, es decir, resulta un estado de deformación continuo que varía suavemente dentro del material. Sin embargo cuando se alcanza un determinado nivel de carga, este patrón de deformación continuo cambia en forma más o menos abrupta a un patrón localizado en el que las deformaciones se concentran en ciertas zonas (en general bandas angostas) mientras el resto del material prácticamente no continúa deformándose (ver figura (1.1)); dentro de estas bandas se producen deformaciones intensas, predominantemente de corte tangenciales a la interface que separa a la banda del material adyacentes (ver figura (1.2)), mientras que fuera de ellas las deformaciones son pequeñas, es decir, aparece una discontinuidad del estado de deformación a través de ciertas superficies (las interfaces banda-material adyacente). Cuando se produce este cambio repentino del patrón de deformación se dice que la deformación se ha *localizado en bandas de corte (shear band)*.

Figura 1.1: Banda d
de la referencia [16]



una probeta plana (sacado

Figura 1.2: Banda de corte (sacado de la referencia [7]).



La localización de la deformación plástica cambia totalmente el comportamiento macroscópico del material. Una vez que se inicia se convierte en el mecanismo predominante en toda la deformación plástica subsecuente y si persiste puede precipitar una fractura por corte. En circunstancias menos extremas, piezas metálicas del material resultan mucho más pobres que las esperadas. Es importante entonces evitar que este mecanismo de deformación se manifieste y conocer cuales son los factores que favorecen o perjudican su manifestación.

El estudio de la deformación de sólidos que experimentan grandes deformaciones inelásticas (y en particular el estudio del mecanismo de localización) se puede abordar mediante dos formulaciones alternativas: la primera, denominada *Formulación de Deformación* se caracteriza por utilizar el enfoque lagrangeano para la descripción del movimiento del sólido y relaciones constitutivas elástoplásticas para la caracterización del comportamiento del material. El segundo, denominado *Formulación de Flujo*, propone, describir el comportamiento del material mediante una relación constitutiva rígido-viscoplástica, y en consecuencia, estudiar su movimiento utilizando el punto de vista euleriano. Es decir, considera despreciable la parte elástica de las deformaciones frente a las inelásticas (hipótesis abalada por el hecho que en los procesos de conformado de metales intervienen deformaciones plásticas mucho mayores a las elásticas) y describe el comportamiento inelástico en términos de la viscoplasticidad con lo que resulta un material que se puede considerar esencialmente un fluido, y como tal, estudiarse su movimiento desde el punto de vista euleriano. Debido a esta última característica la formulación de flujo resulta mucho más fácil de implementar numéricamente.

La formulación utilizada en todas las publicaciones consultadas para el análisis del fenómeno de localización es la formulación de deformación (ver referencias [11],[21],[30],[31],[33],[32]). El propósito de este trabajo es estudiar si con la formulación de flujo (que resulta muy conveniente debido a su mayor simplicidad numérica) también se puede describir (al menos cualitativamente) el mecanismo de localización. Se analiza entonces si es posible la existencia de estados de deformación discontinuos (patrones localizados) en materiales caracterizados por una relación constitutiva rígido-viscoplástica y cuyo movimiento se describe el enfoque euleriano.

Para modelar numéricamente la deformación (plástica) del material se utiliza el método de los *elementos finitos*. Como una de las hipótesis con las que se caracterizan al metal asume que el flujo es incompresible (es decir, cada porción del material se deforma sin cambiar su volumen) y como la basada en interpolación exclusiva de velocidades) es ineficaz para modelar flujos incompresibles, se estudian técnicas alternativas capaces de superar los inconvenientes relacionados con la condición de incompresibilidad que se presentan con la formulación estándar.

El texto se organiza de la siguiente forma: en el segundo capítulo se plantean las ecuaciones que caracterizan el movimiento de un medio continuo incompresible desde el punto de vista euleriano. también se plantea el principio de las potencias virtuales que es una forma equivalente de expresar dichas ecuaciones y que será utilizado más adelante para formular

el método de los elementos finitos. En el tercer capítulo se presentan las relaciones constitutivas para la plasticidad y viscoplasticidad y se estudian las características más importantes de estos dos mecanismos de deformación (inelástica). Un denominador común en casi toda la bibliografía consultada relacionada con este tema (ver referencias [7], [10], [14],[18],[19] o [25] es el fuerte contenido fenomenológico en la formulación de estas relaciones constitutivas. En este trabajo, a diferencia de los mencionados, se intenta un planteo axiomático de dichas relaciones: se busca traducir en hipótesis matemáticas las observaciones empíricas que fundamentan a los modelos constitutivos y deducir con la mayor generalidad posible (y a partir de dichas hipótesis) las ecuaciones de cada modelo. En el cuarto capítulo se presenta la formulación de flujo, es decir, el conjunto de simplificaciones que permite estudiar la deformación del sólido como si fuera el flujo de un fluido viscoso incomprensible de viscosidad no constante (fluido no newtoniano). En el quinto capítulo se estudian las herramientas numéricas (el método de los elementos finitos adaptado para el análisis de flujos incompresibles) que se utilizan para modelar la localización. La principal dificultad que presenta el método de los elementos finitos basado en la interpolación exclusiva del campo de velocidades (que es la formulación utilizada en problemas de elasticidad (compresible)) es la imposibilidad de aproximar simultáneamente (para un determinado orden de interpolación) la condición de incompresibilidad (exactamente) (esta dificultad se conoce como problema del bloqueo) (ver referencias [5],[3], [12], [20], [28]. Para superar este problema es necesario imponer la condición de incompresibilidad en forma no exacta (o débil) y en este trabajo no investigan tres formas de hacerlo (el método de los multiplicadores de lagrange, el método de penalización y el

método de lagrangeano aumentado) con sus respectivos alcances y limitaciones (el segundo método surge a partir de las limitaciones del primero y el tercero a su vez, a partir de las del segundo). Estos tres métodos, si bien solucionan el problema del bloqueo y pueden entonces proporcionar soluciones aceptable para las velocidades presentan el inconveniente que la solución para las presiones en cambio puede resultar muy pobre (esta solución se caracteriza por la presencia de modos espureos (no físicos) que tienden a contaminarla completamente). Para solucionar esta dificultad se utiliza un método de eliminación o “prefiltrado” de estas componentes espureas (propuesto en la referencia [6] para el método de los multiplicadores de Lagrange y adaptado en este trabajo para que pueda ser utilizado con el método del lagrangeano aumentado). En la bibliografía consultada la presentación de estos temas no es en todos los casos lo suficientemente ordenada (en general se abordan en el marco del estudio de la existencia, estabilidad, convergencia y estimación del error de la solución numérica obtenida con estos métodos (ver referencia [2], [3], [4], [5],[12], [22], [23], [24])). En este trabajo se intenta hacer una síntesis más ordenada e intuitiva de los mismos, utilizando para ello (cuando esto es posible) argumentos, ejemplos y demostraciones simples. En el sexto capítulo se presenta el modelado y análisis propiamente dicho del fenómeno de localización utilizando la formulación del flujo y las técnicas numéricas estudiadas. Se estudia si con éste modelo es posible obtener, tanto desde el punto de vista analítico como numérico, soluciones discontinuas para las ecuaciones que describen la deformación del metal. El desarrollo de los programas con los que han sido

hechas todas las simulaciones numéricas que se presentan en este capítulo (al igual que las correspondientes al capítulo anterior) forma también parte de este trabajo.¹

1.1. NOTACIÓN UTILIZADA

Notación de índices

Las componentes de las magnitudes tensoriales y vectoriales que aparecen a lo largo de éste trabajo se simbolizan de la siguiente forma: v_1, v_2 y v_3 para las componentes de un vector (el vector velocidad por ejemplo) y $S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31}, S_{21}, S_{32}$ y S_{13} , para las componentes de un tensor de segundo orden (como el tensor (de tensiones por ejemplo).

Una componente genérica se simbolizará como v_j o S_{ij} con i y j índices enteros que pueden valer 1 2 o 3. Las coordenadas cartesianas del espacio se simbolizan como x_1, x_2 y x_3 . El sistema de coordenadas elegido es el cartesiano ortogonal.

Convención de supresión del símbolo de sumatoria Σ

Las sumas del tipo

$$\sum_{i=1}^n S_{ii}$$

$$\sum_{i=1}^n S_{ij} n_i$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n S_{ij} S_{ij}$$

¹ El lenguaje de programación utilizado es el Mathematica

son muy comunes en todas las aplicaciones del cálculo vectorial y tensorial (en particular en el estudio del movimiento de los medios deformables) y pueden ser representadas con ventaja si se simplifica la notación dejando implícita la sumatoria \sum y el valor de n . Se adopta entonces los símbolos

$$\begin{aligned} S_{ii} \\ S_{ij}^n \\ S_{ij}^n S_{ij} \end{aligned}$$

para representar respectivamente a las sumas dadas como ejemplo. Los índices de sumación (índices mudos) son los índices repetidos dos veces (y solo dos veces) y el resto de los índices no participan en la suma y se denomina índices libres. Como el índice mudo solo sirve para expresar la sumatoria, puede ser cambiado por otro sin que se altere el significado

$$\begin{aligned} S_{ii} &= S_{kk} \\ S_{ij}^n &= S_{kj}^n \\ S_{ij}^n S_{ij} &= S_{kl}^n \end{aligned}$$

La convención de supresión del símbolo \sum se aplica también en el siguiente caso:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

que representará a

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \frac{\partial v_2}{\partial x_j} + \frac{\partial v_3}{\partial x_j}$$

o con el siguiente

$$c_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}$$

que estará representando a

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}$$

Símbolo d De Kronecker

A lo largo del texto también se usa en forma reiterada el símbolo d de Kronecker que se define como

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por ejemplo un estado hidrostático de tensión puede ser escrito en términos de éstos símbolos como:

$$s_{ij} = p d_{ij} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Explicitación De La Dependencia De Las Variables Del Instante t

Todas las magnitudes físicas que se utilizaran en la descripción de la deformación de los metales, tales como velocidad v_j tensiones s_{ij} velocidades de deformación e_{ij} densidad p , etc., son magnitudes que en general dependen de la posición (x_1, x_2, x_3) y del tiempo t . Para

explicitar la dependencia de estas funciones del tiempo y especificar el instante que está siendo considerado se utilizara la convención de escribir a dicho instante t como supraíndice a la izquierda de la variable en estudio, por ejemplo:

${}^t v_j$ para las velocidades en el instante t

${}^t S_{ij}$ para las tensiones en el instante t

${}^t \varepsilon_{ij}$ para las velocidades de deformación en el instante t

${}^t p$ para la densidad en el instante t

(Esto se lee de la siguiente forma: ${}^t v_j$ en como “ n_j en t ”, ${}^t S_{ij}$ como “ S_{ij} en t ”, etc.). En el caso estacionario (donde todas estas variables no varían en el tiempo) esta explicación se omitirá.

Representación de Matrices

Las matrices se simbolizaran con letras subrayadas. Por ejemplo \underline{s} para la matriz que agrupa a las componentes del tensor de tensiones (S_{11} , S_{22} , S_{33} , S_{12} , S_{23} , S_{31}), \underline{V} para la matriz (columna) que agrupa a las velocidades nodales, \underline{P} para la correspondiente a las presiones nodales, \underline{K} para la matriz (cuadrada) de rigidez, etc.

2. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

En este capítulo se plantean las ecuaciones diferenciales que se utilizarán para describir la deformación plástica de los metales: la condición de incompresibilidad y la ecuación del movimiento. También se formula el principio de las potencias virtuales (que es el punto de partida del método de los elementos finitos) y se demuestra su equivalencia con la ecuación del movimiento. Referencias para este capítulo son [1] o [17].

2.1. CONDICIÓN DE INCOMPRESIBILIDAD

Una de las hipótesis que se hacen para describir el flujo plástico de los metales es la hipótesis de incompresibilidad según la cual el material se mueve manteniendo constante su volumen. Esta condición se expresa matemáticamente (si la densidad p es constante) como

$$\frac{\partial^t v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

o bien

$$\frac{\partial^t v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^t v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^t v_3}{\partial x_3} = 0$$

Se puede demostrar porque esta igualdad implica la incompresibilidad observando la figura(2.1) en la que se muestra una porción arbitraria de un material que se está deformando. En un instante t esta porción ocupa la región tP del espacio y en un instante

posterior $t + Dt$ ocupa la región ${}^{t+Dt}P$. Los volúmenes de éstas regiones son

$$y \quad \int_{{}^tP} dV$$

$$\int_{{}^{t+Dt}P} dV$$

y el cambio de volumen en el intervalo de tiempo Dt es entonces

$$\int_{{}^{t+Dt}P} dV - \int_{{}^tP} dV$$

Esta diferencia es igual a la diferencia entre los volúmenes de las zonas sombreadas de la figura (2.1) que son respectivamente las regiones ocupadas por el material que sale de la región tP y la ocupada por el que entra. Para calcular los volúmenes de estas zonas se observa que el material que fluye a través de un elemento de superficie dS durante el intervalo de tiempo Δt ocupará un volumen ${}^tV D_t \cdot {}^t n dS$ (volumen del cilindro dibujado en la figura). Entonces el volumen de la región que ocupará el material que sale de tP será

$$\Delta t \int_{(\partial^t P)_{out}} {}^t v \cdot {}^t n dS$$

y el correspondiente al material que entra

$$\Delta t \int_{(\partial^t P)_{in}} {}^t v \cdot {}^t n dS$$

donde $(\partial^t P)_{in}$ y $(\partial^t P)_{out}$ son respectivamente las partes de la frontera de tP por las que entra y sale material (estas dos partes están limitadas por la curva a lo largo de la cual ${}^t v \cdot {}^t n = 0$).

Restando las dos integrales anteriores se obtiene

$$\Delta t \int_{\partial^t P} {}^t v \cdot {}^t n dS$$

(${}^t n$ es la normal saliente y entonces el signo (de la integral sobre $(\partial^t P)_{in}$ se invierte). La

variación del volumen ocupado por la porción del material será entonces:

$$\int_{t+\Delta t}^t - \int_{tP} dV = \Delta t \int_{\partial^t P} {}^t v_i n_i dS$$

Dividiendo por Δt y haciendo tender Δt a cero se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{tP} dV = \int_{\partial^t P} {}^t v_i n_i dS$$

y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\frac{d}{dt} \int_{tP} dV = \int_{tP} \frac{\partial^t v_i}{\partial^t x_i} dV$$

Para un material incompresible el volumen ${}^t P$ de la región ocupada por cualquier porción del material debe permanecer constante en el tiempo. Entonces el miembro izquierdo de la igualdad anterior debe ser cero por lo que

$$\int_{tP} \frac{\partial^t v_i}{\partial^t x_i} dV = 0$$

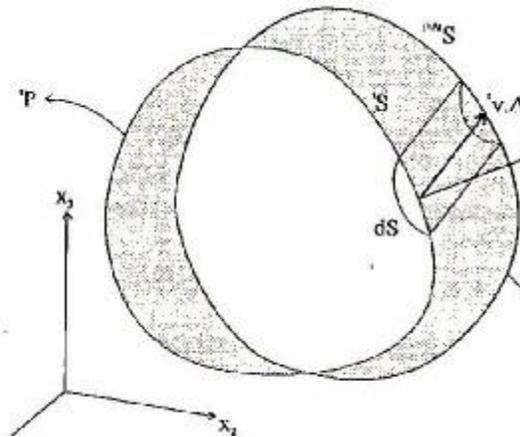


Figura 2.1. Evolución de una porción de un material que se deforma

para toda porción del material. Esto se cumplirá para cualquier región tP si el integrando es cero en todo punto del espacio por donde se extiende el material es

decir

$$\frac{\partial {}^t v_j}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial {}^t n_i}{\partial c_i} = 0$$

La condición de incompresibilidad implica entonces la ecuación (2.1).

En términos del tensor velocidad de deformación

$${}^t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^t v_i}{\partial x_j} \right)$$

la condición de incompresibilidad (2.1) se expresará como

$${}^t \varepsilon_{ii} = {}^t \varepsilon_{11} + {}^t \varepsilon_{22} + {}^t \varepsilon_{33} = 0$$

2.2. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

2.2.1. Ecuación del Movimiento

La segunda ecuación que se utilizara para describir la deformación plástica es la ecuación del movimiento que expresa que la suma de las fuerzas que actúan sobre cada partícula del medio es igual a la masa de esa partícula multiplicada por su aceleración. Para formularla

se considera un medio continuo (ya sea un sólido o una porción de un fluido) como el que se muestra en la figura (2.2) que en un instante t se encuentra ocupando una región del espacio tV . Se supone que sobre una parte de la frontera tS de la región tV (la parte tS_f) actúan fuerzas por unidad de superficie conocidas de componentes ${}^t f_i$ y que sobre la otra parte (la parte tS_v) se encuentran especificadas las velocidades (de componentes) ${}^t v_j$ se supone además que sobre el medio se aplican fuerzas por unidad de volumen conocidas de componentes ${}^t b_j$. La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre cualquier subconjunto tP de la región tV será:

$$\int_{{}^tP} {}^t b_j dV + \int_{\partial' {}^tP} {}^t s_{ij} {}^t n_j dS$$

donde ∂' es la frontera del subconjunto tP y ${}^t s_{ij}$ es el tensor de tensiones de Cauchy. La ley de Newton establece que esta resultante debe ser igual a

$$\int_{{}^tP} {}^t \rho {}^t a_j dV$$

que es la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de la porción es tP (${}^t \rho$ densidad de masa y ${}^t a_j$ son las componentes de la aceleración), es decir,

$$\int_{{}^tP} {}^t b_j dV + \int_{\partial' {}^tP} {}^t s_{ij} {}^t n_j dS = \int_{{}^tP} {}^t \rho {}^t a_j dV$$

O bien, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\int_{{}^tP} \left({}^t b_j + \frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} - {}^t \rho {}^t a_j \right) dV = 0$$

Como ésta integral debe ser nula para toda porción tP de la región tV y como el medio es continuo (lo que implica que la densidad ${}^t\rho$, las tensiones ${}^tS_{ij}$, aceleraciones ${}^t a_j$ las fuerzas ${}^t b_j$ son funciones continuas en tV), se deduce que el integrando debe anularse en todo punto de tV :

$${}^t b_j + \frac{\partial {}^t S_{ij}}{\partial x_i} - {}^t \rho {}^t a_j = 0 \quad \text{en } {}^tV \quad (2.2)$$

A esta igualdad se la llama *ecuación del movimiento*. La aceleración de una partícula del medio que se en el instante t se posiciona en el *punto* del espacio de coordenadas ${}^t x_i$ es:

$${}^t a_j = \frac{\partial {}^t v_j}{\partial t} + {}^t v_i \frac{\partial {}^t v_j}{\partial x_i}$$

es decir, la derivada material de la velocidad. A la ecuación (2.2) se la debe complementar con la condición de borde

$${}^t f_j = {}^t S_{ij} {}^t n_i \quad (2.3)$$

(donde ${}^t f_i$ es la componente j de la fuerza por unidad de superficie) que se debe cumplir en todo punto de la parte de la frontera ${}^t S_f$

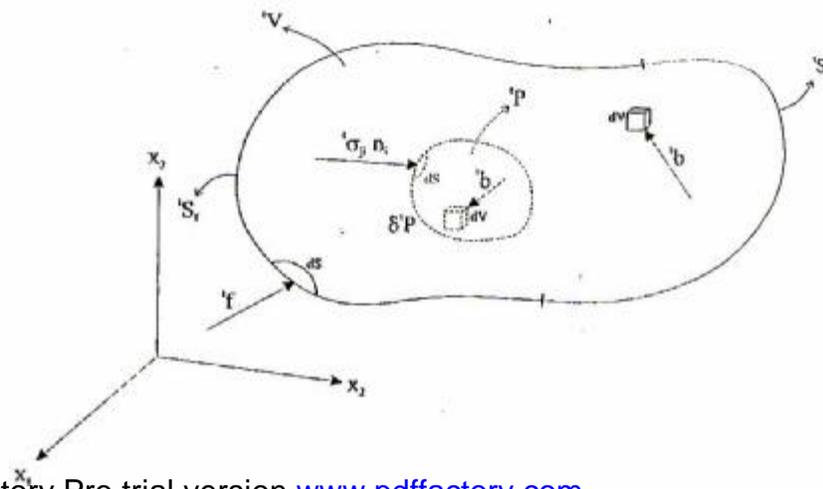


Figura. 2.2 Fuerzas que actúan sobre un medio continuo

2.2.2. Ecuación Del Movimiento Para Flujos Incompresibles

Para estudiar a los materiales que experimentan deformaciones incompresibles es conveniente descomponer al tensor de tensiones en dos partes, una llamada parte volumétrica y la otra parte desviadora. La parte volumétrica es la parte cuyas componentes son ${}^t p d_{ij}$ donde ${}^t p$ es la tensión media (o presión hidrostática), es decir

$${}^t p \frac{1}{3} ({}^t s_{11} + {}^t s_{22} + {}^t s_{33})$$

Este tensor representa a un estado tensional para el cual la tensión en cualquier dirección ${}^t n$ es ${}^t p {}^t n$. la parte desviadora se define como:

$${}^t s_{ij} - {}^t s_{ij} - {}^t p d_{ij} = \begin{bmatrix} {}^t s_{11} - {}^t p & {}^t s_{12} & {}^t s_{13} \\ {}^t s_{12} & {}^t s_{22} - {}^t p & {}^t s_{23} \\ {}^t s_{13} & {}^t s_{23} & {}^t s_{33} - {}^t p \end{bmatrix}$$

de manera que

$${}^t s_{ij} = {}^t s_{ij} + {}^t p d_{ij} \quad (2.4)$$

De la igualdad anterior surge que el tensor de tensiones desviador es un tensor cuyas direcciones principales coinciden con las direcciones de ${}^t s_{ij}$ y cuyas componentes principales difieren en el valor de la presión hidrostática, es decir, ${}^t s_i = {}^t s_i - {}^t p$.

En un material incomprensible (en particular en un metal que fluye plásticamente) se observa (ver referencia 10) que las deformaciones que experimenta el material son independientes de la presión hidrostática ${}^t p$. Entonces es conveniente escribir a la ecuación del movimiento en términos de esta descomposición del tensor de tensiones. De la ecuación (2.4) se deduce que

$$\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^t p}{\partial x_i} d_{ij} = \frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^t p}{\partial x_j}$$

por lo que la ecuación del movimiento (2.2) será

$$\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^t p}{\partial x_j} + {}^t b_j - {}^t \rho {}^t a_j = 0 \quad (2.5)$$

Esta es la expresión de la ecuación del movimiento que se utilizara en el análisis del flujo plástico de un metal que, como se dirá más adelante, es incomprensible.

2.2.3. Principio de las Potencias Virtuales

El método de los elementos finitos utiliza como punto de partida el principio de las potencias virtuales que es una forma equivalente de plantear la ecuación del movimiento (2.2). Considerando de nuevo un medio continuo (ver figura (2.2)) que ocupa una región ${}^t V$

del espacio, sobre el que actúan fuerzas exteriores de volumen ${}^t b_j$, fuerzas de inercia $-{}^t p^t a_j$, fuerzas de superficie ${}^t f_j$ (sobre la parte ${}^t S_f$ de la frontera ${}^t V$), se llama potencia virtual de las fuerzas exteriores a

$$\int_{{}^t V} ({}^t b_j - {}^t r^t a_j) {}^t dv_j dV + \int_{{}^t S_f} {}^t f_j {}^t dv_j dS$$

donde ${}^t dv_j$ es cualquier campo de velocidades (denominado velocidad virtual o variación de la velocidad) distinto al campo de velocidades real y que cumple las condiciones de ser nulo sobre la parte de la frontera donde se encuentran especificadas las velocidades ${}^t S_v$ (también debe ser continuo con derivadas parciales continuas). Se llama potencia virtual de las fuerzas interiores a

$$\int_{{}^t V} {}^t de_{ij} {}^t s_{ij} dV$$

donde ${}^t de_{ij}$ es la variación en la velocidad de deformación que se deriva de la variación de la velocidad ${}^t dv_j$, es decir,

$${}^t de_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t dv_j}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^t dv_i}{\partial x_j} \right)$$

El principio de las potencias virtuales establece que las tensiones ${}^t \sigma_{ij}$ que se establezcan en el cuerpo (es decir, las tensiones que son solución de la ecuación del movimiento para determinadas fuerzas exteriores ${}^t b_j$, fuerzas de inercia $-{}^t r^t a_j$, fuerzas de superficie ${}^t f_j$ y velocidades impuestas) verifican que la potencia virtual de las fuerzas exteriores es igual a la potencia virtual de las fuerzas interiores. Es decir, ${}^t s_{ij}$ será solución de la ecuación (2.2) con las condiciones de borde (2.3) si y solo si

$$\int_V \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_j}{\partial x_i} + \frac{\partial dv_i}{\partial x_j} \right) s_{ij} dV = \int_V ({}^t b_j - {}^t r \cdot {}^t a_j) dv_j dV + \int_{{}^t S_f} {}^t f_j dv_j dSFF \quad (2.6)$$

para toda variación de la velocidad dv_j nula sobre la parte ${}^t S_v$ de la frontera del cuerpo.² Para demostrar la equivalencia entre esta igualdad y la ecuación (2.2) se observa que

$$\frac{\partial (dv_j s_{ij})}{\partial x_i} = dv_j \frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial {}^t v_{ji}}{\partial x_i} s_{ij}$$

por lo que el trabajo virtual de las fuerzas interiores será

$$\int_V \frac{\partial (dv_j {}^t s_{ij})}{\partial x_i} dV - \int_V \frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} dv_j dV$$

o bien, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss

$$\int_{{}^t S} dv_j {}^t s_{ij} {}^t n_i dS - \int_V \frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} dv_j dV$$

Recordando que la variación de la velocidad en la parte de la frontera ${}^t S_v$ es nula por lo que

$$\int_{{}^t S} dv_j {}^t s_{ij} {}^t n_i dS = \int_{{}^t S_f} dv_j {}^t s_{ij} {}^t n_i dS, \text{ entonces el principio de las potencias virtuales (2.6) queda}$$

² Recordar que está utilizando la convención de supresión del símbolo de suma Σ por lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_j}{\partial x_i} + \frac{\partial dv_i}{\partial x_j} \right) s_{ij} &= \frac{\partial dv_1}{\partial x_1} {}^t s_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_2}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_1}{\partial x_2} \right) {}^t s_{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_3}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_1}{\partial x_3} \right) {}^t s_{13} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_1} \right) {}^t s_{21} &+ \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} {}^t s_{22} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_3}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_3} \right) {}^t s_{23} + \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_3} + \frac{\partial dv_3}{\partial x_1} \right) {}^t s_{31} &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_2}{\partial x_3} + \frac{\partial dv_3}{\partial x_2} \right) {}^t s_{32} + \frac{\partial dv_3}{\partial x_3} {}^t s_{33} \end{aligned}$$

que por ser el tensor de tensiones un tensor (es decir, ${}^t \sigma_{12} = {}^t \sigma_{21}$, ${}^t \sigma_{13}$, ${}^t \sigma_{31}$ y ${}^t \sigma_{23} = {}^t \sigma_{32}$) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_j}{\partial x_i} + \frac{\partial dv_i}{\partial x_j} \right) s_{ij} &= \frac{\partial dv_1}{\partial x_1} {}^t s_{11} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} {}^t s_{22} + \frac{\partial dv_3}{\partial x_3} {}^t s_{33} + \\ \left(\frac{\partial dv_2}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_1}{\partial x_2} \right) {}^t s_{12} &+ \left(\frac{\partial dv_3}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_1}{\partial x_3} \right) {}^t s_{13} + \left(\frac{\partial dv_3}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_3} \right) {}^t s_{23} \end{aligned}$$

$$\int_{tS} dv_j {}^t s_{ij} {}^t n_i dS - \int_{tV} \frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} dv_j dV = \int_{tV} ({}^t b_j - {}^t r {}^t a_j) dv_j dV + \int_{tS_f} {}^t f_j dv_j dS$$

o bien

$$\int_{tV} \left(\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} {}^t b_j - {}^t r {}^t a_j \right) dv_j dV + \int_{tS_f} ({}^t f_j - {}^t s_{ij} {}^t n_i) dv_j dS = 0$$

Estas integrales serán nulas para toda variación de velocidades dv_j si y solo si en tV y tS_f .

$\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial x_i} + {}^t b_j - {}^t r {}^t a_j = 0$ en tV y ${}^t f_j$ en tS_f es decir, si se cumple la ecuación (2.6) con las condiciones

de borde (2.3).

Principio de las Potencias virtuales en Términos de los Tensores Desviador y Volumétrico de las Tensiones.

Utilizando la descomposición (2.4) en la expresión del principio de las potencias virtuales

(2.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{tV} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_j}{\partial x_i} + \frac{\partial dv_i}{\partial x_j} \right) s_{ij} dV &= \int_{tV} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_j}{\partial x_i} + \frac{\partial dv_i}{\partial x_j} \right) p d_{ij} dV = 0 \\ &= \int_{tV} ({}^t b_j - {}^t r {}^t a_j) dv_j dV + \int_{tS_f} {}^t f_j dv_j dS \quad \forall dv_j \end{aligned}$$

En el segundo sumando del miembro izquierdo se observa que $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial dv_j}{\partial x_i} + \frac{\partial dv_i}{\partial x_j} \right) d_{ij} = \frac{\partial dv_i}{\partial x_i}$ por lo

que este sumando se reduce

$$\int_{tV} \frac{\partial dv_i}{\partial x_i} p dV$$

El primer sumando, si se hace con la velocidad de deformación virtual $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$ una descomposición análoga a la hecha con las tensiones, es decir

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathbf{d}_{ij}\right)}_{\text{Parte desviadora}} + \underbrace{\frac{1}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathbf{d}_{ij}}_{\text{Parte volumetrica}}$$

se reduce a

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathbf{d}_{ij} \right) s_{ij} dV + \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} p dV = \\ = \int_V \left({}^t b_j - {}^t r {}^t a_j \right) dv_j dV + \int_{S_f} {}^t f_j dv_j dS \quad \forall dv_j \end{aligned} \quad (2.7)$$

Al primer termino del miembro izquierdo se le denomina potencia virtual desviadora y al segundo, potencia virtual volumétrica.

Se han presentado las ecuaciones diferenciales que se utilizaran para describir el movimiento del material (desde el punto de vista Euleriano): La condición de incompresibilidad (2.1) (o ecuación de continuidad cuando la densidad r es constante) y la ecuación del movimiento (para flujos incompresibles) (2.5). Para resolverlas numéricamente mediante el método de los elementos finitos es necesario reexpresarlas en forma “débil” de la ecuación del movimiento (2.5). Con respecto a la condición de incompresibilidad (2.1), las distintas alternativas de expresarlas en forma “débil” serán discutidas en el capítulo 5.

3. RELACIONES CONSTITUTIVAS PARA METALES

Cuando a un cuerpo metálico se aplican cargas suficientemente grandes, se observa que una parte (pequeña) de la deformación total resultante puede recuperarse si se remueven las cargas mientras que la parte restante (la mas grande) es acumulada en forma permanente. La parte recuperable o elástica esta relacionada con las tensiones mediante la ley de Hooke de la teoría de la elasticidad. En este capitulo se construyen un conjunto de ecuaciones análogas a dichas relaciones tensión-deformación de la teoría de la elasticidad pero para la parte inelástica (o permanente) de las deformaciones del metal. En particular se formulan las ecuaciones para dos tipos de comportamiento inelástico: Plasticidad inviscida y Viscoplasticidad. Ambos comportamientos se diferencian del elástico wen que las deformaciones no se encuentran unívocamente determinadas por las tensiones como en el caso elástico sino que dependen de toda la historia de carga previa, es decir, de cómo fue alcanzado el estado de tensiones y deformaciones, y se diferencian entre si en que en la plasticidad inviscida se desprecia la influencia del tiempo (de la duración del proceso de deformación, y por lo tanto de la velocidad de deformación) en la respuesta del material, mientras que en el caso de la viscoplasticidad los efectos dinámicos no se desprecian y la influencia de la velocidad de deformación si se tienen en cuenta.

Cuando las fuerzas aplicadas sobre el material no son suficientemente grandes, la deformación que se produce es totalmente recuperable o elástica. Las deformaciones

permanentes comienzan a manifestarse solo cuando las fuerzas aplicadas superan cierto valor crítico. Existen entonces dos rangos de deformación: el rango elástico y el rango inelástico y se utilizan los términos *elasto/plástico* o *elasto/viscoplastico* para describir a los materiales que presentan esta característica. Pero frecuentemente las deformaciones inelásticas son tan grandes que, para este rango de cargas, las deformaciones elásticas resultan despreciables. Cuando esto ocurre, es posible considerarlas nulas también para cargas pequeñas y asumir que en ese caso, el material es rígido. Para describir los materiales en los que es posible hacer esta simplificación, se utilizaran los términos *Rigido/plástico* o *Rigido/Viscoplastico*. Referencias para este capítulo son [8], [10], [14], [17], [18], [19], [25] y [27]

3.1 PLASTICIDAD

Como se menciono antes, la deformación inelástica de un metal empieza solo cuando las tensiones alcanzan cierto valor crítico. Para tensiones menores a este valor la deformación es de naturaleza elástica, y cuando las tensiones igualan este valor comienzan las deformaciones permanentes. Una vez que este estado tensional crítico es alcanzado (y las deformaciones plásticas están por manifestarse) se observan los siguientes deformaciones:

- La deformación plástica (ompermanente) no se incrementa a menos que las tensiones se incrementen continuamente; es decir, si se mantienen las cargas

constantes, la deformación plástica no crece; solo crece cuando se incrementan las tensiones a valores mayores a la tensión crítica a la cual se inicio la fluencia. Este fenómeno se conoce con el nombre de endurecimiento por deformación.

- Si, alcanzado cierto nivel de tensiones, se suprimen las cargas que le daban origen, durante la descarga, el material se comporta elásticamente.
- Si, después de la descarga, se vuelve a pensionar al material la fluencia no volverá a comenzar sino cuando el ultimo nivel de tensiones al que se había llegado antes de iniciarse la descarga vuelva a ser alcanzado; es decir, el estado tensional critico que es necesario aplicar para producir en el material mas deformación permanente de la que ya fue impuesta cambia a medida que se acumula deformación plástica.

Se pueden entender mejor estos aspectos de la deformación plástica de un metal recordando los resultados del ensayo de tracción uniaxial que se ilustran en la curva tensión-Deformación de la figura (3.1). Se observan:

- El rango elástico inicial (Segmento O-A), seguido por
- La tensión crítica inicial 0s_y (Punto A) (o tensión de fluencia inicial) que señala el comienzo de la deformación plástica, y
- El rango plástico (con endurecimiento por deformación) (Curva A-B-D) en el que:
 - Son necesarias tensiones cada vez mayores para que crezca la deformación plástica,
 - Si alcanzado cierto nivel de tensiones 1s_y (Punto B), se suprimen las cargas,

las deformaciones vuelven a ser de naturaleza clásica (Curva B-C).

- Para producir mayor cantidad de deformación plástica es necesario que las tensiones vuelvan a igualar al último nivel de tensiones ${}^t\sigma_Y$ (Punto B) que se había alcanzado antes de comenzar la descarga.

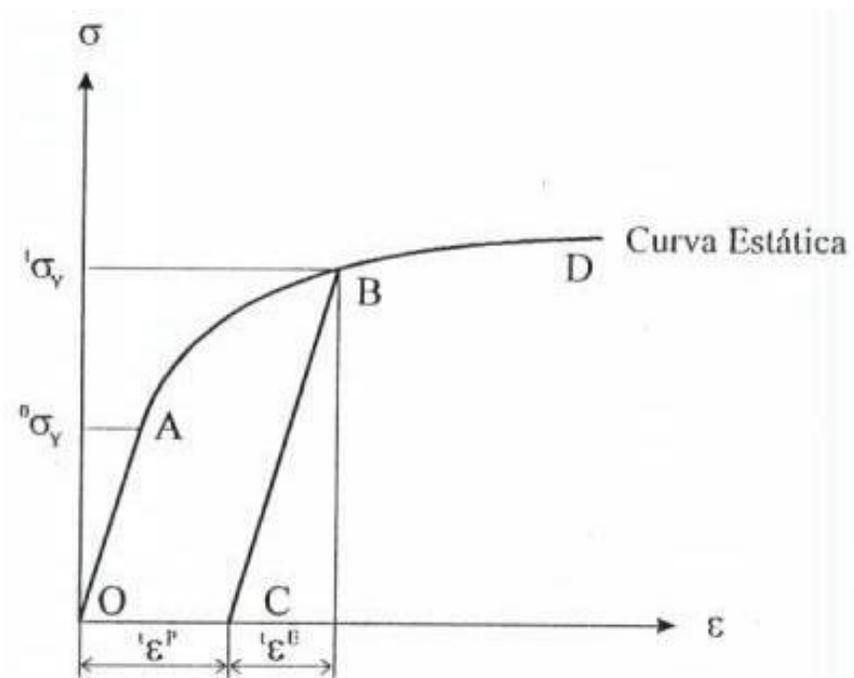


Figura 3.1: Curva Tensión-Deformación para un material con endurecimiento por deformación.

En algunos metales el fenómeno de endurecimiento por deformación prácticamente no se manifiesta. Si se lo desprecia completamente la curva tensión deformación pasa a tener la forma mostrada en la figura (3.2). los materiales para los cuales se hace esta idealización se denominan perfectamente plásticos. Se observa que estos materiales, a diferencia de aquellos en los que si existe endurecimiento, fluyen plásticamente a tensión constante e igual a la tensión crítica inicial ${}^0\sigma_Y$, y que si en un instante cualquiera se suprimen las cargas (punto B), para que el material vuelva a fluir plásticamente alcanza con aumentar las tensiones nuevamente hasta ${}^0\sigma_Y$ (y no hasta un valor mayor tS_Y como antes), es decir, la tensión de fluencia S_Y para estos materiales no depende de la cantidad de deformación plástica que se acumula.

En síntesis, existen ciertos estados tensionales críticos que marcan el comienzo de las deformaciones plásticas y que pueden variar a medida que dichas deformaciones plásticas progresan. Se pretende ahora a caracterizar a estos estados críticos (condición de fluencia), precisar para aquellos materiales que experimentan endurecimiento por deformación, la forma en que varían (condición de endurecimiento) y describir de que manera se incrementan las deformaciones plásticas cuando alguno de estos estados es alcanzado (ley de flujo).

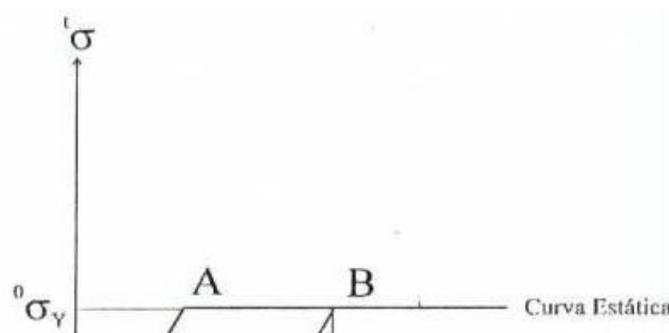


Figura 3.2: Curva Tensión-Deformación para un material perfectamente plástico

3.1.1. Condición de Fluencia

Para determinar los estados tensionales crítico que es necesario alcanzar para las deformaciones plásticas empiecen a manifestarse, se hacen las siguientes hipótesis denominadas condición de fluencia o ley de fluencia. Para los materiales que experimentan endurecimiento por deformación esta ley se puede enunciar de la siguiente manera (ver referencias (17) y (18)):

1. Los estados tensionales críticos son aquellos que verifican

$$F({}^t\mathbf{s}_{ij}, {}^tK_a) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad a = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

donde F es la denominada función de fluencia y tK_a es un conjunto de parámetros que dependen exclusivamente de la cantidad de deformación plástica acumulada hasta el instante t .

2. Para un dado estado de tensiones ${}^tS_{ij}$ y determinados valores de los parámetros tK_a (fijados estos últimos por una dada cantidad de deformación plástica), el material estará en régimen elástico si

$$F\left({}^tS_{ij}, {}^tK_a\right) < 0$$

o si

$$F\left({}^tS_{ij}, {}^tK_a\right) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial {}^tS_{ij}} \cdot {}^tS_{ij} < 0 \text{ (Condición de descarga)}$$

y se producirán deformaciones plásticas si

$$F\left({}^tS_{ij}, {}^tK_a\right) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial {}^tS_{ij}} \cdot {}^tS_{ij} \geq 0 \text{ (Condición de Carga)}$$

La primera condición establece que la deformación plástica comenzara cuando las tensiones verifiquen $F({}^tS_{ij}, {}^tK_a) = 0$; mientras $F({}^tS_{ij}, {}^tK_a)$ sea menor que 0, las deformaciones serán puramente elásticas. A medida que las deformaciones plásticas aumentan los parámetros tK_a crecen continuamente de manera que, si la fluencia se inicio en el instante $t=0$ cuando los parámetros tenían ciertos valores tK_a y si en un instante posterior $t=t$, el material es descargado y después cargado nuevamente, las deformaciones plásticas no volverán a manifestarse sino cuando las tensiones vuelvan a verificar $F({}^tS_{ij}, {}^tK_a) = 0$ siendo

${}^t K_a$ distintos y mayores a los valores iniciales ${}^0 K_a$. La segunda condición señala que el rango elástico estará formada por todos aquellos estados de tensión ${}^t S_{ij}$ para los cuales se cumple que $F({}^t S_{ij}, {}^t K_a) < 0$. A la condición $\frac{\partial F}{\partial {}^t S_{ij}} \cdot {}^t S_{ij} < 0$ se la denomina condición de descarga debido a que, si las tensiones que se desarrollan en un instante t , cumplen $F({}^t S_{ij}, {}^t K_a) = 0$ y se produce un incremento de tensiones ${}^t S_{ij} \cdot Dt$ que descarga al material, entonces (por la primera de las condiciones 2) las tensiones en el instante $t + \Delta t$ (que son iguales a las tensiones que existían en el instante t , mas el incremento de tensión, es decir, ${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}^t S_{ij} \cdot \Delta t$) deberán cumplir $F({}^{t+\Delta t} S_{ij}, {}^t K_a) < 0$ (Recordar que los parámetros ${}^t K_a$ varían solo cuando se produce un incremento de deformación plástica por lo que permanecen constantes durante una descarga); luego como $F({}^{t+\Delta t} S_{ij}, {}^t K_a) \approx F({}^t S_{ij}, {}^t K_a) + \frac{\partial F}{\partial {}^t S_{ij}} \cdot {}^t S_{ij} \cdot \Delta t = 0 + \frac{\partial F}{\partial {}^t S_{ij}} \cdot {}^t S_{ij} \cdot \Delta t$ deberá ser $\frac{\partial F}{\partial {}^t S_{ij}} \cdot {}^t S_{ij} < 0$ para que $F({}^{t+\Delta t} S_{ij}, {}^t K_a)$ sea menor que 0.

Para materiales perfectamente plásticos los estados tensionales críticos que señalan el comienzo de la fluencia no se modifican a medida que progresa la deformación plástica. La condición de fluencia se rescribe entonces para dichos metales en la siguiente forma:

1. Los estados tensionales críticos son aquellos que cumplen

$$F\left({}^t S_{ij}, {}^t K_a\right) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad a = 1, 2, \dots$$

siendo F la función de fluencia y K_a un conjunto de constantes

2. Para un dado estado de tensiones ${}^t s_{ij}$, el material estará en régimen elástico si

$$F\left({}^t s_{ij}, {}^t K_a\right) < 0$$

y se producirán deformaciones plásticas si

$$F\left({}^t s_{ij}, {}^t K_a\right) = 0$$

En otras palabras, para materiales perfectamente plásticos los parámetros K_a no aumentan con la deformación sino que permanecen constantes por lo que la fluencia se produce a tensión constante o cuando las tensiones evolucionen de manera que $F=0$ (para estos materiales no existe la posibilidad de que se produzca una carga, es decir,

de que $\frac{\partial F}{\partial {}^t s_{ij}} \cdot {}^t s_{ij} > 0$ porque los parámetros son constantes si se produce un incremento

de tensiones $\partial {}^t s_{ij} \Delta t$ para el que se cumple $\frac{\partial F}{\partial {}^t s_{ij}} \cdot {}^t s_{ij} > 0$, las tensiones que se alcanzan

después del incremento de carga cumplirán $F > 0$ y esto contradice la segunda condición)

Representación geométrica de la Ley de Fluencia

La igualdad $F({}^tS_{ij}, {}^tK_a) = 0$ se puede interpretar geoméricamente como una hipersuperficie en el espacio euclideo 6-dimensional de coordenadas cartesianas dadas por las 6 componentes diferentes del tensor de tensiones (en realidad, una familia de superficies de parámetros tK_a), denominada superficie de fluencia (ver referencias (17) y (18)). Los puntos de esta superficie representarían estados tensionales que definen el comienzo de las deformaciones plásticas y el interior $F({}^tS_{ij}, {}^tK_a) < 0$ representará el rango elástico. Como los parámetros tK_a dependen de la cantidad de deformación plástica que se acumula (cuando existe endurecimiento), la superficie de fluencia cambiara continuamente durante la fluencia. La condición de carga $\frac{\partial F}{\partial {}^tS_{ij}} \cdot {}^tS_{ij} > 0$ admite la siguiente interpretación en términos de esta representación geométrica (ver figura(3.3)): Como $\frac{\partial F}{\partial {}^tS_{ij}}$ será un vector normal saliente a la superficie de fluencia y ${}^tS_{ij} \cdot Dt$ un incremento de tensiones $\frac{\partial F}{\partial {}^tS_{ij}} \cdot {}^tS_{ij} > 0$ representara a un incremento de tensiones ${}^tS_{ij} \cdot Dt$ que apunta hacia el exterior de la superficie y $\frac{\partial F}{\partial {}^tS_{ij}} \cdot {}^tS_{ij} > 0$, a un incremento que apunta hacia el interior (rango elástico). Cuando $\frac{\partial F}{\partial {}^tS_{ij}} \cdot {}^tS_{ij} = 0$ el incremento de tensiones será tangente. La condición de carga implica que existirá fluencia solo cuando el incremento de tensiones ${}^tS_{ij} \cdot Dt$ apunte hacia el exterior o sea tangente. Para los materiales perfectamente plásticos, la superficie de fluencia no

cambia con la deformación y en este caso se producirá incremento de deformación plástica cuando la tensión se mantenga constante o cuando el incremento de tensiones ${}^t s_{ij} \cdot Dt$ sea tangente a la superficie.

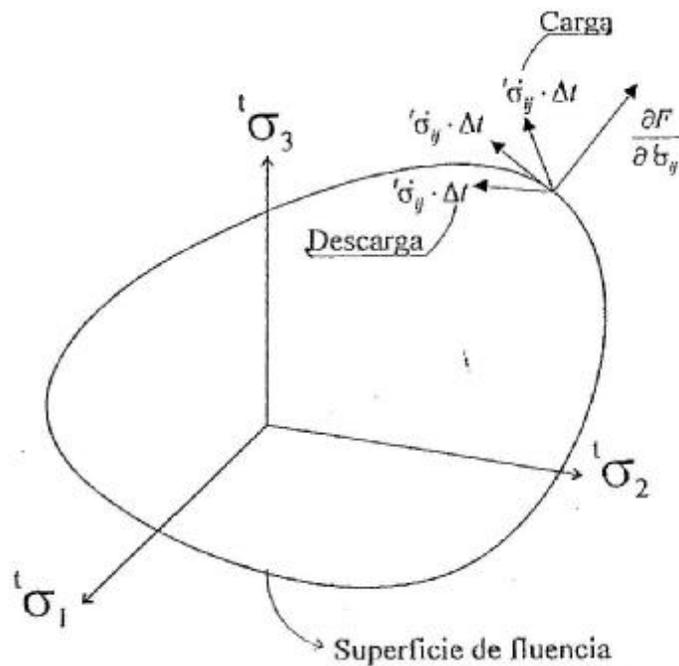


Figura 3.3: Representación de los rangos elásticos e inelásticos de carga

La ecuación (3.1) que define a la superficie de fluencia toma una forma más simple si se hace uso de las siguientes hipótesis (ver referencia [17]):

1. La fluencia es independiente de la presión hidrostática.
2. El material es isótropo.

La primera condición surge de observaciones experimentales (ver referencias [10] y [18]) que demostraron que las presiones hidrostáticas producen una cantidad despreciable de deformación plástica tanto cuando son las únicas tensiones aplicadas como cuando actúan superpuestas a algún estado tensional combinado. Esta hipótesis implica que la función de carga F depende solamente de la parte desviadora ${}^t s_{ij}$ del tensor de tensiones ya que esta parte no es afectada por cambios en la presión hidrostática. Por lo tanto la ley de fluencia (3.1) se expresará como

$$F({}^t s_{ij}, {}^t K_a) = 0$$

La segunda condición (condición isotropía) implica que no existen direcciones preferenciales para las tensiones que favorezcan el comienzo de la fluencia y que por lo tanto F puede depender solo de las componentes principales $({}^t s_1, {}^t s_2, {}^t s_3)$ del tensor de tensiones desviador pero no de las direcciones principales $({}^t n_1, {}^t n_2, {}^t n_3)$; Además F debe ser una función simétrica de $({}^t s_1, {}^t s_2, {}^t s_3)$ porque todas las tensiones principales deben cumplir el mismo rol en la fluencia. En otras palabras, la función de fluencia F debe ser una función isótropa del tensor desviador de tensiones y la ley de fluencia se expresara según:

$$\begin{cases} F({}^t s_1, {}^t s_2, {}^t s_3, {}^t K_a) = 0 \\ F({}^t s_1, {}^t s_2, {}^t s_3, {}^t K_a) = F({}^t s_3, {}^t s_1, {}^t s_2, {}^t K_a), etc \end{cases} \quad (F \text{ es simétrica})$$

Como las componentes principales del tensor desviador de tensiones son las soluciones de la ecuación característica

$$-s^3 + {}^t J_2 \cdot s + {}^t J_3 = 0$$

donde:

$$\begin{aligned}
{}^t J_2 &= \frac{1}{2} {}^t s_{ij} {}^t s_{ij} = {}^t s_{11}^2 + {}^t s_{22}^2 + {}^t s_{33}^2 + 2({}^t s_{13}^2 + {}^t s_{23}^2 + {}^t s_{12}^2) \\
{}^t J_3 &= \frac{1}{3} {}^t s_{ij} {}^t s_{ijk} {}^t s_{ki} = \left| {}^t s_{ij} \right| = {}^t s_{11} {}^t s_{22} {}^t s_{33} - ({}^t s_{13}^2 {}^t s_{22} + {}^t s_{23}^2 {}^t s_{11} + {}^t s_{12}^2 {}^t s_{33}) + {}^t s_{12} {}^t s_{23} {}^t s_{31}
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

son los invariantes principales del tensor desviador de tensiones,³ entonces dichas tensiones desviadoras principales serán funciones algebraicas de los invariantes escalares ${}^t J_2$ y ${}^t J_3$.

luego la ley de fluencia se podrá expresar como

$$F({}^t J_2, {}^t J_3, {}^t K_a) = 0 \tag{3.3}$$

3.1.2. Ley de Endurecimiento

Como se dijo antes, en aquellos metales que experimentan endurecimiento por deformación, la superficie de fluencia cambia a medida que las deformaciones plásticas progresan. La ecuación (3.1) permite conocer para qué estados de tensiones comienzan las deformaciones plásticas pero no dice nada respecto a como varía la superficie de fluencia, es decir, como varían los parámetros ${}^t K_a$. Al conjunto de hipótesis que se hacen para determinar dicha variación se lo denomina ley de endurecimiento. La mas simple de estas leyes es la llamada ley de endurecimiento isótropo según la cual se supone que las sucesivas superficies de fluencia no cambian de forma, sino solo de tamaño éste parámetro

³ El primer invariante ${}^t J_1 = {}^t s_{11} + {}^t s_{22} + {}^t s_{33}$ es nulo porque se trata de un tensor desviador

$$\left({}^t s_{ij} = {}^t s_{ij} - \frac{1}{3} {}^t s_{kk} \delta_{ij} \Rightarrow {}^t s_{kk} - \frac{1}{3} {}^t s_{kk} \cdot 3 = 0 \right)$$

aumenta por ejemplo al doble, se deberán aumentar las tensiones también al doble para comenzar de nuevo la fluencia. Esta ley postula además que el mecanismo que produce el endurecimiento actúan igualmente en tensión que en compresión cualquiera sea la cantidad de deformación que haya acumulado el material (cualquiera sea tK), es decir, si la fluencia comienza cuando las tensiones alcanzan cierto valor ${}^tS_{ij}$ (tracción) entonces también debe comenzar cuando el estado tensional sea $(-{}^tS_{ij})$. Matemáticamente esta ley se expresa de la siguiente:

1. La condición de fluencia depende de un único parámetro tK , es decir.

$$F({}^tJ_2, {}^tJ_3, {}^tK) = 0 \quad (3.4)$$

2. La función de fluencia F es una función homogénea de grado cero de ${}^tS_{ij}$ y de tK ,⁴ es decir:

$$F(a {}^tS_{ij}, a {}^tK) = F({}^tS_{ij}, {}^tK) \quad \forall a$$

3. La función de fluencia F es una función para de ${}^tS_{ij}$ para cualquier tK , es decir,

$$F({}^tS_{ij}, {}^tK) = F(-{}^tS_{ij}, {}^tK) \quad \forall {}^tK$$

Cuando la hipótesis de homogeneidad de la función de fluencia con las condiciones de isotropía e independencia de hidrostática discutidas en la sección anterior, es posible

⁴ Se denomina función homogénea de grado n a aquella función $f(x)$ que verifica $f(ax) = a^n f(x) \quad \forall a$

En particular, una función será homogénea de grado 0 si cumple $f(ax) = f(x)$ cualquiera sea la constante a . Las funciones homogéneas de grado n verifican la siguiente identidad (conocida como teorema de Euler de las funciones homogéneas).

$$x \nabla f(x) = n f(x)$$

expresar a la condición de fluencia con endurecimiento isótropo en una forma más conveniente que la de la ecuación (3.4): Observando que por la condición de homogeneidad resulta $F(\frac{1}{tK} {}^tS_{ij}, \frac{1}{tK} {}^tK) = F(\frac{{}^tS_{ij}}{{}^tK}, 1)$ y llamando $f(x)$ a $f(x, 1)$ se puede reescribir a la condición de fluencia como:

$$f\left(\frac{{}^tS_{ij}}{{}^tK}\right) = 0$$

(donde f debe ser una función par de $\frac{{}^tS_{ij}}{{}^tK}$ para que el inicio de la fluencia sea el mismo en tracción y en compresión) o bien, agregando las hipótesis simplificativas de la sección anterior, como:

$$F\left(\frac{{}^tJ_2}{{}^tK^2}, \frac{{}^tJ_3}{{}^tK^3}\right) = 0$$

donde la función de fluencia f es ahora adimensional dado que se supone que el parámetro tK tiene unidades de tensión (y par porque el mecanismo de endurecimiento es el mismo en tracción y en compresión).⁵ Observando ahora que

⁵ En realidad f debe ser función par solo de $\frac{{}^tJ_3}{{}^tJ_3}$ dado que observando las definiciones de tJ_2 y tJ_3 (ecuaciones (3.2)) se deduce que

$$\begin{aligned} {}^tJ_2({}^tS_{ij}) &= {}^tJ_2(-{}^tS_{ij}) \\ {}^tJ_3({}^tS_{ij}) &= -{}^tJ_3(-{}^tS_{ij}) \end{aligned}$$

es decir, que tJ_2 es una función para de ${}^tS_{ij}$ y tJ_3 es una función impar, por lo que para f sea función par de ${}^tS_{ij}$ alcanza con que sea función par solo de tJ_3 .

$$f\left(\frac{tJ_2}{tK^2}, \frac{tJ_3}{tK^3}\right) = f\left(\left(\frac{\sqrt{tJ_2}}{tK}\right)^2, \left(\frac{\sqrt{tJ_2}}{tK}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}\right)\right), \quad \text{que entonces la igualdad}$$

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{tJ_2}}{tK}\right)^2, \left(\frac{\sqrt{tJ_2}}{tK}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}\right)\right) = 0 \text{ define implícitamente a } \frac{\sqrt{tJ_2}}{tK} \text{ como función de } \frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}, \text{ es}$$

$$\text{decir } \frac{\sqrt{tJ_2}}{tK} = M\left(\frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}\right), \text{ entonces la condición de fluencia (con endurecimiento isótropo)}$$

resulta:

$$\frac{\sqrt{tJ_2}}{tJ_2} - M\left(\frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}\right) = 0$$

o bien,

$$\frac{\sqrt{tJ_2}}{tKM\left(\frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}\right)} - 1 = 0 \quad (3.5)$$

siendo $M(x)$ una función adimensional (y par, es decir, $M(x)=M(-x)$ para que el inicio de la fluencia sea el mismo en tracción o compresión).

La ecuación (3.5) es la expresión más conveniente para la condición de fluencia con endurecimiento isótropo. Todas las hipótesis hechas hasta ahora, es decir, independencia de las presiones hidrostáticas, isotropía, igualdad ante tracción o compresión, dependencia de

un único parámetro y homogeneidad de grado cero, se encuentran condensadas en la misma. Además esta forma de expresar a la condición de fluencia, es la que permitirá más adelante definir a la denominada *deformación plástica equivalente*, que es la magnitud que mide la cantidad de deformación plástica que se acumula en el material.

Representación geométrica de la condición de fluencia con endurecimiento isótropo

En la sección anterior se dijo que la condición de fluencia puede asociarse con una hipersuperficie en el espacio 6-dimensional de coordenadas ${}^tS_{ij}$. Como la hipótesis de isotropía implica que para definir a un estado tensional cualquiera ${}^tS_{ij}$ alcanza con especificar solo sus tres componentes principales (${}^tS_1, {}^tS_2, {}^tS_3$), entonces para representar geoméricamente a la condición de fluencia (3.5) de un material isótropo se podrá utilizar el espacio 3-dimensional con coordenadas cartesianas dadas por las tres componentes principales (${}^tS_1, {}^tS_2, {}^tS_3$).

Para ver que forma tiene en este espacio la superficie de fluencia dada por la igualdad (3.5) se observa primero que (ver figura (3.4)) la dirección (1,1,1) representa a los estados tensionales puramente hidrostáticos (ya que para dichos estados, ${}^tS_1 = {}^tS_2 = {}^tS_3$) y que el plano perpendicular a la dirección hidrostática y pasante por el origen, es decir, el plano ${}^tS_1 + {}^tS_2 + {}^tS_3 = 0$, representa estados tensionales puramente desviadores. Por lo tanto la proyección ortogonal de un estado tensional cualquiera (${}^tS_1, {}^tS_2, {}^tS_3$) sobre la dirección

hidrostática (1,1,1) representará su parte volumétrica,⁶ y la proyección sobre el plano desviador, su parte desviadora (${}^t s_1 {}^t s_2 {}^t s_3$). Como la condición de fluencia es independiente de la presión hidrostática, la superficie de fluencia deberá ser paralela a la dirección (1,1,1), es decir, las intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano desviador (que es un plano perpendicular a la dirección hidrostática), deberán ser todas idénticas. En la figura (3.5) se dibuja una de estas curvas: la curva intersección con el plano desviador ${}^t s_1 + {}^t s_2 + {}^t s_3 = 0$. Debido a las condiciones de isotropía y de paridad de la condición de fluencia, esta curva resultará simétrica respecto las proyecciones de los ejes coordenados (que están separadas entre si por un ángulo de 120°) y respecto a los tres ejes perpendiculares a éstos (ver referencia [18]). Se puede demostrar (ver referencia [7]) que si r y θ son las coordenadas polares de cualquier punto P ubicado sobre esta curva, (θ medido a partir de eje ${}^t s_2$ proyectado entonces:

$$r = \sqrt{2 {}^t J_2}$$

$$\cos^2(3\theta) = \frac{27}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)^6$$

⁶ La proyección ortogonal de (${}^t \sigma_1, {}^t \sigma_2, {}^t \sigma_3$) sobre la dirección (1,1,1) esta dada por el vector

$$\left[\frac{({}^t s_1, {}^t s_2, {}^t s_3)(1,1,1)}{(1,1,1) \cdot (1,1,1)} \right] \cdot (1,1,1) = \frac{({}^t s_1, {}^t s_2, {}^t s_3)}{3} \cdot (1,1,1)$$

es decir, r y θ están relacionados respectivamente con los invariantes $\sqrt{J_2}$ y $\frac{\sqrt[3]{J_3}}{\sqrt{J_2}}$ que aparecen en la condición de fluencia (3.5). Por lo tanto la igualdad (3.5) puede ser reinterpretada como:

$$\frac{r}{\sqrt{2}^t Km(q)} - 1 = 0$$

o bien,

$$r = \sqrt{2}^t Km(q) \quad (3.6)$$

es decir la ecuación polar de dicha curva.

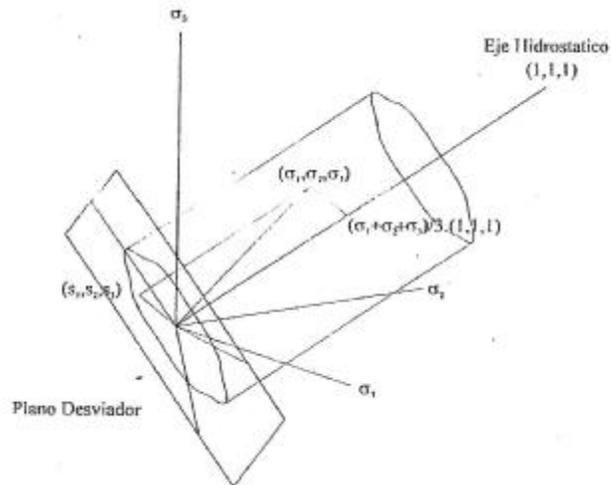


Figura 3.4: Superficie de Fluencia

Con la ecuación (3.6) se puede entender mejor la semejanza geométrica entre las sucesivas superficies de fluencia que caracteriza a la ley de endurecimiento isótropo. Se observa que

todas las superficie de fluencia crecen en cada dirección radial (fijada por el ángulo θ) proporcionalmente al parámetro tK . (Figura 3.6)

Ley de Fluencia de Von-Mises

De todas las posibles leyes de fluencia con endurecimiento isótropo (expresadas matemáticamente por la ecuación (3.5) la más simple es denominada ley de fluencia de Vn Mises en la que se adopta $M=cte$. Es decir, se hace la suposición que la superficie no depende del ángulo θ por lo que las intersecciones con los planos paralelos al plano hidrostático son circulo de radio proporcional a tK .⁷

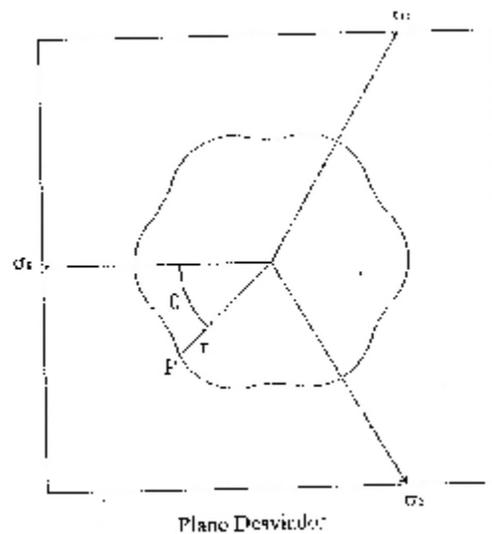


Figura 3.5: Intersección de la superficie de fluencia con el plano desviador

⁷ Si se utiliza en la ecuación (3.6) $m(\theta)=cte.$, la superficie de fluencia resulta $r = \sqrt{2}K \text{ cte}$ o bien, $r=cte_2 {}^tK$.

En otras palabras, la superficie de fluencia de Von Mises es un cilindro circular de radio proporcional a t_K (cuyos ejes es el vector (1,1,1)) (Figura (3.7)). Usualmente se la expresa como:

$$\frac{\sqrt{t J_2}}{t_K} - 1 = 0 \quad (3.7)$$

o, teniendo en cuenta la ecuación (3.2) como

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} t s_{ij} t s_{ij}}}{t_K} - 1 = 0$$

3.1.3. Ley de flujo Asociada

Hasta ahora se ha hecho una caracterización de los estados tensionales limite que dan lugar al inicio de la fluencia (Ley de fluencia) y de la forma en que estos estados van variando a medida que las deformaciones plásticas progresan (Ley de endurecimiento).

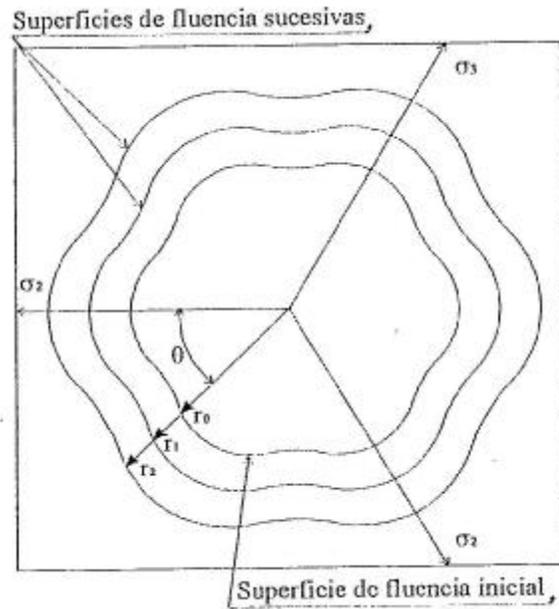


Figura 3.6: Crecimiento de la superficie según el modelo de endurecimiento isótropo

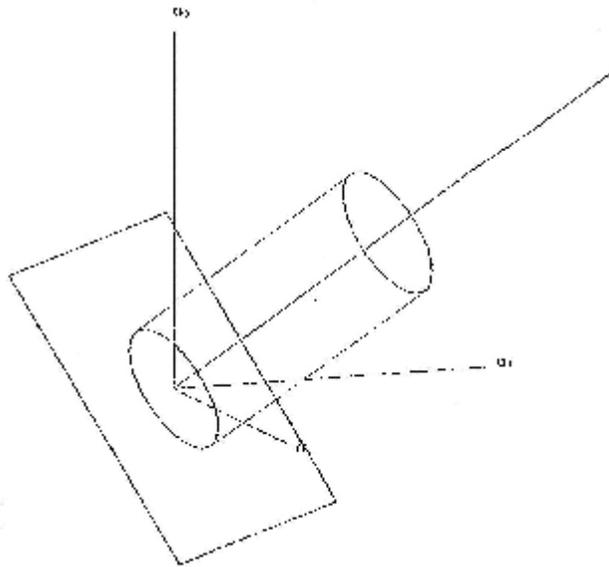


Figura 3.7: Superficie de fluencia de Von Mises

Estos valores van variando a medida que las deformaciones plásticas progresan (Ley de endurecimiento). Ahora se pretende describir cómo se incrementará la deformación plástica cuando alguno de dichos estados sea alcanzado, es decir, cómo serán las componentes del tensor velocidad de deformación plástica cuando las tensiones verifiquen $f\left(\frac{{}^t s_{ij}}{{}^t K}\right) = 0$, siendo

f la función de fluencia redefinida como:

$$f\left(\frac{{}^t s_{ij}}{{}^t K}\right) = \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{{}^t_{KM} \left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)} - 1 \quad (3.8)$$

Para esto se hacen las siguientes hipótesis:

1. El flujo plástico en metales es incompresible
2. Las direcciones principales del tensor desviador de tensiones ${}^t s_{ij}$ y las direcciones principales del tensor desviador de velocidad de deformación plástica ${}^t e_{ij}$ en metales coinciden.

La primera condición surge de observaciones experimentales. Si se supone que la velocidad de deformación ${}^t e_{ij}$ puede descomponerse en la forma

$${}^t e_{ij} = {}^t e_{ij}^E + {}^t e_{ij}^P$$

donde ${}^t e_{ij} = {}^t e_{ij}^E$ y ${}^t e_{ij}^P$ son respectivamente las contribuciones puramente elástica y puramente plástica a la velocidad de deformación total entonces la condición de incompresibilidad del flujo plástico se puede expresar como (ver referencia [10], [17] y [18])

$${}^t e_{kk}^P = {}^t e_{11}^P + {}^t e_{22}^P + {}^t e_{33}^P = 0$$

por lo que el tensor velocidad de deformación plástica ${}^t e_{ij}^P$ será idéntico a su parte desviadora.⁸ La segunda hipótesis es consecuencia de la hipótesis de isotropía del material. Las dos condiciones pueden satisfacer con suficiente generalidad si se supone que la deformación plástica y las tensiones se relacionan según:

$${}^t e_{ij}^P = {}^t I \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t S_{ij}} \right) \quad (3.9)$$

⁸ Análogamente el tensor de tensiones ${}^t S_{ij}$, el tensor de velocidad de deformación ${}^t e_{ij}$ (o su parte plástica) también se puede descomponerse en una parte “desviadora” y otra “volumétrica”:

$${}^t e_{ij} = \underbrace{\left({}^t e_{ij} - \frac{1}{3} {}^t e_{kk} d_{ij} \right)}_{\text{Parte desviadora}} + \underbrace{\frac{1}{3} {}^t e_{kk} d_{ij}}_{\text{Parte volumétrica}}$$

Entonces, si ${}^t e_{kk} = 0$, el tensor ${}^t e_{ij}$ resultará igual a su parte desviadora.

donde ${}^t\lambda$ es un factor de proporcionalidad que depende de la posición ${}^t x_i$ y del tiempo t y $\frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}}$ es el gradiente de la función de fluencia (3.8) evaluado en un punto de la superficie

de fluencia, es decir, en ${}^t s_{ij}$ tal que $f\left(\frac{{}^t s_{ij}}{{}^t K}\right) = 0$.⁹ A esta igualdad se llama *Ley de flujo*

asociada con la función de fluencia f.¹⁰ Geométricamente significa que el tensor velocidad de deformación plástica ${}^t e_{ij}^P$ debe ser perpendicular a la superficie de fluencia.¹¹ Las

razones por las cuales las hipótesis mencionadas al principio surgen necesariamente de la

⁹ El factor ${}^t K$ se introduce en la ecuación (3.9) para que el parámetro ${}^t\lambda$ tenga unidades de velocidad de deformación (${}^t k \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}}$ es adimensional).

La ley de flujo se puede formular en forma más general como
$${}^t e_{ij}^P = {}^t I \left({}^t K \frac{\partial P}{\partial {}^t s_{ij}} \right)$$

donde $P\left(\frac{{}^t s_{ij}}{{}^t K}\right)$ es una función isótropa adimensional llamada *Potencia Plástico*. Si se elige como potencial plástico P a la misma función de fluencia f , entonces se obtiene la igualdad (3.9) y se dice que se ha adoptado una ley de flujo *asociada con el criterio de fluencia* o más brevemente que la ley de flujo en *Asociada*. Se puede demostrar [10]) que de todos los estados tensionales ${}^t s_{ij}$ que se pueden establecer dentro del sólido cuando se produce la deformación plástica ${}^t e_{ij}^P$, el estado que verifica la igualdad (3.9) es decir, la ley de flujo asociada, es aquel para el cual la potencia necesaria para producir dicha deformación plástica dada por ${}^t W^P = {}^t s_{ij} {}^t e_{ij}^P$ (llamada también *Disipación Plástica* por su naturaleza irreversible) es máxima. Se dice entonces que la ley de flujo asociada es aquella para el cual *se maximiza la disipación plástica*.

¹¹ De la misma manera que cada estado tensional ${}^t s_{ij}$ puede ser representado por un vector de componentes $({}^t s_1, {}^t s_2, {}^t s_3)$ del espacio 3-dimensional, cada tensor de velocidad de deformación plástica ${}^t e_{ij}^P$ puede ser representado por el vector de componentes $({}^t e_1^P, {}^t e_2^P, {}^t e_3^P)$ del mismo espacio. Cuando se dice que el tensor ${}^t e_{ij}^P$ tiene dirección perpendicular a la superficie de fluencia, lo que se quiere expresar es que el vector representativo de este tensor, es decir, el vector $({}^t e_1^P, {}^t e_2^P, {}^t e_3^P)$, tiene dicha dirección.

misma son las siguientes: como la función de fluencia no depende de la presión hidrostática, es decir, depende exclusivamente de las tensiones desviadoras ${}^t s_{ij}$, entonces

resulta $\frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{kl}} \cdot \frac{\partial {}^t s_{kl}}{\partial {}^t s_{ij}}$. Luego, como ${}^t s_{kl} = {}^t s_{kl} - \frac{1}{3}({}^t s_{11} + {}^t s_{22} + {}^t s_{33}) \cdot d_{ij}$, las derivadas

$\frac{\partial {}^t s_{kl}}{\partial {}^t s_{ij}}$ cumplirán $\frac{\partial {}^t s_{kl}}{\partial {}^t s_{11}} + \frac{\partial {}^t s_{kl}}{\partial {}^t s_{22}} + \frac{\partial {}^t s_{kl}}{\partial {}^t s_{33}} = 0$ por lo que

$${}^t e_{11}^P + {}^t e_{22}^P + {}^t e_{33}^P = {}^t I \left(\frac{\partial f}{\partial {}^t s_{11}} + \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{22}} + \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{33}} \right) = {}^t I \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{kl}} \left(\frac{\partial s_{kl}}{\partial {}^t s_{11}} + \frac{\partial s_{kl}}{\partial {}^t s_{22}} + \frac{\partial s_{kl}}{\partial {}^t s_{33}} \right) = 0$$

Esto demuestra por que (3.9) implica la condición de incompresibilidad. Para ver por que esta ecuación implica la condición de igualdad entre las direcciones principales de ${}^t \sigma_{ij}$ y

${}^t e_{ij}^P$ se desarrollan las derivadas $\frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}}$:

$${}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \frac{1}{2} \frac{1}{M} \left[\frac{{}^t s_{ij}}{\sqrt{2J_2}} - \left(\frac{M}{M} \right) \frac{\left(\frac{2}{3} \left(\frac{{}^t s_{ik} {}^t s_{kj}}{{}^t J_2} - \frac{2}{3} d_{ij} \right) - \left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)^3 \frac{{}^t s_{ij}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)}{\left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)^2} \right] \quad (3.10)$$

donde M es la derivada de la función M respecto a su argumento y evaluada en $\frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}$. Como

${}^tK \frac{\partial f}{\partial {}^tS_{ij}}$ resulta un polinomio tensorial de grado 2 en ${}^tS_{ij}$ cuyos coeficientes son funciones

invariantes de ${}^tS_{ij}$, es decir:

$${}^tK \frac{\partial f}{\partial {}^tS_{ij}} = P d_{ij} + Q {}^tS_{ij} + R {}^tS_{ik} {}^tS_{kj}$$

con P , Q y R , funciones de los invariantes $\sqrt{tJ_2}$ y $\frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}$, entonces, n_j es una dirección

principal de ${}^tS_{ij}$, es decir ${}^tS_{ij}n_j = {}^tS_{ij}n_i$ (siendo tS alguna de las tensiones principales tS_1 , tS_2 o tS_3),

entonces también lo será de ${}^tK \frac{\partial f}{\partial {}^tS_{ij}}$.¹² Esto demuestra entonces que las direcciones de ${}^tE_{ij}^P$

y ${}^tS_{ij}$ serán coincidentes si ambos tensores se relacionan a través de la ley de flujo (3.9).

Es importante aclarar que la igualdad (3.9) no determina completamente a la velocidad de deformación plástica ${}^tE_{ij}^P$ (cuando las tensiones ${}^tS_{ij}$ son conocidas), sino que sólo establece

condiciones sobre su “dirección”, es decir, sólo permite conocer las relaciones

$\frac{{}^tE_{11}^P}{{}^tE_{22}^P}$, $\frac{{}^tE_{11}^P}{{}^tE_{33}^P}$, $\frac{{}^tE_{11}^P}{{}^tE_{12}^P}$, $\frac{{}^tE_{11}^P}{{}^tE_{23}^P}$, etc. entre sus componentes.

¹² La dirección n_j es también dirección principal de ${}^tK \frac{\partial f}{\partial {}^tS_{ij}}$ porque

$${}^tK \frac{\partial f}{\partial {}^tS_{ij}} n_j = (d_{ij} + Q {}^tS_{ij} + R {}^tS_{ik} {}^tS_{kj}) n_j = (P + Q {}^tS + R ({}^tS)^2) n_j, {}^tK \frac{\partial f}{\partial {}^tS_{ij}} n_j = a n_i. \text{ es decir,}$$

En la sección anterior se dijo que el invariante $\frac{\sqrt[3]{tJ_3}}{\sqrt{tJ_2}}$ está relacionado con la dirección del vector de componentes $(t_{s_1}, t_{s_2}, t_{s_3})$ que representa a las tensiones desviadoras $t_{s_{ij}}$ (ángulo θ de la figura (3.5)). Una interpretación análoga se puede hacer para la velocidad de deformación plástica $t e_{ij}^P$: Llamando $t d_2^P$ y d_3^P a los invariantes principales de este tensor, es decir,

$$\begin{aligned} t d_2^P &= \frac{1}{2} t e_{ij}^P t e_{ij}^P \\ t d_3^P &= \frac{1}{3} t e_{ik}^P t e_{kj}^P t e_{ji}^P \end{aligned} \quad (3.11)$$

se puede demostrar (ver referencia [7] y [18] que el invariante $\frac{\sqrt[3]{tJ_3^P}}{\sqrt{tJ_2^P}}$ está relacionado con dirección del vector de componentes $(t e_1, t e_2, t e_3)$ que representa a la velocidad de deformación $t e_{ij}^P$. Como la ley de flujo establece que la dirección del tensor $t e_{ij}^P$ es la dirección normal a la superficie de fluencia, y como según la ecuación (3.5) los puntos de la superficie de fluencia están determinados exclusivamente por la dirección de la desviadora $t_{s_{ij}}$ del tensor de tensiones (por lo que la normal a la superficie también estará determinada exclusivamente por la dirección del tensor de tensiones desviador) entonces la ley de flujo implicará necesariamente cierta relación entre los invariantes $\frac{\sqrt[3]{t d_3^P}}{\sqrt{t d_2^P}}$ y $\frac{\sqrt[3]{t J_3}}{\sqrt{t J_2}}$ dado que éstos invariantes representan respectivamente a las direcciones de $t e_{ij}^P$ y de $t_{s_{ij}}$. Para encontrar esta relación se hace lo siguiente: elevando al cuadrado cada miembro de la ecuación (3.9)

y sumando las nueve componentes se obtiene:

$${}^t e_{ij}^P {}^t e_{ij}^P = {}^t I^2 \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{jk}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{kl}} \right)$$

y elevando al cubo cada miembro y sumando se obtiene :

$${}^t e_{ik}^P {}^t e_{kj}^P {}^t e_{ji}^P = {}^t I^3 \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{jk}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{kl}} \right)$$

por lo que, teniendo en cuenta las (3.11) resulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{{}^t d_2^P} &= {}^t I \sqrt{\frac{1}{2} \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right)} \\ \sqrt[3]{{}^t d_3^P} &= {}^t I \sqrt[3]{\frac{1}{3} \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ik}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{kj}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ji}} \right)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

aplicando la notación

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt[3]{{}^t J_3^P}}{\sqrt{{}^t J_2}} \text{ y utilizando la expresión (3.10) del gradiente de la función de} \\ m &= \frac{\sqrt[3]{{}^t d_3^P}}{\sqrt{{}^t d_2}} \end{aligned}$$

fluencia para desarrollar los miembros derechos de la ecuación anterior, se puede demostrar

¹³ que las igualdades (??) y (3.12) adquieren la siguiente forma:

¹³ Las ecuaciones (3.13) se pueden deducir utilizando las identidades:

$$\sqrt{{}^t d_2^P} = {}^t I \frac{1}{2} \frac{1}{M(m)} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{M'(m)}{M(m)} \right)^2 \frac{(4/27 - m^6)}{m^4} \right]}$$

$$\sqrt[3]{{}^t d_3^P} = {}^t I \frac{1}{2} \frac{1}{M(m)} m \sqrt[3]{1 - 3 \left(\frac{M'(m)}{M(m)} \right) \frac{(4/27 - m^6)}{m^5} - 3 \left(\frac{M'(m)}{M(m)} \right)^2 \frac{(4/27 - m^6)}{m^4} + \left(\frac{M'(m)}{M(m)} \right)^3 \frac{(4/27 - m^6)^2}{m^9}} \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{2} \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right) = \text{Traza} \left\{ \left[{}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right]^2 \right\}$$

$$\frac{1}{3} \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ik}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{kj}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ji}} \right) = \text{Traza} \left\{ \left[{}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right]^3 \right\}$$

donde el corchete $\left[{}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \right]$ representa a la matriz con los componente del tensor ${}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}}$. Como $\left[{}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ik}} \right]$ es un polinomio de grado 2 en $[{}^t s_{ij}]$, entonces $\left[{}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ik}} \right]^2$ y $\left[{}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ik}} \right]^3$ resultaran ser polinomios de grado 4 y 6 en $[{}^t s_{ij}]$ respectivamente por lo que los miembros derechos de estas igualdades resultarán ser sumas de los invariantes $\text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}] \right\}$, $\text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^2 \right\}$, $\text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^3 \right\}$, $\text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^4 \right\}$, $\text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^5 \right\}$ y $\text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^6 \right\}$. La deducción de las ecuaciones se completa utilizando las igualdades:

$$\begin{aligned} \text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}] \right\} &= 0 \\ \text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^2 \right\} &= 2 {}^t J_2 \\ \text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^3 \right\} &= 3 {}^t J_3 \\ \text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^4 \right\} &= 2 ({}^t J_2)^2 \\ \text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^5 \right\} &= 5 {}^t J_2 {}^t J_3 \\ \text{Traza} \left\{ [{}^t s_{ij}]^6 \right\} &= 2 ({}^t J_2)^3 + 3 ({}^t J_3)^2 \end{aligned}$$

Las relaciones buscadas entre v y m (es decir entre $\frac{\sqrt[3]{t d_3^P}}{\sqrt{t d_2^P}}$ y $\frac{\sqrt[3]{t J_3}}{\sqrt{t J_2}}$) serán entonces (dividiendo las ecuaciones anteriores):

$$v = m \frac{\sqrt[3]{\left[1 - 3\left(\frac{M'(m)}{M(m)}\right) \frac{(\frac{4}{27} - m^6)}{m^5} - 3\left(\frac{M'(m)}{M(m)}\right)^2 \frac{(\frac{4}{27} - m^6)}{m^4} + \left(\frac{M'(m)}{M(m)}\right)^3 \frac{(\frac{4}{27} - m^6)^2}{m^9}\right]}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{M'(m)}{M(m)}\right)^2 \frac{(\frac{4}{27} - m^6)}{m^4}\right]}} \quad (3.14)$$

Resumiendo, la ley de flujo (3.9) determina que el tensor velocidad de deformación plástica ${}^t e_{ik}^P$ tiene dirección normal a la superficie de fluencia; como esta última dirección depende de la “dirección” del tensor desviador de tensiones ${}^t s_{ij}$, entonces la ley de flujo implica cierta relación entre las “direcciones” de los tensores ${}^t e_{ik}^P$ y ${}^t e_{ij}$. Esta relación expresa en términos de los invariantes v y m (que están relacionados con dichas direcciones) en forma dada por la ecuación (3.14), o en forma más compacta, como:

$$v = f(m)$$

O bien :

$$\frac{\sqrt[3]{d_3^P}}{\sqrt{t d_2^P}} = f\left(\frac{\sqrt[3]{t j_3}}{\sqrt{t j_2}}\right) \quad (3.15)$$

donde $\phi(\mu)$ es la función dada por el miembro derecho de la igualdad (3.14), es decir:

$$\phi(\mu) = \mu \frac{\sqrt[3]{1 - 3\left(\frac{M'(m)}{M(m)}\right)\left(\frac{4-m^6}{27}\right) - 3\left(\frac{M'(m)}{M(m)}\right)^2\left(\frac{4-m^6}{27}\right)^2 + \left(\frac{M'(m)}{M(m)}\right)^2\left(\frac{4-m^6}{27}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{M'(m)}{M(m)}\right)^2\left(\frac{4-m^6}{27}\right)^2}} \quad (3.16)$$

Eliminación del parámetro $^t l$

Utilizando las ecuaciones (3.13) y (3.15) se puede expresar al factor de proporcionalidad $^t \lambda$ que aparece en la ley de flujo (3.9) como función invariante exclusiva de $^t e_{ij}^p$: asumiendo que la función $\phi(\mu)$ es invertible por lo que la (3.15) implica que

$$\left(\frac{\sqrt[3]{^t j_3}}{\sqrt{^t j_2}} \right) = f^{-1} \left(\frac{\sqrt[3]{^t d_3^p}}{\sqrt{^t d_2^p}} \right) \quad (3.17)$$

y despejando el parámetro $^t l$ de la ecuación (3.13) resulta:

$$^t l = \frac{2M(f^{-1}(u))\sqrt[3]{^t d_2^p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{M'(f^{-1}(u))}{M(f^{-1}(u))}\right)^2 \left(\frac{4 - (f^{-1}(u))^6}{27}\right)^2}} \quad (3.18)$$

Donde $v = \frac{\sqrt[3]{d_3^p}}{\sqrt{d_2^p}}$ y $f^{-1}(u)$ es la inversa de la función ϕ .

Ley de flujo asociada con la fluencia de Von Mises

Cuando se utiliza la ley de fluencia de Von Mises (3.7) en la que se asume $M = \text{cte}$ (por lo que $M' = 0$), la igualdad (3.10) se reduce a :

$${}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{{}^t s_{ij}}{\sqrt{{}^t J_2}}$$

por lo que la ley de flujo resulta :

$${}^t e_{ij}^p = {}^t I \frac{1}{2} \frac{{}^t s_{ij}}{\sqrt{{}^t J_2}} \quad (3.19)$$

y las igualdades se reducen a (3.13) se reducen a:

$$\sqrt{{}^t d_2^p} = {}^t I \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{{}^t d_3^p} = {}^t \mathbf{I} \frac{1}{2} \frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}}$$

por lo que

$$\frac{\sqrt[3]{{}^t d_3^p}}{\sqrt{{}^t d_2^p}} = \frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \quad (3.20)$$

(es decir $\phi(\mu) = \mu$) y el parámetro ${}^t \lambda$ resulta:

$${}^t \lambda = 2 \sqrt{{}^t d_2^p} \quad (3.21)$$

Combinado las ecuaciones (3.19) y (3.21) se obtiene:

$$\frac{{}^t e_{ij}^p}{\sqrt{{}^t d_2^p}} = \frac{{}^t s_{ij}}{\sqrt{{}^t J_2}}$$

o bien, utilizando la ley de fluencia (3.7)

$${}^t \mathbf{K} \frac{{}^t e_{ij}^p}{\sqrt{{}^t d_2^p}} = {}^t s_{ij}$$

3.1.4. Tensión equivalente y Deformación plástica equivalente

La condición de fluencia (3.5) define a todos los estados de tensión que dan lugar al comienzo de las deformaciones plásticas. En particular, el estado tensional que se produce en un ensayo de atracción uniaxial cuando la tensión en la dirección axial iguala a la tensión de fluencia del material ${}^t\sigma_Y$ deberá estar determinado también por dicha condición. Los valores que alcanzan las tensiones principales en el ensayo de tracción cuando se inicia la fluencia son ${}^t\sigma^1 = {}^t\sigma_Y$, ${}^t\sigma_2 = 0$ y ${}^t\sigma_3 = 0$. Reemplazando estos valores en la condición de fluencia (3.5) se obtiene:

$$\frac{{}^t s_Y}{\sqrt{3}M\left(\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{2}{27}}\right)} - 1 = 0$$

o bien :

$${}^t K = \frac{1}{\sqrt{3}M\left(\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{2}{27}}\right)} {}^t s_Y$$

(es decir, ${}^t K$ y ${}^t s_Y$ son proporcionales)¹⁴ y combinando la igualdad anterior con la ley de fluencia (3.5) se obtiene :¹⁵

¹⁴ Estas relaciones se pueden deducir teniendo en cuenta que cuando la tensiones principales son $({}^t\sigma_1, {}^t\sigma_2, {}^t\sigma_3) = ({}^t\sigma_Y, 0, 0)$ las tensiones desviadoras valen:

$${}^t s_1 = {}^t\sigma_Y - \frac{1}{3} {}^t\sigma_Y = \frac{2}{3} {}^t\sigma_Y$$

$${}^t s_2 = 0 - \frac{1}{3} {}^t\sigma_Y = -\frac{1}{3} {}^t\sigma_Y$$

$$\sqrt{3} M \left(\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{2}{27}} \right) \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{M \frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}}} = {}^t s_Y \quad (3.22)$$

A la magnitud definida por el miembro izquierdo de esta ecuación se le llama *tensión equivalente* (y se simboliza como ${}^t \sigma$). Es una función escalar que depende exclusivamente de las tensiones s_i y que puede ser comparada con la tensión de fluencia ${}^t s_Y$.

Cuando se enunció la ley de fluencia (3.5) se dijo que el parámetro ${}^t K$ que define el “tamaño” de la superficie de fluencia depende de la cantidad de deformación plástica que se acumula en material. Para poder determinar la evolución del parámetro ${}^t K$ (y de la superficie de fluencia) es necesario entonces cuantificar primero dicha cantidad de deformación plástica que se acumula. Para ello se utiliza la denominada *deformación plástica equivalente* ${}^t \epsilon^P$. Esta magnitud es una cantidad escalar que depende exclusivamente

$${}^t s_3 = 0 - \frac{1}{3} {}^t \sigma_Y = -\frac{1}{3} {}^t \sigma_Y$$

entonces los invariantes $\sqrt{{}^t J_2}$ y $\sqrt[3]{{}^t J_3}$ que aparecen en la ley de fluencia (3.5) resultan:

$$\sqrt{{}^t J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} ({}^t s_1^2 + {}^t s_2^2 + {}^t s_3^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} {}^t \sigma_Y$$

$$\sqrt[3]{{}^t J_3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3} ({}^t s_1^2 + {}^t s_2^2 + {}^t s_3^2)} = \sqrt[3]{\frac{2}{27}} {}^t \sigma_Y$$

¹⁵ Recordar que la función $M\mu$ es una función adimensional por lo que $M \left(\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{2}{27}} \right)$ es un número.

de las velocidades de deformación plástica ${}^t \mathbf{e}_{ij}^P$ (de la misma forma que la tensión equivalente ${}^t \sigma$ depende exclusivamente de las tensiones ${}^t \sigma_{ij}$) y se define de acuerdo a:

$${}^t W'^P = {}^t s_{ij} \quad {}^t \mathbf{e}_{ij}^P = {}^t \sigma {}^t \mathbf{e}_{ij}^P \quad (3.23)$$

donde ${}^t W'^P$ es el trabajo por una unidad de tiempo y por unidad el volumen que es necesario realizar para producir un incremento deformación plástica y ${}^t \sigma$ es la tensión equivalente definida por el miembro izquierdo de la ecuación (3.22), es decir,

$${}^t \sigma = \sqrt{3} M \left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{27}} \right) \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{M \left(\frac{\sqrt{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)} \quad (3.24)$$

La igualdad (3.23) define a la derivada respecto al tiempo de la deformación plástica equivalente ${}^t \mathbf{e}^P$ denominada velocidad de deformación plástica equivalente ${}^t \dot{\mathbf{e}}^P$. La deformación equivalente se obtiene a partir de la velocidad equivalente por integración sobre el intervalo de tiempo durante el cual se desarrolla la fluencia de esta velocidad, es decir:

$${}^t \mathbf{e}^P = \int_0^t {}^t \dot{\mathbf{e}}^P dt \quad (3.25)$$

Para obtener la expresión explícita de la deformación plástica equivalente como la deformación ${}^t \mathbf{e}_{ij}^P$ (exclusivamente) se hace lo siguiente: teniendo en cuenta la ley de flujo

(3.9), el trabajo por unidad de tiempo ${}^t W^P$ se puede expresar como:

$${}^t W^P = {}^t \mathbf{s}_{ij} \dot{{}^t \mathbf{e}}_{ij}^P = {}^t \mathbf{s}_{ij} {}^t I {}^t \mathbf{K} \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{s}_{ij}}$$

Como la función de fluencia (3.5) si fuera una función homogénea de grado cero para las variables ${}^t \mathbf{s}_{ij}$ y ${}^t \mathbf{K}$,¹⁶ entonces, por el teorema de Euler para las funciones homogéneas¹⁷ se obtiene:

$${}^t \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{s}_{ij}} = - {}^t \mathbf{K} \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{K}} = \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{{}^t \mathbf{K} M \left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)}$$

Por lo que ${}^t W^P$ será:

¹⁶ Recordar las hipótesis que definen al endurecimiento isótropo

¹⁷ Esto es si $f({}^t \mathbf{s}_{ij}, {}^t k)$ es una función homogénea de grado n (es decir $f(\mathbf{a} {}^t \mathbf{s}_{ij}, \mathbf{a} {}^t k) = f({}^t \mathbf{s}_{ij}, {}^t k)$) entonces ${}^t \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{s}_{ij}} + {}^t k \frac{\partial f}{\partial {}^t k} = n f({}^t \mathbf{s}_{ij}, {}^t k)$. En particular, si n es cero, resulta ${}^t \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{s}_{ij}} + {}^t k \frac{\partial f}{\partial {}^t k} = 0$.

$${}^t W^P = {}^t I \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{M\left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}}\right)}$$

Combinando esta ecuación con la (3.23) se llega a

$${}^t \sigma {}^t e^P = {}^t I \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{M\left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}}\right)}$$

O bien utilizando la ecuación (3.24) que define a la tensión equivalente ${}^t \sigma$:

$${}^t S = \sqrt{3} M\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{27}}\right) \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{M\left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}}\right)} = {}^t e^P = {}^t I \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{M\left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}}\right)}$$

Teniendo en cuenta finalmente que tanto ${}^t \lambda$ como $\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}}$ pueden ser expresados como

funciones que dependen exclusivamente de ${}^t e_{ij}^P$ (ecuaciones(3.17) y (3.18) de la sección

anterior) entonces la expresión explícita para ${}^t e^P$ buscada será :

$${}^t \mathbf{e}^P = \frac{2}{\sqrt{3} \mathbf{M} \left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{27}} \right)} \frac{\mathbf{M}(f^{-1}(u)) \sqrt{{}^t d_2^P}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathbf{M}'(f^{-1}(u))}{\mathbf{M}(f^{-1}(u))} \right)^2 \left[\frac{4 - (f^{-1}(u))^6}{(f^{-1}(u))^4} \right]}} \quad (3.26)$$

donde $v = \frac{\sqrt[3]{{}^t d_3}}{\sqrt{{}^t d_2}}$ y $\phi^{-1}(\cdot)$ es la inversa de la función $\phi(\mu)$ (definida en la (3.16)).

Tensión equivalente y deformación equivalente asociada con la ley de fluencia de Von Mises

Utilizando la ley de fluencia de Von Mises, para la cual $\mathbf{M}(\mu) = 1$ por lo que $\mathbf{M}'(\mu) = 0$ y $\phi(\mu) = \mu$ por lo que $\phi^{-1}(v)$, la tensión equivalente definida por la ecuación (3.24) toma la forma

$${}^t \sigma = \sqrt{3} \sqrt{{}^t J_2}$$

y la velocidad de deformación plástica equivalente definida por la ecuación (3.26) se reduce a:

$${}^t \mathbf{e}^P = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{{}^t d_2^P}$$

3.1.5. Relaciones Tensión - Deformación completas para la plasticidad.

Como se dijo antes, la ley de flujo (3.9) no determina completamente a la velocidad de formación plástica ${}^t \mathbf{e}_{ij}^P$ conocidas las tensiones ${}^t s_{ij}$ sino que especifica solamente a sus direcciones principales $({}^t n_1, {}^t n_2, {}^t n_3)$ (que son iguales a las direcciones principales de ${}^t s_{ij}$) y al variante $\frac{\sqrt[3]{{}^t d_3}}{\sqrt{{}^t d_2}}$ (que es función del invariante $\frac{\sqrt[3]{{}^t d_3}}{\sqrt{{}^t d_2}}$ de ${}^t s_{ij}$). Entonces, para conocer completamente a ${}^t \mathbf{e}_{ij}^P$, lo único que falta es conocer el valor de alguno de los invariantes ${}^t d_2$ o ${}^t d_3$.¹⁸ Para encontrar una relación que permita conocer a alguno de estos invariantes (conocidas las Tensiones) se observa que debido a la condición de fluencia, la función de fluencia f debe permanecer igual a 0 en todo instante durante el cual tenga lugar la fluencia, entonces:

¹⁸ Recordar que para especificar completamente un tensor ${}^t \mathbf{e}_{ij}^P$, es necesario conocer sus direcciones principales $({}^t n_1, {}^t n_2, {}^t n_3)$ y sus componentes principales $({}^t e_1^P, {}^t e_2^P, {}^t e_3^P)$. Como estas son las últimas son las soluciones de la ecuación característica $({}^t e^P)^3 - {}^t d_2 ({}^t e^P) - {}^t d_3 = 0$ entonces bastará conocer además de las direcciones principales solo a los invariantes principales ${}^t d_2$ y ${}^t d_3$. En este caso se conocen las direcciones $({}^t n_1, {}^t n_2, {}^t n_3)$ y el cociente $\frac{\sqrt[3]{{}^t d_3}}{\sqrt{{}^t d_2}}$; solo falta conocer alguno de los invariantes ${}^t d_2$ o ${}^t d_3$.

$$f = \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{s}_{ij}} {}^t \mathbf{s}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{K}} {}^t \mathbf{K} = 0$$

O bien, teniendo en cuenta que ${}^t \mathbf{K} = \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{K}} = - \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{{}^t \mathbf{K} M \left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)} - 1$:

$${}^t \mathbf{K} \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{s}_{ij}} - {}^t \mathbf{K} = 0$$

(3.27)

Como el parámetro de endurecimiento ${}^t k$ es función de la cantidad de deformación plástica que se acumula en el material y se mide con la deformación plástica equivalente definida en la sección anterior (ecuaciones(3.25) y (3.26)), es decir

$${}^t \mathbf{K} = \mathbf{K}({}^t \mathbf{e}^P)$$

Entonces, la derivada ${}^t k$ será :

$${}^t \mathbf{K} = \mathbf{K}'({}^t \mathbf{e}^P) {}^t \mathbf{e}^P$$

O bien, utilizando la (3.26),

$${}^t K = K'({}^t e^P) \frac{2}{\sqrt{3}M(\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3}{27}})} \frac{M(f^{-1}(v))\sqrt{{}^t d_2^P}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{M'(f^{-1}(v))}{M(f^{-1}(v))}\right)^2 \frac{(4 - (f^{-1}(v))^6)}{(f^{-1}(v))^4}\right]}} \quad (3.28)$$

donde $K'({}^t e^P)$ es derivada de la función $K'({}^t e^P)$ que, como se dijo en la sección anterior, es proporcional a la tensión de fluencia del ensayo de tracción $\sigma_Y({}^t e^P)$ (que es una función conocida). Sustituyendo la (3.28) en la (3.27) y teniendo en cuenta que por la ley de flujo, $s^{-1}(u) = \mu$ o bien, $v = \phi(\mu)$ (siendo como siempre $\mu = \frac{\sqrt[3]{j_3}}{\sqrt{j_2}}$, $v = \frac{\sqrt[3]{d_3^P}}{\sqrt{d_2^P}}$ la función dada por la (3.16)) se obtiene la relación buscada que permite conocer la invariante

$$\sqrt{{}^t d_2^P} : \quad \sqrt{{}^t d_2^P} = \frac{\sqrt{3}M(\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3}{27}})}{2} \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{M'(u)}{M(u)}\right)^2 \frac{(4 - m^6)}{m^4}\right]}}{M(m)K'({}^t e^P)} {}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}} \partial {}^t s_{ij} \quad (3.29)$$

Resumiendo, conocidas las tensiones ${}^t s_{ij}$ y la velocidad de cambio de las tensiones $\dot{{}^t s}_{ij}$, la velocidad deformación plástica $\dot{{}^t e}_i^P$ queda completamente determinada: sus direcciones principales son iguales a las direcciones principales del tensor de tensiones desviador ${}^t s_{ij}$ (ley de flujo), y sus componentes principales son funciones escalares de los invariantes

principales ${}^t d_2^p$ y ${}^t d_3^p$ que están determinados según las ecuaciones (3.14) (que se deriva del a ley de fluencia y la ley de endurecimiento).

Combinando la ley de flujo (3.9) y las ecuaciones (3.18) y (3.29) se obtiene:

$${}^t \varepsilon_{ij}^p = \frac{\sqrt{3}M(\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{27}})}{M(m)K\gamma({}^t \varepsilon^p)} \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t \sigma_{ij}} \right) \left({}^t K \frac{\partial f}{\partial {}^t \sigma_{kl}} \right) \partial {}^t \sigma_{kl} \quad (3.30)$$

que es otra forma de expresar las relaciones entre ${}^t e_{ij}^p$ y ${}^t s_{kl}$ y ${}^t s_{kl}$ mencionadas.

Particularización para el caso de la ley de fluencia de Von Mises.

Utilizando la ley de fluencia de Von Mises (donde $M(\mu) = 1$ y $M^1(\mu) = 0$) las ecuaciones (3.29) y (3.30) se reducen respectivamente a

$$\sqrt{{}^t d_2^p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{K^1({}^t e^p)} \frac{{}^t s_{ij}}{\sqrt{{}^t j_2}} {}^t s_{ij} \quad (3.31)$$

y

$${}^t e_{ij}^p = \frac{\sqrt{3}}{K^1({}^t e^p)} \frac{{}^t s_{ij}}{\sqrt{{}^t j_2}} \frac{{}^t s_{kl}}{\sqrt{{}^t j_2}} {}^t s_{kl} = \frac{\sqrt{3}}{K^1({}^t e^p)} \frac{{}^t s_{ij} {}^t s_{kl}}{\sqrt{{}^t j_2}} {}^t s_{kl} \quad (3.32)$$

Las ecuaciones constitutivas para la plasticidad para materiales isótopos que experimentan endurecimiento isótopo están dadas entonces por las ecuaciones (3.30), que se pueden expresar a su vez en forma invariante mediante las ecuaciones (3.14) y (3.29). Si en particular se adopta la ley de fluencia de Von Mises (3.7) estas ecuaciones se reducen respectivamente a las (3.32), (3.20) y (3.31). Para formularlas fue necesario especificar en primer lugar cuales son los estados tensionales a partir de los cuales comienzan a manifestarse las deformaciones inelásticas (dichos estados son los que verifican la ley de fluencia (3.1) que para materiales isótopos y cuya fluencia es independiente de la presión hidrostática, se reduce a (3.3)), en segundo lugar decir como van variando dichos estados tensionales a medida que las deformaciones plásticas se acumulan (esta variación esta dada por la ley de endurecimiento isótopo como consecuencia de la función de fluencia se reduce a la forma (3.5)) y en tercer lugar describir como se incrementa la deformación plástica cuando algunos de estos estados es alcanzando (ley de flujo (3.9)) y como se cuantifica la deformación plástica que se va acumulando dentro del material a medida que la deformaciones plásticas progresan (esto se hace a través de la deformación plástica equivalente obtenida como integración de la velocidad de deformación equivalente (3.26)).

3.2. Viscoplasticidad.

La relación tensión-deformación para la plasticidad descrita en las secciones anteriores se puede escribir en forma compacta (ver ecuación (3.30)) como:

$${}^t e_{ij}^P = c_{ijkl} {}^t S_{kl}$$

siendo c_{ijkl} funciones de las tensiones ${}^t S_{ij}$. Esta relación se caracteriza por ser independiente del tiempo, es decir, prevee que existirán incrementos de deformación plásticas en la medida que se imponga simultáneamente incrementos de tensión o bien, que la deformación plásticas que se produce como respuesta a un incremento de tensión instantánea. Sin embargo, se observa experimentalmente que la fluencia de un metal si depende del tiempo. Por ejemplo, si se realiza un ensayo de atracción unaxial a diferentes velocidades de deformación (es decir con procesos de carga de diferentes duraciones de tiempo), se observa que (ver figura (3.8) el limite de fluencia ${}^t \sigma^Y$ para procesos de cargas dinámicos (es decir , velocidades de deformación altas) es mayor que el correspondiente a un ensayo estático (es decir, aquel que se desarrolla a velocidades de deformación muy bajas , casi nulas) y que el endurecimiento por de deformación (pendiente de la curva $\sigma - \epsilon$) se reduce a medida que la velocidad de deformación aumenta (ver referencia [14]).

Es decir la tensión de fluencia ${}^t \sigma^Y$ depende no solo de la cantidad de deformación plástica acumulada en el material ${}^t e^P$, sino también de la velocidad de deformación plástica ${}^t \dot{e}^P$:

$${}^t S_Y = S_Y ({}^t e^P, {}^t \dot{e}^P)$$

Para tener en cuenta esta dependencia de la tensión de fluencia de la velocidad de deformación (y por lo tanto del tiempo) se utiliza el modelo *visco plástico*. Una forma

particular de este modelo es la propuesta por perzyna (ver referencia [25]) según la cual se supone que la velocidad con que aumentara la deformación plástica $\dot{\epsilon}^P$: cuando se aplique un determinado nivel de tensión σ depende de la diferencia $\sigma - \sigma_Y$ ($\dot{\epsilon}^P$) entre la tensión que esta haciendo efectivamente aplicada para que el material fluya a velocidades de deformación pequeñas (casi nulas), de manera que la velocidad de deformación plástica $\dot{\epsilon}^P$ crece a medida que aumenta esta diferencias, (y cuando esta diferencia es negativa, la velocidad de deformación plástica debe ser nula porque en dicho caso no hay fluencia).

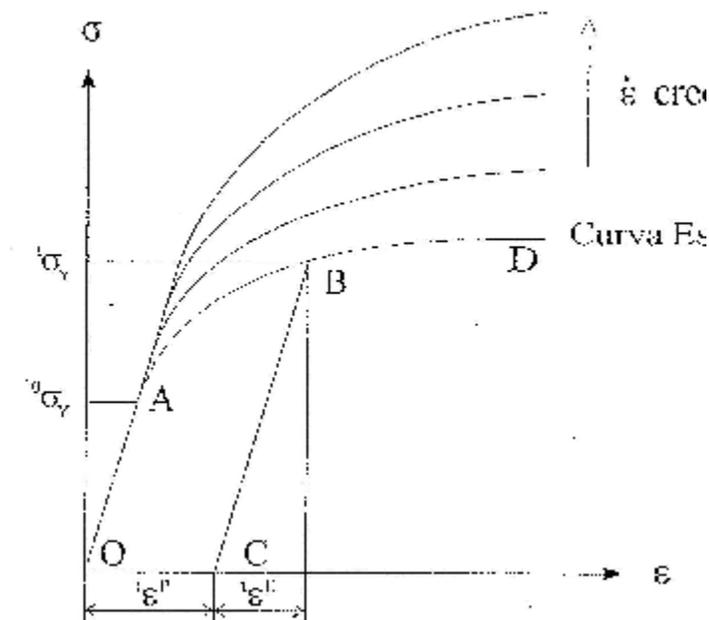


Figura 3.8: Ensayo de tracción para distintas velocidades de deformación.

Matemáticamente esto se expresa como:

$${}^t e^P = \begin{cases} 0 & \text{si } {}^t s < s_Y({}^t e^P) \\ hf\left(\frac{{}^t s}{s_Y({}^t e^P)} - 1\right) & \text{si } {}^t s \geq s_Y({}^t e^P) \end{cases}$$

donde n es una constante que depende del material y ϕ es una función adimensional creciente que depende también del material que se elige para que el modelo pueda reproducir datos experimentales (por ejemplo se pueden elegir funciones de tipo exponencial $\phi(f) = \exp(\alpha f) - 1$, polinómica $\phi(f) = \sum_{j=1}^N b_j f^j$ ($N \in \mathbb{N}$) o potencial $\phi(f) = f^\delta$ ($\delta \in \mathbb{Q}$), donde las constantes α , β_1 y δ se determinan experimentalmente).

Generalmente se escribe a esta expresión en forma mas compacta como :

$${}^t e^P = \eta \left\langle f\left(\frac{{}^t s}{s_Y({}^t e^P)} - 1\right) \right\rangle \quad (3.33)$$

donde $\frac{{}^t s}{s_Y({}^t e^P)} - 1$ es la diferencia relativa entre la tensión instantánea ${}^t \sigma$ y la tensión de fluencia “estática” $\sigma_Y({}^t E^P)$ (la correspondiente a las velocidades de deformación pequeñas), y donde el símbolo $\langle \phi(f) \rangle$ se define según:

$$\langle \varphi(f) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \\ \varphi(f) & \text{si } f \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Despejando ${}^t\sigma$ de la ecuación (3.33) (teniendo en cuenta para ello que la función $\phi(f)$ es una función creciente y por lo tanto inversible), se obtiene:

$${}^tS = S_Y ({}^t e^P) \left(1 + f^{-1} \left(\frac{{}^t e^P}{h} \right) \right) \quad (3.35)$$

Esta ecuación define a la relación tensión- deformación dinámica resulta del modelo de viscoplasticidad Perzyna. Se observa que la tensión ${}^t\sigma$ que es necesario aplicar para que el material fluya plásticamente a velocidades “grandes” (${}^tE^P > 0$) (o tensión de fluencia dinámica) resulta proporcional a la tensión que debería aplicarse para que se produzca fluencia plástica a velocidades “pequeñas” (o tensión de fluencia estática), con un coeficiente de proporcionalidad que es función exclusiva de la velocidad de deformación ${}^tE^P$. Se puede interpretar entonces que el modelo de Perzyna propone describir el comportamiento dinámico del material a partir de su respuesta estática.

La incorporación de la variable tiempo (o velocidad de deformación) en el modelo constitutivo del material (variable no tenida en cuenta ni en el modelo elástico ni el de plasticidad inviscida presentado en la sección anterior) tiene la siguiente consecuencia: si

se considera a las de deformaciones elásticas despreciables frente a las inelásticas, (y teniendo en cuenta que la deformación total esta compuesta por una parte elástica y por una parte inelástica, es decir ${}^tE = {}^tE^E + {}^tE^P$) entonces resulta un material caracterizado por una ley constitutiva del tipo

$${}^t\varepsilon = f({}^t\sigma)$$

es decir un material que se comporta prácticamente como un fluido, en el sentido que es incapaz de resistir tensión sin moverse.

3.2.1. Relación constitutiva para la viscoplasticidad

Para generalizar este modelo al caso tridimensional, es decir, al caso en que se someta al cuerpo en un estado multiaxial de tensiones y este experimente deformaciones plásticas arbitrarias se propone lo siguiente (ver referencia [25] y [29]):

- Se define una función de influencia estática F (es decir, una función de fluencia que señalara al comienzo de la fluencia para velocidades de deformación muy bajas), que depende de las tensiones ${}^tS_{ij}$, y de una familia de parámetros ${}^t k_a$, tal que cuando $F({}^tS_{ij}, {}^t k_a) < 0$, las deformaciones serán parámetros elásticas (es decir ${}^t E_{ij}^P = 0$) Y comenzaran las deformaciones viscoplasticas cuando $F({}^tS_{ij}, {}^t k_a) = 0$.

- Se propone la siguiente relación constitutiva para describir el comportamiento plástico dependiente del tiempo en términos de la viscoplasticidad:

$${}^t \mathbf{e}_{ij}^P = \eta \langle f(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial {}^t s_{ij}} \quad (3.36)$$

donde F es la función de fluencia estática, y al igual que en el caso unidimensional, n es una constante que depende del material, ϕ es una $\langle f(F) \rangle$ se define por la ecuación (3.34).

La primera condición establece para que estados de tensiones comienza la fluencia para velocidades de deformación muy bajas (casi nulas). La igualdad $F({}^t s_{ij}, {}^t k_a) = 0$ define a la superficie de fluencia estática en el espacio de las tensiones. Si, como en el caso de la plasticidad, se asume 1) que el material es isótropo y 2) que la fluencia no depende de la presión hidrostática, la condición de fluencia estática se expresara como:

$$F({}^t J_2, {}^t J_3, {}^t K_{2\alpha}, \dots) = 0$$

(con F función par de tj_3), y si además se utiliza el modelo de endurecimiento isótropo (ver sección 3.1.4.), entonces la función de fluencia estática esta dada por

$$f\left(\frac{{}^t\mathbf{S}_{ij}}{{}^t\mathbf{K}}\right) = \frac{\sqrt{{}^tJ_2}}{{}^t\mathbf{K} M\left(\frac{\sqrt[3]{{}^tJ_3}}{\sqrt{{}^tJ_2}}\right)} - 1 \quad (3.37)$$

(siendo M, una función par de su argumento $\frac{\sqrt[3]{{}^tJ_3}}{\sqrt{{}^tJ_2}}$ para que el comienzo de la fluencia sea el mismo para tracción y para compresión) y la superficie de fluencia estática será :

$$\frac{\sqrt{{}^tJ_2}}{{}^t\mathbf{K} M\left(\frac{\sqrt[3]{{}^tJ_3}}{\sqrt{{}^tJ_2}}\right)} - 1 = 0$$

La segunda hipótesis es una ley análoga a la ley de flujo asociada formulada para la plasticidad.¹⁹ Esta condición establece lo siguiente: como la superficie de fluencia estática, esta dada por la igualdad $F = 0$ y como un estado de tensiones ${}^t\mathbf{S}_{ij}$ que cumple

¹⁹ Al igual que en el caso de la ley de flujo asociada para la plasticidad, la relación constitutiva para la viscoplasticidad se puede formular con mayor generalidad en la forma

$${}^tE_{ij}^p = \eta \langle f(F) \rangle \frac{\partial p}{\partial {}^t\mathbf{S}_{ij}}$$

donde la función $P({}^t\mathbf{S}_{ij}, {}^t k_a)$ es denominado potencial viscoplastico. Cuando se adopta como potencial viscoplastico a la función de fluencia F, la ley constitutiva adquiere la forma (3.36). se dice entonces que se trata de una ley *asociada* con la condición de fluencia y se puede demostrar que dicha ley asociada es aquella para la cual se maximiza la disipación.

$F({}^t\mathbf{s}_{ij}, {}^t k_a) > 0$ esta representado por un punto en el espacio de las tensiones que se encuentran afuera de la superficie de fluencia $F = 0$, (y la función F toma valores a medida que este punto se aleja de la superficie) entonces la relación (3.36) prevee que para determinadas tensiones, la velocidad de deformación plástica dependerá de la “distancia” entre dichas tensiones y la superficie de fluencia estática $F = 0$. Esto es análogo al caso unidimensional en el que la deformación plástica es función de la diferencia entre las tensiones instantánea ${}^t\sigma$ y las tensiones de fluencia de fluencia del ensayo de tracción estático ${}^t\sigma_Y$.

Si se utiliza la función de fluencia (3.37) la relación constitutiva (3.36) queda:

$${}^t\mathbf{e}_{ij}^p = \eta \left\langle f \left(\frac{\sqrt{{}^t J_2}}{{}^t \text{KM} \left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)} - 1 \right) \right\rangle {}^t \mathbf{K} \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{s}_{ij}} \quad (3.38)$$

con ${}^t \mathbf{K} \frac{\partial f}{\partial {}^t \mathbf{s}_{ij}}$ dada por la ecuación (3.10). Elevando al cuadrado cada miembro de la

ecuación anterior y sumando todas las componentes se obtiene (ver ecuación 3.13):

$$\sqrt{{}^t d_2^P} = \eta \left\langle f \left(\frac{\sqrt{{}^t J_2}}{{}^t \text{KM} \left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{2} \frac{1}{M(m)} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{M^1(m)}{M(m)} \right)^2 \left(\frac{(\frac{4}{27} - m)^6}{m^4} \right) \right]}$$

(con ${}^t \text{K} \frac{\partial f}{\partial {}^t s_{ij}}$) e invirtiendo esta última ecuación se obtiene:

$$\frac{\sqrt{{}^t J_2}}{M \left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)} = {}^t \text{K} \left(1 + f^{-1} \left(\frac{\sqrt{{}^t d_2}}{h} \frac{2M(m)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{M^1(m)}{M(m)} \right)^2 \left(\frac{(\frac{4}{27} - m)^6}{m^4} \right) \right]}} \right) \right) \quad (3.39)$$

Esta ecuación representa a la superficie de fluencia dinámica. La figura (3.9) muestra las intersecciones de dichas superficies con el plano desviador. Recordando que los invariantes

$\sqrt{{}^t J_2}$ y $\left(\frac{\sqrt[3]{{}^t J_3}}{\sqrt{{}^t J_2}} \right)$ están relacionados con el radio vector r y el ángulo θ de cada punto P de

estas curvas y llamando $\text{K} ({}^t d_2^P)$ al miembro derecho de la igualdad (3.39), esta igualdad se puede interpretar como

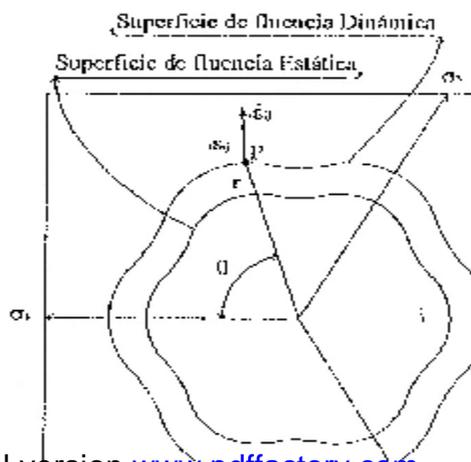


Figura 3.9. Superficie de fluencia estática y dinámica

O bien,

$$r = K ({}^t d_2^p)^m(q)$$

se puede observar que la superficies de fluencias dinámicas son todas geoméricamente semejantes a la superficie estática y que crecen a mayor velocidad de deformación plástica.

La ecuación (3.38), expresa también que el tensor velocidad de deformación (considerando como vector en el espacio tridimensional de las tensiones) es normal a la superficie de fluencia dinámica (ver figura 3.9)). Como existe una analogía formal entre la ley constitutiva (3.38) y la ley de flujo para la plasticidad (3.9), las definiciones de tensión equivalente y deformación equivalentes dadas en la sección anterior (ecuaciones 3.24) y (3.26) respectivamente), siguen siendo valida. En términos de estas medidas de la tensión y de la deformación acumulada, la ecuación (3.39) se expresa como :

$${}^t \mathbf{S} = {}^t \mathbf{S}_Y \left(1 + f^{-1} \left(\frac{{}^t e^p}{h} \right) \right)$$

Donde $\eta^* = \frac{h}{\sqrt{3M\left(\sqrt{3^3\sqrt{\frac{2}{27}}}\right)}}$ que es la tensión de deformación dinámica que se obtiene con

el ensayo de tracción uniaxial ($t\sigma_Y$ es la tensión de fluencia estática de este ensayo²⁰), por lo que la tensión equivalente $t\sigma$ y la deformación plástica equivalente ${}^t e^P$ podrán ser utilizadas para comprar un estado triaxial arbitrario de tensión ${}^t s_{ij}$ $t\sigma_{ij}$ y deformación ${}^t e_{ij}^P$ con el estado uniaxial que se produce en el ensayo de tracción.

3.2.2. Relación constitutiva para la viscoplasticidad asociada con la ley de fluencia de Von Mises

Utilizando la función de fluencia de Von Mises :

$$f = \frac{\sqrt{{}^t J_2}}{K} - 1 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{{}^t J_2}}{{}^t s_Y} - 1$$

La relación constitutiva para la viscoplasticidad (3.38) y la ecuación que define a la superficie de fluencia dinámica (3.39) se reduce a

²⁰ Recordar que el parámetro de endurecimiento ${}^t K$ y la tensión de fluencia del ensayo tracción uniaxial

${}^t s_Y$ son proporcionales, ${}^t K = \frac{1}{\sqrt{3M\left(\sqrt{3^3\sqrt{\frac{2}{27}}}\right)}} {}^t s_Y$.

$${}^t \mathbf{e}_{ij}^p = \eta \left\langle f \left(\frac{\sqrt{3} \sqrt{{}^t J_2}}{{}^t S_Y} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{2} \frac{{}^t S_{ij}}{\sqrt{{}^t J_2}} \quad (3.40)$$

y

$$\sqrt{3} \sqrt{{}^t J_2} = {}^t S_Y \left(1 + f^{-1} \left(\frac{2 \sqrt{{}^t d_2^p}}{h} \right) \right) \quad (3.41)$$

Al igual que en la plasticidad inviscida asociada a la ley de fluencia de Von Mises, en la que la superficie de fluencia es un cilindro de radio $r = \sqrt{2} \text{ }^t K = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ }^t K$ (de eje (1,1,1)) (ver figura (3.7)), en la viscoplasticidad asociada a la ley de fluencia dinámicas son cilindros de radios dependientes de la velocidad de deformación (ver referencia [25]).

Si se compara la ecuación (3.40) con la relación constitutiva que define a un fluido viscoso (fluido newtoniano)

$${}^t \mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2m} {}^t S_{ij}$$

Donde μ es la viscosidad, se observa que el modelo de viscoplasticidad asociada a la ley de fluencia de Von Mises prevee la misma relación entre la velocidad de deformación total y la tensión en un fluido newtoniano de viscosidad no constante y dada por :

$$\frac{1}{2m} = \frac{h \left\langle f \left(\frac{\sqrt{3} \sqrt{{}^t j_2}}{{}^t s_g} - 1 \right) \right\rangle}{2 \sqrt{{}^t j_2}}$$

Para poner en evidencia esta analogía, la relación constitutiva viscoplastica asociada con la ley de fluencia de Von Mises (ecuación (3.40)) se escribe como

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2m} {}^t S_{ij}$$

$$\frac{1}{2m} \frac{h \left\langle f \left(\frac{\sqrt{3} \sqrt{{}^t j_2} - 1}{{}^t s_g} \right) \right\rangle}{2 \sqrt{{}^t j_2}} \quad (3.42)$$

o bien, utilizando la ecuación (3.41) para escribir a la viscosidad como función exclusiva de la velocidad de deformación, como : ${}^t S_{ij} = 2m {}^t e_{ij}^p$

$$2\mu = \frac{{}^t S_Y \left(1 + f^{-1} \left(\frac{2\sqrt{{}^t d_2}}{h} \right) \right)}{\sqrt{3} \sqrt{{}^t d_2}} \quad (3.43)$$

A diferencia de la plasticidad inviscida presentada en la sección anterior, el modelo viscoplastico incorpora entonces la influencia de la duración del proceso de deformación (de la velocidad de deformación) en el comportamiento del material, como consecuencias de esta característica resulta un material, que si no fuera por la existencia de deformaciones elásticas que se superponen las inelásticas, se comportaría prácticamente como un fluido, en el sentido que la velocidad de deformación ${}^t e_{ij}$ resultaría ser función exclusiva de las tensiones ${}^t S_{ij}$ (y no de la velocidad con la que aumentan las tensiones ${}^t S_{ij}$ como ocurre en la plasticidad inviscida) y por lo tanto el material no resistiría tensiones sin moverse. En particular si se adopta el modelo viscoplastico de Perzyna asociada a la ley de fluencia de Von Mises (ecuaciones (3.42) y (3.43)) resulta un material que se comportaría (si las

deformaciones elásticas fueran despreciables) como un fluido viscoso incompresible de viscosidad no constante (no newtoniano) y como tal su movimiento podrá ser estudiado utilizando el enfoque euleriano. Como se dijo en la introducción, esto representa una ventaja numérica muy importante ya que el dominio donde hay que hallar las incógnitas (en este caso, las velocidades u_j) estará fijo en el espacio en todo instante y no deberá ser actualizado para determinar las sucesivas configuraciones que va adoptando el material a medida que las deformaciones plásticas progresan. Esta ventaja es la que hace atractiva la utilización de modelos viscoplasticos para la descripción del comportamiento inelástico de metales dúctiles. En la referencia [25] se pueden encontrar diversas comparaciones de datos experimentales obtenidos para algunos aceros con las predicciones de este modelo con funciones $\phi(f)$ de tipo exponencial, potencial y lineal.

4. FORMULACIÓN DE FLUJO

HASTA AHORA se han planteado las ecuaciones que describen el movimiento de un cuerpo incomprensible y las relaciones constitutivas que caracterizan a un metal que experimenta deformaciones plásticas. En este capítulo se presentan algunas simplificaciones a estas ecuaciones que se hacen para estudiar el movimiento de metales en las que se producen deformaciones plásticas muy grandes. Como resultado de estas simplificaciones se obtendrá un sistema de ecuaciones idénticos al que describe el movimiento de un fluido no newtoniano (ecuaciones de Stokes). Esta analogía permitirá estudiar la fluencia del sólido utilizando las herramientas con las que se analiza el flujo de fluidos, es decir adoptar el enfoque euleriano para la descripción del movimiento (cuyas ecuaciones fueron presentadas en el primer capítulo) y elegir el campo de velocidades (en lugar del campo de desplazamientos que es el lugar que se utiliza en los problemas de sólidos) como incógnita primaria a determinar. Como se dijo en la introducción, debido a dicha analogía, esta metodología de análisis recibe el nombre de *formulación de flujo* (ver referencias [28] o [29]).

4.1. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

La ecuación del movimiento establece que

$$\frac{\partial^t s_{ij}}{\partial c_i} + {}^t b_j = {}^t p \left(\frac{\partial^t u_j}{\partial t} + \frac{\partial^t u_j}{\partial c_i} {}^t u_i \right)$$

o bien, utilizando la descomposición del tensor de tensiones en su parte desviadora ${}^t s_{ij}$ y su parte volumétrica ${}^t p s_{ij}$,

$$\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial c_i} + \frac{\partial {}^t p}{\partial c_j} + {}^t b_j = {}^t p \left(\frac{\partial {}^t u_j}{\partial t} + \frac{\partial {}^t u_j}{\partial c_i} {}^t u_i \right)$$

donde b_j son las fuerzas por unidad de volumen que actúa instantáneamente sobre cada partícula.

En este trabajo se supone que el flujo del metal es un flujo cuyo número de Reynolds es muy bajo (flujo de Stokes). Es decir se supone que el término ${}^t p \left(\frac{\partial {}^t u_j}{\partial t} + \frac{\partial {}^t u_j}{\partial c_i} {}^t u_i \right)$ que representa las fuerzas de inercia que actúa sobre la partícula del medio que esta ocupando la posición c_i (la fuerza con la que la partícula se resiste al cambio de su velocidad) es despreciable frente a las fuerzas que ejercen todas las partículas vecinas dadas por el término $\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial c_i}$.²¹ La ecuación del movimiento que se considerara entonces es

$$\frac{\partial {}^t s_{ij}}{\partial c_i} + \frac{\partial {}^t p}{\partial c_j} + {}^t b_j = 0$$

4.2. RELACIÓN CONSTITUTIVA.

²¹ El número de Reynolds mide la importancia relativa de las fuerzas de inercia frente a las fuerzas de la naturaleza viscosas. Por lo tanto las fuerzas de inercia serán despreciables frente a las viscosa cuando el número de Reynolds es muy chico.

El capítulo anterior que las deformaciones que se producen en un metal se pueden descomponer en dos partes: la parte recuperable o elástica y una componente permanente plástica. Llamándolas ${}^t\mathbf{e}_{ij}^E$ y ${}^t\mathbf{e}_{ij}^P$ respectivamente, se puede escribir entonces (ver referencias [10], [17] y [18]):

$${}^t\mathbf{e}_{ij} = {}^t\mathbf{e}_{ij}^E + {}^t\mathbf{e}_{ij}^P \quad (4.1)$$

donde \mathbf{e}_{ij} es la velocidad de deformación total que (como se vio en el primer capítulo) se relaciona con las velocidades u_j según

$${}^t\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u_j}{\partial c_i} + \frac{\partial^t u_i}{\partial c_j} \right)$$

La componente elástica \mathbf{e}_{ij}^E debe satisfacer la relaciones tensión de deformación de la teoría de elasticidad, es decir,

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{e}_{ij}^P &= \frac{1+\nu}{E} {}^t\mathbf{S}_{ij} - \frac{\nu}{E} {}^t\mathbf{S}_{kk} \mathbf{S}_{ij} = \\ &= \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \frac{1}{3} \mathbf{S}_{kk} \mathbf{S}_{ij} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde E es el modulo de Young, ν el modulo de Poisson y ${}^t\mathbf{S}_{ij} = {}^t s_{ij} + \frac{1}{3} {}^t\mathbf{S}_{kk} \mathbf{S}_{ij}$. La componente inelástica ${}^t\mathbf{e}_{ij}^P$ esta caracterizada por algunas de las relaciones constitutivas

discutidas en el capítulo anterior (ver ecuaciones (3.30) o (3.38)).

En este trabajo se utiliza el modelo Viscoplastico de Perzyna asociada a la función de fluencia de Von Mises (ecuación (3.40)), según el cual , la componente inelástica de las deformaciones debe satisfacer la relación

$${}^t \mathbf{e}_{ij}^p = \frac{1}{2m} {}^t S_{ij} \quad (4.3)$$

Con

$$\frac{1}{2m} = \frac{h \left\langle f \left(\frac{\sqrt{3} \sqrt{{}^t j_2}}{sY({}^t \mathbf{e}^p)} - 1 \right) \right\rangle}{2 \sqrt{{}^t j_2}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{{}^t d_2^p}}{sY({}^t \mathbf{e}^p) \left(1 + f^{-1} \left(\frac{\sqrt[2]{{}^t d_2^p}}{h} \right) \right)} \quad (4.4)$$

donde η y $\phi(f)$ son funciones que se eligen para reproducir datos experimentales, $sY(\mathbf{e}^p)$ es la tensión de fluencia estática que se obtiene en le ensayo de tracción y ${}^t d_2^p = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{e}_{ij}^p$. Se elige como función $\phi(f)$ a una función de tipo potencial, es decir,

$$\phi(f) = f^\delta$$

donde δ es un parámetro que se determina experimentalmente.²²

Para simplificar la relaciones constitutivas dadas por las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.3) y

²² No confundir con el símbolo δ de Kronecker definido en la introducción

(4.4) se supone que las deformaciones elásticas son despreciables. La ecuación (4.1) se reduce entonces a

$${}^t \mathbf{e}_{ij} \cong {}^t \mathbf{e}_{ij}^p$$

y la relación constitutiva que resulta es

$${}^t \mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2m} {}^t S_{ij}$$

con

$$\frac{1}{2m} = \frac{h \left\langle f \left(\frac{\sqrt{3\sqrt{{}^t j_2}}}{sY({}^t \mathbf{e})} - 1 \right) \right\rangle}{2\sqrt{{}^t j_2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{{}^t d_2^p}}{sY({}^t \mathbf{e}^p) \left(1 + f^{-1} \left(\frac{2\sqrt{{}^t d_2^p}}{h} \right) \right)}$$

(o bien, utilizando $\phi(f) = f^\delta$ y llamando $\eta = \frac{h}{2}$)

$$\frac{1}{2m} = \frac{h \left\langle \left(\frac{\sqrt{3\sqrt{{}^t j_2}}}{sY({}^t \mathbf{e})} - 1 \right)^s \right\rangle}{\sqrt{{}^t j_2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{{}^t d_2^p}}{sY({}^t \mathbf{e}) \left(1 + \left(\frac{\sqrt{{}^t d_2}}{h} \right)^{\frac{1}{s}} \right)}$$

Estas ecuaciones constitutivas son formalmente idénticas a las que caracterizan a un fluido viscoso no newtoniano. Se observa entonces que, si la parte elástica de las deformaciones se puede despreciar y si las deformaciones inelásticas se describen mediante el modelo rígido-viscoplastico asociado a la ley de fluencia de Von Mises, el metal quedara caracterizado por una ley constitutiva análoga a la que describe el flujo de un fluido viscoso

(de viscosidad no constante). Como se dijo antes, este enfoque de análisis recibe el nombre de *formulación de flujo* (ver referencia [29]).

4.3. PLANTEO DIFERENCIAL DEL PROBLEMA

Si se hacen las simplificaciones discutidas hasta ahora, el problema de flujo estacionario de un metal que experimenta grandes deformaciones plástica queda formulado mediante las siguientes ecuaciones:

- Condición de incompresibilidad:

$$\frac{\partial^t \mathbf{u}_K}{\partial \mathbf{c}_K} = 0 \quad (4.5)$$

- Ecuación del movimiento para flujo de Stokes (Reynolds bajo):

$$\frac{\partial^t s_{ij}}{\partial c_i} + \frac{\partial^t p}{\partial c_j} + {}^t b_j = 0 \quad j = 1,2,3 \quad (4.6)$$

- Relación constitutiva:

$$i, j = 1,2,3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t s_{ij} = 2m {}^t e_{ij} \\ \sigma_Y({}^t e) \left(1 + \left(\frac{\sqrt{{}^t d_2}}{h} \right)^{\frac{1}{s}} \right) \\ 2m = \frac{\quad}{\sqrt{3\sqrt{{}^t d_2}}} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

donde ${}^t d_2 = \frac{1}{2} {}^t e_{ij} {}^t e_{ij}$, $\sigma_Y({}^t e)$ es la curva tensión deformación del ensayo de tracción uniaxial y las velocidad de deformación e_{ij} se relaciona con las velocidades según

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t u_j}{\partial c_i} + \frac{\partial {}^t u_i}{\partial c_j} \right) \quad i,j = 1,2,3 \quad (4.8)$$

Para materiales que no experimentan endurecimiento por deformación es decir $\sigma_Y({}^t e) =$ Cte. las ecuaciones (4.5) y (4.6) con ${}^t s_{ij}$ dado por las (4.7) y ${}^t e_{ij}$ dado por las (4.8) constituyen un sistema de 4 ecuaciones diferenciales para cuatro incógnitas que son las 3 componentes de la velocidad ${}^t u_j$ Y la presión ${}^t P$.

Cuando σ_Y no es constante y depende de la deformación equivalente ${}^t e$, (es decir, en aquellos materiales en los que existe endurecimiento por deformación) a este sistema de ecuaciones que relaciona a la nueva incógnita ${}^t e$ con la velocidad de deformación, es decir (ver ecuaciones (3.23) y (3.25))

$${}^t \mathbf{e} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{{}^t d_2}$$

donde ${}^t \mathbf{e}$ es la derivada material de ${}^t e$ que esta dada por

$${}^t \mathbf{e} = \frac{\partial {}^t e}{\partial t} + \frac{\partial {}^t e}{\partial c_i} \mathbf{u}_i$$

Entonces para el caso en que exista endurecimiento por deformación, se debe incorporar la ecuación

$$\frac{\partial {}^t e}{\partial t} + \frac{\partial {}^t e}{\partial c_i} \mathbf{u}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{{}^t d_2} \quad (4.9)$$

que junto con las cuatro ecuaciones anteriores constituirán un sistema de 5 ecuaciones diferenciales para las cinco incógnitas ${}^t \mathbf{u}_j$, ${}^t p$ y ${}^t e$.

Estas ecuaciones diferenciales deberán satisfacerse para todo punto de coordenadas c_j perteneciente a la región del espacio V a través de la cual fluye el metal (ver figura (4.1)) y para resolverla se deberá tener en cuenta las condiciones de borde

$${}^t \mathbf{S}_{ij} n_i = \left({}^t \mathbf{S}_{ij} + \frac{1}{3} {}^t \mathbf{S}_{kk} \mathbf{S}_{ij} \right) n_i = {}^t f_j$$

sobre la parte S_f de la frontera de V donde se encuentran impuestas las tracciones ${}^t f_j$ (llamada condición de borde cinemática o artificial). La adopción del modelo constitutivo

viscoplastico de Persyna asociado a la ley de fluencia Von Mises (ecuación (4.7)) para la descripción del comportamiento inelástico del material y el hecho que las deformaciones elásticas sean despreciables frente a las inelásticas, permite entonces considerar la deformación plástica del sólido como si fuera el flujo de un fluido incomprensible viscoso (no newtoniano). Esto posibilita a su vez la utilización del enfoque euleriano para la descripción del movimiento del material y la elección de las velocidades ${}^t u_j$ como incógnitas primarias a determinar (hecho que, como se dijo en la introducción, representa una gran ventaja desde el punto de vista numérico dado que el dominio de calculo no debe ser actualizado instante a instante como sucede a estudiar la deformación del sólido desde el punto de vista lagrangeano). Las ecuaciones con las que se describirá el movimiento del material son entonces las presentadas en el primer capítulo (ecuaciones de continuidad y de conservación de la cantidad de movimiento para el enfoque euleriano) que, teniendo en cuenta que las fuerzas de naturaleza viscosa que intervienen son mucho mas importantes que las fuerzas de inercia (flujo de Reynolds bajo o flujo de Stokes) se reducen a las (4.5) y (4.6).

5. MODELO DE FLUJOS INCOMPRESIBLES BIDIMENSIONALES CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

En el CAPITULO ANTERIOR se plantearon las ecuaciones diferenciales que describen el flujo de un metal caracterizado por la ley constitutiva rigidovicoplástica de Perzyna asociada a ley de fluencia de Vons Mises (ecuaciones (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) y (4.9)). Como se dijo antes, estas ecuaciones son análogas a las correspondientes al flujo de un fluido incompresible viscoso no de newtoniano (es decir, de viscosidad dependiente de la velocidad). En este capítulo se estudiara como se resulten numéricamente dichas ecuación es utilizando el Método de los Elementos Finitos. Se vera que la condición de incompresibilidad no puede imponerse en forma exacta con este método y que entonces es necesario buscar formas alternativas de aproximar dicha condición.

Si bien la relación constitutiva elegida para el metal es semejante a la correspondiente a un flujo viscoso cuya viscosidad es función de las velocidades (fluido no newtoniano), para estudiar los problemas relacionados con la condición de incompresibilidad que se presenta en el método de los elementos finitos se considera un fluido de viscosidad constante (fluido newtoniano), dado que todos esto problemas se manifiestan en los dos tipos de fluidos. La adaptación de estas ideas al caso del fluido de un metal (que no es newtoniano) se explicara en el sexto capítulo.

En particular se describirán dos formas alternativas de imponer la condición de incomprensibilidad: el método de los multiplicadores de Lagrange (con interpolación bilineal continua para las velocidades e interpolación constante y discontinua para las presiones) y el método de penalización y se estudiarán sus alcances, sus limitaciones como así también las formas de superarlas. Las referencias para este capítulo son [2],[3],[4],[5],[6],[12],[13],[15],[16],[22],[23],[24],[26],[28]y[29].

5.1. PRINCIPIO DE LAS POTENCIAS VIRTUALES PARA UN ESTADO PLANO DE VELOCIDADES DE DEFORMACIÓN.

El punto de partida del método de elementos finitos (y de sus formulaciones alternativas) es el principio de las potencias virtuales formulado en el segundo capítulo (ecuaciones (2.6) y (2.7). cuando las deformaciones son planas, varios de los términos que aparecen en este principio se anulan, y su expresión toma una forma mas simple que las correspondientes a deformaciones tridimensionales.

Se define como deformación plana a aquella para la cual una de las componentes de la velocidad, (por ejemplo v_3) es nula, y las otras dos componentes de la velocidad (v_1, v_2) y la presión p no dependen de la coordenada x_3 que es la dirección perpendicular a la velocidad.²³ Es decir,

²³ Más adelante se supondrá que el flujo es estacionario, es decir, que todas las variables que describen el

$$\begin{aligned}
v_1 &= v_1(x_1, x_2) \\
v_2 &= v_2(x_1, x_2) \\
v_3 &= 0
\end{aligned}$$

y

$$p = p(x_1, x_2)$$

Si se supone que las deformaciones son planas, las componentes del tensor velocidad de deformación (relacionadas con las velocidades según las ecuaciones (4.8) se reducen a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\
\mathbf{e}_{22} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\
\mathbf{e}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \\
\mathbf{e}_{13} &= \mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_{33} = 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

y las tensiones desviadoras, (relacionadas con a velocidad de deformación según las ecuaciones constitutiva de un fluido viscoso (4.7) quedan

$$\begin{aligned}
s_{11} &= 2\mathbf{m} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right) \\
s_{22} &= 2\mathbf{m} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right) \\
s_{33} &= 2\mathbf{m} \left(0 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

movimiento del material (velocidades v_j , tensiones σ_{ij} , velocidades de deformación ϵ_{ij} y densidad ρ) no varían en el tiempo (en cada posición fija en el espacio). Por lo tanto, de ahora en adelante se omitirá el supraíndice t al escribir a dichas variables.

$$s_{12} = 2m \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)$$

$$s_{13} = s_{23} = 0$$

Donde $2m$ es la viscosidad, que en adelante se supondrá constantes.²⁴ Las ecuaciones del movimiento para un flujo estacionario (4.6) adquirirán entonces la siguiente forma:

$$\frac{\partial s_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} + b_1 = 0$$

$$\frac{\partial s_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} + b_2 = 0 \quad (5.3)$$

y la condición de incompresibilidad (4.5) se reducirá a

²⁴ si bien cuando el material es exactamente incompresible, $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$ y la relación constitutiva se

reduce a:

$$s_{11} = 2m \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$s_{22} = 2m \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

$$s_{12} = 2m \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)$$

$$s_{13} = s_{23} = s_{33} = 0$$

es conveniente mantener el termino $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ en todas la expresiones dado que, como verá más adelante,

una de las formulaciones alternativas del método de los elementos finitos supone que el material admite un cierto grado de compresibilidad, y es necesario entonces que la expresión del principio de los trabajos virtuales que se pretenden deducir, sea también aplicable en estos casos.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial v_2} = 0 \quad (5.4)$$

Las ecuaciones (5.3) con la retención dadas por la relación constitutiva (5.2) y la ecuación de incomprensibilidad (5.4), constituyen (cuando la viscosidad $2m$ es constante) un sistema de tres ecuaciones diferentes para las tres incógnitas v_1 , v_2 y p que caracterizan el flujo de un medio viscoso incomprensible (de viscosidad constante) que experimenta deformaciones planas.

Teniendo en cuenta esta particularización de las condiciones cinemáticas (4.8), de las ecuaciones del movimiento (4.6), de la relación constitutiva (4.7) y de la condición de incomprensibilidad (4.5) al caso de deformaciones planas, cada uno de los sumandos que aparecen en el principio de las potencias virtuales (2.7) toman respectivamente la siguiente forma:²⁵

- Potencia virtual desviadora

²⁵ En el segundo capítulo se utilizó la notación V y S_v y S_f para representar a las regiones del espacio ocupada por el cuerpo en un instante dado y a su frontera. En este capítulo se utilizarán los símbolos Ω y Γ_v y Γ_f para representar respectivamente a dichos conjuntos y la integral f_v que es una integral triple sobre una región tridimensional V y la integral f_s que una integral de superficie, se reducirán respectivamente en el caso plano, a una integral doble sobre la región plana Ω y a una integral curvilínea sobre la curva Γ que es la frontera de Ω .

$$\int_V \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial dV_i}{\partial x_j} + \frac{\partial dV_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial dV_k}{\partial x_k} d_{ij} \right) s_{ij} dV =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \right) \right) s_{11} + \left(\frac{\partial dv_2}{\partial x_2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \right) \right) s_{22} + \right. \\ \left. + \left(0 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \right) \right) s_{33} + \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_1} \right) s_{12} \right] d\Omega$$

- Potencia virtual volumétrica

$$\int_V \frac{\partial dV_k}{\partial x_k} p dV = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \right) p d\Omega$$

- Potencia virtual de las fuerzas exteriores:

$$\int_V b_j dv_j d\Omega + \int_{S_f} f_j dv_j dS =$$

$$\int_{\Omega} (b_1 dv_1 + b_2 dv_2) d\Omega + \int_{\Gamma_f} (f_1 dv_1 + f_2 dv_2) d\Gamma$$

- El principio de las potencias virtuales cuando las deformaciones son planas puede expresarse entonces como:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[\underline{de} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^T \cdot \underline{s} + \left[0 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \right) \right] s_{33} \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \right) p d\Omega = \int_{\Omega} \underline{dv}^T \cdot \underline{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \underline{dv}^T \cdot \underline{f} d\Gamma \quad \forall \underline{dv}$$

donde \underline{dv} , \underline{de} , \underline{s} , \underline{b} y \underline{f} son matrices (columna) que agrupan respectivamente a las componentes no nulas de las variaciones de la velocidad dv_1 y dv_2 , de la velocidad de deformación de_{11} , de_{22} y de_{12} , y a las componentes de las tensiones desviadoras s_1, s_j y s_{19} , las fuerzas volumétricas exteriores b_1 y b_2 y las fuerzas de superficie f_1 y f_v , es decir,

$$\underline{dv} = \begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{de} = \begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ 2de_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial dv_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_1}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_{12} \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

(y el supraindice T indica “traspuesta”). Teniendo en cuenta en primer lugar que

$$\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} = (1 \ 1 \ 0) \underline{de}$$

y que entonces

$$\underline{de} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{de} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 0) \underline{de} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{de}$$

por lo que la relación constitutiva para un material viscoso que experimenta deformaciones plásticas (las ecuaciones (5.2) se podrá expresar como

$$\begin{aligned} \left\{ s \right\} &= 2m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left[\underline{e} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= 2m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{e} \\ s_{33} &= 2m \left(0 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right) = \\ &= -2m \frac{1}{3} (1 \ 1 \ 0) \underline{de} \end{aligned}$$

donde \underline{e} es la matriz que agrupa a las componentes no nulas de la velocidad de deformación, es decir,

$$\underline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ 2\mathbf{e}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial d v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial d v_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial d v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial d v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

el principio de las potencias virtuales para deformaciones planas y para un medio viscoso queda

$$\int_{\Omega} \left[\underline{\mathbf{d e}}^T \cdot \underline{\mathbf{I d}}^T \cdot 2m \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{I d}} \cdot \underline{\mathbf{e}} + \underline{\mathbf{d e}}^T \cdot \left(-\frac{1}{3} \underline{\mathbf{M}} \right) 2m \left(-\frac{1}{3} \underline{\mathbf{M}} \right)^T \underline{\mathbf{e}} \right] d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \underline{\mathbf{d e}}^T \underline{\mathbf{M}} p d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{d u}}^T \cdot \underline{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \underline{\mathbf{d u}}^T \cdot \underline{\mathbf{f}} d\Gamma \quad \forall \underline{\mathbf{d v}}$$

Donde

$$\underline{\mathbf{I d}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y teniendo en cuenta en segundo lugar que ²⁶

$$\underline{Id}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{Id} + \left(-\frac{1}{3} \underline{M} \right) \left(-\frac{1}{3} \underline{M} \right)^T = \underline{D} \cdot \underline{Id}$$

y agrupando términos, el principio de las potencias virtuales para un material viscoso que experimenta deformaciones planas se expresa finalmente como:

$$\int_{\Omega} \underline{de}^T \cdot 2m \underline{D} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{e} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{de}^T \underline{M} p \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{dv}^T \cdot \underline{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \underline{dv}^T \cdot \underline{f} \, d\Gamma \quad \forall \underline{dv} \quad (5.5)$$

El primer término del miembro izquierdo es la potencia virtual desviadora, y el segundo, la potencia virtual volumétrica. El miembro derecho representa la potencia virtual de las fuerzas exteriores. Cuando las fuerzas exteriores volumétricas \underline{b} sean nulas, y las condiciones de bordes sean exclusivamente cinemáticas, es decir sobre toda la frontera Γ del dominio Ω , las velocidades estén impuestas (y por lo tanto $\Gamma_v = \Gamma$ y $\Gamma_f = \emptyset$), el principio de las potencias virtuales se reducirá a:

$$\int_{\Omega} \underline{de}^T \cdot 2m \underline{D} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{e} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{de}^T \underline{M} p \cdot d\Omega = 0 \quad \forall \underline{dv} \quad (5.6)$$

5.2 DISCRETIZACION CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: SUS LIMITACIONES

²⁶ Esta identidad se puede demostrar observando que la matriz \underline{Id} está dada por

$$\underline{Id} = \underline{I} - \frac{1}{3} \underline{M} - \underline{M}^T$$

donde \underline{I} es la matriz de 3×3

Como se dijo en el segundo capítulo, el principio de las potencias virtuales es una expresión equivalente a las ecuaciones del movimiento de un cuerpo, en el sentido que los campos de presiones p y de velocidades (v_1, v_2) que satisfacen la igualdad (5.5) (y las condiciones de borde cinéticas, es decir, $(v_1, v_2) = \text{dato sobre } \Gamma_v$) para toda variación (dv_1, dv_2) (nula en Γ_v), verificara la ecuación del movimiento (5.3) (con las condiciones de borde estadísticas) y la relación constituida (5.2).²⁷ Es decir, el principio de las potencias virtuales representa una forma alternativa de plantear estas ecuaciones. El método de elementos finitos se apoya en esta resultado y busca una solución aproximada de dichas ecuaciones partiendo del principio de las potencias virtuales (5.5). para formularlo, se necesita introducir primero la siguiente notación: dado un conjunto plano Ω incluido en R^2 ,

- Se denomina $L^2(\Omega)$ al conjunto de las funciones $v(x_1, x_2)$ definidas en Ω para las cuales las integral $\int_{\Omega} v^2 d\Omega$ existen y es finita, es decir,

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R \quad \text{tal que} \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\}$$

²⁷ La condición de incompresibilidad (5.4) no esta implicada por el principio de las potencias virtuales. Entonces, además de cumplir el principio de las potencias virtuales, el campo de velocidades deberá ser exactamente incompresible.

($< \infty$ Quiere decir que existen y es $\neq \infty$). Este conjunto incluye a una gran cantidad de funciones, en particular, a las funciones constituidas en Ω a las funciones por partes (es decir, las funciones continuas en subdominios Ω_e y que “pegan saltos” a través de la frontera que separa cada subdominio Ω_e de los vecinos), etc.

- Se denomina $H^1(\Omega)$ al conjunto de las funciones $v(x_1, x_2)$ definidas en Ω que pertenecen a $L^2(\Omega)$ y cuyas derivadas parciales también pertenecen a $L^2(\Omega)$, es decir,

aquellas funciones para las cuales las integrales $\int_{\Omega} v^2 d\Omega$ y $\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega$ existen y son

finitas

$$H^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \subset R^2 \rightarrow R \text{ tal que } v \in L^2(\Omega) \text{ y } \frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Este conjunto (incluido obviamente en $L^2(\Omega)$) también es un conjunto muy grande que incluye en particular, a las funciones continuas de derivadas parciales continuas en Ω , a las funciones continuas por partes y/o de parciales continuas por partes (es decir, las funciones continuas y de continuas en subdominios Ω_e que “pegan saltos” (ellas y/o sus derivadas) entre subdominios Ω_e), etc. (las componentes del campo de velocidades v_1 y v_2 pertenecen a esta conjunto).

Se observa que el conjunto $L^2(\Omega)$ constituye un espacio vectorial de funciones ²⁸ y $H^1(\Omega)$ un subespacio vectorial de el. ²⁹

En relación a un cuerpo cuya sección transversal ocupa en un instante t cualquiera, cierta región del espacio $\Omega \subset R^2$ (ver figura (5.1)) y que se encuentra sometido a la acción de fuerzas de volumen (b_1 y b_2), fuerzas de superficie (f_1, f_2) sobre la parte Γ_f de la frontera de Ω y a velocidades impuestas sobre la otra parte de la frontera Γ_v (es decir $(v_1, v_2) = (g_1, g_2)$ = dato sobre G_v) es necesario introducir también la siguiente notación:

- Se denomina U al conjunto de las funciones (v_1, v_2) definidas en Ω , pertenecientes a

$$H^1(\Omega) \quad (\text{es decir, } \int_{\Omega} (v_i)^2 d\Omega \text{ y } \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega \text{ existen y son finitas) y que satisfacen}$$

exactamente las condiciones de borde cinéticas, (es decir, cumplen que $(v_1, v_2) = \text{dato} = (g_1, g_2)$ sobre G_v). Es decir:

²⁸ Es decir, si v y w pertenecen a $L^2(\Omega)$, entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha v + \beta w$ también pertenecerá a $L^2(\Omega)$.

²⁹ La notación elegida es la utilizada convencionalmente en el análisis funcional (ver referencias [34] y [35]). Esto quiere decir que, dad cualquier función $v \in H^1(\Omega)$ entonces la distancia $d(v, H_h)$ entre esta función y el espacio H_h (entendiéndose entre v y H_h a la mínima de las distancias entre v y los elementos v_h de H_h , es decir, $d(v, H_h) = \inf_{v_h \in H_h} \{d(v, v_h)\}$ donde $d(v, v_h)$ es cierta medida del error que se comete al aproximar a la función v con la función interpolante v_h) disminuye a medida que aumenta la dimensión del espacio H_h .

$$\mathbf{U} = \{(v_1, v_2) \text{ tal que } v_i \in H^1(\Omega) \text{ y } (v_1, v_2) = (g_1, g_2) \text{ sobre } \Gamma_v\}$$

donde (g_1, g_2) son las velocidades impuestas sobre la frontera Γ_v). La función (v_1, v_2) que satisface la igualdad (5.5) (y por lo tanto, es solución de las ecuaciones del movimiento) pertenecerá a este conjunto.

- Se denomina V al conjunto de las funciones (w_1, w_2) definidas en Ω , pertenecientes a $H^1(\Omega)$ que son nulas sobre la frontera Γ_v donde se prescriben las velocidades, es decir $V = \{(w_1, w_2) \text{ tal que } w_i \in H^1(\Omega) \text{ y } (w_1, w_2) = (0, 0) \text{ sobre } \Gamma_u\}$

Las variaciones de la velocidad (o velocidades virtuales) (du_1, du_2) pertenecen a este espacio.

- Se denomina K al conjunto de las funciones (v_1, v_2) definidas en Ω , pertenecientes a $H^1(\Omega)$ que son exactamente incompresibles, es decir:

$$K = \left\{ (v_1, v_2) \text{ tal que } v_i \in H^1(\Omega) \text{ y } \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

(En Ω quiere decir $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$).

Se observa que, (llamado $H^1(\Omega)$ al conjunto de pares ordenados de funciones de $H^1(\Omega)$, es decir, $H^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^2$), los conjuntos U , V y K son subespacios vectoriales de funciones de $H^1(\Omega)$. Se observa también que el campo de presiones p , (sobre el que no hay especificada ninguna condición de contorno) pertenecerá al espacio $L^2(\Omega)$. Utilizando esta denotación se puede reexpresar en la siguiente forma la equivalencia entre las ecuaciones (5.2) y (5.3) y el principio de las potencias virtuales

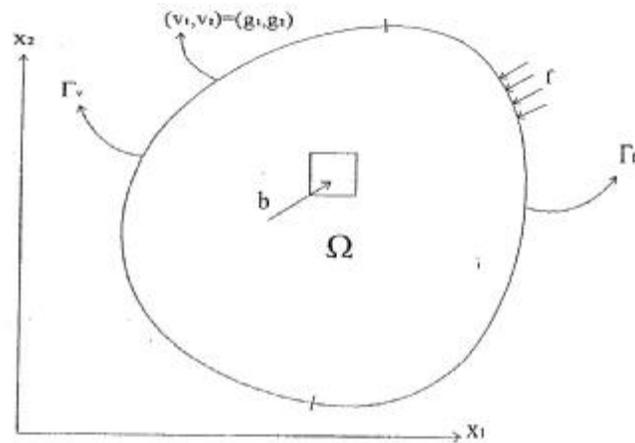


Figura 5.1: Dominio ocupado por un medio viscoso y condiciones de borde a las que esta sometido.

(5.5): el campo de velocidad (v_1, v_2) y el de presiones p que satisfacen la ecuación del movimiento (5.3) con las tensiones s_{ij} dadas por la relación constitutiva (5.2) (y las condiciones de borde cinemáticas y estadísticas) son aquellas funciones p y (v_1, v_2)

pertenecientes respectivamente a $L^2(\Omega)$ y a U tal que para toda función $(\underline{du}_1, \underline{du}_2)$ pertenecientes a V verifica la igualdad (5.2), es decir, aquellos campos p y (v_1, v_2) tales que

$p \in L^2(\Omega), (v_1, v_2) \in U$ y $\forall (dv_1, dv_2) \in V$ se verifica que:

$$\int_{\Omega} \underline{de}^T \cdot 2m\underline{D} \cdot \underline{ID} \cdot \underline{e} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{de}^T \cdot \underline{M} p d\Omega = \int_{\Omega} \underline{dv}^T \cdot \underline{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \underline{dv}^T \cdot \underline{f} d\Gamma \quad (5.7)$$

$$\text{Donde } \underline{de}^T = \left(\frac{\partial dv_1}{\partial x_1} \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \frac{\partial dv_1}{\partial du_1} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_1} \right) \underline{e}^T = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right).$$

Así planteado, el principio de las potencias virtuales representa una forma alternativa de formular las ecuaciones (5.2) y (5.3). Sin embargo no asegura que se satisficiera también la condición de incompresibilidad (5.4). Para que dicha condición también se cumpla, y obtener así una formulación equivalente a las ecuaciones completas del flujo de un medio viscoso incompresible viscoso (es decir, una formulación que implique no solo a las ecuaciones (5.3), (5.2) si no también la (5.4)) se puede reescribir al principio de las potencias virtuales de la siguiente forma: el campo de velocidades (v_1, v_2) y el de presiones p que satisfacen la ecuación del movimiento (5.3), la relación constitutiva (5.2) (con las condiciones de borde cinemáticas y estadísticas) y la condición de incompresibilidad (5.4), es aquella función perteneciente a $U \cap K$ (es decir, se exige ahora a la función (v_1, v_2) que pertenezca no solo a U como antes, sino también a K) que verifica la igualdad (5.5) para toda función (dv_1, dv_2) perteneciente a V , es decir, es un campo de velocidad (v_1, v_2) tal

que para toda la función (dv_1, dv_2) perteneciente a V , es decir, es un campo de velocidades (v_1, v_2) tal que

$(v_1, v_2) \in U \cap K$ y $\forall (dv_1, dv_2) \in V$ se verifica

$$\int_{\Omega} \underline{de}^T \cdot 2\underline{mD} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{e} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{de}^T \cdot \underline{Mp} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{dv}^T \cdot \underline{bd}\Omega + \int_{\Gamma} \underline{dv}^T \cdot \underline{f} \, d\Gamma$$

para completar la formulación del método de los elementos finitos es necesario introducir además de los espacios $H^1(\Omega)$, U , V y K los siguientes espacios de funciones de dimensión finita:

- Se denomina H_n a un espacio de dimensiones finita de funciones que aproximan (o interpolan) a las funciones de $H^1(\Omega)$. En el método de los elementos finitos este espacio se constituye de la siguiente forma:
 - Se divide el dominio Ω en subdominios Ω_e (ver figura (5.2)) (estos subdominios son los llamados elementos finitos). En este trabajo se utilizarán elementos de cuatro nodos y cuatro lados rectos. El “tamaño” de cada elemento Ω_e se mide con un parámetro h_e , que en el caso de los elementos de cuatro nodos, puede tomarse como la mayor de las distancias entre lados opuestos (ver figura (5.3)). Como estos elementos tienen lados rectos, y el dominio Ω tiene en general una frontera Γ curva,

entonces la unión de todos estos elementos no coincidirá exactamente con Ω (ver figura (5.2)) pero tienden a coincidir cuando el tamaño de todos los elementos $(\Omega_h = \cup_e \Omega_e)$ Ω_h no coincide con Ω pero tiende a ser igual cuando $h_e \rightarrow 0 \forall e$.

- Sobre cada elemento se define un sistema de coordenadas curvilíneo local (r,s) (ver figura (5.3)) además del sistema de coordenadas global (x_1, x_2) tal que las coordenadas locales (r,s) correspondientes a cada nodo sean las que muestran en la siguiente tabla

Nodo	Coordenada (r,s)
1	$(1,1)$
2	$(-1,1)$
3	$(-1,-1)$
4	$(1,-1)$

Y las correspondientes a cada lado sean

lado	Coordenada (r,s)
1-2	$(r,1)$ con $-1 \leq r \leq 1$
2-3	$(-1,s)$ con $-1 \leq s \leq 1$
3-4	$(r,-1)$ con $-1 \leq r \leq 1$
4-1	$(1,s)$ con $-1 \leq s \leq 1$

Se puede demostrar que la funciones que definen el cambio de coordenadas locales (r,s) a coordenadas globales (x_1,x_2) y que verifica las anteriores correspondencias se puede expresar como (ver referencias [2],[12] y [13])

$$\begin{cases} x_1(r,s) = h_1(r,s)x_1^{(1)} + h_2(r,s)x_1^{(2)} + h_3(r,s)x_1^{(3)} + h_4(r,s)x_1^{(4)} \\ x_2(r,s) = h_1(r,s)x_2^{(1)} + h_2(r,s)x_2^{(2)} + h_3(r,s)x_2^{(3)} + h_4(r,s)x_2^{(4)} \end{cases}$$

donde $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$, $(x_1^{(3)}, x_2^{(3)})$ y $(x_1^{(4)}, x_2^{(4)})$, son respectivamente las coordenadas globales de los nodos 1,2,3 y 4 y la funciones $h_j(r,s)$ son las denominadas *funciones de forma* (para el elemento bidimensional de cuatro nodos) definidas como:

$$\begin{aligned} h_1(r,s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\ h_2(r,s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ h_3(r,s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \\ h_4(r,s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \end{aligned} \tag{5.9}$$

se observa que todas estas funciones son funciones polinómicas construidas combinando linealmente los polinomios 1, r, s y rs, y que cada función $h_j(r,s)$ vale 1 en nodo j y 0 en los tres restantes, es decir, $h_j(r_i,s_i) = d_{ij}$.

- el espacio H_h de funciones que aproximarán a las funciones de $H^1(\Omega)$ se define de la siguiente forma:

$$H_h = \left\{ V_h \text{ tal que } V_h \text{ es continua en } \Omega_e \text{ y es un polinomio dentro de cada elemento } \Omega_e \right\}$$

Donde (Ω_h) es la unión de todos los elementos (Ω_e) en que se particionó al dominio Ω , (es decir, $(\Omega_h) = \bigcup_e \Omega_e$) que, como se dijo antes, no coincide exactamente con Ω . En la figura (5.4) se muestra una de estas funciones. Como dentro de cada elemento la función es polinómica, entonces también será continua (adentro del elemento). El único lugar donde puede no ser continua es en los bordes de cada elemento. Se deduce entonces que la función será continua en todo el dominio Ω_h si es continua en dichos bordes.

- Se elige como base de los polinomios que se utilizarán dentro de cada elemento a las funciones de forma $h_1(r,s), h_2(r,s), h_3(r,s), h_4(r,s)$ (que como se dijo antes son combinaciones lineales de los polinomios 1, r, s y rs). Es decir, cada función v_h será igual, dentro de cada elemento, a uno de los polinomios que se generan combinando

linealmente dichas funciones. Recordando que cada función de forma $h_j(r,s)$ vale 1 en el nodo de j y 0 en los restantes, se deduce que los parámetros que definen a cada función v_h serán los valores de dicha función v_h en los nodos (ver referencias [2], [12] y [13]). Dentro de cada elemento la función v_h estará dada entonces por:

$$v_h(r,s) = h_1(r,s)v_h^{(1)} + h_2(r,s)v_h^{(2)} + h_3(r,s)v_h^{(3)} + h_4(r,s)v_h^{(4)} \quad (5.10)$$

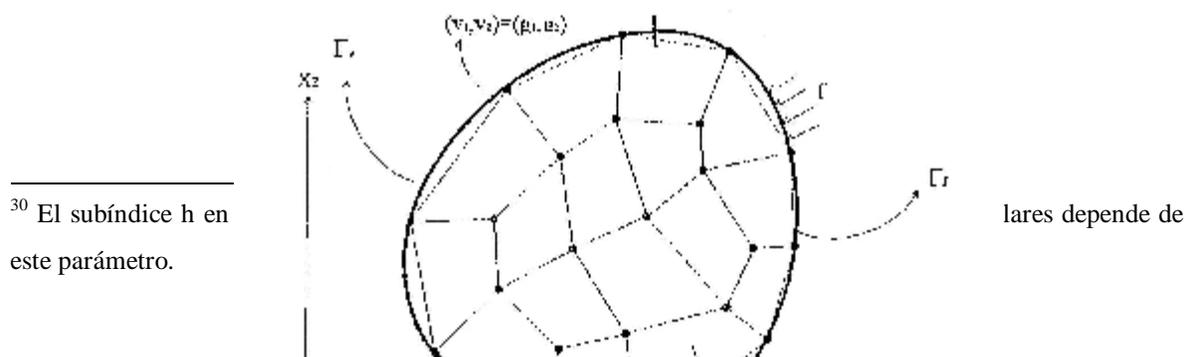
donde $v_h^{(1)}, v_h^{(2)}, v_h^{(3)}$ y $v_h^{(4)}$ son respectivamente los valores que toma la función v_h en los nodos 1, 2, 3 y 4. Se puede demostrar que las funciones v_h definidas dentro de cada elemento de esta forma, son continuas los bordes de los elementos y por tanto, continuas en todo el dominio Ω_h .

Se observa que este espacio H_h es un espacio vectorial de funciones de dimensión finita (y que si los dominios Ω y Ω_h coinciden, H_h será un subespacio vectorial de $H^1(\Omega)$). La dimensión estará dada por la cantidad total de nodos presentes en la malla ya que fijados los valores de v_h en todos los nodos, quedará especificado un único polinomio en cada elemento Ω_e y entonces una única función v_h de h_h . se observa también que cuanto mayor cantidad de elementos (y por lo tanto de nodos) se utilicen para discretizar al dominio Ω , mejor será la “calidad” del espacio H_h como espacio de funciones aproximantes de las funciones de $H^1(\Omega)$ ⁷. Si se define como h al supremo de los tamaños de los elementos h_e

(es decir, $h = \sup_e \{h_e\}$) entonces, cuando más chico es h , menor será el tamaño de todos los elementos, mayor será la cantidad de elementos y de nodos, mayor la dimensión de H_h y la mejor la aproximación que se puede hacer de las funciones $v \in H^1(\Omega)$ con las funciones $v_h \in H_h$. El parámetro h , está relacionado entonces con la dimensión del espacio H_h .³⁰ Teniendo en cuenta que la base de cada uno de los polinomios elementales son las funciones de forma (5.9) y como las funciones de H_h son continuas entre elementos se deduce que la base del espacio H_h estará formada por las funciones $n_J(x_1, x_2)$ que valen 1 en el nodo J y 0 en los restantes (ver figura 5.5) y que los parámetros que definen a cada una de las funciones $v_h \in H_h$ serán los valores que toman dichas funciones en los nodos. Es decir, cada función $v_h \in H_h$ se puede escribir como:

$$v_h(x_1, x_2) = \sum_{J=1}^N n_J(x_1, x_2) v_h^{(J)} \quad (5.11)$$

donde $v_h^{(J)}$ es el valor que toma la función v_h en el nodo J , $n_J(x_1, x_2)$ es la base de H_h y N es la cantidad total de nodos que como se dijo antes, es la dimensión de H_h .



³⁰ El subíndice h en este parámetro.

lares depende de

Figura 5.2: Discretización del dominio Ω en elementos finitos Ω_e .

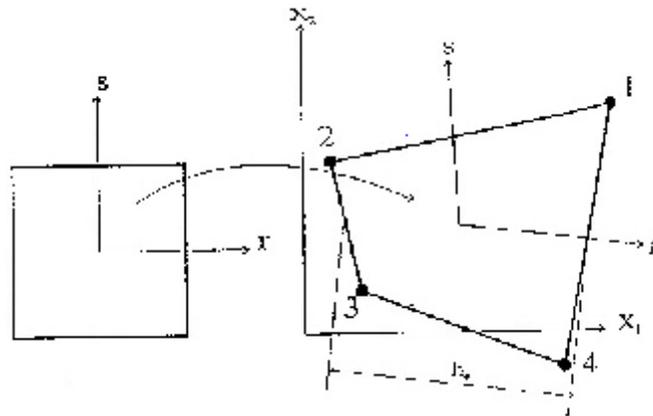


Figura 5.3: sistema de coordenadas local utilizado en cada elemento

Para formular el método de los elementos finitos además de este espacio H_h , es necesario definir los siguientes espacios de funciones de dimensión finita que aproximarán a las funciones de U , V y H .

- Se denomina U_h al espacio de dimensiones finita de funciones (v_{1h}, v_{2h}) que pertenecen al espacio de funciones aproximadas H_h y que verifican en los nodos de la periferia las condiciones de borde cinemáticas que debe satisfacer la solución continua $(v_1, v_2) = dato = (g_1, g_2)$ sobre la parte de la frontera Γ_v y si se numera con índice I a los nodos que se ubican sobre dicha frontera Γ_v entonces las funciones (v_{1h}, v_{2h}) de U_h deben cumplir $(v_{1h}, v_{2h})|_I = (g_1, g_2)|_I$ ($v|_I$ quiere decir, v evaluada en el nodo I) para todo los nodos I .

Simbólicamente:

$$U_h = \{(v_{1h}, v_{2h}) \text{ tal que } v_{1h} \text{ y } v_{2h} \in H_h \text{ y } (v_{1h}, v_{2h})|_I = (g_1, g_2)|_I \quad \forall I \}$$

Donde (g_1, g_2) son las velocidades impuestas sobre la frontera Γ_v .

- Se denomina V_h al espacio de funciones (w_{1h}, w_{2h}) que pertenecen al espacio de funciones aproximantes H_h y que valen $(0, 0)$ sobre los nodos de la periferia. Es decir,

$$V_h = \{(w_{1h}, w_{2h}) \text{ tal que } w_{1h} \text{ y } w_{2h} \in H_h \text{ y } (w_{1h}, w_{2h})|_I = (0, 0)|_I \quad \forall I \}$$



Figura 5.4: Función V_h Representativa del espacio H_h

- Se denomina K_h al espacio de funciones (v_{1h}, v_{2h}) que pertenecen al conjunto de funciones aproximantes H_h y que son exactamente incompresibles, es decir,

$$K_h = \left\{ (v_{1h}, v_{2h}) \text{ tal que } v_{1h} \text{ y } v_{2h} \in H_h \text{ y } \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = 0 \text{ en } \Omega_h \right\}$$

Como Ω_h es la unión de los dominios elementales Ω_e , para que v_{1h} y v_{2h} verifiquen la condición de incompresibilidad en todo el dominio Ω_h se deberá cumplir

$$\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = 0 \text{ en cada uno de dichos dominios elementales (es decir}$$

$$\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = 0 \text{ en } \Omega_e \text{ para todo el elemento } e).$$

Se observa que tres espacios de funciones son subespacios vectoriales del espacio de los pares ordenados de funciones aproximantes de H_h es decir, U_h , V_h y K_h están incluidos en H_h (siendo $H_h = H_h \times H_h = (H_h)^2$) y que entonces, a medida que aumenta la cantidad de

elementos (disminuye el parámetro h) mejora la aproximación que se puede hacer de las funciones de U con las funciones de U_h , de las funciones de V con las de V_h y de las de K con las de K_h .

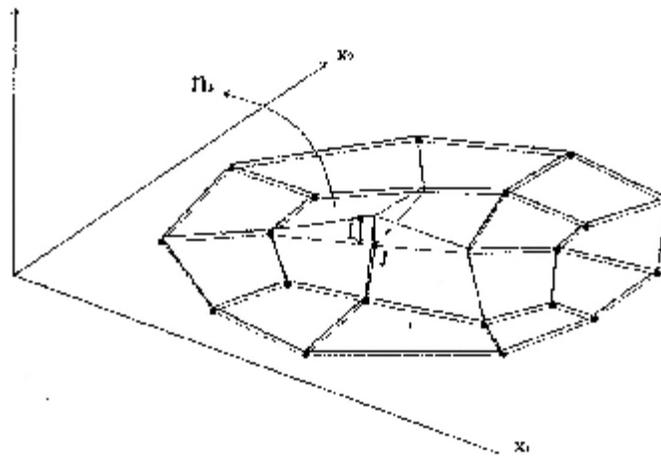


Figura 5.5: Funcion Base del espacio H_h

Hasta ahora solo se ha hablado de los espacios que aproximarán a la velocidad (v_1, v_2) . Para aproximar a las presiones p (que es una función perteneciente al espacio $L^2(\Omega)$) es necesario construir un nuevo espacio de dimensión finita de funciones interpolantes. Como no existen condiciones de borde impuestas sobre la presiones y como en el principio de las potencias virtuales (5.5) no aparece involucrada ninguna derivada de p , alcanzará con un espacio de funciones continuas dentro de cada elemento y discontinua entre elementos (ver referencia [2]). A este espacio se simbolizará como H_Q y a las funciones que pertenecen a él se las representará con el símbolo a_h . Al igual que el espacio de las funciones aproximantes de las componentes de la velocidad H_h este espacio estará formado por funciones

polinómicas dentro de cada elemento pero es este caso dichas funciones pueden ser discontinuas entre elementos. Como se verá mas adelante el grado dichos polinomios no puede elegirse arbitrariamente y está relacionado tonel grado de los polinomios con los que se aproxima a las velocidades. Para construir a este espacio se puede hacer algo análogo a los hecho en el caso de las velocidades: elegir como base de cada polinomio elemental a ciertas funciones de forma \tilde{n}_E (que serán a su vez polinomios) que valen 1 en ciertos “nodos para la presión” y cero en los restantes por lo que cada función $q_h \in Q_h$ se podrá escribir como

$$q_h(x_1, x_2) = \sum_{E=1}^{NP} \tilde{n}_E(x_1, x_2) q_h^{(E)}$$

donde NP es el numero total de “nodos de presión” y $q_h^{(E)}$ es el valor que toma q_h en el nodo numerado con el índice E. por ejemplo, en este trabajo se usará como espacio de presiones aproximantes al formato por funciones que son constantes dentro de cada elemento (es decir, polinomios de grado 0) y discontinuas entre elementos. En este caso los nodos de presión están ubicados en el “centro” de cada elemento (coordenadas $(r,s) = (0,0)$) y cada función base \tilde{n}_E valdrá 1 en dicho nodo de presión E (y en todo el elemento E) y cero en los restante (ver figura (5.6)).

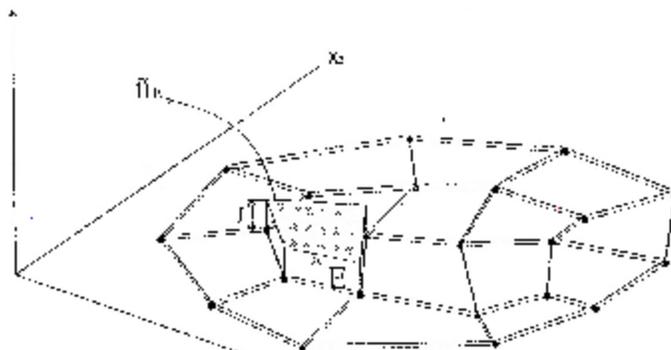


Figura 5.6: Función base del espacio Q_h

Utilizando estos espacios, y apoyándose en el hecho las funciones $p \in L^2(\Omega)$ y $(v_1, v_2) \in U$ que verifican el principio de las potencias virtuales (5.5) (para toda variación de velocidades perteneciente al espacio V) satisfacerán las ecuaciones del movimiento (5.3) (con las condiciones de borde estáticas), la relación constitutiva (5.2) y las condiciones de borde cinemáticas (pero no de la condición de incompresibilidad), el método de los elementos finitos propone como solución aproximada de dichas ecuaciones (de las ecuaciones del movimiento y la relación constitutiva) a las funciones p_h y (v_{1h}, v_{2h}) que pertenecen respectivamente a los espacios aproximantes de las presiones Q_h y de las velocidades U_h y que satisfacen el principio de los trabajos virtuales para toda variación (dv_{1h}, dv_{2h}) de V_h es decir

$$p_h \in Q_h \text{ y } (v_{1h}, v_{2h}) \in U \text{ tal que } \forall (dv_1, dv_2) \in V_h \text{ se verifica que :}$$

$$\int_{\Omega} \underline{de}_h^T \cdot 2\underline{mD} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{e}_h \underline{e} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{de}_h^T \cdot \underline{M} p d\Omega = \int_{\Omega} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{f} d\Gamma$$

(5.12)

donde:

$$\underline{e}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial d v_{1h}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial d v_{2h}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial d v_{1h}}{\partial x_2} + \frac{\partial d v_{2h}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{de}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial d v_{1h}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial d v_{2h}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial d v_{1h}}{\partial x_2} + \frac{\partial d v_{2h}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

son la velocidades de deformación que se derivan de las velocidades aproximadas (v_{1h}, v_{2h}) .

5.2.1. Imposición de la condición de incomprensibilidad: el problema del bloqueo

Las velocidades $(v_{1h}, v_{2h}) \in U_h$ y presiones $p_h \in Q_h$ que verifican la igualdad (5.2) serán entonces solucionados aproximados de las ecuaciones del movimiento (5.3) y las relaciones constitutivas (5.2). sin embargo las velocidades aproximadas (v_{1h}, v_{2h}) no satisfacen todavía la condición de incomprensibilidad debido a que, como se dijo antes, esta condición no está implicada por el principio de las potencias virtuales.

Si se pretende ahora exigirle a la velocidad (v_{1h}, v_{2h}) . aproximada que cumpla también la condición de incomprensibilidad, es decir, que además de verificar (5.12) pertenezca

también a K_h se presenta la siguiente dificultad: especificadas las condiciones de borde (g_1 , g_2) y la malla de elementos finitos, se encuentra que no existe casi ninguna función (v_{1h}, v_{2h}) , que satisfaga a la vez dichas condiciones de borde y la condición de incomprensibilidad exactamente, es decir, que pertenezca simultáneamente a U_h y a K_h y tampoco es posible encontrar una función que cumpla ambas condiciones “afinando” la malla de elementos finito (es decir achicado el tamaño h de los elementos y aumentando entonces el numero total de elementos). En otras palabras, la intersección $U_h \cap K_h$ es “prácticamente” vacía cualquiera sea h . Este problema se conoce con el nombre de bloqueo (ver referencias [2], [12] y [28]).

Para ilustrar este problema se considera como ejemplo el flujo de un medio viscoso dentro de una “cavidad” Ω cuadrada (ver figura (5.7)) cuyo borde superior se encuentra moviéndose con una velocidad arbitraria (y arrastrada entonces al fluido contenido) mientras que el fluido adyacente a los otros dos bordes permanece en reposo. Para “discretizar” el dominio se utiliza una malla formada por una cantidad arbitraria de elementos finitos cuadrados cuyos lados miden una longitud h (ver figura (5.7)). Las condiciones de borde que deberá cumplir la solución aproximada son:

$(v_1, v_2) = (g_1, g_2) = (dato, 0)$. En los nodos ubicados sobre el borde superior

$(v_1, v_2) = (g_1, g_2) = (0, 0)$ en los nodos ubicados sobre los tres bordes.

(5.13)

donde (g_1, g_2) son las componentes de las velocidades impuestas en el sistema de coordenadas (x_1, x_2) mostrado también en la figura (5.7). Este problema es un ejemplo muy estudiado y usado en el análisis de la condición de incompresibilidad y se conoce como problema de la cavidad conducida (ver referencia [12]).

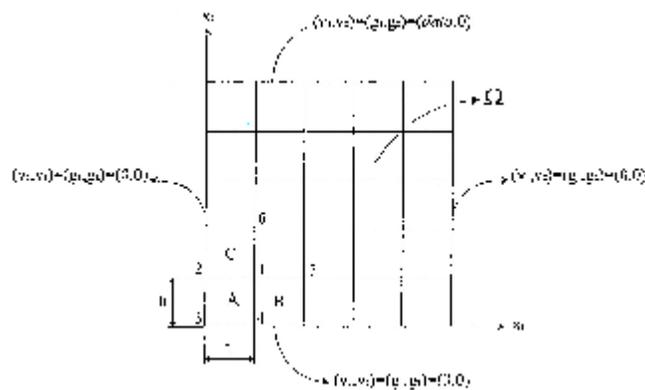


Figura 5.7: problema de la “cavidad conducida”. Condiciones de borde y malla utilizada.

Se demostrará que es un ejemplo ζ , el conjunto $U_h \cap K_h$, es decir, el espacio formado por aquellas velocidades aproximadas que satisfacen simultáneamente las condiciones de borde cinemáticas y la condición de incompresibilidad (exactamente) está formado por una única función y dicha función es un aproximante muy pobre de la solución buscada. En otras palabras, no se puede encontrar ninguna velocidad que aproxime a las ecuaciones del movimiento (y relaciones constitutivas) y a la condición de incompresibilidad a la vez.

Para ver qué $U_h \cap K_h$ es muy chico (existe solo una función contenida en él), se observa primero que, si las velocidades de cada elemento se interpolan en la forma (5,10), entonces,

para un elemento cuadrado (cuyos lados miden una longitud h) las velocidades serán combinaciones lineales de los polinomios $1, x_1, x_2$ y x_1x_2 (ver referencia [2]), es decir,

$$\begin{aligned}v_{1h}(x_1, x_2) &= a_1 + b_1x_1 + g_1x_2 + d_1x_1x_2 \\v_{2h}(x_1, x_2) &= a_2 + b_2x_1 + g_2x_2 + d_2x_1x_2\end{aligned}\tag{5.14}$$

donde $a_1, b_1, g_1, d_1, a_2, b_2, g_2, d_2$, son parámetros que dependen de las velocidades en cada nodo (y de h), es decir, a_1, b_1, g_1, d_1 , son funciones de $v_{1h}^{(1)}, v_{1h}^{(2)}, v_{1h}^{(3)}$, y $v_{1h}^{(4)}$, y a_2, b_2, g_2, d_2 , son funciones de $v_{2h}^{(1)}, v_{2h}^{(2)}, v_{2h}^{(3)}$, y $v_{2h}^{(4)}$,. Para este elemento se deforme incompresiblemente, se deberá cumplir que:

$$\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = (b_1 + g_2) + d_1x_2 + d_2x_1 = 0$$

en todos los puntos (x_1, x_2) del elemento. Esto implica que las velocidades dentro de cada elemento cuadrado estarán dadas por (5.14) con

$$\begin{aligned}b_1 + g_2 &= 0 \\d_1 &= 0 \\d_2 &= 0\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}v_{1h}(x_1, x_2) &= a_1 + b_1x_1 + g_1x_2 \\v_{2h}(x_1, x_2) &= a_2 + b_2x_1 - b_1x_2\end{aligned}$$

Estas igualdades se pueden reescribir utilizando notación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} v_{1h}(x_1, x_2) \\ v_{2h}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + b_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Se observa entonces que un elemento cuadrado cuyas velocidades están dadas por (5.10) se puede deformar incompresiblemente solo de cuatro formas (0 modos) distintas (en realidad son cinco porque el primer modo, que es un movimiento rígido, es combinación lineal de dos movimientos rígidos en las direcciones perpendiculares x_1 y x_2). Estos modos incompresibles de velocidades se dibujan esquemáticamente en la figura (5.8). En la figura (5.9) se muestra esquemáticamente un elemento representativo del espacio K_h , es decir, un campo de velocidades que es exactamente incompresible en todos los puntos del dominio Ω_h (pero que no satisface todavía las condiciones de borde prefijadas), es decir,

$$\begin{pmatrix} v_{1h}(x_1, x_2) \\ v_{2h}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + g_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + b_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

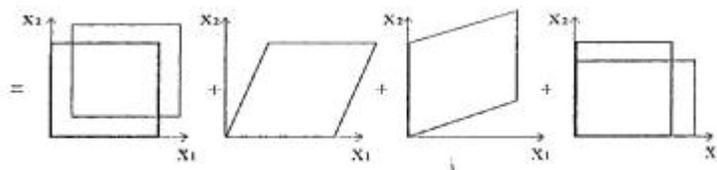


Figura 5.8: Modos incompresibles de un elemento de cuatro nodos cuadrado

Cada elemento se mueve con alguno de los patrones de velocidad mostrados en la figura (5.8) (o combinaciones lineales de ellos).

Teniendo en cuenta que las únicas formas en que se puede mover cada elemento cuadrado son las dibujadas en la figura (5.8), se puede determinar como serán los campos de velocidades que pertenecerán a $U_h \cap K_h$: considerando por ejemplo un elemento como el ubicado en el ángulo inferior izquierdo (elemento A de la figura (5.7)) se observa que por estar fijados los nodos 2 y 3 (ver figura (5.10)) el nodo 1 solo podrá moverse en la dirección vertical, mientras que por estar fijados los nodos 3 y 4, el nodo 1 solo podrá hacerlos en la dirección horizontal.

Tomando estas dos condiciones simultáneamente se deduce que la velocidad del nodo 1 deberá ser nula. Repitiendo este razonamiento para los elementos vecinos B y C se deduce la misma conclusión para los nodos 5 y 6, y así para todos los elementos de la malla salvo los que son adyacentes al borde superior, es decir, las velocidades de todos los nodos interiores a la malla deberá ser nula si se pretende que la malla se deforme satisfaciendo la condición de incompresibilidad exactamente las condiciones de borde (g_1, g_2) impuesta sobre los bordes inferior, izquierdo y derecho. Considerando ahora a alguno de los elementos adyacentes al borde superior, se observa que por estar “bloqueados” los nodos inferiores, y por estar especificada la velocidad de los nodos superiores, dichos elementos se deberán deformar en la forma mostrada en la figura (5,10) para que la velocidad adentro de la

misma sea exactamente incomprensible. Por lo tanto, el único elemento perteneciente a $U_h \cap K_h$, es decir, el único campo de velocidades (v_{1h}, v_{2h}) que satisface simultáneamente las condiciones de borde cinemáticas (5,15) y la condición de incomprensibilidad exactamente, es aquel para la cual, las velocidades en todos los nodos interiores a la malla es nula (ver figura (5.11)). Se observa que esta situación no mejora si se “afina” la malla de elementos finitos utilizada.

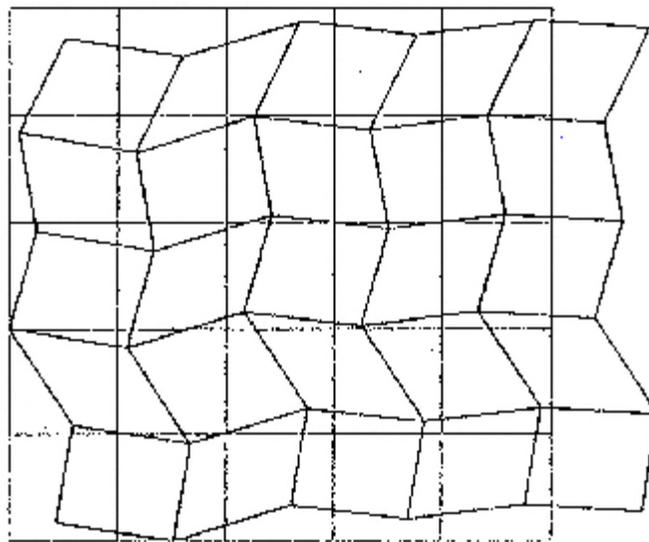


Figura 5.9: Campo de velocidades aproximado (v_{1h}, v_{2h}) que verifica exactamente la incomprensibilidad $((v_{1h}, v_{2h}) \in K_h)$

Para discretizar al dominio, es decir si se aumenta la cantidad de elementos (y se disminuye la longitud h de cada lado de los cuadrados); la intersección $U_h \cap K_h$ seguirá estando formada por una única función (v_{1h}, v_{2h}) y dicha función será idéntica a la

esquemática en la figura (5,11), es decir, (v_{1h}, v_{2h}) es nula en cada uno de los nodos interiores a la cavidad.

Si en vez de discretizar la cavidad con elementos cuadrados, se hubiesen elegido elementos cuadriláteros de lados opuestos no paralelos, la situación hubiese sido todavía peor en el sentido que el espacio K_h resulta todavía más chico que el correspondiente a elementos cuadrados y de las pocas velocidades exactamente incompresibles generalmente ninguna satisface también las condiciones de borde cinemáticas, es decir el espacio $U_h \cap K_h$ resulta vacío (ver referencia [20]).

Resumiendo entonces, no es posible exigir que la solución aproximada para las velocidades de las ecuaciones del movimiento (5.3) y las relaciones constitutivas (con las condiciones de borde cinemáticas), es decir, la funciones (v_{1h}, v_{2h}) que (junto con la presiones aproximadas p_h) verifiquen la igualdad (5.12) cumplan también la condición de incompresibilidad exactamente ya que esta condición restringe muchísimo la familia de “posibles formas” (o modos) en que se pueden mover los elementos y la malla (es decir, el espacio $U_h \cap K_h$ resulta prácticamente vacío).

Es necesario entonces pedir que las velocidades aproximadas (v_{1h}, v_{2h}) en

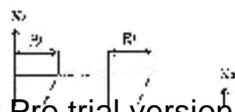


Figura 5.10: Bloqueo de un elemento de la malla utilizada en la discretización del problema de la cavidad conducida.

Vez de ser exactamente incomprensible (es decir, que pertenezcan a cierto espacio $\overline{K_h}$ más grande que K_h), En las próximas secciones se estudiarán en particular dos formas de “debilitar” la condición de incomprensibilidad: el método de los multiplicadores de Lagrange, y el método de penalización.

5.3. MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

El método de los multiplicadores propone la siguiente forma de aproximar la condición de incomprensibilidad: se pide que las velocidades aproximadas (v_{1h}, v_{2h}) cumplan la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) q_h d\Omega = 0 \quad (5.16)$$

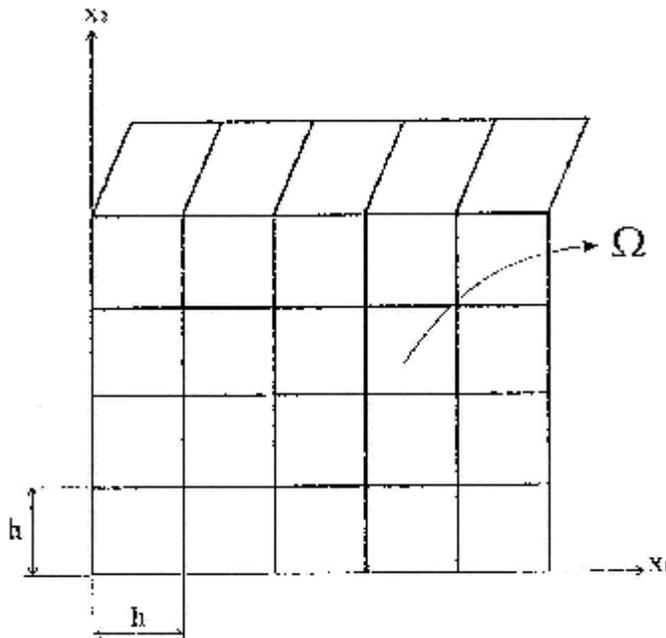


Figura 5.11: Representación esquemática de la única función aproximante (v_{1h}, v_{2h}) contenida en $U_h \cap K_h$

Para toda la función $q_h \in Q_h$. Cuando una función (v_{1h}, v_{2h}) verifica esta condición se dice que dicha función es débilmente incomprensible con respecto al espacio Q_h .

Al conjunto de velocidades aproximantes (v_{1h}, v_{2h}) que son débilmente incomprensibles se los simbolizara como $\overline{K_h}$, es decir,

$$K_h = \left\{ (v_{1h}, v_{2h}) \in H_h \text{ tales que } \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) q_h d\Omega = 0 \forall q_h \in Q_h \right\}$$

El método de los multiplicadores de Lagrange propone entonces como solución aproximada de las ecuaciones completas del flujo estacionario de un medio viscoso incomprensible (que experimenta deformaciones planas) a las velocidades $(v_{1h}, v_{2h}) \in U_h \cap \overline{K_h}$ que junto con las presiones aproximadas $p_h \in Q_h$ verifican la igualdad (5.12), es decir, las funciones $(v_{1h}, v_{2h}) \in U_h \cap \overline{K_h}$ y $p_h \in Q_h$ que cumplen³¹

$$\int_{\Omega} \underline{de}_h^T \cdot 2m\underline{D} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{e}_h \underline{e} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{de}_h^T \cdot \underline{M} p d\Omega = \int_{\Omega} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{f} d\Gamma \quad \forall (dv_{1h}, dv_{2h}) \in V_h$$

³¹ Recordar que las velocidades (v_{1h}, v_{2h}) y presiones p_h aproximadas deben cumplir la igualdad (5.2) para que resulten soluciones aproximadas de la ecuación del movimiento y la relación constitutiva.

o bien, las funciones $(v_{1h}, v_{2h}) \in U_h$ y $p_h \in Q_h$ que verifican simultáneamente

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{de}_h^T \cdot 2\underline{mD} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{e}_h \underline{e} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{de}_h^T \cdot \underline{M} \, p \, d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{f} \, d\Gamma \quad \forall (\underline{dv}_{1h}, \underline{dv}_{2h}) \in V_h \\ & \int_{\Omega} q_h \underline{M}^T \cdot \underline{e}_h \, d\Omega = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde

$$\underline{de}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial dv_{1h}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_{2h}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial dv_{1h}}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_{2h}}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{de}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial dv_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_1}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{de}_h^T \cdot \underline{M} = \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}$$

$$\underline{M}^T \cdot \underline{e}_h = \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}$$

5.3.1. Interpretación geométrica del método de los multiplicadores de Lagrange

La igualdad (5.16) admite la siguiente interpretación geométrica: el espacio Q_h un subespacio vectorial de $L^2(\Omega)$ que es el conjunto al que pertenecen las presiones p^{32} . Por otra parte, siendo las velocidades aproximantes (v_{1h}, v_{2h}) funciones continuas y polinómicas dentro de cada elemento, entonces sus divergencias $\left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right)$ también serán funciones de $L^2(\Omega)$, es decir, el conjunto de las “divergencias” de funciones (v_{1h}, v_{2h}) de

³² En realidad, Q_h no es un subespacio de $L^2(\Omega)$ sino un subespacio de $L^2(\Omega_h)$, donde Ω_h es la unión de todos los elementos (Ω_e) y $L^2(\Omega_h)$ es el conjunto de las funciones v definidas en Ω_h y de “cuadrado integrable”, es decir, $\int_{\Omega_h} v^2 d\Omega < \infty$. Si estos dominios coinciden (es decir, si $\Omega = \Omega_h$), entonces dichos espacios $L^2(\Omega)$ y $L^2(\Omega_h)$ también coincidirán. En adelante se considerara que Ω y Ω_h son efectivamente iguales y que se utilizaran indistintamente a ambos símbolos para representarlos.

H_h también será un subespacio de $L^2(\Omega)$ (ver referencias [3] y [5]). Llamado D_h a dicho subespacio, es decir,

$$D_h = \left\{ q \in L^2(\Omega) \text{ tales que } q = \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) \text{ para alguna } (v_{1h}, v_{2h}) \in H_h \right\}$$

entonces se deduce que existen dos subespacios de $L^2(\Omega)$ en juego, el espacio de las presiones aproximadas Q_h y el de las “divergencias” de las velocidades aproximadas D_h .

Por otra parte, a la integral $\int_{\Omega} p q d\Omega$ se la puede interpretar como un producto interno definido para cada par de elementos p y q pertenecientes al espacio $L^2(\Omega)$.³³

³³ El producto interno es una función que a cada par de elementos de un espacio vectorial (en este caso $L^2(\Omega)$) le hace corresponder un número real, es decir, $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$ y que verifica las siguientes axiomas:

$$\begin{aligned} \langle p, p \rangle &> 0 \quad \forall p \in L^2(\Omega) \text{ y } p \neq 0 \\ \langle p, p \rangle &= 0 \Leftrightarrow p = 0 \text{ (definida positiva)} \\ \langle p + r, q \rangle &= \langle p, q \rangle + \langle r, q \rangle \\ \langle ap, q \rangle &= a \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in L^2(\Omega) \text{ y } \forall a \in \mathfrak{R} \text{ (linealidad)} \\ \langle p, q \rangle &= \langle q, p \rangle \quad \forall p, q \in L^2(\Omega) \text{ (simetría)} \end{aligned}$$

Al estar dotado el espacio $L^2(\Omega)$ de un producto interno, tendrá sentido hablar de ortogonalidad y proyecciones ortogonales.

Esto se expresa representando a dicha integral con el símbolo $\langle p, q \rangle$, es decir, ³⁴

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Omega} p q \, d\Omega$$

teniendo en cuenta esto, la idea de velocidad (v_{1h}, v_{2h}) débilmente incomprensible se puede reinterpretar de la siguiente forma: una función $n(v_{1h}, v_{2h}) \in H_h$, será débilmente incomprensible si su divergencia es ortogonal a todo el espacio Q_h , es decir, si

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right), q_h \right\rangle = 0 \forall q_h \in Q_h \quad (5.18)$$

en otras palabras, si la proyección ortogonal de su divergencia $\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}$ sobre Q_h es 0.

Al conjunto \overline{K}_h de velocidades aproximadas (v_{1h}, v_{2h}) débilmente incomprensibles, se los puede reexpresar entonces como

$$\overline{K}_h = \left\{ (v_{1h}, v_{2h}) \in H_h \text{ tales que } \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) \perp Q_h \right.$$

³⁴ No confundir con el símbolo $\langle f(f) \rangle$ utilizado para escribir en forma más compacta la relación constitutiva para la viscoplasticidad en el tercer capítulo (ecuación 3.34).

(Ortogonal a Q_h quiere decir ortogonal a $q_h \forall q_h \in Q_h$).

De la definición de producto interno, surge en primer lugar que si $D_h \subset Q_h$ entonces toda función (v_{1h}, v_{2h}) que verifique (5.8) será exactamente incomprensible, es decir, cumplirá

$$\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{ya que como } \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \in D_h \text{ si } D_h \subset Q_h \text{ entonces } \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}$$

pertenecerá a Q_h y la única función perteneciente a Q_h que es ortogonal a todo el espacio

$$Q_h \text{ es la función nula, es decir, } \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = 0.$$

5.3.2. Elección Del Espacio Q_h

Observando las igualdades (5.17) se deduce que el método de multiplicadores de Lagrange superará las dificultades discutidas en las anterior (el problema del bloqueo) si el espacio de las funciones “débilmente” incomprensible $\overline{K_h}$ es más “grande” que el de las funciones exactamente incomprensible K_h de manera de intersección $U_h \cap \overline{K_h}$ contenga muchas funciones y no una sola (o a veces como el subconjunto de funciones $(v_{1h}, v_{2h}) \in H_h$ cuyas

divergencias $\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}$ son ortogonales Q_h se deduce que la “riqueza” de dicho espacio

$\overline{K_h}$ dependerá de cual es el espacio de funciones aproximantes de las presiones Q_h que se elige: si el espacio Q_h es muy “grande” (en comparación a $L^2(\Omega)$), entonces $\overline{K_h}$ será muy “chico” (porque si Q_h es muy “grande”, muy pocas funciones q serán ortogonales y de las pocas, serán muchísimo menos las que además sean divergencias de funciones de H_h), y si el espacio Q_h es “chico”, $\overline{K_h}$ resultará “grande” (porque habrá muchas funciones q perpendiculares a él y será más fácil encontrar algunas que además sean divergencias de funciones $(v_{1h}, v_{2h}) \in H_h$) (ver referencia [3]).

Por ejemplo, si se elige como espacio de las presiones aproximantes Q_h a las funciones que son discontinuas entre elementos y dentro de cada elemento son polinomios bilineales, es decir, polinomios construidos como combinación lineal de la base $1, r, s,$ y rs , entonces se puede demostrar que tanto si los elementos son cuadrados (o rectangulares) como si son cuadriláteros de lados no paralelos, los espacios $\overline{K_h}$ y K_h resultan idénticos, y por lo tanto una interpolación de este tipo para las presiones no soluciona el problema del bloqueo. Para demostrar que este espacio Q_h no sirve, se observa en el primer lugar que si los elementos son cuadrados o rectangulares, las velocidades aproximantes (v_{1h}, v_{2h}) dentro de cada elemento serán polinomios bilineales, es decir, estarán dadas por

$$v_{1h}(x_1, x_2) = a_1 + b_1 x_1 + g_1 x_2 + d_1 x_1 x_2$$

$$v_{2h}(x_1, x_2) = a_2 + b_2 x_1 + g_2 x_2 + d_2 x_1 x_2$$

y la divergencia de (v_{1h}, v_{2h}) dentro de cada elemento será entonces un polinomio lineal:

$$\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = (b_1 + g_2) + d_1 x_2 + d_2 x_1$$

por otra parte si las presiones se interpolan dentro de cada elemento con polinomios bilineales, (y si los elementos son cuadrados o rectangulares) entonces, estarán por:

$$q_h(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 + cx_1x_2$$

por lo tanto espacio D_h (es decir, el espacio de funciones $q \in L^2(\Omega)$ que son divergentes de funciones (v_{1h}, v_{2h}) aproximantes de las velocidades) estará formado por funciones lineales en cada elemento y el espacio Q_h estará formado por funciones bilineales. Claramente resulta $D_h \subset Q_h$ y como se dijo en la sección anterior, esto implica que las únicas funciones (v_{1h}, v_{2h}) que son débilmente incompresibles respecto a este espacio Q_h son las que son exactamente incompresible, es decir, $\overline{K_h} = K_h$.

En segundo lugar, si los elementos son cuadriláteros no cuadrados (ni rectangulares), entonces, se puede demostrar que la divergencia de cada función (v_{1h}, v_{2h}) aproximante de la velocidad dentro de cada elemento está dada por una expresión del tipo

$$\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = \frac{A + Br + Cs}{|J|} \quad (5.19)$$

donde A, B y C son parámetros que dependen de las coordenadas de los nodos y de las velocidades nodales, y $|J|$ el jacobiano del sistema $(x_1(r,s), x_2(r,s))$.³⁵

³⁵ Esto se demuestra de la siguiente forma: las velocidades aproximantes estarán dadas dentro de cada elemento por:

$$v_{1h}(r, s) = a_1 + b_1 r + g_1 s + d_1 r s$$

$$v_{2h}(r, s) = a_2 + b_2 r + g_2 s + d_2 r s$$

con a_j, b_j, g_j y d_j parámetros que dependen de las velocidades en los nodos del elemento. La divergencia de (v_{1h}, v_{2h}) será entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} &= \frac{\partial v_{1h}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{1h}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_2} = \\ &= (b_1 + d_1 s) \frac{\partial r}{\partial x_1} + (g_1 + d_1 r) \frac{\partial s}{\partial x_1} + (b_2 + d_2 s) \frac{\partial r}{\partial x_2} + (g_2 + d_2 r) \frac{\partial s}{\partial x_2} \quad (5.20) \end{aligned}$$

por otra parte las coordenadas locales (r, s) se relacionarán con las globales (x_1, x_2) por:

$$x_1(r, s) = a_1 + b_1 r + c_1 s + d_1 r s$$

$$x_2(r, s) = a_2 + b_2 r + c_2 s + d_2 r s$$

con a_j, b_j, c_j y d_j constante que depende de las coordenadas de los nodos. Entonces las derivadas $\frac{\partial r}{\partial x_1}$,

$\frac{\partial s}{\partial x_1}$, $\frac{\partial r}{\partial x_2}$, $\frac{\partial s}{\partial x_2}$ serán

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial s}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\partial s}{\partial x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial r} & -\frac{\partial x_2}{\partial s} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial s} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} (c_2 + d_2 r) - (b_2 + d_2 s) \\ (c_1 + d_1 r) - (b_1 + d_1 s) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{(c_2 + d_2 r) - (b_2 + d_2 s)}{-(c_1 + d_1 r) - (b_1 + d_1 s)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial s} - \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial s} = \\ &= (b_1 + d_1 s)(c_2 + d_2 r) - (b_2 + d_2 s)(c_1 + d_1 r) = \\ &= D + Er + Fs \end{aligned}$$

Con

Como el espacio de presiones aproximantes Q_h consiste en funciones q_h que son polinomios bilineales en r y s dentro de cada elemento es decir cada $q_h \in Q_h$ está dado por

$$q_h(r, s) = a + b r + c s + d r s$$

entonces ³⁶

$$D = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

$$E = b_1 d_2 - b_2 d_1$$

$$F = d_1 c_2 - d_2 c_1$$

Sustituyendo estas derivadas en la expresión de la divergencia (5.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} &= \frac{1}{|j|} (b_1 + d_1 s)(c_2 + d_2 r) - \frac{1}{|j|} (g_1 + d_1 r)(b_2 + d_2 s) + \\ &+ \frac{1}{|j|} (g_2 + d_2 r)(b_1 + d_1 s) - \frac{1}{|j|} (b_2 + d_2 s)(c_1 + d_1 r) = \\ &= \frac{1}{|j|} (A + B r + C s) \end{aligned}$$

con

$$A = b_1 c_2 - g_1 b_2 + g_2 b_1 - b_2 c_1$$

$$B = b_1 d_2 - d_1 b_2 + d_2 b_1 - b_2 d_1$$

$$C = d_1 c_2 + g_1 d_2 + g_2 d_1 - d_2 c_1$$

que es lo que quería demostrar.

³⁶ Recordar que las funciones $(x_1, (r,s), x_2 (r,s))$ definen el cambio de coordenadas locales (r,s) (con $-1 \leq r \leq 1$ y $-1 \leq s \leq 1$) a coordenadas globales (x_1, x_2) sobre la región Ω_E) y que por lo tanto, la integral de una función cualquiera $f(x_1, x_2)$ sobre la región Ω_E se podrá calcular como

$$\int_{\Omega_E} f(x_1, x_2) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, (r,s), x_2 (r,s)) dr ds$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) q_h d\Omega &= \sum_E \int_{\Omega_E} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) q_h d\Omega \\
&= \sum_E \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{|J|} (A + Br + Cs)(a + br + cs + drs) |J| dr ds = \\
&= \sum_E 4 \left(Aa + \frac{1}{3} Bb + \frac{1}{3} Cc \right)
\end{aligned}$$

Estos será cero para toda la función $q_h \in Q_h$ es decir, para cualquiera combinación de valores a,b,c y d si solo si $A = B = C = 0$, es decir si solo si $\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} = \frac{A + Br + Cs}{|J|} = 0$

Es decir, también para elementos distorsionados, las únicas funciones (v_{1h}, v_{2h}) débilmente incomprensibles respecto a este espacio Q_h serán las de divergencias exactamente nula, entonces cuando Q_h esta dado por polinomios bilineales adentro de elementos distorsionados (es decir, ni cuadrados ni rectangulares) también se obtiene $\overline{K_h} = K_h$

Un razonamiento idéntico se puede hacer para el caso en que el espacio Q_h está formado por funciones discontinuas entre elementos y que son polinomios lineales dentro de cada elemento, es decir, cuando $q_h \in Q_h$ tiene forma

$$q_h(r, s) = a + b r + c s$$

En este caso resulta también $\overline{K_h} = K_h$ y una interpolación lineal, tampoco sirve para solucionar el problema del bloqueo.

Habiéndose descartado a los espacios Q_h de funciones bilineales y al de las lineales, se considera ahora el caso de las funciones q_h que son discontinuas entre elementos y constantes (es decir, polinomios de grado 0) dentro de cada elemento. Se demostrará que si se elige a este conjunto como espacio de presiones aproximantes Q_h resulta mucho mas grande que K_h y por lo tanto, esta resulta ser la única elección posible de Q_h (cuando el espacio H_h es el que corresponde a elementos de cuatro nodos) que supera el problema de bloqueo. Para demostrar esto se observa que si cada función q_h es constante dentro de cada elemento, es decir,

$$q_h = q^{(E)}$$

dentro de cada elemento E , donde $q^{(E)}$ = ete, entonces una función $(v_{1h}, v_{2h}) \in H_h$ será débilmente incomprensible respecto a dichas funciones q_h cuando

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) q_h d\Omega &= \sum_E \int_{\Omega_E} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) q^{(E)} d\Omega = \\ &= \sum_E q^{(E)} \int_{\Omega_E} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) d\Omega = 0 \forall q^{(E)} \end{aligned}$$

donde como $q^{(E)}$ es constante (dentro de cada dominio elemental Ω_E), entonces se lo puede “sacar” afuera de cada integral. La igualdad anterior se cumplirá para cualquier función $q_h \in Q_h$, es decir para cualquier combinación de valores $q^{(E)}$, si y solo si cada una de las

integrales de $\left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right)$ sobre cada elemento E es nula , es decir si

$$\int_{\Omega_E} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) d\Omega = 0 \quad \forall E \quad (5.21)$$

Esto significa que (v_{1h}, v_{2h}) será débilmente incomprensible respecto al espacio Q_h de funciones “constante en cada elemento”, si es incomprensible en sentido “medio”, o bien (teniendo en cuenta el teorema de la divergencia) si

$$\int_{\Gamma_E} (v_{1h}, v_{2h}) \cdot n d\Gamma = 0 \quad \forall E \quad (5.22)$$

(Siendo Γ_E la frontera de cada elemento y n su normal saliente), es decir, si el flujo neto o caudal que pasa a través de cada elemento es cero (la cantidad de fluido que entra por unidad de tiempo al elemento es igual a la que sale).

Por otra parte, utilizando la igualdad (5.9) y cambiando las variables (x_1, x_2) por las (r, s) en la integral (5.21) se obtiene

$$\int_{\Omega_E} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{|J|} (A + Br + Cs) |J| dr ds = 4A$$

donde $|J|$ es el jacobiano del cambio de coordenadas $(x_1(r,s), x_2(r,s))$, y teniendo en cuenta

que $\left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{|J|} (A + Br + Cs)$ por lo que

$$\left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) \Big|_{(r,s)=(0,0)} = \frac{A}{(|J|)_{(r,s)=(0,0)}}$$

(es decir, la constante A es igual al jacobiano evaluado en $(r, s) = (0, 0)$ multiplicado por la divergencia evaluada en $(r, s) = (0, 0)$ se deduce que

$$\int_{\Omega_E} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) d\Omega = 4 \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) \Big|_{(r,s)=(0,0)} = (J)_{(r,s)=(0,0)}$$

Entonces una función (v_{1h}, v_{2h}) cumplirá las igualdades (5.21) si y solo si la divergencia de (v_{1h}, v_{2h}) en el “centro” (coordenada $(r, s) = (0, 0)$) de cada elemento E es nula, es decir, si

$$\left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) \Big|_{(r,s)=(0,0)} = \forall E \quad (5.23)$$

de igualdad (5.21) (que se cumple si solo si se cumple la (5.22) o la (5.23)) se deduce que el espacio \overline{K}_h de funciones débilmente incomprensible respecto al espacio Q_h formado por funciones q_h que son constantes dentro de cada elemento y discontinuas entre elementos, estará dado por todas aquellas funciones (v_{1h}, v_{2h}) para las cuales se cumple (5.21) o (5.22) o (5.23), es decir,

$$\begin{aligned} \overline{K}_h &= \{ (v_{1h}, v_{2h}) \in H_h \text{ tales que } \int_{\Omega_E} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) d\Omega = 0 \forall E \} \\ &= \{ (v_{1h}, v_{2h}) \in H_h \text{ tales que } \int_{\Omega_E} (v_{1h}, v_{2h}) \cdot n d\Gamma = 0 \forall E \} \\ &= \left\{ \{ (v_{1h}, v_{2h}) \in H_h \text{ tales que } \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) \Big|_{(r,s)=(0,0)} = 0 \forall E \} \right\} \end{aligned}$$

Claramente este espacio \overline{K}_h será mucho más grande que el conjunto de funciones exactamente incompresibles K_h porque es mucho más exigente pedir que $\left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right)$ sea nula en todo el elemento E (es decir, en todo (r, s) perteneciente a Ω_E) que pedir solamente que sea nula en $(r, s) = (0,0)$.

Se puede entender mejor por que este espacio \overline{K}_h es bastante más grande que K_h y entonces se evita el problema del bloqueo, considerando nuevamente el problema de la cavidad conducida visto en la sección anterior: al analizar como era el espacio $K_h \cap U_h$ en este ejemplo, se observó que en un elemento como el A de la figura (5.10), el nodo 1 resulta “bloqueado” (es decir, no puede moverse en ninguna dirección) si se exige que la velocidad aproximante (v_{1h}, v_{2h}) en dicho elemento sea exactamente incompresible. En cambio, si se pide que esta velocidad sea incompresible en “valor medio”, es decir, que $\int_{\Omega_E} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) d\Omega = 0$ (lo que implica que el flujo neto que atraviesa al elemento es nulo), entonces dicho nodo podrá moverse en la dirección mostrada en la figura (5.12) porque cuando la velocidad del nodo 1 tiene dicha dirección, la cantidad de fluido que ingresará al elemento a través de la cara 4-1 se compensa con la que sale por la cara 1-2 de manera que el flujo neto es cero. Es decir, al debilitarse la condición de la incompresibilidad, el nodo 1 “gana” un grado de libertad. Lo mismo ocurre con los nodos

vecinos u en general con todos los nodos de la malla y entonces existirán muchas funciones en $\bar{K}_h \mathbf{I} U_h$ y no uno sola como ocurría en $K_h \mathbf{I} U_h$.

5.3.3. Forma Matricial De La Formulación Con Multiplicadores De Lagrange

Como se dijo antes, cada una de las componentes v_{1h} y v_{2h} , de las velocidades aproximadas, son funciones pertenecientes al espacio H_h (el conjunto de funciones continuas y que son polinomios dentro de cada elemento). Como la base de este espacio son las funciones $n_J \in H_h$ que valen 1 en el nodo J y 0 en los restantes, entonces dichas componentes se pueden expresar en la forma (5.11), es decir, como

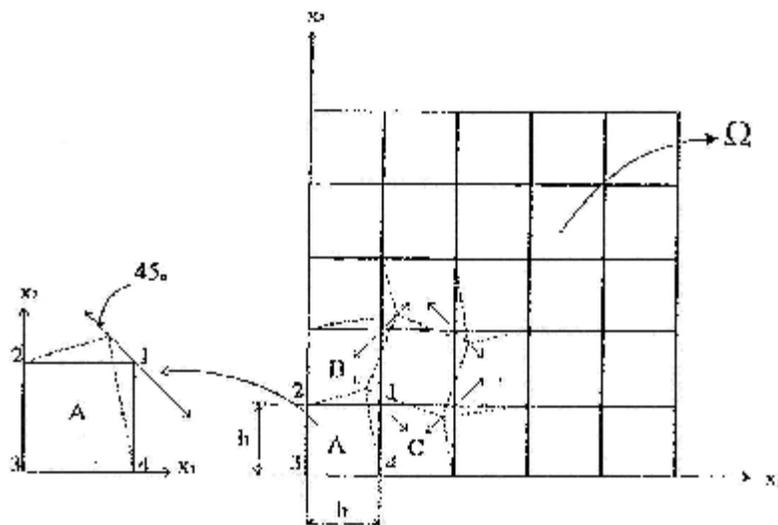


Figura 5.12: Ejemplo de la cavidad conducida: desbloqueo de la malla al debilitarse la condición de incompresibilidad.

Combinación lineal de dicha base, donde los parámetros que acompañan a la base son valores que toman dichas componentes en los nodos, es decir,

$$v_{1h} = \sum_{J=1}^N n_J v_{1h}^{(J)}$$

$$v_{2h} = \sum_{J=1}^N n_J v_{2h}^{(J)}$$

Si se numeran con el índice I a los nodos que se ubican sobre la parte T_v de la frontera de Ω que es donde las velocidades están especificadas y deben valer (g_1, g_2) , y con el índice J a los nodos que se encuentran en el interior del dominio Ω_h entonces las funciones (v_{1h}, v_{2h}) que pertenecen al espacio U_h , (que esta formado por las funciones (v_{1h}, v_{2h}) pertenecientes a H_h que además cumplen $(v_{1h}, v_{2h}) = (g_1, g_2)$ en los nodos de periferia) se podrán escribir en la forma:

$$\begin{aligned} v_{1h} &= \sum_{J=1}^N n_J v_{1h}^{(J)} + \sum_{I=1}^{N_g} n_I g_1^{(I)} \\ v_{2h} &= \sum_{J=1}^N n_J v_{2h}^{(J)} + \sum_{I=1}^{N_g} n_I g_2^{(I)} \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde $(v_{1h}^{(J)}, v_{2h}^{(J)})$ son los valores de (v_{1h}, v_{2h}) en cada nodo J, $(g_1^{(I)}, g_2^{(I)})$ los valores que toman las velocidades (g_1, g_2) sobre los nodo I de la frontera T_v y N_v y N_g son

respectivamente, la cantidad de nodos interiores a Ω_h y los ubicados sobre la parte T_v de la frontera de Ω (que es la parte donde están fijadas las velocidades).

Como las velocidades aproximantes se pueden escribir en la forma (5.24), las velocidades de deformación e_h que se derivarán de dichas velocidades aproximantes estarán dadas por:

$$\underline{e}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial dv_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_1}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \sum_{J=1}^{N_v} \frac{\partial n_J}{\partial x_1} v_{1h}^{(J)} + \sum_{I=1}^{N_g} \frac{\partial n_I}{\partial x_1} g_1^{(I)}$$

$$\sum_{J=1}^{N_v} \frac{\partial n_J}{\partial x_2} v_{2h}^{(J)} + \sum_{I=1}^{N_g} \frac{\partial n_I}{\partial x_2} g_2^{(I)}$$

$$\sum_{J=1}^{N_v} \left\{ \frac{\partial n_J}{\partial x_2} v_{1h}^{(J)} + \frac{\partial n_J}{\partial x_1} v_{2h}^{(J)} \right\} + \sum_{I=1}^{N_g} \left\{ \frac{\partial n_I}{\partial x_2} g_1^{(I)} + \frac{\partial n_I}{\partial x_1} g_2^{(I)} \right\}$$

Estas identidades se pueden reescribir en una forma mucho mas compacta si se organiza a

los parámetros $(v_{1h}^{(J)}, v_{2h}^{(J)})$, a los números $(g_1^{(I)}, g_2^{(I)})$ y a las derivadas $\frac{\partial n_J}{\partial x_1}, \frac{\partial n_J}{\partial x_2}, \frac{\partial n_I}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial n_I}{\partial x_2}$

en matrices llamado \underline{V} a la matriz (columna) que agrupa a los valores nodales de las

velocidades aproximantes $(v_{1h}^{(J)}, v_{2h}^{(J)})$, \underline{G} a la correspondiente a las velocidades impuestas

$(g_1^{(I)}, g_2^{(I)})$ en los nodos de la frontera, es decir,

$$\underline{V}^T = (v_{1h}^{(1)} v_{2h}^{(1)} v_{1h}^{(2)} v_{2h}^{(2)} \dots v_{1h}^{(J)} v_{2h}^{(J)} \dots v_{1h}^{(NV)} v_{2h}^{(NV)})$$

$$\underline{G}^T = (g_1^{(1)} g_2^{(1)} g_1^{(2)} g_2^{(2)} \dots g_1^{(I)} g_2^{(I)} \dots g_1^{(NG)} g_2^{(NG)})$$

(donde \underline{V} es una matriz de $(NV \times 1)$ y \underline{G} una de $(NG \times 1)$ con $NV = 2N_v$ y $NG = 2N_g$)³⁷, la igualdad (5.25) se podrá reescribir como:

$$\underline{e}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial dv_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial dv_1}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \underline{B}_v \cdot \underline{V} + \underline{B}_g \cdot \underline{G} \quad (5.26)$$

donde

$$\underline{B}_v = \begin{matrix} \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & \frac{0}{\partial n_1} & \frac{\partial n_2}{\partial x_1} & \frac{0}{\partial n_2} & \dots & \frac{\partial n_J}{\partial x_1} & \frac{0}{\partial n_J} & \dots \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{0}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & & \frac{0}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \\ \frac{\partial n_1}{\partial x_2} & \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & \frac{\partial n_2}{\partial x_2} & \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial n_J}{\partial x_2} & \frac{\partial n_J}{\partial x_1} & \end{matrix}$$

³⁷ Recordar que N_v es la cantidad total de nodos interiores a Ω y N_g es la cantidad total de nodos ubicados sobre la frontera Γ_v . Como hay dos componentes de velocidad por nodo. Entonces el número total de parámetros nodales serán $2N_v$ y $2N_g$.

$$\underline{B}_g = \begin{matrix} \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial n_I}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial n_1}{\partial x_2} & \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & \frac{\partial n_2}{\partial x_1} & \frac{\partial n_2}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial n_I}{\partial x_1} & \frac{\partial n_J}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial n_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial x_2} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial n_1}{\partial x_2} & \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & \frac{\partial n_2}{\partial x_2} & \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial n_I}{\partial x_2} & \frac{\partial n_J}{\partial x_1} \\ \frac{\partial n_1}{\partial x_2} & \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & \frac{\partial n_2}{\partial x_2} & \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial n_I}{\partial x_2} & \frac{\partial n_J}{\partial x_1} \end{matrix} \quad (5.27)$$

son las matrices que agrupan a las derivadas de las funciones base n_j correspondiente respectivamente a los nodos interiores a Ω y a los ubicados sobre T_v cuyas dimensiones son $(3 \times NV)$ y $(3 \times NG)$.

El mismo razonamiento es aplicable al caso de las funciones (dv_{1h}, dv_{2h}) que pertenecen al espacio V_h (las velocidades virtuales). Recordando que las funciones

$(dv_{1h}, dv_{2h}) \in V_h$ deben valer $(0,0)$ en los nodos de la frontera T_v , se deduce que cualquiera de ellas se podrá escribir como

$$dv_{1h} = \sum_{J=1}^{N_v} n_J dv_{1h}^{(J)}$$

$$dv_{2h} = \sum_{J=1}^{N_v} n_J dv_{2h}^{(J)}$$

y la velocidad de deformación virtual \underline{de}_h que se derivan de ellas como

$$\underline{e}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial d v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial d v_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial d v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial d v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \underline{B}_v \cdot \underline{dV} \quad (5.28)$$

donde \underline{dV} es la matriz (columna) que agrupa a los valores nodales de las velocidades virtuales $(d v_{1h}, d v_{2h})$, es decir,

$$\underline{dV}^T = (d v_{1h}^{(1)} \quad d v_{2h}^{(1)} \quad d v_{1h}^{(2)} \quad d v_{2h}^{(2)} \quad \dots \quad d v_{1h}^{(j)} \quad d v_{2h}^{(j)} \quad \dots \quad d v_{1h}^{(N_v)} \quad d v_{2h}^{(N_v)})$$

cuya dimensión es $(N_v \times 1)$.³⁸

Con respecto al espacio Q_h de presiones aproximantes también se dijo antes que, como se trata de un espacio vectorial de dimensión finita, la presión aproximada P_h (o cualquier otra función q_h) se podrá escribir:

$$P_h = \sum_{E=1}^{NP} \tilde{n}_E P_h^{(j)} \quad (5.29)$$

³⁸ Recordar que $N_v = 2N_n$, es decir la dimensión del vector de velocidades nodales es de dos veces la cantidad total de nodos interiores a Ω porque existen dos grados de libertad por nodo.

Donde

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{N}}^T &= (\tilde{n}_1 \tilde{n}_2 \dots \tilde{n}_3 \dots \tilde{n}_{NP}) \\ \underline{P}^T &= (p_h^{(1)} p_h^{(2)} \dots p_h^{(E)} \dots p_h^{(NP)})\end{aligned}$$

($\underline{\tilde{N}}$ y \underline{P} son matrices de dimensión (NP x1) siendo NP el numero total de nodos de presión que, como se dijo antes, define la dimensión del espacio Q_h) y en general, cualquier función del espacio Q_h se podrá expresar como

$$q_h = \underline{\tilde{N}}^T \cdot \underline{Q} \quad (5.31)$$

(siendo \underline{Q} la matriz que agrupa a los valores q_h en los nodos de presión, es decir, a los parámetros $q_h^{(E)}$).

Sustituyendo ahora las expresiones (5.26), (5.28), (5.30) y (5.31) en las igualdades (5.17) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\underline{dV}^T \cdot (\underline{K}_d \cdot \underline{V} + \underline{C}^T \cdot \underline{P} + \underline{F}_v + \underline{F}_b + \underline{F}_f) &= 0 \forall \underline{dV} \\ \underline{Q}^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{V} + \underline{H}) &= 0 \forall \underline{Q}\end{aligned} \quad (5.32)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\underline{K}_d &= \int_{\Omega} \underline{B}_v^T \cdot 2m\underline{D} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{B}_v d\Omega & (\text{NV} \times \text{NV}) \\
\underline{C} &= \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{M}^T \cdot \underline{B}_v d\Omega & (\text{NP} \times \text{NV}) \\
\underline{F}_v &= \int_{\Omega} \underline{B}_v^T \cdot 2m\underline{D} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{B}_g \cdot \underline{G} d\Omega & (\text{NV} \times 1) \quad (5.33) \\
\underline{F}_b &= \int_{\Omega} \underline{B}_v^T \cdot \underline{b} d\Omega & (\text{NV} \times 1) \\
\underline{F}_f &= \int_{\Gamma_f} \underline{B}_v^T \cdot \underline{f} d\Omega & (\text{NV} \times 1) \\
\underline{H} &= \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{M}^T \cdot \underline{B}_g \cdot \underline{G} d\Omega & (\text{NP} \times 1)
\end{aligned}$$

Para que las igualdades (5.32) se cumplan para cualquier vector $\underline{dV}_y \underline{Q}$, los términos que se agrupan dentro del paréntesis deberán ser iguales al vector nulo $\underline{0}$. Por lo tanto, las presiones p_h y velocidades (v_{1h} , v_{2h}) que verifiquen la igualdad (5.17) serán aquellas cuyos valores nodales \underline{P} y \underline{V} veifiquen:

$$\begin{aligned}
\underline{K}_d \cdot \underline{V} + \underline{C}^T \cdot \underline{P} &= -\underline{F} \\
\underline{C} \cdot \underline{V} &= -\underline{H}
\end{aligned} \quad (5.34)$$

donde $\underline{F} = \underline{F}_v + \underline{F}_b + \underline{F}_f$.

El sistema de ecuaciones (5.34) con las matrices $\underline{K}_d, \underline{C}, \underline{F}_v, \underline{F}_b, \underline{F}_f$ y \underline{H} dadas por las relaciones (5.33) constituyen un sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas \underline{P} y \underline{V} que son las presiones y velocidades nodales. Resolviendo este sistema y utilizando las

expresiones (5.24) y (5.29) se obtiene las funciones (v_{1h}, v_{2h}) y p_h que satisfacen las igualdades (5.17) propuestas en el método de los multiplicadores de Lagrange.

5.3.4 Existencia De La Solución De Presión

Habiéndose elegido las bases n_j de H_h y \tilde{n}_j de Q_h cada función $(v_{1h}, v_{2h}) \in U_h$ y $p_h \in Q_h$ queda unívocamente determinados por los valores que tienen dichas funciones en los respectivos nodos. Como dichos valores nodales se agrupan en matrices \underline{P} y \underline{V} , entonces cada función (v_{1h}, v_{2h}) del espacio U_h se identificará con un vector \underline{V} (de dimensión NP). Por lo tanto el problema de encontrar a las funciones $(v_{1h}, v_{2h}) \in U_h$ y $p_h \in Q_h$ que satisface la igualdad (5.17) se reducirá de hallar los vectores $\underline{V} \in \mathfrak{R}^{NV}$ y $\underline{P} \in \mathfrak{R}^{NP}$ que son solución del sistema de ecuaciones algebraicas (5.34).

Para resolver este sistema de ecuaciones lineales se observa primero que las matrices que intervienen en el mismo tienen las siguientes características:

1. la matriz K_d es una matriz cuadrada de $NV \times NV$. Se puede demostrar (ver referencia [2]) que esta matriz resulta simétrica ($K_d^T = K_d$) y definida positiva (es decir, $\underline{V}^T \cdot K_d \cdot \underline{V} > 0$ para todo $\underline{V} \in \mathfrak{R}^{NV}$ y $\underline{V} \neq \underline{0}$) por lo que será entonces inversible.

2. La matriz \underline{C} es una matriz no cuadrada de NP x NV con NP menor que NV. Esto es así porque según se explico antes, para que no exista bloqueo es necesario que el espacio $\overline{K}_h \mathbf{I} U_h$ contenga muchas funciones y no una sola y como este espacio está generado por todos aquellos vectores \underline{V} que verifiquen³⁹

$$\underline{C} \cdot \underline{V} = -\underline{H} \quad (5.35)$$

Entonces para que $\overline{K}_h \mathbf{I} U_h$ sea “grande” es necesario que este sistema no tenga solución única sino “muchas” soluciones. Esto sucederá solamente si NP es menor que NV porque si fuera mayor, entonces el sistema (5.35) estará formado por mayor cantidad de ecuaciones que incógnitas \underline{V} y (si no existen incompatibilidad) dicho sistema tendrá infinitas soluciones que es lo que se necesita.

3. Se puede demostrar (ver referencia [12] y [26] que frecuentemente (en particular cuando se utilizan elementos cuadrados y cuando $\underline{F}_f = 0$) esta matriz \underline{C} no es de “rango completo”, es decir, la imagen \underline{C} , que es el conjunto de todos los vectores de \mathfrak{R}^{NV} , es decir,

$$\text{Im}(\underline{C}) = \{ \underline{H} \in \mathfrak{R}^{NP} \text{ tal que } \underline{H} = \underline{C} \cdot \underline{V} \text{ para cierto } \underline{V} \in \mathfrak{R}^{NV} \}$$

³⁹ Recordar que la segunda de las ecuaciones (5.34) se obtiene imponiendo la condición de incomprensibilidad en forma debil (la condición (5.16)) a una función (v_{1h}, v_{2h}) perteneciente al espacio U_h (y expresada en términos de la base n_j)

No es todo \mathfrak{R}^{NV} sino un subespacio de él. En otras palabras, el sistema $\underline{C} \cdot \underline{V} = -\underline{H}$ no tiene solución para ciertos vectores $\underline{H} \in \mathfrak{R}^{NV}$, que son los que están “afuera” de su imagen.

4. Observando que la $\text{Im}(\underline{C})$ es ortogonal al núcleo de \underline{C}^T , definido como el conjunto de todos los vectores $\underline{Q} \in \mathfrak{R}^{NV}$ que verifican $\underline{C}^T \cdot \underline{Q} = \underline{0}$, es decir,⁴⁰

$$\text{Ker}(\underline{C}^T) = \{ \underline{Q} \in \mathfrak{R}^{NP} \text{ tal que } \underline{C}^T \cdot \underline{Q} = \underline{0} \}$$

Y teniendo en cuenta que $\text{Im}(\underline{C})$ no es todo el espacio \mathfrak{R}^{NV} si no un subconjunto de él, entonces dicho núcleo de \underline{C}^T será no vacío, es decir, existirán ciertos vectores $\underline{Q} \in \mathfrak{R}^{NV}$ distintos del vector nulo tales que $\underline{C}^T \cdot \underline{Q} = \underline{0}$.⁴¹

⁴⁰ Esto es así porque si \underline{Q} pertenece a $\text{Ker}(\underline{C}^T)$ entonces $\underline{C}^T \cdot \underline{Q} = \underline{0}$ lo que implica que $\underline{V}^T \cdot \underline{Q} = 0$. Esto es lo mismo que decir $\underline{Q}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{V} = 0$ para todo $\underline{V} \in \mathfrak{R}^{NV}$ lo que a su vez quiere decir que \underline{Q}^T es ortogonal a $\text{Im}(\underline{C})$. Lo mismo ocurrirá con cualquier otro $\underline{Q} \in \text{Ker}(\underline{C}^T)$. luego $\text{Ker}(\underline{C}^T)$ es ortogonal a $\text{Im}(\underline{C})$.

⁴¹ Para demostrar esto se observa que la ecuación $\underline{C} \cdot \underline{V} = -\underline{H}$, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{NP} \underline{C}^{(j)} V_j = -\underline{H}$$

donde $\underline{C}^{(j)}$ son las columnas de \underline{C} (de dimensión NP) y V_j las componentes de \underline{V} por lo que la imagen de \underline{C} será el subespacio que se obtiene combinando linealmente a dichas columnas $\underline{C}^{(j)}$ es decir, dichas columnas serán una base de $\text{Im}(\underline{C})$. Si este espacio no es todo \mathfrak{R}^{NV} entonces existirán ciertos vectores \underline{Q} distintos del vector nulo que son ortogonales a toda la base $\underline{C}^{(j)}$ de $\text{Im}(\underline{C})$, es decir, que cumplan $\underline{Q}^T \cdot \underline{C}^{(j)} = 0$ para todo J lo que implica que $\underline{C} \cdot \underline{Q} = \underline{0}$ y que $\text{Ker}(\underline{C})$ contiene vectores \underline{Q} no nulos.

Los vectores $\underline{Q} \in \mathfrak{R}^{NP}$ distintos del vector, que cumplen $\underline{C}^T \cdot \underline{Q} = \underline{0}$ (es decir, a los elementos de $\text{Ker}(\underline{C}^T)$) se los llama modos de presión. La condición para que exista solución de las ecuaciones (5.34) es entonces que \underline{H} sea ortogonal a todos los modos de presión. Se puede demostrar también que cuando dicha condición se satisface, la solución \underline{V} para las velocidades es única y la correspondiente a las presiones \underline{P} esta formada por una parte \underline{P}^* ortogonal a todos los modos de presión y única, más un modo de presión \underline{Q} arbitrario, es decir

$$\underline{P} = \underline{P}^* + \underline{Q} \text{ con } \underline{P}^* \perp \text{Ker}(\underline{C}^T) \text{ (única) y } \underline{Q} \in \text{Ker}(\underline{C}^T) \text{ (arbitraria)}$$

Es decir, la solución para las presiones no es única pero las infinitas soluciones está compuesta por una parte única \underline{P}^* más cualquier elemento \underline{Q} del $\text{Ker}(\underline{C}^T)$ (cualquier modo de presión).

La existencia de modos de presión tiene entonces como consecuencia que para ciertos términos independientes \underline{H} existirá solución y para otros no. Como este vector \underline{H} proviene de las condiciones de borde cinemáticos (g_1, g_2) , (ver ecuación (5.33)) entonces la existencia de solución del sistema (5.34) está condicionada a cuáles serán dichas condiciones de borde.

Para ilustrar este problema se considera nuevamente el problema de la cavidad....(ver figura (5.7)). Se puede demostrar (ver referencias [12] y [26]) que, para este ejemplo, existen dos modos de presión linealmente independientes, es decir, dos vectores

$\underline{Q} \in \mathfrak{R}^{NP}$ distintos del vector nulo (y distintos entre sí) que verifican

$$\underline{C}^T \cdot \underline{Q} = \underline{0}$$

Uno es el modo hidrostático definido como

$$\underline{Q}_H^T = (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ -1 \ 1 \ \dots)$$

Es decir, constante en todo el dominio Ω y el otro es el denominado modo de damero

\underline{Q}_C (o modo checkerboard) que tiene la siguiente expresión

$$\underline{Q}_C^T = (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ -1 \ 1 \ \dots)$$

Es decir, los valores \underline{Q}_C^T alternan entre un número positivo y uno negativo de elemento en elemento. En la figura (5.13) se muestra esquemáticamente a este último modo de presión.

Existirá solución si las condiciones de borde cinemáticas (g_1, g_2) que se imponen dan lugar a un vector \underline{H} (ver igualdades (5.33)) ortogonal a ambos modos de presión. En la figura

(5.14) se muestran dos tipos de condiciones de borde (g_1, g_2) parecidas: en el primer caso, se impone una velocidad tangencial

$(g_1, g_2) = (\text{cte}, 0)$ en todos los nodos del borde superior y una velocidad nula

$(g_1, g_2) = (0,0)$ en el resto de los nodos del borde, y en el otro, se impone una

Teniendo en cuenta estas características de la matrices $\underline{K}_d, \underline{C}, y \underline{C}^T$, se puede demostrar (ver referencia [12]) que existirá una solución del sistema (5.34) si solo si el vector $\underline{H} \in \mathfrak{R}^{NV}$ que aparece como termino independiente de la segunda de dichas ecuaciones, pertenece a la de \underline{C} , o bien, teniendo en cuenta que $\text{Im}(\underline{C})$ es ortogonal al núcleo de \underline{C}^T , si dicho vector \underline{H} es ortogonal a $\text{Ker}(\underline{C}^T)$. A velocidad tangencial en todos los nodos del borde superior salvo el nodo 1 y el N (ver figura (5.14)) en los que, al igual que el resto de los nodos de la frontera, se exige que la velocidad sea nula. Si bien ambas condiciones de borde son parecidas, se puede demostrar (ver referencia [12] que en el primer caso se cumple que $\underline{H} = \underline{0}$ por lo que

$$\begin{aligned}\underline{Q}_H^T \cdot \underline{H} &= 0 \\ \underline{Q}_C^T \cdot \underline{H} &= 0\end{aligned}$$

es decir, se satisfacen las condiciones de existencia de solución, mientras que en el segundo, vector \underline{H} proveniente de dichas condiciones cumple:

$$\begin{aligned}\underline{Q}_H^T \cdot \underline{H} &= 0 \\ \underline{Q}_C^T \cdot \underline{H} &= -\frac{h}{2} (1 + (-1)^M)\end{aligned}$$

donde h es la longitud de los lados de cada elemento, y M es la cantidad de elementos que se ubican en el borde superior de la cavidad por lo que, si M es para, el vector \underline{H} no será ortogonal a uno de los modo de la presión, (el modo \underline{Q}_C^T) y por lo tanto no existe solución.

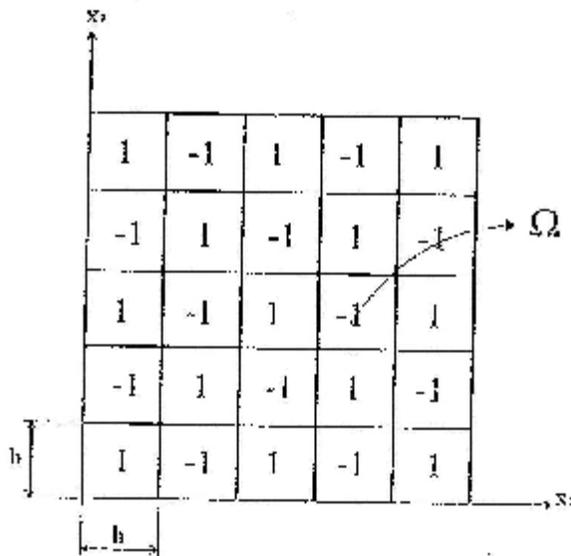


Figura 5.13: Modo de presión tipo “damero” o “checkerboard”

Se ve entonces que cuando hay modos de presión, la existencia de soluciones del sistema (5.34) resulta influenciada por las condiciones de borde cinemáticas impuestas. Se puede demostrar que la presencia de estos modos depende de la

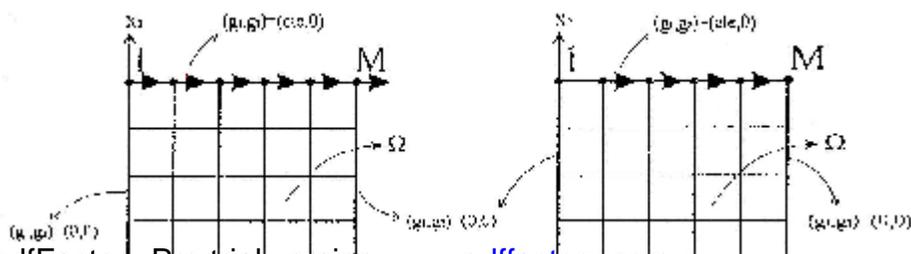


Figura 5.14: Condiciones de borde utilizadas en el problema de la cavidad conducida

Geometría de los elementos, y que en general existen dos modos de independientes asociados al elemento elegido (4 nodos para la velocidad y 1 nodo para la presión): el nodo hidrostático $\underline{Q}_H^T = (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1)$ y el modo checkerboard cuya expresión para mallas cuadradas es la presentada en el ejemplo de la cavidad, y la correspondiente a mallas más generales tiene la forma

$$\underline{Q}_C^T = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \frac{1}{a_3} \dots \frac{1}{a_E} - \frac{1}{a_{E+1}} \dots \right)$$

donde las constantes son positivas y dependen de la geometría de cada elemento E (ver referencia [26]).

La presencia de modos de presión, además de condicionar la existencia de una solución del sistema (5.34) tiene otra consecuencia: si bien existirá solución de este sistema cuando H sea ortogonal a los modos de presión dicha solución no se puede hallar con los métodos habituales de resolución de sistemas de ecuaciones lineales dado que, por este ser el núcleo

de \underline{C}^T no vacío (y la matriz \underline{C} de rango incompleto) la matriz de este sistema, resultará no inversible. Es decir, “despejando” \underline{V} de la primera de la ecuaciones (5.34) y reemplazando en la segunda para obtener la siguiente ecuación para las presiones

$$\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T\right) \cdot \underline{P} = -\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H} \quad (5.36)$$

se encuentra que, por se el núcleo de \underline{C}^T no vacío, el determinante de la matriz $\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T\right)$ será nulo y entonces la solución para \underline{P} (y por lo tanto la de \underline{V}), si bien existen, no pueden encontrarse directamente.

Resumiendo entonces, cuando hay modos de presión (que son los vectores $\underline{Q} \in \mathfrak{N}^{NP}$ distintos del vector nulo que verifican $\underline{C}^T \cdot \underline{Q} = \underline{0}$ la solución de las ecuaciones (5.34) (y la correspondiente a las presiones (5.36) que se deriva de ella) puede no existir. La condición necesaria y suficiente para que dicha solución sí exista es que el vector $\underline{H} \in \mathfrak{N}^{NP}$ que es uno de los términos independientes de estas ecuaciones y que se deriva de las condiciones de borde impuesta para las velocidades, esté contenido en la imagen de \underline{C} , es decir, sea ortogonal a los modos de presión. Cuando existe, la solución se caracteriza por única para las velocidades y única para las presiones salvo combinaciones lineales arbitrarias de dichos modos de presión y no puede ser hallada directamente dado que la matriz del sistema resulta no inversible.

5.3.5 Prefiltrado de los modos de presión

Como se dijo antes, la solución del sistema (5.36) (que es la ecuación para las presiones que se deriva de las (5.34)) se puede escribir (cuando existe) como

$$\underline{P} = \underline{P}^* + \underline{Q}$$

Donde \underline{P}^* es perpendicular a los modos de presión, (y esta componente es única) y \underline{Q} es un modo de presión (arbitrario). Como en general existen dos posibles modos independientes, el modo hidrostático \underline{Q}_H y el modo “checkerboard” \underline{Q}_C cualquier modo de presión arbitrario \underline{Q} se podrá escribir como combinación de estos y la solución más general para las presiones es (cuando existe)

$$\underline{P} = \underline{P}^* + \mathbf{B}_H \underline{Q}_H + \mathbf{B}_C \underline{Q}_C$$

Donde \mathbf{B}_H y \mathbf{B}_C son constantes arbitrarias. La parte \underline{P}^* de esta solución no puede encontrarse directamente, ya que la matriz del sistema (5.36) no es inversible.

Una de las formas de solucionar esta dificultad numérica es el prefiltrado o rigidización de los modos de presión (ver referencia [6]). Este método propone modificar a la ecuación de las presiones (5.36) de la siguiente manera:

$$\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T + h_H \underline{A} \cdot \underline{f}_H^T \cdot \underline{A} + h_C \underline{A} \cdot \underline{f}_C \cdot \underline{f}_C^T \cdot \underline{A} \right) \underline{P} = -\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H}$$

Donde h_H y h_C son dos constantes no nulas, \underline{f}_H y \underline{f}_C son los modos de presión

\underline{Q}_H y \underline{Q}_C Normalizados,⁴² es decir,

$$\underline{f}_H = \frac{\underline{Q}_H}{\|\underline{Q}_H\|} = \frac{\underline{Q}_H}{\sqrt{\underline{Q}_H^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}_H}}$$

(5.39)

$$\underline{f}_C = \frac{\underline{Q}_C}{\|\underline{Q}_C\|} = \frac{\underline{Q}_C}{\sqrt{\underline{Q}_C^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q}_C}}$$

y \underline{A} es la matriz del producto interno.⁴³ Se puede demostrar que, a diferencia de la matriz $(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T)$ (la matriz del sistema (5.36)), la ,matriz de este sistema de ecuaciones

⁴² Si bien \underline{Q}_H y \underline{Q}_C son linealmente independientes en general no son mutuamente ortogonales dado que son autovectores asociados a un mismo autovalor (al autovalor nulo) . Como más adelante se necesita una base ortonormal de autovectores , \underline{f}_H y \underline{f}_C no se interpretan entonces como los modos \underline{Q}_H y \underline{Q}_C normalizados, sino como la base de $\text{Ker}(\underline{C}^T)$ ortonormalizada construida con estos modos. Es decir, \underline{f}_H y \underline{f}_C son los versores contruidos como combinación lineal de \underline{Q}_H y \underline{Q}_C que son ortogonales entre si:

⁴³ Como se explico antes, el producto interno entre dos vectores p y q de $L^2(\Omega)$ está dado por

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Omega} p \cdot q d\Omega$$

modificado sí es inversible y que su solución es \underline{P} , es decir, está libre de modos de presión . También se puede demostrar, que eligiendo a las constantes n_H y n_C suficientemente grandes, el problema de la inexistencia de soluciones cuando el vector \underline{H} no es ortogonal a los nodos de presión no se presenta, es decir, la solución para las presiones y velocidades

En particular para dos vectores p_h y q_h pertenecientes a Q_h que es un subespacio de $L^2(\Omega)$ el producto interno será

$$\langle p_h, q_h \rangle = \int_{\Omega} p_h \cdot q_h d\Omega$$

Expresando a p_h y a q_h en términos de la base \tilde{n}_E de Q_h elegida, es decir,

$$p_h = \underline{\tilde{N}}^T \cdot \underline{P}$$

$$q_h = \underline{\tilde{N}}^T \cdot \underline{Q}$$

donde $\underline{\tilde{N}}^T$ es la matriz (columna) que agrupa a las funciones base \tilde{n}_E (ver ecuaciones (5.20) y (5.30)), el producto interno entre dos elementos de Q_h se puede escribir como

$$\langle p_h, q_h \rangle = \underline{P}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} \quad (5.40)$$

donde

$$\underline{A} = \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{\tilde{N}}^T d\Omega$$

A esta matriz se la denomina matriz del producto interno. Recordando que cada elemento \tilde{n}_E de la base de Q_h vale 1 en el elemento E y cero en los restantes y que

$\underline{\tilde{N}}^T = (\tilde{n}_1 \quad \tilde{n}_2 \quad \dots \quad \tilde{n}_E \quad \dots)$, se deduce que esta matriz será una matriz diagonal con

$A_{EE} = \text{Área}(\Omega_E)$. En particular si los elementos son cuadrados o tienen todos el mismo área, entonces la matriz \underline{A} será múltiplo de la matriz identidad.

De la igualdad (5.40) se deduce que la norma de una función p_h estará dada por

$$\|P_h\|^2 = \langle p_h, p_h \rangle = \underline{P}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{P}$$

por lo que $\|p_h\| = 1$ implica que $\underline{P}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{P} = 1$ y que dos vectores p_h y q_h serán ortogonales

$$\langle p_h, q_h \rangle = \underline{P}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{Q} = 0$$

existe también en dicho caso. Para demostrar esto se observa en primer lugar que los modos de presión \underline{Q}_H

Y \underline{Q}_C , por ser vectores del núcleo de \underline{C}^T , cumplirán

$$(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T) \underline{f}_E = I_E \cdot \underline{A} \cdot \underline{f}_E \quad (5.42)$$

$$\underline{f}_E^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{f}_E = 1$$

(5.43)

(Donde \underline{A} es la matriz del producto interno y I_E es el autovalor correspondiente al autovalor \underline{f}_E), \underline{P}^* podrá escribirse como

$$\underline{P}^* = \sum_{E=1}^{NP-2} x_E \underline{f}_E$$

(5.44)

Donde x_E son parámetros que dependerán de la “participación” que tenga cada autovector \underline{f}_E en \underline{P}^* .

Sustituyendo las igualdades (5.37) y (5.44) en las ecuaciones (5.36) y teniendo en cuenta que los autovectores \underline{f}_E verifican la igualdad (5.42) que los modos de presión cumplen (5.41) se obtiene

$$\sum_{E=1}^{NP-2} I_E x_E \underline{A} \cdot \underline{f}_E = -\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H}$$

y multiplicando por cualquier autovector \underline{f}_J^T ($1 \leq J \leq NP - 2$) se obtendrá ⁴⁴

$$I_{Jx_J} = \underline{f}_J^T \cdot (-\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H}) \quad 1 \leq J \leq NP - 2$$

⁴⁴ Recordar que los autovectores \underline{f}_E son todos ortogonales entre sí (porque provienen de una matriz simétrica) y están normalizados, es decir, verifican

$$\underline{f}_J \cdot \underline{A} \cdot \underline{f}_E = 0 \text{ si } J \neq E$$

$$\underline{f}_J \cdot \underline{A} \cdot \underline{f}_E = 1 \text{ si } J = E$$

por lo que $\underline{f}_J \left(\sum_{E=1}^{NP-2} I_E x_E \underline{A} \cdot \underline{f}_E \right) = \sum_{E=1}^{NP-2} I_E x_E (\underline{f}_J \cdot \underline{A} \cdot \underline{f}_E) = I_{Jx_J}$

Se deduce entonces que la solución \underline{P} del sistema (5.36) estará dada por

$$\underline{P} = \left(\sum_{E=1}^{NP-2} x_E \underline{f}_E \right) + x_H \underline{f}_H + x_C \underline{f}_C \quad (5.45)$$

con

$x_H = x_C =$ arbitrario

$$x_E = \frac{\underline{f}_E^T \cdot (-\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H})}{I_E} \quad 1 \leq E \leq NP-2 \quad (5.46)$$

Si, en cambio, se sustituyen las siguientes igualdades (5.37) y (5.44) en el sistema de ecuaciones modificado (5.38), se obtiene

$$\left(\sum_{E=1}^{NP-2} I_E x_E \underline{A} \cdot \underline{f}_E \right) + h_H x_H \underline{A} \cdot \underline{f}_H + h_C x_C \underline{A} \cdot \underline{f}_C = -\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H}$$

donde x_H y x_C son constantes (múltiplos de las constantes b_H y b_C que aparecen en la (5.37)) y premultiplicando por cualquier autovector \underline{f}_J , se obtendrá ahora⁴⁵,

⁴⁵ Recordar que los modos de presión \underline{f}_H y \underline{f}_C cumplen $\underline{C}^T \cdot \underline{f}_H = 0$ y $\underline{C}^T \cdot \underline{f}_C = 0$ por lo que

$$\underline{f}_H^T \cdot (-\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H}) = \underline{f}_H^T \cdot \underline{H}$$

$$I_J x_J = \underline{f}_J^T \cdot (-\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H}) \quad 1 \leq J \leq NP - 2$$

$$h_H x_H = \underline{f}_H^T \cdot \underline{H}$$

$$h_C x_C = \underline{f}_C^T \cdot \underline{H}$$

La solución del sistema modificado (5.38) estará dada entonces por

$$\underline{P} = \left(\sum_{E=1}^{NP-2} x_E \underline{f}_E \right) + x_H \underline{f}_H + x_C \underline{f}_C$$

\underline{P}^*

Con

$$x_H = \frac{\underline{f}_H^T \cdot \underline{H}}{h_H}$$

$$x_C = \frac{\underline{f}_C^T \cdot \underline{H}}{h_C}$$

$$x_E = \frac{\underline{f}_E^T \cdot (-\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H})}{I_R} \quad 1 \leq E \leq NP - 2$$

$$\underline{f}_C^T \cdot (-\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H}) = \underline{f}_C^T \cdot \underline{H}$$

Comparando la solución del sistema (5.36) (ecuaciones (5.45) y (5.46)) con la correspondiente al sistema modificado (5.38) (ecuaciones (5.47) y (5.48)), se deduce que, si \underline{H} es perpendicular a los modos de presión, es decir, si $\underline{f}_H^T \cdot \underline{H} = \underline{f}_C^T \cdot \underline{H} = 0$, entonces la solución del sistema modificado (5.38) será \underline{P}^* y que si \underline{H} no es perpendicular a los modos de presión y h_H y h_C se eligen suficientemente grandes, entonces la solución de las ecuaciones (5.38) estará dada por (5.47) con x_H y x_C muy chicas, es decir, es prácticamente igual a \underline{P}^* .

Se observa entonces, que con este método de prefiltrado, se puede hallar la solución para las presiones (la parte \underline{P}^*) libre de modos de presión a pesar que la matriz $(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T)$ es singular. Una vez obtenida \underline{P} , la solución para las velocidades se obtiene resolviendo la primera de las ecuaciones (5.34), es decir,

$$\underline{V} = -\underline{K}_d^{-1} \cdot (\underline{F} + \underline{C}^T \cdot \underline{P})$$

Ejemplo numérico

En la figura (5.15) y (5.16) se muestran las presiones y velocidades obtenidas al resolver con el método de multiplicadores de Lagrange con “prefiltrado” o “rigidización” de los modos de presión el problema de la cavidad conducida para los dos tipos de mallas: una formada por $M \times M$ elementos con M par, y otra formada por $M \times M$ elementos con M impar. Se observa que para el segundo tipo de condición de borde impuesta, si bien se pudo

obtener una solución, esta solución no es satisfactoria dado que los elementos debieron distorsionarse demasiado para poder cumplir simultáneamente las condiciones de borde cinemáticas (g_1, g_2) y la condición de incompresibilidad (impuesta en forma débil) hecho que da lugar a una aproximación de las presiones pobre.

5.4. MÉTODO DE PENALIZACIÓN

Como se dijo antes, el método de multiplicadores de lagrange (con filtrado de los modos de presión) es una de las formas de “debilitar” la condición de incompresibilidad y evitar el problema del bloqueo. Sin embargo presenta la desventaja que para hallar la solución para las velocidades, que son las incógnitas primarias del problema, es necesario resolver primero las ecuaciones para las presiones (5.36).⁴⁶ Una forma alternativa de “debilitar” la condición de incompresibilidad y que tiene la ventaja que si se puede formular en términos exclusivos de las velocidades, es el método de penalización.

Este método propone la siguiente forma de aproximar la condición de incompresibilidad:

Se modifica (5.4) según

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\kappa} p = 0$$

⁴⁶ Recordar que en las ecuaciones (5.32) se pudo despejar \underline{v} de la primera de ellas y reemplazar en la segunda para obtener el sistema (5.32) que involucra exclusivamente a las presiones pero es imposible encontrar una ecuación en la que aparezcan solamente las velocidades porque las presiones \underline{p} no se pueden despejar de la segunda de las ecuaciones (5.32).

donde \hat{A} es una constante (grande) llamada coeficiente de penalización y p es la presión, y si pide a las velocidades aproximadas (v_{1h}, v_{2h}) y a la presión aproximada p_h que cumplan

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\kappa} p_h \right] q_h d\Omega = 0 \quad (5.49)$$

para toda función $q_h \in \hat{Q}_h$.

El método de penalización propone entonces como solución aproximada de las ecuaciones completas del flujo de un medio viscoso incompresible (plano) a las funciones $(v_{1h}, v_{2h}) \in \hat{U}_h$ y $p_h \in \hat{U}_h$ que verifican:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{d\varepsilon}_h^T \cdot 2m\underline{D} \cdot \underline{\varepsilon}_h d\Omega + \int_{\Omega} \underline{d\varepsilon}_h^T \cdot \underline{M} \cdot p_h d\Omega = \\ \int_{\Omega} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{f} d\Gamma \quad \forall (dv_{1h}, dv_{2h}) \in V_h \\ \int_{\Omega} q_h \left[\underline{M}^T \cdot \underline{\varepsilon}_h - \frac{1}{\kappa} p_h \right] d\Omega = 0 \quad \forall q_h \in \hat{Q}_h \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{d\varepsilon}_h^T &= \left(\frac{\partial dv_{1h}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial dv_{2h}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial dv_{1h}}{\partial x_2} + \frac{\partial dv_{2h}}{\partial x_1} \right) \\ \underline{\varepsilon}_h^T &= \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_1} \right) \\ \underline{d\varepsilon}_h^T \cdot \underline{M} &= \frac{\partial dv_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_{2h}}{\partial x_2} \\ \underline{M}^T \cdot \underline{\varepsilon}_h &= \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \end{aligned}$$

La velocidad (v_{1h}, v_{2h}) (junto con la presión p_h) deberá cumplir la primera de las igualdades (5.50) (el principio de las potencias virtuales), para que resulte una solución aproximada de las ecuaciones del movimiento (5.3) y la relación constitutiva para un medio viscoso (5.2), y deberán satisfacer la segunda igualdad (5.50) (con \dot{A} “grande”) para aproximar la condición de incompresibilidad.

La igualdad (5.49) admite una interpretación geométrica a la correspondiente al método de los multiplicadores de Lagrange: recordando que la integral $\int_W p \cdot q \, dW$ es un producto interno (p, q) , la igualdad (5.49) se puede describir como

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{\kappa} p_h, q_h \right\rangle = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

por lo que dicha igualdad expresa que $\frac{1}{\kappa} p_h$ es la proyección ortogonal sobre el espacio Q_h de la divergencia de (v_{1h}, v_{2h}) . Entonces, si \dot{A} es grande, las velocidades (v_{1h}, v_{2h}) tendrán una proyección ortogonal sobre Q_h que no es nula como en el método de los multiplicadores de Lagrange, pero es “casi” nula.

Teniendo en cuenta esto se observa que, cuando $\dot{A} \rightarrow \infty$ la proyección ortogonal de

$\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}$ sobre Q_h tendrá a cero por lo que las velocidades (v_{1h}, v_{2h}) tenderán a

pertenecer a \overline{K}_h (ver referencia [3] y [5] que es el conjunto de funciones (v_{1h}, v_{2h}) cuya

divergencia $\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}$ tiene proyección sobre Q_h exactamente cero. Esto implica que con el método de penalización se obtiene velocidades aproximadas (v_{1h}, v_{2h}) que se encuentran tan “cerca” de $\overline{K_h}$ como se quiera con tal que \tilde{A} sea suficientemente grande. Recordando que para que no exista bloqueo, el espacio $\overline{K_h}$ debe ser mucho más “grande” que $\overline{K_h}$ (el conjunto de las funciones exactamente incompresibles) de manera que $\overline{K_h} \cap U_h$, contenga “muchas” funciones y no una sola o ninguna como $K_h \cap U_h$, se deduce que, al igual que en el método de los multiplicadores de Lagrange, se debe elegir como espacio de presiones aproximantes Q_h al formado por las funciones que son constantes dentro de cada elemento y discontinuas entre elementos, dado que, como se demostró antes, esta es la única elección de Q_h que proporciona un espacio $\overline{K_h}$ mas “grande” que K_h (para polinomios de mayor orden resultaba $\overline{K_h} = K_h$)

5.4.1. Forma matricial del método de penalización

Expresando a las velocidades $(v_{1h}, v_{2h}) \in U_h$ y a las velocidades virtuales $(\delta v_{1h}, \delta v_{2h}) \in V_h$ como combinación lineal de la base n_j de H_h (las funciones de H_h que valen 1 en el nodo J y cero en los restantes) y a las presiones p_h como combinación lineal de la base \tilde{n}_E de Q_h (las funciones de Q_h que valen 1 en el nodo de presión E y cero en los restantes) (ver ecuaciones (5.26), (5.28), (5.30) y (5.31)) y reemplazando dichas expresiones en las igualdades (5.50) se obtiene

$$\begin{aligned}
\underline{dV}^T \cdot (\underline{K}_d \cdot \underline{V} + \underline{C}^T \cdot \underline{P} + \underline{F}_v + \underline{F}_b + \underline{F}_f) &= 0 & \forall \underline{dV} \\
\underline{Q}^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{V} - \frac{1}{\kappa} \underline{A} + \underline{P} + \underline{H}) &= 0 & \forall \underline{Q}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

donde, al igual que en el método de los multiplicadores de Lagrange, \underline{V} y \underline{P} son las matrices (columna) de $NV \times 1$ y $NP \times 1$ que agrupan a las velocidades y presiones nodales, \underline{K}_d , \underline{C} , \underline{F}_v , \underline{F}_b , \underline{F}_f , y \underline{H} son las mismas matrices que se obtuvieron al deducir la forma matricial del método de los multiplicadores de Lagrange, definidas en las ecuaciones (5.33), y \underline{A} es la matriz del producto interno, definida como

$$\underline{A} = \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{\tilde{N}}^T d\Omega$$

(siendo $\underline{\tilde{N}}$ la matriz que agrupa a las funciones base \tilde{n}_E de Q_h). Las igualdades (5.51) se verificaran para todos $\underline{dV} \in \hat{A}^{NV}$ y para todo $\underline{Q} \in \hat{A}^{NP}$ si y solo si \underline{V} y \underline{P} cumplen

$$\begin{aligned}
\underline{K}_d + \underline{K} + \underline{C}^T \cdot \underline{P} &= -\underline{F} \\
\underline{C} + \underline{V} + \frac{1}{\kappa} \underline{A} \cdot \underline{P} &= -\underline{H}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

donde $\underline{F} = \underline{F}_v + \underline{F}_b + \underline{F}_f$. Estas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas \underline{V} y \underline{P} . Resolviendo este sistema se determinan los valores nodales de la velocidad $(v_{1h}, v_{2h}) \in U_h$ y presión $P_h \in U_h$ que verifica las igualdades (5.50). A diferencia del sistema obtenido con el método de los multiplicadores de Lagrange (5.34), el sistema (5.52) puede ser escrito en términos exclusivos de las velocidades \underline{V} : “despejando” \underline{P} de la

segunda de las ecuaciones (5.52) y reemplazando en la primera se obtiene la ecuación para las velocidades

$$\left(\underline{K}_d + \underline{C}^T \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{C}\right) \underline{V} = -\underline{F} - \underline{C}^T \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{H} \quad (5.53)$$

Resolviendo esta ecuación se podrán hallar las velocidades \underline{V} sin necesidad de conocer las presiones. Estas últimas se obtendrán, una vez que se conocen las velocidades, con la segunda de las ecuaciones (5.52), es decir, con

$$\underline{P} = \left(\frac{1}{\kappa} \underline{A}\right)^{-1} \cdot (\underline{C} \cdot \underline{V} + \underline{H}) \quad (5.54)$$

5.4.2. Método de penalización formulado en términos exclusivos de las velocidades:
integración reducida

El sistema de ecuaciones (5.53), que involucra exclusivamente a las velocidades puede ser obtenido sin utilizar explícitamente la discretización para las presiones $p_H = \tilde{\underline{N}}^T \cdot \underline{P}$: teniendo en cuenta la definición de las matrices \underline{C} \underline{A} y \underline{H} (ecuaciones (5.33)) y que $\tilde{\underline{N}}^T = (\tilde{n}_1 \tilde{n}_2 \dots \tilde{n}_{NP})$ siendo \tilde{n}_E las funciones base del espacio Q_h que valen 1 en el elemento E y cero en los restantes, se puede demostrar (ver referencia [12] o [16]) que

$$\begin{aligned} d\underline{V} &= \underline{C}^T \left(\frac{1}{\kappa} \underline{A}\right)^{-1} \cdot (\underline{C} \cdot \underline{V} + \underline{H}) = \\ &= \sum_E^{NP} d\underline{V}^T \cdot \underline{B}_v^T \Big|_{(r,s)=(0,0)} \cdot \underline{M} \underline{k} \underline{M}^T \cdot \left(\underline{B}_v \Big|_{(r,s)=(0,0)} \cdot \underline{V} + \underline{B}_g \Big|_{(r,s)=(0,0)} \cdot \underline{G} \right) \cdot \underline{4}(|J|) \Big|_{(r,s)=(0,0)} \end{aligned} \quad (5.55)$$

donde $\underline{B}_v \Big|_{(r,s)=(0,0)}$ y $\underline{B}_g \Big|_{(r,s)=(0,0)}$ son las matrices B_v y B_g definidas en (5.27) evaluadas en el punto del elemento E de coordenadas locales $(r,s)=(0,0)$, $(/J/)_{(r,s)=(0,0)}$ es el jacobiano del

cambio de coordenadas locales (r,s) a coordenadas globales (x_1,x_2) del elemento E (el jacobiano del sistema $(x_1(r,s),x_2(r,s))$) evaluando en el punto del elemento E de coordenadas locales $(r,s) = (0,0)$, $M^T = (1 \ 1 \ 0)$ y \underline{V} y \underline{G} son las matrices que agrupan a los valores nodales de las velocidades en los nodos interiores y en los de la frontera respectivamente. Recordando que (ver ecuaciones (5.26) y (5.28))

$$\underline{M}^T \cdot (\underline{B}_v \cdot \underline{V} + \underline{B}_g \cdot \underline{G}) = \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}$$

$$\underline{dV}^T \cdot \underline{B}_v^T \cdot \underline{M} = \frac{\partial dv_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_{2h}}{\partial x_2}$$

y teniendo en cuenta que la integral de cualquier función $f(x_1,x_2)$ se puede estimar utilizando el método de cuadratura de Gauss con un único punto de integración⁴⁷ como

$$\int_{\Omega_E} f(x_1, x_2) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1(r, s), x_2(r, s)) |J| dr ds \approx 4(x_1, x_2)|_{(r,s)=(0,0)} (|J|)|_{(r,s)=(0,0)}$$

se deduce que la sumatoria del miembro derecho de la igualdad (5.55) se puede interpretar como la integral

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial dv_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial dv_{2h}}{\partial x_2} \right) \mathfrak{K} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2} \right) d\Omega$$

⁴⁷ Una integral cualquiera $\int_{-1}^1 f(r) dr$ se puede calcular numéricamente como donde ϵ_i son los llamados puntos de integración, w_i son constantes positivas y N es la cantidad de puntos de integración utilizados. A este método se lo llama método de cuadratura de Gauss. Se puede demostrar que utilizando N puntos de integración se puede integrar exactamente un polinomio de grado menor o igual que $2N-1$. Si para integrar un polinomio de grado $2N-1$ se utiliza una cantidad de puntos menor que N (por lo que la integración no será exacta) se dice que la integral ha sido calculada con integración de Gauss reducida. Los puntos de integración y las constantes w_i se encuentran tabulados en función de N (ver por ejemplo referencia [2]). Para $N=1$, corresponde $w_1=4$ y $\epsilon_1=0$.

hecha con el método de cuadratura de Gauss con un único punto de integración (o integración reducida). Entonces resulta

$$\underline{dV} \cdot \underline{C}^T \cdot \left(\frac{1}{\mathfrak{K}} \underline{A}\right)^{-1} \cdot (\underline{C} \cdot \underline{V} + \underline{H}) \approx \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}\right) \mathfrak{K} \left(\frac{\partial v_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{2h}}{\partial x_2}\right) d\Omega$$

y la ecuación (5.53) se podrá obtener entonces a partir de la igualdad

$$\int_{\Omega} \underline{d\varepsilon}_h^T \cdot 2m \underline{D} \cdot \underline{Id} \cdot \underline{\varepsilon}_h d\Omega + \int_{\Omega} \underline{d\varepsilon}_h^T \cdot \underline{M} \mathfrak{K} \underline{M}^T \cdot \underline{d\varepsilon}_h d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \underline{dv}_h^T \cdot \underline{f} d\Gamma \quad \forall (\underline{dv}_{1h}, \underline{dv}_{2h}) \in V_h$$

(haciendo la segunda integral del miembro derecho con integración reducida). Esta última igualdad es otro punto de partida con el que se puede obtener la ecuación (5.53) sin necesidad de interpolar a las presiones (siempre que la segunda integral se resulta con integración reducida).

5.4.3. Convergencia de la solución $\hat{A} \otimes \mathfrak{K}$

Cuando se planteó el método de los multiplicadores de Lagrange, se vió que la solución para las presiones (cuando existe) se puede expresar como

$$\underline{P} = \underline{P}^* + \underline{b}_H \underline{Q}_H + \underline{b}_C \underline{Q}_C$$

donde \underline{b}_H y \underline{b}_C son constante arbitrarias, \underline{Q}_H y \underline{Q}_C son los modos de presión, es decir, la base del núcleo de \underline{C}^T y \underline{P}^* es la parte de \underline{P} ortogonal a dichos modos de presión. También se vió que la solución para las velocidades \underline{V} y para las presiones \underline{P} solo existe cuando el vector \underline{H} es ortogonal a los modos de presión y que cuando esta condición se cumple, la parte \underline{P}^* no

puede hallarse directamente y es necesario modificar la ecuación para las presiones en la forma (5.38) poder encontrarla.

Con respecto al método de penalización, se puede demostrar que la solución para las velocidades y para la presión existe independientemente de cual sean \underline{H} y \underline{A} y que cuando $\underline{A} \rightarrow \underline{0}$ las velocidades \underline{V} convergen a las obtenidas con el método de los multiplicadores de Lagrange independientemente del valor de \underline{H} mientras que las presiones \underline{P} convergen a la parte \underline{P}^* de la solución correspondiente al método de los multiplicadores de Lagrange (es decir, a la parte libre de modos de presión) si \underline{H} es ortogonal a los modos de presión y convergen a $\underline{P}^* + b_H \underline{Q}_H + b_C \underline{Q}_C$ con b_H y b_C tendiendo a infinito (es decir, a una solución totalmente contaminada por modos de presión) si \underline{H} no es ortogonal a dichos modos. Es decir, llamado \underline{V}_A y \underline{P}_A a las velocidades y presiones que se obtienen con el método de penalización, entonces

$$\begin{aligned} \underline{V}_{\mathfrak{R}} &\xrightarrow{\mathfrak{K} \rightarrow \infty} \underline{V} && \forall \underline{H} \in \mathfrak{R}^{NP} \\ \underline{P}_{\mathfrak{R}} &\xrightarrow{\mathfrak{K} \rightarrow \infty} \underline{P}^* && \text{si } \underline{Q}_H^T \cdot \underline{H} = 0 \text{ y } \underline{Q}_C^T \cdot \underline{H} = 0 \\ \underline{P}_{\mathfrak{R}} &\xrightarrow{\mathfrak{K} \rightarrow \infty} \underline{P}^* + b_H \underline{Q}_H + b_C \underline{Q}_C && \text{con } b_H \text{ y } b_C \rightarrow \infty \text{ si } \underline{Q}_H^T \cdot \underline{H} \neq 0 \text{ o } \underline{Q}_C^T \cdot \underline{H} \neq 0 \end{aligned}$$

donde \underline{V} es la solución para las velocidades que se obtiene con el método de multiplicadores de Lagrange. Entonces, si bien con este método la solución existe independientemente de cual sea \underline{H} , para obtener una solución para las presiones que tenga sentido físico, es necesario que el vector $\underline{H} \in \mathfrak{R}^{NP}$ que aparece en la segunda de las ecuaciones (5.52) sea perpendicular a \underline{Q}_H y a \underline{Q}_C . Si esto no pasa, se obtendrán presiones

formadas exclusivamente por modos de presión y una solución de este tipo no tiene ninguna utilidad.

Para demostrar esto, se observa que de las ecuaciones (5.52) se obtiene la siguiente ecuación para las presiones

$$\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T + \frac{1}{\underline{\alpha}} \underline{A}\right) \underline{P} = -\underline{C} \underline{K}_d^{-1} \underline{F} + \underline{H} \quad (5.56)$$

Suponiendo que la solución \underline{P}_α de este sistema (al igual que la solución \underline{P} correspondiente al método de multiplicadores de Lagrange) se puede escribir como

$$\underline{P}_\alpha = \left(\sum_{E=1}^{NP-2} x_E \underline{f}_E \right) + x_H \underline{f}_H + x_C \underline{f}_C$$

donde x_E , x_H y x_C son constantes, \underline{j}_H y \underline{j}_C son los modos de presión normalizados (ver ecuaciones (5.37)) \underline{j}_E son los autovectores de $\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T$ (correspondiente a autovalores λ_E no nulos) que son idénticos a los de $\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T + \frac{1}{\underline{\alpha}} \underline{A}$ (porque si \underline{j}_E cumple

$$\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T\right) \underline{f}_E = \lambda_E \underline{A} \underline{f}_E \text{ entonces } \left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T + \frac{1}{\underline{\alpha}} \underline{A}\right) \underline{f}_E = \left(\lambda_E + \frac{1}{\underline{\alpha}}\right) \underline{A} \underline{f}_E \text{ y reemplazando en la}$$

ecuación (5.56) se obtiene⁴⁸

$$\sum_{E=1}^{NP-2} x_E \left(\lambda_E + \frac{1}{\underline{\alpha}}\right) \underline{A} \underline{f}_E + x_H \frac{1}{\underline{\alpha}} \underline{A} \underline{f}_H + x_C \frac{1}{\underline{\alpha}} \underline{A} \underline{f}_C = -\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \underline{F} + \underline{H}$$

⁴⁸ Recordar que $\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T\right) \underline{j}_E = \lambda_E \underline{A} \underline{j}_E$ y que $\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T\right) \underline{j}_H = 0$ y $\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T\right) \underline{j}_{cC} = 0$

porque \underline{j}_H y \underline{j}_C son modos de presión (ver igualdades (5.41) y (5.42)).

Premultiplicando ahora por \underline{j}_{-J}^T y recordando que los autovectores $\underline{j}_E, \underline{j}_H$ y \underline{j}_C , son todos ortogonales entre si, se obtendrá

$$\begin{aligned} \left(I_J + \frac{1}{\aleph}\right)x_J &= -\underline{j}_{-J}^T \cdot \left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} - \underline{H}\right) \quad 1 \leq J \leq NP - 2 \\ \frac{1}{\aleph} x_H &= \underline{f}_H^T \cdot \underline{H} \\ \frac{1}{\aleph} x_C &= \underline{f}_C^T \cdot \underline{H} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución $\underline{P}_{\underline{A}}$ del sistema (5.56) está dada por

$$\underline{P}_{\aleph} = \left(\sum_{E=1}^{NP-2} x_E \underline{f}_E \right) + x_H \underline{f}_H + x_C \underline{f}_C \quad (5.57)$$

con

$$\begin{aligned} x_E &= \frac{\underline{f}_E^T \cdot \left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} - \underline{H}\right)}{\left(I_E + \frac{1}{\aleph}\right)} \quad 1 \leq E \leq NP - 2 \\ x_H &= \aleph \left(\underline{f}_H^T \cdot \underline{H} \right) \\ x_C &= \aleph \left(\underline{f}_C^T \cdot \underline{H} \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Comparando las igualdades (5.57) y (5.58) con las ecuaciones (5.45) y (5.46) se deduce que si \underline{H} es ortogonal a \underline{j}_H y \underline{j}_C entonces $\underline{P}_{\underline{A}}$ convergerá a la solución \underline{P}^* del método de multiplicadores de Lagrange cuando $\aleph \rightarrow \infty$, y si \underline{H} no es ortogonal a \underline{j}_H y \underline{j}_C , entonces los factores x_H y x_C tienden a ser muy grandes y los modos de presión \underline{j}_H y \underline{j}_C tienden a ser las componentes más importantes en la solución $\underline{P}_{\underline{A}}$.

5.5. PROCEDIMIENTOS ITERATIVOS PARA MEJORAR LA SOLUCIÓN MÉTODO DEL LAGRANGEANO AUMENTADO

Si bien el método de penalización permite obtener soluciones para las velocidades \underline{V} sin necesidad de hallar primero la solución para las presiones \underline{P} (como ocurría en el método de multiplicadores de Lagrange) presenta la siguiente limitación: el sistema de ecuaciones para las velocidades que se obtiene con éste método (ecuación (5.53)) se puede reescribir como

$$\left(\underline{K}_d + \mathfrak{N}\underline{C}^T \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{C}\right)\underline{V} = -\underline{F} - \mathfrak{N}\underline{C}^T \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{H} \quad (5.59)$$

donde el coeficiente de penalización \hat{A} debe elegirse suficientemente “grande” para que la solución $\underline{V}_{\hat{A}}$ obtenida con este método sea parecida a la correspondiente al método de los multiplicadores de Lagrange, que es la solución buscada. Sin embargo, cuando \hat{A} es muy grande, la matriz $\left(\underline{K}_d + \mathfrak{N}\underline{C}^T \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{C}\right)$ queda numéricamente mal condicionada porque estará formada por sumados de órdenes de magnitud muy distintos por lo que el error numérico que se obtendrá al resolver el sistema (5.59) será muy grande. Se observa entonces que, por un lado k debe ser grande para $\underline{V}_{\hat{A}}$ aproxime mejor a la solución buscada, pero por otro lado no puede ser muy grande porque el sistema de ecuaciones a resolver se vuelve cada vez peor condicionado y la exactitud de $\underline{V}_{\hat{A}}$ es muy baja.

Para superar esta limitación se puede utilizar el procedimiento iterativo, denominado *método del lagrangeano aumentado* (ver referencias [15] y [28] que se resume en los siguientes pasos:

1. Conocidas las presiones $\underline{P}^{(k)}$ correspondiente a la iteración k se calculan las velocidades $\underline{V}^{(k+1)}$ correspondientes a la iteración $k+1$ mediante el sistema de ecuaciones

$$\left(\underline{K}_d + \underline{C}^T \cdot \left(\frac{1}{\aleph} \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{C}\right) \underline{V}^{(k+1)} + \underline{C}^T \cdot \underline{P}^{(k)} = -\underline{F} \cdot \underline{C}^T \left(\frac{1}{\aleph} \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{H} \quad (5.60)$$

Utilizando ahora un parámetro \aleph “chico” para que este sistema no quede mal condicionado.

2. Con las velocidades $\underline{V}^{(k+1)}$ se actualizan las presiones según

$$\underline{P}^{(k+1)} = \underline{P}^{(k)} + \left(\frac{1}{\aleph} \underline{A}\right)^{-1} \cdot \left(\underline{C} \cdot \underline{V}^{(k+1)} + \underline{H}\right) \quad (5.61)$$

Este algoritmo iterativo se inicia con $\underline{P}^{(0)} = \underline{0}$, por lo que las ecuaciones (5.60) y (5.61) quedan idénticas para la primera iteración a las correspondientes al método de penalización (ecuaciones (5.53) y (5.54)) y entonces $\underline{V}^{(1)}$ y $\underline{P}^{(1)}$ serán idénticos a la solución \underline{V}_{\aleph} y \underline{P}_{\aleph} que se obtiene con el método de penalización con \aleph “chico”, y se finaliza cuando cierta medida del error de $\underline{V}^{(k)}$ y $\underline{P}^{(k)}$ es chica. Las ecuaciones (5.60) y (5.61) se pueden reescribir en forma más compacta como

$$\begin{aligned} \underline{K}_d \cdot \underline{V}^{(k+1)} + \underline{C}^T \cdot \underline{P}^{(k+1)} &= -\underline{F} \\ \underline{C} \cdot \underline{V}^{(k+1)} - \frac{1}{\aleph} \underline{A} \cdot \underline{P}^{(k+1)} &= -\underline{H} - \frac{1}{\aleph} \underline{A} \cdot \underline{P}^{(k)} \end{aligned} \quad (5.62)$$

(comparar con las (5.52). Con este procedimiento se evitan los problemas del mal condicionamiento de la matriz del sistema (5.59) que se presentaban con el método de penalización porque se utiliza un coeficiente de penalización \hat{A} chico (y entonces la matriz del sistema (5.60) estará formada por sumandos de ordenes de magnitud parecidos) y se puede demostrar que la solución $\underline{V}^{(k)}$ y $\underline{P}^{(k)}$ que se alcanza después de k iteraciones converge cuando el número de iteraciones es grande (cuando $k \rightarrow \infty$) a la misma solución que se obtenía con el método de penalización para $\hat{A} \rightarrow \infty$: las velocidades $\underline{V}^{(k)}$ tienden a las velocidades \underline{V} correspondientes al método de multiplicadores de Lagrange (con rigidización) independientemente de \underline{H} y la solución para las presiones $\underline{P}^{(k)}$ converge a la parte \underline{P}^* de las presiones correspondientes a este último método (la parte ortogonal a los modos de presión \underline{Q}_H y \underline{Q}_C) y \underline{H} es ortogonal a \underline{Q}_H y \underline{Q}_C mientras que converge a $\underline{P}^* + b_H \underline{Q}_H + b_C \underline{Q}_C$ con b_H y b_C muy grandes (tendiendo a infinito) en caso contrario, es decir,

$$\begin{aligned} \underline{V}^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \underline{V} & \forall \underline{H} \in \mathfrak{R}^{NP} \\ \underline{P}^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \underline{P}^* & \text{si } \underline{Q}_H^T \cdot \underline{H} = 0 \text{ y } \underline{Q}_C^T \cdot \underline{H} = 0 \\ \underline{P}^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \underline{P}^* + b_H \underline{Q}_H + b_C \underline{Q}_C & \text{con } b_H \text{ y } b_C \rightarrow \infty \text{ si } \underline{Q}_H^T \cdot \underline{H} \neq 0 \text{ o } \underline{Q}_C^T \cdot \underline{H} \neq 0 \end{aligned}$$

La demostración de esta afirmación es análoga a la hecha al estudiar la convergencia de la solución del método de penalización $\underline{V}_{\hat{A}}$ y $\underline{P}_{\hat{A}}$ para $\hat{A} \rightarrow \infty$: despejando $\underline{V}^{(k+1)}$ de la primera de las ecuaciones (5.62) y reemplazando en la segunda se obtiene la siguiente ecuación recursiva para las presiones

$$\left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T + \frac{1}{\hat{A}} \underline{A} \right) \underline{P}^{(k+1)} = \underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H} \frac{1}{\hat{A}} \underline{A} \cdot \underline{P}^{(k)} \quad (5.63)$$

Si se supone que las solución $\underline{P}^{(k)}$ y $\underline{P}^{(k+1)}$ correspondiente a las iteraciones k y $k+1$ puede escribirse como

$$\underline{P}^{(k)} = \left(\sum_{E=1}^{NP-2} x_E^{(k)} \underline{f}_E \right) + x_H^{(k)} \underline{f}_H + x_C^{(k)} \underline{f}_C$$

$$\underline{P}^{(k+1)} = \left(\sum_{E=1}^{NP-2} x_E^{(k+1)} \underline{f}_E \right) + x_H^{(k+1)} \underline{f}_H + x_C^{(k+1)} \underline{f}_C$$

es decir, como combinación lineal de una base común (la base de autovectores \underline{f}_E , \underline{f}_H y \underline{f}_C de $\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T + \frac{1}{\alpha} \underline{A}$ (que son idénticos a los $\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}^T$)) pero con constantes distintas para

cada iteración $(x_E^{(k)}, x_H^{(k)}, x_C^{(k)})$ para $\underline{P}^{(k)}$ y $(x_E^{(k+1)}, x_H^{(k+1)}, x_C^{(k+1)})$ para $\underline{P}^{(k+1)}$ entonces

reemplazando en la ecuación (5.56) se obtiene

$$\left[\sum_{E=1}^{NP-2} x_E^{(k+1)} \left(\underline{I}_E + \frac{1}{\alpha} \underline{A} \right) \underline{f}_E \right] + x_H^{(k+1)} \frac{1}{\alpha} \underline{A} \underline{f}_H + x_C^{(k+1)} \frac{1}{\alpha} \underline{A} \underline{f}_C =$$

$$= -\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{H} + \left[\sum_{E=1}^{NP-2} x_E^{(k)} \frac{1}{\alpha} \underline{A} \underline{f}_E \right] + x_H^{(k)} \frac{1}{\alpha} \underline{A} \underline{f}_H + x_C^{(k)} \frac{1}{\alpha} \underline{A} \underline{f}_C$$

y premultiplicando por \underline{f}_j^T , \underline{f}_H^T y por \underline{f}_C^T se obtendrá (recordando que los autovectores

\underline{f}_E , \underline{f}_H y \underline{f}_C son todos ortogonales entre si)

$$\left(\underline{I}_J + \frac{1}{\alpha} \right) x_J^{(k+1)} = -\underline{f}_J^T \cdot \left(\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} - \underline{H} \right) + \frac{1}{\alpha} x_J^{(k)} \quad 1 \leq J \leq NP-2$$

$$\frac{1}{\alpha} x_H^{(k+1)} = \underline{f}_H^T \cdot \underline{H} + \frac{1}{\alpha} x_H^{(k)}$$

$$\frac{1}{\alpha} x_C^{(k+1)} = \underline{f}_C^T \cdot \underline{H} + \frac{1}{\alpha} x_C^{(k)}$$

Las igualdades anteriores permiten calcular en forma recurrente a los constantes

$x_J^{(k)}$, $x_H^{(k)}$ y $x_C^{(k)}$ correspondiente a cada iteración k . Rescribiéndolas en la forma

$$x_j^{(k+1)} = \frac{-\underline{f}_j^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} - \underline{H})}{I_j} - \frac{1}{kI_j} (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) \quad 1 \leq J \leq NP - 2$$

$$x_H^{(k+1)} = \underline{\mathfrak{N}} \underline{f}_H^T \cdot \underline{H} + x_H^{(k)}$$

$$x_C^{(k+1)} = \underline{\mathfrak{N}} \underline{f}_C^T \cdot \underline{H} + x_C^{(k)}$$

se deduce en primer lugar que cuando el número de iteraciones k tiende a infinito,

$x_j^{(k)}$ tenderá a $\frac{-\underline{f}_j^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} - \underline{H})}{I_j}$ para $1 \leq J \leq NP-2$ porque la diferencia

$(x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)})$ tiende a cuando $x_j^{(k)}$ converge. En segundo lugar se observa que si $\underline{f}_H^T \cdot \underline{H} =$

$\underline{f}_C^T \cdot \underline{H} = 0$ y si, como se dijo antes, comienza a iterar con $\underline{P}^{(0)} = \underline{0}$ con lo que $x_H^{(0)} x_C^{(0)}$ serán

nullas, entonces resultará $x_H^{(k)} = x_C^{(k)} = 0$ para todo k . Por ultimo se observa que si $\underline{f}_H^T \cdot \underline{H} \neq 0$

o $\underline{f}_C^T \cdot \underline{H} \neq 0$ entonces para cualquier par de valores iniciales $x_H^{(0)}$ y $x_C^{(0)}$ se obtendrá

$$\begin{cases} x_H^{(k)} = k(\underline{\mathfrak{N}} \underline{f}_H^T \cdot \underline{H}) + x_H^{(0)} \\ x_C^{(k)} = k(\underline{\mathfrak{N}} \underline{f}_C^T \cdot \underline{H}) + x_C^{(0)} \end{cases}$$

que tiende a infinito cuando el número de iteraciones k tiende a infinito. Por lo tanto, la

sucesión $\underline{P}^{(k)}$ de presiones que verifican el sistema (5.63) para todo k esta dada por

$$\underline{P}^{(k)} = \left(\sum_{E=1}^{NP-2} x_E^{(k)} \underline{f}_E \right) + x_H^{(k)} \underline{f}_H + x_C^{(k)} \underline{f}_C \quad (5.64)$$

con

$$\begin{aligned}
x_E^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{-\underline{f}_J^T \cdot (\underline{C} \cdot K_d^{-1} \cdot \underline{F} - \underline{H})}{I_E} \text{ para } 1 \leq E \leq NP - 2 \\
x_H^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ y } x_C^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ si } \underline{Q}_H^T \cdot \underline{H} = 0 \text{ y } \underline{Q}_C^T \cdot \underline{H} = 0 \\
x_H^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \text{ o } x_C^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \text{ si } \underline{Q}_H^T \cdot \underline{H} \neq 0 \text{ y } \underline{Q}_C^T \cdot \underline{H} \neq 0 \text{ respectivamente}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Comparando las igualdades (5.57) y (5.58) con las ecuaciones (5.45) y (5.46) se deduce que si \underline{H} es ortogonal a \underline{f}_H y \underline{f}_C , entonces $\underline{P}^{(k)}$ se acerca a la solución \underline{P}^* del método de multiplicadores de Lagrange cuando el número de interacciones es grande mientras que si \underline{H} no es ortogonal a \underline{f}_H y \underline{f}_C entonces $\underline{P}^{(k)}$ tiende a $\underline{P}^* + x_H \underline{f}_H + x_C \underline{f}_C$ con factores x_H y x_C muy grande y los modos de presión tienden a continuar cada vez mas la solución a medida que el numero de iteraciones k aumenta.

Ejemplo numérico

Para complementar el análisis se resolvió también con el método del lagrangeano aumentado el problema de la cavidad conducida para las distintas condiciones de borde mostradas en la figura (5.14) y para mallas de distinta cantidad de elementos. Las soluciones obtenidas se muestran en las figuras (5.19) y (5.20). Se observa que para el caso de condiciones de borde tipo b) (ver figura (5.14)) y para malla formada por un numero par de elementos en cada lado (caso para el cual el vector \underline{H} no es ortogonal a los modos de presión \underline{f}_H y \underline{f}_C) se obtiene una solución para las presiones con una participación de los modos espúreos importante.

5.5.1. Lagrangeano aumentado con prefiltrado o rigidización de los modos de presión.

El método del lagrangeano es una alternativa para superar el problema del mal condicionamiento de la matriz del sistema (5.56) para coeficientes de penalización grande $\underline{\lambda}$. Sin embargo, cuando \underline{H} no es ortogonal a \underline{f}_H y \underline{f}_C no permite encontrar solución para las presiones. Una alternativas para solucionar este inconveniente es modificar a la ecuación recurrente de las presiones (5.63) en una forma análoga a la utilizada en el método de multiplicadores de Lagrange con “prefiltrado” o “rigidización” de los modos de presión, es decir, sumando a la matriz de dicho sistema de ecuaciones el término $h_H \underline{A} \underline{f}_H \underline{f}_H^T \underline{A} + h_C \underline{A} \underline{f}_C \underline{f}_C^T \underline{A}$ donde h_H y h_C son constantes positivas (y “grandes”). La ecuación para las presiones propuestas es entonces

$$\begin{aligned} \left(\underline{C} \underline{K}_d^{-1} \underline{C}^T + \frac{1}{\underline{\lambda}} \underline{A} + h_H \underline{A} \underline{f}_H \underline{f}_H^T \underline{A} + h_C \underline{A} \underline{f}_C \underline{f}_C^T \underline{A} \right) \underline{P}^{(k+1)} = \\ = \underline{C} \underline{K}_d^{-1} \underline{F} + \underline{H} + \frac{1}{\underline{\lambda}} \underline{A} \underline{P}^{(k)} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Se puede demostrar (usando el mismo razonando que se utilizó para deducir las igualdades (5.57) y (5.58)) que las presiones $\underline{P}^{(k)}$ que se obtienen con este nuevo algoritmo están dadas por

$$\underline{P}^{(k)} = \left(\sum_{E=1}^{NP-2} x_E^{(k)} \underline{f}_E \right) + x_H^{(k)} \underline{f}_H + x_C^{(k)} \underline{f}_C \quad (5.67)$$

con

$$\begin{aligned}
x_E^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{-\underline{f}_E^T \cdot (\underline{C} \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{F} - \underline{H})}{I_E} \text{ para } 1 \leq E \leq NP - 2 \\
x_H^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{\underline{f}_H^T \cdot \underline{H}}{h_H} \\
x_C^{(k)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{\underline{f}_C^T \cdot \underline{H}}{h_C}
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Se observa que se obtiene la misma solución que con el método del lagrangeano aumentado cuando $\underline{f}_H^T \cdot \underline{H} = \underline{f}_C^T \cdot \underline{H} = 0$ (es decir, $\underline{P}^{(k)}$ tiende \underline{P}^* cuando k tiende a infinito) pero con éste nuevo método también se obtiene la solución \underline{P}^* del método de multiplicadores de Lagrange (es decir, una solución libre de modos de presión) cuando $\underline{f}_H^T \cdot \underline{H} \neq \underline{f}_C^T \cdot \underline{H} \neq 0$ siempre que se elija h_H y h_C lo suficientemente grandes como para que $\frac{\underline{f}_H^T \cdot \underline{H}}{h_H}$ y $\frac{\underline{f}_C^T \cdot \underline{H}}{h_C}$ sean despreciables. Por lo tanto este algoritmo iterativo es efectivo incluso en éste último caso.

El algoritmo iterativo del lagrangeano aumentado con “rigidización” o “prefiltrado” de los modos de presión \underline{f}_H y \underline{f}_C se completa con una ecuación recursiva para las velocidades a la correspondiente al método del lagrangeano aumentado sin rigidización, es decir

$$\underline{K}_d \cdot \underline{V}^{(k+1)} + \underline{C}^T \cdot \underline{P}^{(k+1)} = -\underline{F} \tag{5.69}$$

Combinando las ecuaciones (5.66) y (5.69) este nuevo procedimiento iterativo se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\underline{K}_d \cdot \underline{V}^{(k+1)} + \underline{C}^T \cdot \underline{P}^{(k+1)} &= -\underline{F} \\ \underline{C} \cdot \underline{V}^{(k+1)} + \left(\frac{1}{\aleph} \underline{A}\right) \underline{J} \cdot \underline{P}^{(k+1)} &= -\underline{H} \cdot \frac{1}{\aleph} \underline{A} \cdot \underline{P}^{(k)}\end{aligned}\quad (5.70)$$

donde

$$\underline{J} = \underline{I} + \aleph \eta_H \underline{f}_H \underline{f}_H^T \cdot \underline{A} + \aleph \eta_C \underline{f}_C \underline{f}_C^T \cdot \underline{A} \quad (5.71)$$

o bien, despejando $\underline{P}^{(k+1)}$ de la segunda y reemplazando en la primera, como

$$\begin{aligned}\left(\underline{K}_d \cdot \underline{C}^T + \underline{J}^{-1} \left(\frac{1}{\aleph} \underline{A}\right) \underline{C}\right) \underline{V}^{(k+1)} + \underline{C}^T \cdot \underline{P}^{(k)} &= -\underline{F} - \underline{C}^T \cdot \underline{J}^{-1} \left(\frac{1}{\aleph} \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{H} \\ \underline{P}^{(k+1)} &= \underline{P}^{(k)} + \underline{J}^{-1} \left(\frac{1}{\aleph} \underline{A}\right)^{-1} \left(\underline{C} \cdot \underline{V}^{(k+1)} + \underline{H}\right)\end{aligned}\quad (5.72)$$

donde \underline{J}^{-1} es la inversa de \underline{J} (definida en (5.71) cuya expresión explícita es

$$\begin{aligned}\underline{J}^{-1} &= \left(\underline{I} + \aleph h_H \underline{f}_H \underline{f}_H^T \cdot \underline{A} + \aleph h_C \underline{f}_C \underline{f}_C^T \cdot \underline{A}\right)^{-1} = \\ &= \underline{I} - \frac{\aleph h_H \underline{f}_H \underline{f}_H^T \cdot \underline{A}}{1 + h_H} - \frac{\aleph h_C \underline{f}_C \underline{f}_C^T \cdot \underline{A}}{1 + h_C}\end{aligned}\quad (5.73)$$

(es decir, no es necesario invertirla numéricamente porque su expresión explícita es conocida y se puede calcular directamente).

El algoritmo del lagrangeano aumentado con “prefiltrado” o “rigidización” permite entonces obtener solución para las velocidades \underline{V} y la de las presiones \underline{P}^* libre de modos de presión independientemente de cuáles sean las condiciones de borde cinemáticas (g_1, g_2), es decir, de cuál sea el vector \underline{H} y sin que existan problemas de mal condicionamiento de la matriz del sistema, ya que la solución $\underline{P}^{(k)}$ converge a \underline{P}^* cualquiera sea el coeficiente \aleph por

lo que se puede utilizar un \aleph “chico”. La nueva matriz $\left(\underline{K}_d \cdot \underline{C}^T + \underline{J}^{-1} \left(\frac{1}{\aleph} \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{C}\right)$ tampoco

queda mal condicionada cuando h_H y h_C son muy grandes porque los factores $\frac{\kappa h_H}{1+h_H}$ y $\frac{\kappa h_C}{1+h_C}$ que aparecen en la expresión que define a J^{-1} (igualdad (5.73)) son de orden de magnitud 1 cuando h_H y h_C son “grandes”.

5.6. CONCLUSIONES ACERCA DEL COMPORTAMIENTO DE LAS TÉCNICAS NUMÉRICAS UTILIZADAS PARA IMPONER LA CONDICIÓN DE INCOMPRESIBILIDAD UTILIZANDO ELEMENTO MIXTO Q1- P0

En este capítulo se han presentado distintas alternativas para superar los problemas derivados de la condición de incompresibilidad que se presentan en el modelado numérico del flujo plástico de metales utilizando elementos finitos mixto del tipo Q1- P0 (cuadriláteros con interpolación bilineal de velocidades (orden 1) y constante para las presiones (orden 0)). Las técnicas utilizadas para la imposición de la incompresibilidad han sido:

- Multiplicadores de Lagrange
- Multiplicadores de Lagrange con rigidización de los modos de presión
- Penalización
- Lagrangeano aumentado
- Lagrangeano aumentado con rigidización de los modos de presión

Las principales conclusiones que se pueden deducir acerca del comportamiento de las técnicas numéricas implementadas son las siguientes:

1. Técnica de los multiplicadores de Lagrange

- Solución para las velocidades
 - Existe y es una única solo cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H = 0$ y $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C = 0$.
 - No es posible encontrarla si $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H \neq 0$ o $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C \neq 0$.
- Solución para las presiones :
 - Existe solo cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H = 0$ y $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C = 0$. Sin embargo, dicha solución no puede hallarse debido a que la matriz del sistema de ecuaciones resulta no inversible.
 - Cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H \neq 0$ o $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C \neq 0$ la solución para las presiones no existe.

2. Técnica de los multiplicadores de Lagrange con rigidización de los modos de presión (figura 5.15 y 5.16)

- Solución para las velocidades
 - Existe y puede ser hallada independientemente del valor \underline{H} . Sin embargo esta solución resulta poco satisfactoria en ciertos problemas debido a la pobreza de la interpolación utilizada (es decir, debido a las limitaciones inherentes al elemento Q1-P0).

- Este método no puede ser formulado en términos exclusivos de las velocidades. Para hallar la solución de las velocidades es necesario encontrar primero la solución para las presiones
- Solución para las presiones
- Cuando $\underline{H.Q_H} = 0$ y $\underline{H.Q_C} = 0$ se obtiene una solución libre de modos de presión.
- Cuando $\underline{H.Q_H} \neq 0$ y $\underline{H.Q_C} \neq 0$ se obtiene una solución con participaciones altas de los modos de presión.

3. Técnica de penalización (figuras 5.17 y 5.18):

- Solución para las velocidades
- Cuando $\aleph \rightarrow \infty$ tiende a la solución para las velocidades que provee el método de multiplicadores de Lagrange con rigidización de los modos de presión.
- Puede ser obtenida sin encontrar antes la solución para las presiones. Estas últimas se pueden hallar a partir de las velocidades con poco esfuerzo de cálculo.
- Cuando el coeficiente de penalización \aleph es muy grande, la matriz del sistema resulta muy mal condicionada. Esto hace que, en problemas de muchos grados de libertad, la exactitud de la solución numérica obtenida sea limitada.
- Solución para las presiones

- Cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H = 0$ y $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C = 0$, la solución para las presiones no incorpora a los modos de presión y tiene cuando $\aleph \rightarrow \infty$ a la solución que se obtiene con técnica de los multiplicadores de Lagrange depurada de los modos de presión \underline{Q}_H y \underline{Q}_C .
- Cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H \neq 0$ y $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C \neq 0$, se obtiene una solución con participaciones muy altas de los modos de presión cuando $\aleph \rightarrow \infty$ (los factores de peso de los modos de presión \underline{Q}_H y \underline{Q}_C en la solución resultan proporcionales a \aleph).

4. Técnica del Lagrangeano aumentado (figuras 5.19 y 5.20)

- Solución para las velocidades
 - Cuando el número de interacciones k tiende a infinito, la solución para las velocidades que provee esta técnica a coincidir con la correspondiente al método de penalización con $\aleph \rightarrow \infty$.
 - Debido a que se trata de un método iterativo, el esfuerzo de cálculo es mayor que el correspondiente a la técnica de penalización.
 - Sin embargo, una importante ventaja de esta técnica respecto al método de penalización y que justifica el mayor costo de cálculo, es que la matriz del sistema de ecuaciones no resulta mal condicionada y la solución para las velocidades que se obtiene resulta entonces de una exactitud mucho mayor.
- Solución para las presiones

- Se obtienen soluciones libres de modos de presión cuando el número de interacciones k tiende a infinito y cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H = 0$ y $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C = 0$.
- Cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H \neq 0$ y $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C \neq 0$ se obtiene, cuando el número de interacciones tiende a infinito, soluciones para las presiones totalmente contaminadas con modos de presión (los factores de peso de los modos de presión \underline{Q}_H y \underline{Q}_C en la solución resulta proporcional al número de interacciones k).

5. Técnica del Lagrangeano aumentado con rigidización de los modos de presión (figuras 5.22 y 5.23).

- Solución para las velocidades
 - El comportamiento de la solución para las velocidades cuando el número de interacciones k tiende a infinito es idéntico al correspondiente a la técnica del lagrangeano aumentado sin rigidización.
- Solución para las presiones
 - Cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H = 0$ y $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C = 0$ se obtiene la misma solución que en el caso del método del lagrangeano aumentado sin rigidización, es decir, una solución libre de modos de presión.
 - Cuando $\underline{H} \cdot \underline{Q}_H \neq 0$ y $\underline{H} \cdot \underline{Q}_C \neq 0$ se obtiene la misma una solución con un aporte mínimo de los modos de presión y sin introducir mal condicionamiento en las matrices resultantes.

Es importante destacar que la técnica del Lagrangeano aumentado suplementada con la rigidización de los modos de presión parece ser la técnica óptima (dentro de las limitaciones inherentes a la interpolación utilizada (elemento Q1-P0)): proporciona soluciones tanto para las velocidades como para las presiones independientemente del valor de \underline{H} y sin problemas de mal condicionamiento de la matriz del sistema. Sin embargo, cuando se utilizan mallas que tiene geometrías mas generales que las utilizadas en los ejemplos presentados en este capítulo (es decir, mallas con elementos distorsionados (ni cuadrados, ni rectangulares)) y para las que no es posible conocer a priori la expresión formal del modo de presión espúreo \underline{Q}_C , esta técnica requiere un cálculo de los autovectores de la matriz $\underline{C}^T \cdot \underline{K}_d^{-1} \cdot \underline{C}$ (por lo menos de los autovectores asociados a los autovalores nulos) que encarece exageradamente el costo de la solución numérica del problema.

6. ANALISIS DE LA LOCALIZACION DE LA DEFORMACIÓN PLÁSTICA

Como se dijo en la introducción, la deformación plástica de un metal dúctil inicialmente se produce de forma que las velocidades varían suavemente dentro del metal y el estado de deformación (o más precisamente, el estado de velocidades de deformación e_{ij}) es continuo. Sin embargo, cuando las tensiones alcanzan un determinado valor crítico, este patrón de deformación *continuo* cambia repentinamente a un modo de deformación *localizado* donde toda la deformación se concentra en una banda angosta fuera de la cual el material permanece prácticamente sin deformarse. Las velocidades de deformación e_{ij} (o lo que es lo mismo, el gradiente de velocidad) pasan a ser entonces discontinuas a través de la superficie que separa a la banda del material adyacente. Como dentro de la banda predominan deformaciones cortantes tangenciales a la interface que separa a la banda del resto del material, cuando se produce este cambio abrupto del patrón de deformación, se dice que la deformación plástica se ha localizado en una banda de corte (shear band). Este modo de deformación localizado cambia totalmente el comportamiento mecánico macroscópico del metal, y si persiste, puede ser precursor de fractura.

En este capítulo se estudia la localización de la deformación plástica en bandas de corte cuando las deformaciones son planas. Se analiza para este caso, bajo que

condiciones es posible obtener como solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo del

metal (ecuaciones que fueron introducidas en el cuarto capítulo), los dos modos de deformación que se prueban experimentalmente, es decir, el modo de deformación suave y el modo de deformación discontinuo y si es posible representar ambos modos de deformación con las herramientas numéricas estudiadas en el capítulo anterior.

6.1. FORMULACIÓN DE FLUJO PARA UN ESTADO PLANO DE DEFORMACIÓN

Para simplificar el estudio de la localización se considerará exclusivamente el caso de deformaciones planas. Como se dijo en el capítulo anterior, se define como deformación plana a aquella para la cual una de las componentes de la velocidad (por ejemplo v_3) es nula mientras que las otras dos componentes (v_1 y v_2) y la presión p no dependen de la dirección x_3 (que es la dirección sobre la cual el vector velocidad tiene proyección nula). Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = v_1(x_1, x_2) \\ v_2 = v_2(x_1, x_2) \\ v_3 = 0 \end{array} \right\} \\ p = p(x_1, x_2)$$

El modelo de material elegido para analizar la localización es el modelo rigidoviscoplastico de Perzyna asociado a la ley de fluencia de Von Mises (ecuación (4.7)) que está caracterizado por una ley constitutiva análoga a la correspondiente a un fluido viscoso no newtoniano (ecuación (4.7)). En el cuarto capítulo se formularon las ecuaciones que rigen la deformación de un metal caracterizado por esta relación constitutiva (ecuaciones (4.5), (4.6),(4.7),(4.8) y (4.9) para el caso de deformaciones

tridimensionales. Si se supone que las deformaciones son planas, entonces dichas ecuaciones adquirirán la siguiente forma:

- Condición de Incompresibilidad:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0 \quad (6.1)$$

- Relaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \\ \dot{\epsilon}_{13} &= \dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{33} = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

- Relación constitutiva:

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2m\dot{\epsilon}_{11} \\ S_{22} &= 2m\dot{\epsilon}_{22} \\ S_{12} &= 2m\dot{\epsilon}_{12} \\ S_{13} &= S_{23} = S_{33} = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde la velocidad $2m$ está dada por

$$2m = \frac{s_y(e)}{\sqrt{3}} \left(\frac{1 + \left(\frac{\sqrt{d_2}}{n^*} \right)^d}{\sqrt{d_2}} \right)$$

siendo $s_y(e)$ la curva tensión deformación del ensayo de tracción estático, n^* y d parámetros que definen al material y d_2 el segundo invariante principal del tensor velocidad de deformación e_{ij} que en este caso está dado por:

$$d_2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2)$$

- Ecuaciones del movimiento para un régimen estacionario:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial s_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

- Relación entre deformación equivalente e y la velocidad de deformación e_{ij}

(cuando del movimiento es estacionario):

$$\frac{\partial e}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial e}{\partial x_2} v_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d_2} \quad (6.5)$$

Las dos ecuaciones (6.4) con las tensiones dadas por las (6.3) y las velocidades de deformación dadas por las (6.2) junto con la condición de incompresibilidad (6.1) y la relación deformación equivalente-velocidad de deformación equivalente (6.5) constituyen un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales para las cuatro incógnitas v_1, v_2, p y e y son las ecuaciones que describen la deformación plástica de un metal (caracterizado por la ley constitutiva rígido/viscoplástica de Perzyna asociada a la ley de fluencia de Von Mises) cuando las deformaciones son planas. Al igual que en el caso tridimensional, si se supone que $s_y(e) = \text{cte}$, es decir, que el material no experimenta endurecimiento por deformación, entonces la viscosidad $2m$ resulta independiente de la deformación equivalente e y la cuarta ecuación (la ecuación (6.5) queda desacoplada de las tres anteriores que constituirán entonces un sistema de tres ecuaciones para las tres incógnitas v_1, v_2, p .

6.2 EXISTENCIA DE SOLUCIONES DISCONTINUAS

Como se dijo antes, la localización de la deformación plástica es un cambio repentino de un patrón de deformación suave (donde la velocidad de deformación es continua) a un patrón caracterizado por la presencia de una discontinuidad en la velocidad de deformación (y por lo tanto en el gradiente de velocidades) a través de ciertas curvas. Se estudia entonces si es posible obtener una solución discontinua de las ecuaciones formuladas en la sección anterior. Se entiende por solución discontinua del sistema de ecuaciones (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) y (6.5) a través de una curva Γ a aquella que cumple las siguientes dos condiciones (ver referencia [8]):

1. A ambos lados de la curva Γ se satisfacen todas las ecuaciones diferenciales.
2. Al menos una de las derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ es discontinua (es decir, pega un salto) a través de Γ .

Para ver si es posible la existencia de soluciones discontinuas de las ecuaciones diferenciales de la deformación plana, se hace lo siguiente: sustituyendo la relación constitutiva (6.3) en la ecuación del movimiento (6.4) para eliminar las tensiones s_{ij} de dichas ecuaciones se obtiene :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(2me_{11}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(2me_{12}) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(2me_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(2me_{22}) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

o bien,

$$\begin{aligned}
2m \frac{\partial e_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial(2m)}{\partial x_1} e_{11} + 2m \frac{\partial e_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial(2m)}{\partial x_2} e_{12} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\
2m \frac{\partial e_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial(2m)}{\partial x_1} e_{12} + 2m \frac{\partial e_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial(2m)}{\partial x_2} e_{22} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Si se supone que el material no experimenta endurecimiento por deformación, es decir, que $s_Y(e)=\text{Cte}$, entonces la viscosidad $2m$ estará dada por

$$2m = \frac{s_Y}{\sqrt{3}} \frac{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{d_2}}{n^*}\right)^d\right)}{\sqrt{d_2}}$$

y la derivada $\frac{\partial(2m)}{\partial x_k}$ será

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(2m)}{\partial x_k} &= \frac{\partial(2m)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial x_k} = \frac{s_Y}{\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{1}{d} - 1\right) \left(\frac{\sqrt{d_2}}{n^*}\right)^{\frac{1}{d}} - 1}{\sqrt{d_2}} \frac{1}{2d_2} \frac{\partial d_2}{\partial x_k} = \\
&= \left[\left(\frac{1}{d} - 1\right) \frac{s_Y}{\sqrt{3}} \frac{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{d_2}}{n^*}\right)^d\right)}{\sqrt{d_2}} - \frac{1}{d} \frac{s_Y}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{d_2}} \right] \frac{1}{2d_2} \frac{\partial d_2}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

o bien, llamado $2m_\infty$ al término $\frac{s_Y}{\sqrt{3}} \frac{1}{d_2}$ (que es la viscosidad que corresponde a

$n^* \rightarrow \infty$) y recordando que $d_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2)$, por lo que

$$\frac{\partial d_2}{\partial x_k} = \varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_k} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_k} + 2\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial(2u)}{\partial x_k} = 1 \left[\left(1 - \frac{1}{d} \right) 2m + \frac{1}{d} 2m_\infty \right] \frac{1}{2d_2} \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_k} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_k} + 2\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_k} \right)$$

para simplificar el análisis se considera el caso de un material para el cual $n^* \rightarrow \infty$, es decir, un material cuya tensión de fluencia no depende de la velocidad de deformación. En este caso, la viscosidad $2m$ esta dada por

$$2m = 2m_\infty = \frac{\partial \gamma}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{d_2}}$$

y la derivada $\frac{\partial(2m)}{\partial x_k}$ se reduce a:

$$\frac{\partial(2m)}{\partial x_k} = -2m_\infty \frac{1}{2d_2} \left(e_{11} \frac{\partial e_{11}}{\partial x_k} + e_{22} \frac{\partial e_{22}}{\partial x_k} + 2e_{12} \frac{\partial e_{12}}{\partial x_k} \right)$$

Sustituyendo la expresión anterior de la derivada $\frac{\partial(2m)}{\partial x_k}$ en las ecuaciones (6.6) y

agrupados términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} - \frac{\varepsilon_{11}}{2d_2} \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} + 2\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} \right) - \\ - \frac{\varepsilon_{12}}{2d_2} \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} + 2\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2m_\infty} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} - \frac{\varepsilon_{12}}{2d_2} \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} + 2\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} \right) - \\ - \frac{\varepsilon_{12}}{2d_2} \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} + 2\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2m_\infty} \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \end{aligned}$$

y utilizando las relaciones cinemáticas (6.2) para expresar a estas ecuaciones en términos de las derivadas de las componentes de la velocidad se llega a

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_{11}^2}{d_2}\right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} - \frac{2\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}}{d_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_{11}^2}{d_2}\right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - \\
& - \frac{\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}}{d_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} - \frac{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{12}^2}{d_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{22}}{d_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{2}{2m_\infty} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\
& - \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{11}}{d_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} - \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}{d_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\varepsilon_{22}\varepsilon_{12}}{d_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \\
& + \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_{11}^2}{d_2}\right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} - \frac{2\varepsilon_{22}\varepsilon_{12}}{d_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_{22}^2}{d_2}\right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{2}{2m_\infty} \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Estas ecuaciones (junto con la ecuación de incompresibilidad (6.1)) son las ecuaciones que describen la deformación de un metal caracterizado por la ley constitutiva rígido/viscoplástica de Perzyna con $S_y(e) = \text{cte.}$ (es decir, material sin endurecimiento por deformación) y $n^* \rightarrow \infty$ (es decir, material para el cual la fluencia no depende de las variaciones de la velocidad de deformación), expresadas en términos de las componentes de la velocidad (v_1, v_2) y de la presión p (ver referencia [8]).

Si se supone ahora que en todos los puntos de cierta curva Γ son conocidas ambas componentes de la velocidad, la presión y la derivadas de ambas componentes de la velocidad en la dirección normal a la curva Γ , es decir (llamando x_1 y x_2 a las direcciones tangencial y normal a la curva y (v_1, v_2) a las componentes de la velocidad en dichas direcciones (ver figura (6.1)), si se supone que en todos los puntos de la

curva Γ son conocidas $v_1, v_2, p, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ y $\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$, entonces también serán conocidas las

derivadas de todas estas magnitudes respecto a la dirección tangente a la curva Γ (la dirección x_1), es decir, también serán conocidas

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3}, \dots$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_1^3}, \dots$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3}, \dots$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3 \partial x_2}, \dots$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_1^3 \partial x_2}, \dots$$

Se pretende ahora establecer que condiciones se deben cumplir para que, conociendo

$v_1, v_2, p, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ y $\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ (y todas sus derivadas respecto a x_1) sobre la curva Γ y sabiendo que

v_1, v_2 y p deben cumplir las ecuaciones diferenciales (6.1) y (6.7)⁴⁹, se puedan determinar v_1, v_2 y p afuera de la curva Γ , (es decir, que condiciones se deben cumplir para que se pueda “propagar” la información conocida sobre la curva Γ afuera de la misma).

Para que las velocidades v_1 y v_2 y presión p afuera de la curva Γ puedan ser

determinadas hace falta conocer además de $v_1, v_2, p, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ y todas sus derivadas

respecto a x_1 , los valores de las derivadas de v_1, v_2, p en la dirección normal a la curva

Γ (la dirección x_2) es decir

¹ Las ecuaciones (6.1) y (6.7) son válidas para cualquier sistema de coordenadas cartesiano ortogonal y en particular para el sistema cartesiano ortogonal dado por las direcciones tangente y normal a la curva.

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2^3}, \dots$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3}, \dots$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^3 p}{\partial x_2^3}, \dots$$

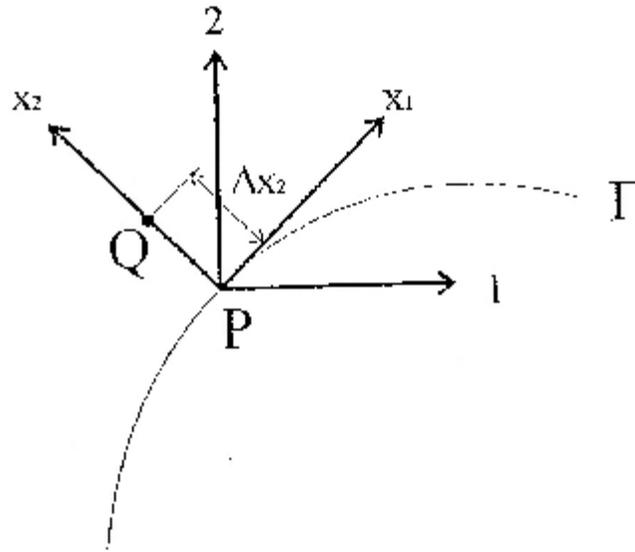


Figura 6.1: Curva Característica

Dado que si P es un punto de la curva Γ , (ver figura (6.1)), y Q es otro punto que se encuentra a una distancia Δx_2 (en la dirección normal a la curva Γ , es decir, la dirección x_2) del punto P , entonces (utilizando los desarrollos de Taylor)

$$v_1(Q) = v_1(P) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(P)\Delta x_2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}(P)(\Delta x_2)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2^3}(P)(\Delta x_2)^3 + \dots$$

$$v_2(Q) = v_2(P) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(P)\Delta x_2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}(P)(\Delta x_2)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3}(P)(\Delta x_2)^3 + \dots$$

$$p(Q) = p(P) + \frac{\partial p}{\partial x_2}(P)\Delta x_2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(P)(\Delta x_2)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial x_2^3}(P)(\Delta x_2)^3 + \dots \quad (6.8)$$

Luego, para conocer los valores de $v_1(Q)$, $v_2(Q)$ y $p(Q)$ hace falta conocer solamente el valor de las derivadas de respecto a la dirección normal x_2 (de todos los órdenes). Para

conocer las derivadas segundas de la velocidad $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}$ y la deriva primera de la

presión $\frac{\partial p}{\partial x_2}$ en la dirección x_2 se observa que como $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2}$ y $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ son

conocidas sobre Γ , entonces las ecuaciones (6.7) se pueden reescribir (poniendo los términos desconocidos en el miembro izquierdo y los conocidos en el miembro derecho) como⁵⁰

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_{12}^2}{d_2}\right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - \frac{\varepsilon_{12} \varepsilon_{22}}{d_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} = \text{terminos conocidos}$$

$$- \frac{\varepsilon_{22} \varepsilon_{12}}{d_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \left(1 - \frac{\varepsilon_{22}^2}{d_2}\right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{2}{2m_\infty} \frac{\partial p}{\partial x_2} = \text{términos conocidos} \quad (6.9)$$

Derivando la condición de incompresibilidad (6.1) respecto a x_2 se obtiene la relación

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} = - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6.10)$$

donde nuevamente se escribe en el miembro izquierdo el término desconocido y en el derecho el conocido. Estas tres ecuaciones alcanzarán para determinar los valores de

$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}$ y $\frac{\partial p}{\partial x_2}$ conociendo los valores del resto de las derivadas de orden 2, siempre

que el determinante de los coeficientes que acompañan a dichos términos sea distinto de cero. Es decir,

² Recordar que los términos que se su pusieron conocidos son todos aquellos donde aparecen v_1, v_2, p , $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ o cualquiera de sus derivadas respecto a x_1 .

$$\begin{vmatrix} \left(1 - \frac{\varepsilon_{12}^2}{d_2}\right) & -\frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{22}}{d_2} & 0 \\ -\frac{\varepsilon_{22}\varepsilon_{12}}{d_2} & \left(1 - \frac{\varepsilon_{22}^2}{d_2}\right) & \frac{2}{2m_{\infty 2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

o bien, $\frac{2}{2m_{\infty 2}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{12}^2}{d_2}\right) \neq 0$

Entonces, la condición para que, conocidos los valores de v_1, v_2, p , $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}$ sobre la

curva Γ (y por lo tanto los valores de $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2}$ y $\frac{\partial p}{\partial x_1}$, se puedan

determinar los valores de $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}$ y $\frac{\partial p}{\partial x_2}$, es que la componente tangencial a la curva

Γ de la velocidad de deformación ε_{12} verifique en cada punto de la curva

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_{12}^2}{d_2}\right) \neq 0 \quad (6.11)$$

Para determinar las derivadas de la velocidad respecto a la dirección normal x_2 de orden mayor a 2 y las de la presión de orden mayor a 1, se puede derivar respecto a x_2

las ecuaciones (6.9) y (6.10) y aplicar el mismo razonamiento que se utilizó para

obtener las derivadas $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}$ y $\frac{\partial p}{\partial x_2}$. Se puede demostrar (ver referencia [8] y [27]

que los datos conocidos sobre la curva Γ alcanzan para determinar dichas derivadas

(las de mayor orden) solo si se cumple una condición idéntica a la (6.11).

Resumiendo entonces, si sobre la cierta curva Γ se conoce $v_1, v_2, p, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}$, (lo que implica que también serán conocidas las derivadas respecto a la dirección tangente x_1 de todas estas magnitudes), entonces se podrá conocer también, (sabiendo que la velocidad y la presión deben cumplir las ecuaciones diferenciales (6.9) y (6.10) los valores de las derivadas respecto a la dirección normal x_2 de v_1, v_2 y p siempre que sobre la curva Γ se verifique la condición (6.11). Una vez que se conocen dichas derivadas en la dirección normal a Γ , se podrá generar una única solución de las ecuaciones para cualquier punto ubicado en una región adyacente a la curva Γ (a través de las expansiones de Taylor (6.8)). Recíprocamente, si sobre cierta curva Γ la condición (6.11) no se cumple, es decir, si en todo punto de la curva se verifica que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_{12}^2}{d_2}\right) = 0 \quad (6.12)$$

entonces los valores prefijados de $v_1, v_2, p, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ sobre dicha curva no serán suficientes para determinar la solución de las ecuaciones en una región adyacente a la curva. Las curvas a lo largo de las cuales se verifica la condición (6.12) se denominan *curvas características*. La información conocida sobre estas curvas no influyen en los puntos adyacentes a las mismas.

Teniendo en cuenta este análisis, se deduce la siguiente conclusión respecto a si es posible o no la existencia de una solución discontinua en algunas de las derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

de las ecuaciones planteadas en la sección anterior: *Una solución discontinua puede existir solo si la curva Γ a lo largo de la cual alguna de las derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ es discontinua,*

es una curva derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ (o al menos una de ellas) tiene un valor dado de un “lado”

de la curva, y otro valor del otro “lado” y como las curvas características tienen la propiedad que la información dada sobre ellas no influyen en los puntos adyacentes a la misma, entonces una solución de este tipo solo es posible si la curva el gradiente de velocidad es discontinuo es una curva característica. Si la curva no fuera una curva característica, entonces existe una única solución en la región adyacente a la curva, y ninguna de las derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ puede pegar un salto a través de misma (ver referencia

[8]).

Para un material rígido/viscoplástico que no tiene endurecimiento por deformación (es decir $S_y(e) = \text{cte.}$) y para el cual la fluencia no depende de las variaciones de la velocidad de deformación, (es decir $n^* \rightarrow \infty$), la condición para que cierta curva Γ sea una curva características (y por lo tanto la curva a través de la cual puede existir una solución discontinua) está dada por la igualdad (6.12), es decir

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_{12}^2}{d_2}\right) = 0$$

donde $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)$ y x_1 y x_2 son las direcciones tangente y normal a la curva

Γ (ver figura (6.1)). Llamando 1 y 2 a las direcciones principales, ε_1 y ε_2 a las componentes principales del tensor velocidad de deformación, y (n_1, n_2) a las componentes del vector normal n a la curva características Γ en las direcciones principales, entonces la componente ε_{12} estará dada por:

$$\varepsilon_{12} \begin{pmatrix} -n_2 & n_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) n_1 n_2$$

y el invariante d_2 será

$$d_2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$$

La condición para que la curva Γ sea una curva característica es entonces

$$1 - \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)^2 n_1^2 n_2^2}{d_2} = 0$$

que, observando que por la condición de incompresibilidad, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ por lo que se verifica la siguiente identidad.

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 = \varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 = 2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 = 4d_2$$

se reduce a:

$$1 - 4n_1^2 n_2^2 = 0$$

Teniendo en cuenta que además $n_1^2 + n_2^2 = 1$ se deduce entonces que la condición anterior se satisface para aquella curva Γ cuya normal tiene las direcciones

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ y } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

referidas a las direcciones principales 1 y 2.

Por lo tanto, para un material caracterizado por la ley constitutiva viscoplástica (6.3) con $S_Y(e) = cte$. (es decir, sin endurecimiento por deformación) y para el cual la fluencia no depende de las variaciones de la velocidad de deformación, (es decir $n^* \rightarrow \infty$), existen dos familias de curvas características. Dichas curvas forman en cada punto un ángulo de $\pm 45^\circ$ con las direcciones principales de las velocidades de deformación ε_{ij} (y con las de la tensión S_{ij}). Para este tipo de curvas orientadas a $\pm 45^\circ$ de las direcciones principales de ε_{ij} y S_{ij} .

Para un material para el cual $S_Y(e) = cte$ pero n^* es finito, es decir, un material cuya fluencia si depende de la velocidad de deformación y cuya viscosidad está dada entonces por

$$2m = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} \left(\frac{1 + \left(\frac{\sqrt{d_2}}{n^*} \right)^{\frac{1}{d}}}{\sqrt{d_2}} \right)$$

se puede demostrar, (haciendo un razonamiento idéntico al hecho hasta ahora para

los materiales para los cuales $n^* \rightarrow \infty$ y $2m_\infty = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{d_2}}$) que la condición para que

cierta curva Γ cuya normal respecto a las direcciones principales es (n_1, n_2) , sea una curva característica es

$$1 - \frac{4n_1^2 n_2^2}{\left[\left(1 - \frac{1}{d} \right) + \frac{1}{d} \frac{2m_\infty}{2m} \right]} = 0$$

o bien, (recordando que $n_1^2 + n_2^2 = 1$)

$$n_1^2 = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{d} \sqrt{1 - \frac{2m_\infty}{2m}}}}{2}$$
$$n_2^2 = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{d} \sqrt{1 - \frac{2m_\infty}{2m}}}}{2}$$

6.3 Ejemplo: Localización de la deformación plástica en una probeta compacta sometida a una tracción pura.

Para completar el análisis hecho en la sección anterior, se considera como ejemplo el caso de la deformación de una probeta plana compacta sometida a una tracción pura como la que se muestra en la figura (6.2). Se supone que la deformación es plana, es decir, que $v_3=0$, y que la maquina de ensayo impone una velocidad v_0 pequeña sobre el borde superior e inferior de la probeta, es decir, se supone que el ensayo se realiza controlando la velocidad de las mordazas de la maquina de ensayo. Experimentalmente se observa que inicialmente el patrón de deformación es homogéneo, pero que, alcanzando cierto nivel de carga, la deformación plástica se localiza en una banda de corte que se orienta a 45° respecto a la dirección en la que se tracciona a la probeta (ver figura (6.2)) (ver referencia [19]). Como se explicó en la sección anterior si se supone que el material esta caracterizado por la ley constitutiva rígido/viscoplastica (6.3) con $S_Y(e)=cte.$ y $n^* \rightarrow \infty$, entonces es posible obtener como

solución del sistema de ecuaciones que describe el flujo plástico del metal (las ecuaciones (6.1), (6.2), (6.3) y (6.4) los dos modos de deformación que se prueban experimentalmente, es decir, el modo de deformación homogénea y el modo de deformación localizado. Como las direcciones principales son respectivamente la dirección en la que se tracciona a la probeta y la dirección perpendicular a ésta última, entonces, teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior, se prevee una solución localizada a lo largo de una banda orientada a 45° respecto a la dirección en la que se tracciona a la probeta. Se demostrará a continuación que dicha solución (al igual que la solución homogénea) puede ser determinada analíticamente y reproducida con las herramientas numéricas estudiadas en el capítulo anterior.

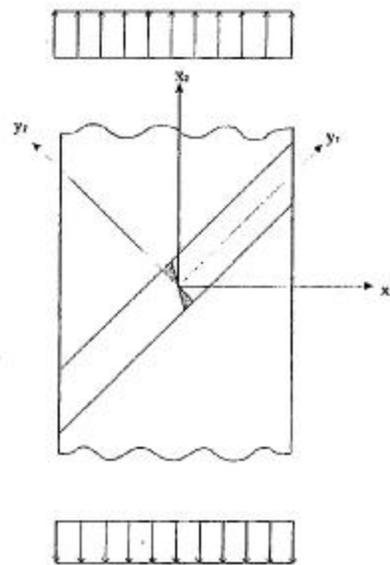


Figura 6.3: Ensayo de tracción de una probeta en estado plano de velocidad de deformación.

6.3.1. Solución analítica

a) Patrón de deformación homogéneo (Velocidad de deformación continua).

En una tracción pura como la que se produce en el ensayo de tracción, la deformación homogénea esta dada por un alargamiento en la dirección en la que se tracciona a la probeta (la dirección principal x_2) y un acortamiento uniforme (para que se conserve el volumen) en la dirección perpendicular, (la dirección principal x_1). Se propone entonces como solución para las velocidades a:

$$v_1 = -a x_1$$

$$v_2 = -a x_2$$

donde a es una constante y (v_1, v_2) son las componentes del vector velocidad en las direcciones principales x_1 y x_2 . Las velocidades de deformación serán entonces

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -a = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -a = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

(es decir el campo de velocidades de deformación es uniforme), y las tensiones desviadoras que se establecerán como consecuencia de esta velocidades de deformación serán, teniendo en cuenta la relación (6.3) con $S_Y(e) = \text{cte}$ y $n^* \rightarrow \infty$:

$$S_{11} = \frac{S_Y}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2)}} \varepsilon_{11} \frac{S_Y}{\sqrt{3} \sqrt{a^2}} (-a) = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} = S_1$$

$$S_{22} = \frac{S_Y}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2)}} \varepsilon_{22} \frac{S_Y}{\sqrt{3} \sqrt{a^2}} (-a) = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} = S_2$$

$$S_{12} = \frac{S_Y}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2)}} \varepsilon_{12} = 0$$

Para ver que el campo de velocidades propuesto es efectivamente una de las soluciones de las ecuaciones se observa en primer lugar que, independientemente del valor de la constante a , el campo de velocidades propuesto satisface la condición de incompresibilidad:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = -a + a = 0$$

En segundo lugar se observa que las tensiones que se derivan del campo de velocidades propuesto verificarán la ecuación del movimiento si:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 + 0 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial s_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 + 0 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \end{aligned}$$

es decir, si $\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$. Esto implica que la presión p debe ser también uniforme

dentro de la probeta para que el campo de velocidades propuesto verifique la ecuación del movimiento. Falta entonces determinar el valor de esta presión constante p . Este valor se determina teniendo en cuenta que, como la probeta esta sometida a una tracción en la dirección x_2 , la tensión en la dirección x_2 , la tensión en la dirección x_1 debe ser nula, es decir

$$S_{11} = s_{11} + p = -\frac{S_y}{\sqrt{3}} + p = 0$$

La presión uniforme p será entonces

$$p = \frac{S_y}{\sqrt{3}}$$

y las tensiones que establecen en la probeta serán entonces:

$$\begin{cases} s_{11} = s - \frac{s_Y}{\sqrt{3}} + p = 0 \\ s_{22} = \frac{s_Y}{\sqrt{3}} + p = \frac{2}{\sqrt{3}} s_Y \\ s_{12} = s_{21} = 0 \end{cases}$$

o bien, siendo x_1 y x_2 las direcciones principales

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} s_Y \end{cases}$$

b) Patrón de deformación localizado en una banda a 45° (Velocidad de deformación discontinua)

El patrón de deformación localizado consiste en una deformación plástica puramente tangencial localizada en una banda plana inclinada un ángulo de 45° respecto al eje x_2 (ver figura (6.2)) y una deformación nula fuera de dicha banda (es decir, el material es plástico adentro de la banda y rígido fuera de ella) (ver referencia [12]). Para formular a esta segunda solución se utilizará un nuevo par de ejes coordenados y_1 e y_2 de direcciones paralela y perpendicular a la banda donde se concentra la deformación plástica (es decir inclinados un ángulo 45° respecto a los ejes x_1 y x_2) y se adoptarán los supraíndices *in* y *out* para referirse a las velocidades, tensiones y deformaciones de adentro y afuera de la banda. Se propone entonces como segunda solución a

$$\begin{cases} v_1^{in} = ay_2 \\ v_2^{in} = 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

$$\begin{cases} v_1^{out} = \begin{cases} a \frac{h}{2} & \text{si } y_2 \geq \frac{h}{2} \\ -a \frac{h}{2} & \text{si } y_2 \leq -\frac{h}{2} \end{cases} \\ v_2^{out} = 0 \end{cases}$$

donde a es una constante, h es el espesor de la banda y (v_1, v_2) son las componentes de la velocidad respecto a los ejes inclinados y_1 e y_2 (ver figura (6.3)).⁵¹

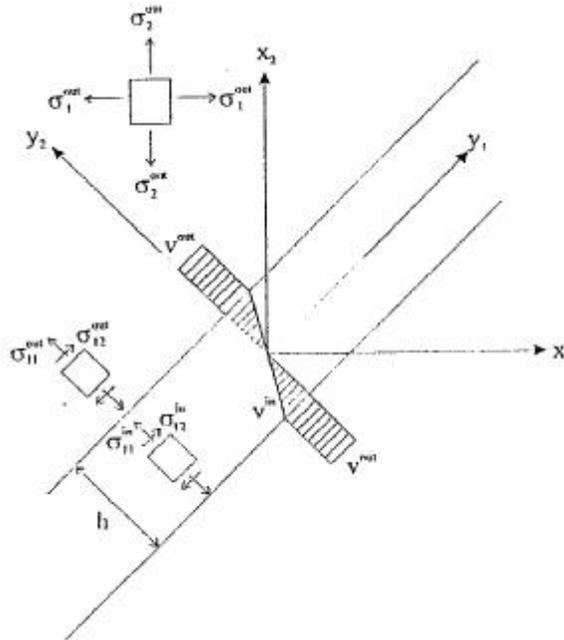


Figura 6.3: Detalle del modo de deformación localizado

Las velocidades de deformación serán

³ Si bien el patrón de deformación discontinuo propuesto es efectivamente una solución de las ecuaciones que describen el flujo plástico del metal (las ecuaciones (6.1), (6.2), (6.3) y (6.4), tanto el espesor h como el parámetro a quedan indeterminados. Sin embargo, experimentalmente se observa que las bandas de corte tienen espesores finitos que dependen de la estructura microscópica del material (no tenida en cuenta en el modelo). Esta es una de las principales dificultades que presentan la mayoría de los modelos microscópicos de estudio del fenómeno de localización y los métodos numéricos de simulación de este fenómeno basados en dichos modelos macroscópicos. Estos métodos predicen espesores de banda que dependen fuertemente del tamaño de los elementos utilizados (ya que las interpolaciones usadas son continuas dentro de cada elemento, y por lo tanto es imposible describir con este tipo de interpolación discontinuidades dentro de los mismos), que es la única escala de longitud que está puesta en juego en el modelo.

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^{in} = \frac{\partial v_1^{in}}{\partial y_1} = 0 \\ \varepsilon_{22}^{in} = \frac{\partial v_2^{in}}{\partial y_2} = 0 \\ \varepsilon_{12}^{in} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^{in}}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2^{in}}{\partial y_1} \right) = \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^{out} = \frac{\partial v_1^{out}}{\partial y_1} = 0 \\ \varepsilon_{22}^{out} = \frac{\partial v_2^{out}}{\partial y_2} = 0 \\ \varepsilon_{12}^{out} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^{out}}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2^{out}}{\partial y_1} \right) = 0 \end{cases}$$

y las tensiones desviadoras que se establecerán dentro de la banda serán (utilizando la relación (6.3) $s_Y(e) = \text{cte}$ y $n^* \rightarrow \infty$, válida únicamente dentro de la banda):

$$\begin{cases} s_{11}^{in} = \frac{s_Y}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} ((\varepsilon_{11}^{in})^2 + (\varepsilon_{11}^{in})^2 + 2(\varepsilon_{12}^{in})^2)}} \varepsilon_{11}^{in} = 0 \\ s_{12}^{in} = \frac{s_Y}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} ((\varepsilon_{11}^{in})^2 + (\varepsilon_{11}^{in})^2 + 2(\varepsilon_{12}^{in})^2)}} \varepsilon_{11}^{in} = 0 \\ s_{11}^{in} = \frac{s_Y}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} ((\varepsilon_{11}^{in})^2 + (\varepsilon_{11}^{in})^2 + 2(\varepsilon_{12}^{in})^2)}} \varepsilon_{11}^{in} = \frac{s_Y}{\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2}} \frac{a}{2} = \frac{s_Y}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (6.14)$$

Entonces, si se propone como solución el campo de velocidades (6.13) se obtendrán dentro de la banda deformaciones exclusivamente de corte $\varepsilon_{12}^{in} = \frac{a}{2}$ uniformes, y fuera de ella, deformaciones nulas, por lo que la velocidad de deformación resulta discontinua a través de la curva que separa a la banda del material adyacente.

Para ver que la solución propuesta es efectivamente una solución de las ecuaciones de flujo plano, se observa en primer lugar que la condición de incompresibilidad se cumple para todo valor de constante a :

$$\frac{\partial v_1^{in}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^{in}}{\partial x_2} = \varepsilon_{11}^{in} + \varepsilon_{22}^{in} = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial v_1^{out}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2^{out}}{\partial x_2} = \varepsilon_{11}^{out} + \varepsilon_{22}^{out} = 0 + 0 = 0$$

En segundo lugar se observa que sustituyendo las tensiones (6.14) en la ecuación del movimiento (6.4) y teniendo en cuenta que dichas tensiones son uniformes, se obtiene

$$\frac{\partial s_{11}^{in}}{\partial y_1} + \frac{\partial s_{12}^{in}}{\partial y_2} + \frac{\partial p^{in}}{\partial y_1} = 0 + 0 + \frac{\partial p^{in}}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial s_{12}^{in}}{\partial y_1} + \frac{\partial s_{22}^{in}}{\partial y_2} + \frac{\partial p^{in}}{\partial y_2} = 0 + 0 + \frac{\partial p^{in}}{\partial y_2} = 0$$

Estas ecuaciones se verificarán si $\frac{\partial p^{in}}{\partial y_1} = \frac{\partial p^{in}}{\partial y_2} = 0$ es decir, si la presión p es también

uniforme dentro de la banda de corte. Para determinar la solución solo falta determinar los valores de esta presión p^{in} y de las tensiones afuera de la banda s_{ij}^{out} .

Para encontrar estos valores, se observa que las componentes normal y tangencial a la interface que separa a la banda del material adyacente de las tensiones s deben ser continuas a través de dicha interface. Es decir,

$$\begin{cases} s_{12}^{in} = s_{12}^{out} \\ s_{22}^{in} = s_{22}^{out} \end{cases}$$

Del lado de la banda, dichas componentes valen (ver expresiones (6.14)):

$$\begin{cases} S_{12}^{in} = s_{12}^{in} = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} \\ S_{22}^{in} = s_{22}^{in} + p^{in} = p^{in} \end{cases}$$

Fuera de la banda las componentes del tensor de tensiones expresadas en el sistema de ejes y_1 e y_2 valen (recordando que dichos ejes forman un ángulo de $45^\circ = \frac{p}{4}$ con las

direcciones principales (ver figura (6.3))):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{11}^{out} & S_{12}^{out} \\ S_{12}^{out} & S_{22}^{out} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{p}{4}\right) & -\sin\left(\frac{p}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{p}{4}\right) & \cos\left(\frac{p}{4}\right) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_1^{out} & 0 \\ 0 & S_2^{out} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{p}{4}\right) & -\sin\left(\frac{p}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{p}{4}\right) & \cos\left(\frac{p}{4}\right) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1^{out} & 0 \\ 0 & S_2^{out} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \\ &\frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_1^{out} + S_2^{out} & S_2^{out} - S_1^{out} \\ S_2^{out} + S_1^{out} & S_1^{out} - S_2^{out} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.15}$$

donde S_1^{out} y S_2^{out} son las tensiones principales (es decir, las componentes del tensor de tensiones en la base (x_1, x_2)) afuera de la banda. Las componentes normal y tangencial a la interface son entonces

$$\begin{cases} S_{21}^{out} = \frac{1}{2}(S_2^{out} - S_1^{out}) \\ S_{22}^{out} = \frac{1}{2}(S_1^{out} - S_2^{out}) \end{cases}$$

o bien, recordando que (al igual que en el caso del patrón de deformación homogéneo) S_1^{out} debe ser nulo porque de la banda la probeta está sometida a una tracción pura en la dirección x_2

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{12}^{out} = \frac{1}{2} \mathbf{S}_2^{out} \\ \mathbf{S}_{22}^{out} = \frac{1}{2} \mathbf{S}_2^{out} \end{cases}$$

Igualando entonces los valores que tienen estas componentes afuera y adentro de la banda, se obtiene

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{S}_2^{out} = \frac{\mathbf{S}_Y}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \mathbf{S}_2^{out} = p^{in} \end{cases}$$

es decir, la presión dentro de la banda debe valer:

$$p^{in} = \frac{\mathbf{S}_Y}{\sqrt{3}}$$

y la tensión principal en la dirección de la tracción x_2 debe ser:

$$\mathbf{S}_2^{out} = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{S}_Y$$

Las tensiones dentro de la banda de corte son entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{11}^{int} = s_{11}^{int} + p^{in} = 0 + \frac{\mathbf{S}_Y}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{S}_Y}{\sqrt{3}} \\ \mathbf{S}_{22}^{int} = s_{22}^{int} + p^{in} = 0 + \frac{\mathbf{S}_Y}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{S}_Y}{\sqrt{3}} \\ \mathbf{S}_{12}^{int} = s_{12}^{int} = \frac{\mathbf{S}_Y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

y fuera de la banda de corte:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1^{out} = 0 \\ \mathbf{S}_2^{out} = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{S}_Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{11}^{out} = \frac{1}{2}(s_1^{out} - s_2^{out}) = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} \\ s_{22}^{out} = \frac{1}{2}(s_1^{out} - s_2^{out}) = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} \\ s_{12}^{out} = \frac{1}{2}(s_2^{out} - s_1^{out}) = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

c) Comparación entre las dos soluciones

Se observa entonces las ecuaciones que describen el flujo plástico de una probeta compacta sometida a una tracción pura admiten dos soluciones: una solución continua (patrón de deformación homogéneo) y una solución discontinua (patrón de deformación localizado). En el primer caso la deformación es uniforme en toda la probeta (alargamiento en la dirección x_2 y acortamiento en la dirección x_1), y en el segundo caso la deformación es cortante dentro de una banda orientada 45° de la dirección en que se tracciona a la probeta, mientras que el resto de la probeta se mueve rígidamente (sin deformarse). En ambos casos se prevee que la máquina de ensayo deberá imponer una tensión igual a $\frac{2}{\sqrt{3}}S_Y$ para hacer fluir al material.

6.3.2. Solución Numérica

Como se vio hasta ahora, tanto experimental como analíticamente se prevee que existirán dos patrones de deformación, uno homogéneo y otro localizado en una banda

a 45°. Es deseable entonces que, si se resuelve numéricamente este problema, ambos modos de deformación puedan ser también previstos.

Descripción del modelo numérico utilizado

Para resolver numéricamente este problema se utilizaron las herramientas numéricas discutidas en el capítulo anterior, es decir, el método de elementos finitos para el modelado de flujos incompresibles planos. La condición de incompresibilidad fue impuesta mediante el método de penalización.⁵² Como se vió en el capítulo anterior, al discretizar las ecuaciones diferenciales del flujo de un medio viscoso incompresible bidimensional con este método se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left(\underline{K}_d + \underline{C}^T \left(\frac{\underline{A}}{\underline{\kappa}} \right)^{-1} \cdot \underline{C} \right) \underline{V} - \left(\underline{F}_v + \left(\frac{\underline{A}}{\underline{\kappa}} \right)^{-1} \cdot \underline{H} \right) \quad (6.16)$$

donde:

$$\underline{K}_d = \int_{\Omega} \underline{B}_v^t \cdot 2mD \cdot Id \cdot \underline{B}_v d\Omega \quad (6.17)$$

$$\underline{C} = \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{M}^T \cdot \underline{B}_v d\Omega \quad (6.18)$$

$$\underline{A} = \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{\tilde{N}}^T d\Omega \quad (6.19)$$

$$\underline{F}_v = \int_{\Omega} \underline{B}_v^t \cdot 2mD \cdot Id \cdot \underline{B}_g G d\Omega \quad (6.20)$$

$$\underline{H} = \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}} \cdot \underline{M}^T \cdot \underline{B}_g G d\Omega \quad (6.21)$$

y donde

⁴ Si bien el método de penalización presenta el inconveniente de que la matriz del sistema queda mal condicionada cuando el coeficiente de penalización k es grande, en este caso dicho inconveniente no se manifiesta dado que se utilizaron muy pocos elementos (y por lo tanto muy pocas incógnitas).

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Id} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y \underline{B}_v , \underline{B}_g , y $\underline{\tilde{N}}$, están respectivamente por las igualdades (5.27) y (5.30). En este caso, a diferencia del problema estudiado en el capítulo anterior, la viscosidad no es constante en el dominio W , sino que depende de la velocidad de deformación d_2 que a su vez es función de las velocidades V :

$$2m = 2m_\infty = \frac{S_Y}{\sqrt{3}\sqrt{d_2}}$$

donde

$$d_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{12}) \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 00\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{12}) \underline{D} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$y \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \underline{B}_v \cdot \underline{V} + \underline{B}_g \cdot \underline{G}$$

es decir,

$$2m = \frac{S_Y}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\underline{B}_v \cdot \underline{V} + \underline{B}_g \cdot \underline{G})^T \cdot \underline{D} \cdot (\underline{B}_v \cdot \underline{V} + \underline{B}_g \cdot \underline{G})}} \quad (6.22)$$

En la figura (6.4) se grafica a la viscosidad $2m$ en función de la velocidad de deformación equivalente d_2 . Como $2m \rightarrow \infty$ cuando $d_2 \rightarrow 0$, fue necesario aproximar a las viscosidades correspondientes a velocidades de deformación d_2 chicas (menores de un cierto valor d_2^{cutoff}) con un valor constante y grande este problema se utilizó $d_2^{cutoff} = 0.001$). Como las viscosidades dependen de las velocidades \underline{V} (la forma explícita de esta dependencia la da una ecuación (6.22)), la rigidez desviadora \underline{K}_d (que función de las viscosidades) termina siendo función de las velocidades \underline{V} , es decir,

$$\underline{K}_d = \underline{K}_d(\underline{V})$$

El sistema de ecuaciones algebraicas que se obtiene al discretizar las ecuaciones diferenciales del flujo del metal con el método de penalización (el sistema de ecuaciones (6.16)) se convierte en:

$$\left(\underline{K}_d(\underline{V}) + \underline{C}^T \left(\frac{\underline{A}}{\underline{\mathfrak{N}}} \right)^{-1} \cdot \underline{C} \right) \underline{V} = - \left(\underline{F}_v + \left(\frac{\underline{A}}{\underline{\mathfrak{N}}} \right)^{-1} \cdot \underline{H} \right) \quad (6.23)$$

es decir, resulta un sistema de ecuaciones no lineales donde la matriz del sistema es función de las incógnitas \underline{V} . Para resolver este sistema de ecuaciones no lineales se utilizó un algoritmo iterativo cuyos pasos son los siguientes:

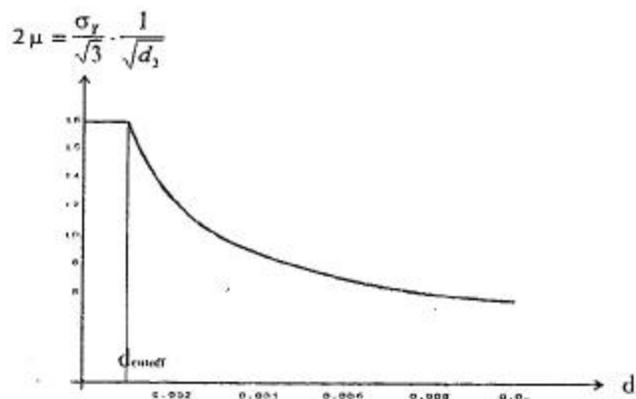


Figura 6.4: Viscosidad para un metal rígido/perfectamente plástico

1. Conocida las velocidades $\underline{V}^{(n)}$ correspondiente a la iteración n , se calculan las viscosidades que se derivan de dichas velocidades (utilizando para ello la ecuación (6.22)).
2. Con estas velocidades se computa la matriz de rigidez desviadora $\underline{K}_d(\underline{V}^{(n)})$ (evaluando la integral (6.17)).
3. Con la matriz de rigidez desviadora $\underline{K}_d(\underline{V}^{(n)})$ (que se calculó con las viscosidades de la iteración n) y las matrices \underline{C} , \underline{A} , \underline{F}_v y \underline{H} se resuelve el sistema de ecuaciones (6.23 para obtener las velocidades $\underline{V}^{(n+1)}$ correspondiente a la iteración $n+1$:

$$\underline{V}^{(n+1)} = - \left(\underline{K}_d(\underline{V}) + \underline{C}^T \left(\frac{\underline{A}}{\underline{\mathbf{x}}} \right)^{-1} \cdot \underline{C} \right) \left(\underline{F}_v + \left(\frac{\underline{A}}{\underline{\mathbf{x}}} \right)^{-1} \cdot \underline{H} \right)$$

4. Se repiten los pasos 1 a 3 hasta que se alcance la convergencia.

Este algoritmo se inicia con una distribución de velocidades arbitraria $\underline{V}^{(1)}$ (en este problema se utilizó $\underline{V}^{(1)} = \underline{0}$) y se termina cuando alguna medida del error de la solución numérica obtenida con este algoritmo sea menor que cierta tolerancia. La medida del error que se utilizó fue la norma infinito de la diferencia entre la velocidad obtenidas en la iteración $n+1$ y la correspondiente a la iteración n .

Entonces el algoritmo se termina cuando

$$\left\| \underline{V}^{(n+1)} - \underline{V}^{(n)} \right\|_{\infty} = \max_{\forall_i} \{ |V_i^{(n+1)} - V_i^{(n)}| \} \leq tol.$$

8. CONCLUSION

Se ha hecho el análisis del fenómeno de deformaciones plásticas utilizando la denominada formación de flujo para la descripción del movimiento y de las características macroscópicas del material, y se ha modelado numéricamente este mecanismo de deformación mediante el método de los elementos finitos (adaptado para que pueda aproximar la condición de incompresibilidad del flujo plástico). Las conclusiones más importantes son las siguientes:

- La formulación tradicional del método de los finitos (la utilizada en el modelado de la formación de materiales elástico compresibles) no se puede extender inmediatamente al caso de materiales que experimentan deformaciones plásticas (incompresibles) dado que al imponer la condición numérica obtenida con dicho método se presenta el denominado problema del bloqueo, como consecuencia del cual se obtienen aproximaciones muy pobres.
- Para superar este problema es necesario recurrir a formulaciones alternativas (como el método de los multiplicadores de Lagrange o el método de penalización) basadas en la interpolación simultánea de velocidades y presiones (elementos mixtos). En este trabajo se utilizó el elemento mixto Q1-P0 (interpolación bilineal para las velocidades y constantes para la presión dentro del elemento). Este elemento presenta las siguientes características:

- No bloquea (en el sentido que el espacio $\overline{K}_h \cap U_h$ correspondiente a este elemento no es vacío o casi vacío (como ocurre con otros elementos mixtos). Para la mayoría de las condiciones de borde este espacio $\overline{K}_h \cap U_h$ resulta lo suficientemente grande como para proporcionar soluciones aceptables, pero para ciertas condiciones (en particular cuando se imponen velocidades tangenciales al borde)) $\overline{K}_h \cap U_h$ es todavía pobre.
- Presenta modos de presión espúreos (principalmente en las mallas de elementos no distorsionados que son las más usadas). Esto hace que para determinadas condiciones de borde y determinadas mallas, resulta imposible obtener solución (tanto para las velocidades como para las presiones).
- Si bien converge cuando el tamaño de los elementos h tiende a cero, su orden de convergencia no es “óptimo”, y depende fuertemente de las condiciones de borde y la mallas utilizadas en la discretización.
- Además de estas limitaciones que son inherentes el elemento mixto utilizado (el elemento Q1-P0) las formulaciones alternativas utilizadas para aproximar la condición de incompresibilidad (el método de los multiplicadores de Lagrange y el método de penalización) presenta las siguientes inconvenientes:
 - La presencia de modos de presión condiciona la existencia de solución cuando se utiliza el método de multiplicadores de Lagrange (es decir,

hace que la existencia de solución dependa de las condiciones de borde y mala utilizada) y trae como consecuencia la obtención de soluciones para las presiones muy pobres (contaminadas complementada por modos de presión) cuando se utiliza el método de penalización.

- Por otra parte, el método de los multiplicadores de Lagrange no puede ser formulado en términos exclusivos de las velocidades (que son las variables primarias del problema) mientras que el método de penalización, que no presenta esta desventaja (es decir, se puede formular en términos exclusivos de las velocidades y obtener las presiones a partir de las velocidades con poco esfuerzo computacional), proporciona frecuentemente soluciones pobres debido al mal condicionamiento de la matriz del sistema de ecuaciones resultante.
- El procedimiento iterativo del lagrangeano aumentado con rigidización del modo espúreo es una alternativa posible de superar todas estas dificultades. Este método, (que por ser iterativo es más costoso desde el punto de vista computacional) es capaz de proporcionar soluciones aceptables (dentro de las limitaciones inherentes al elemento) tanto para las velocidades como para las presiones (la solución para las presiones que se obtiene resulta libre de modos de presión) independientemente de las condiciones de borde y de la malla utilizada.

- **La formulación de flujo, que es un enfoque de análisis muy atractivo desde el punto de vista computacional porque permite estudiar la deformación de un metal (que experimenta grandes deformaciones plásticas) con herramientas numéricas muy parecidas a las utilizadas para resolver problemas de elasticidad lineal y con pequeñas deformaciones y desplazamientos), es capaz también de reproducir patrones de deformación localizados que se desarrollan cuando cierta concentración de deformaciones (cuyo origen puede ser una inhomogeneidad en el material) se propaga a través del material. Además permite establecer cuáles son las propiedades macroscópicas del material que favorecen o perjudican el desarrollo de dichos patrones de deformación localizados. Sin embargo, no proporciona información respecto a espesores de banda (que resultan dependientes del tamaño de los elementos utilizados y otros aspectos del fenómenos de localización, principalmente los influenciados por la microestructura del material, que no se tiene en cuenta en los modelos macroscópicos (como el de la formulación de flujo).**
- **Utilizados esta formulación (y las herramientas numéricas descritas se puede reproducir el hecho experimental que la localización se ve favorecida en aquellos materiales que presentan menor endurecimiento y menor sensibilidad a las variaciones de la velocidad de deformación (es decir, menores valores de n^* y d).**

7.1.MODELAMIENTO COMPUTACIONAL DE UNA PLATINA DE ACERO ESTRUCTURAL 1020 PARA LA ZONA PLASTICA, BASADO EN LA TEORIA DE ELEMENTO FINITO PARA LA ZONA VISCOELASTICA, APLICANDO MATLAB.

Para el este estudio computacional se someterá la platina a tensión con una carga de 210 KN, para obtener resultados de esfuerzos y desplazamientos para luego compararlo con el modelo experimental.

Algoritmos utilizados en Matlab

ENMALLADO CON ELEMENTOS TRIANGULARES.....

```
clear all
```

```
xv = [0,0.5,0.5,0]; yv = [0,0,0.0762,0.0762]; %COORDENADAS DE LA FRONTERA RECTANGULAR
```

```
Ndivx=50;
```

```
Ndivy=10;
```

```
Ax=linspace(0,0.5,Ndivx);
```

```
By=linspace(0,0.0762,Ndivy);
```

```
Nn=Ndivx*Ndivy;
```

```
for i=1:Ndivx
```

```
    for j=1:Ndivy
```

```
        x(i,j)=Ax(i);
```

```
        y(i,j)=By(j);
```

```
    end
```

```
end
```

```
X=zeros(Nn,1);
```

```
Y=zeros(Nn,1);
```

```
for w=1:Nn
```

```
    X(w,1)=x(w);
```

```
    Y(w,1)=y(w);
```

```
end
```

```
in = inpolygon(X,Y,xv',yv'); % DETECTA SI EXISTEN PUNTOS SOBRE / DENTRO DE LA FRONTERA
```

```
plot(xv',yv',X(in),Y(in),'r*')
```

```
m=size(X(in));
```

```
n=m(1,1);
```

```
TRI = delaunay(X(in),Y(in));
```

```
Colorelm(1:n,1)=0;
```

```

% ----- VISUALIZACIÓN DEL ENMALLADO UNIFORME -----

trisurf(TRI,X(in),Y(in),zeros(n,1),ColoreIm); view(2),...

hold on
plot(xv',yv',X(in),Y(in),'black.')
axis image
grid off

conx(:,1)=TRI(:,1); % MATRIZ DE CONECTIVIDAD
conx(:,2)=TRI(:,3);
conx(:,3)=TRI(:,2);

cord(:,1)=X(:,1); % MATRIZ DE COORDENADAS
cord(:,2)=Y(:,1);

xp=zeros(10,1);
yp=By';

knowp = dsearch(X,Y,TRI,xp,yp); % VECTOR DE NODOS DE DESPLAZAMIENTO
CONOCIDOS

xs=0.5*ones(10,1);
ys=By';

knows = dsearch(X,Y,TRI,xs,ys); % VECTOR DE NODOS DE FUERZA CONOCIDOS
&&&&&&&&& ESFUERZO PLANO BIDIMENSIONAL UTILIZANDO ELEMENTOS
TRIANGULARES CST $$$$$$$$$$

delamesh
%--- CARGA DE ARCHIVOS -----

%-----
ok = menu('INTRODUZCA LAS MATRICES','ok');
conx; % MATRIZ DE CONECTIVIDAD
cord; % MATRIZ DE COORDENADAS
knows; % NUMERACIÓN DE LOS NODOS CON FUERZA CONOCIDA.
knowp; % NUMERACIÓN DE LOS NODOS CON DESPLAZAMIENTO
CONOCIDO
load ux.txt; % VALORES DE DESPLAZAMIENTO U CONOCIDOS,
EN EL ORDEN DE knowp
load vy.txt; % VALORES DE DESPLAZAMIENTO V CONOCIDOS,
EN EL ORDEN DE Knowp
load F1.txt; % VALORES DE LA COMPONENTE X DE LA FUERZA, EN EL ORDEN DE
knows
load F2.txt; % VALORES DE LA COMPONENTE Y DE LA FUERZA, EN EL ORDEN DE
knows

```

```

%-----
Sconx=size(conx);
Scord=size(cord);

Nn=Scord(1,1); % NUMERO DE NODOS
Ne=Sconx(1,1); % NUMERO DE ELEMENTOS
Ex=207e9; % ELASTICIDAD
he=0.0064; %ESPESOR DE LA LAMINA
v=0.29; %RELACION DE POISSON
%-----
conx2=conx;
conx(:,1)=conx2;
conx(:,2)=conx2; %MATRIZ DE CONECTIVIDAD DOBLE (U,V)
R=zeros(Nn*2,Nn*2); %MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
FG=zeros(Nn*2,1); %VECTOR DE FUERZAS
UG=zeros(Nn*2,1); %VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS
pr=size(knowp); nVk=pr(1,1);
sc=size(knows); nFk=sc(1,1);
for j=1:Ne
    k=zeros(6,6);
    x1=cord(conx(j,1),1); x2=cord(conx(j,2),1); x3=cord(conx(j,3),1);
    y1=cord(conx(j,1),2); y2=cord(conx(j,2),2); y3=cord(conx(j,3),2);
    XX(j,1)=cord(conx(j,1),1); XX(j,2)=cord(conx(j,2),1);XX(j,3)=cord(conx(j,3),1);
    YY(j,1)=cord(conx(j,1),2); YY(j,2)=cord(conx(j,2),2);YY(j,3)=cord(conx(j,3),2);

    A(j,1)=x2*y3-x3*y2; D(j,1)=x3*y1-x1*y3; G(j,1)=x1*y2-x2*y1;
    B(j,1)=y2-y3; E(j,1)=y3-y1; H(j,1)=y1-y2;
    C(j,1)=x3-x2; F(j,1)=x1-x3; J(j,1)=x2-x1;

    Se=[1 x1 y1;1 x2 y2;1 x3 y3];
    inv(Se);

    ar(j,1)=(A(j,1)+D(j,1)+G(j,1))/2;

    % MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO TRIANGULAR [ Ui Vi Uj Vj Uk Vk ]

    Be=(1/(2*ar(j,1)))*[B(j,1) 0 E(j,1) 0 H(j,1) 0;0 C(j,1) 0 F(j,1) 0 J(j,1);C(j,1) B(j,1) F(j,1) E(j,1) J(j,1)
    H(j,1)];
    De=(Ex/(1-(v^2)))*[1 v 0;v 1 0;0 0 ((1-v)/2)];

    k=he*ar(j,1)*Be'*De*Be;

    cr(j,1)=(1/(2*ar(j,1)));

```

% MATRIZ CON FILAS REUBICADAS

k1=k;

k(1,:)=k1(1,:);

k(4,:)=k1(2,:);

k(2,:)=k1(3,:);

k(5,:)=k1(4,:);

k(3,:)=k1(5,:);

k(6,:)=k1(6,:);

%-----

% MATRIZ CON FILAS Y COLUMNAS REUBICADAS

k1=k;

k(:,1)=k1(:,1);

k(:,4)=k1(:,2);

k(:,2)=k1(:,3);

k(:,5)=k1(:,4);

k(:,3)=k1(:,5);

k(:,6)=k1(:,6);

%-----

for i=1:6

 for kk=1:6

 if kk<=3 & i<=3

 R(conx(j,i),conx(j,kk))=R(conx(j,i),conx(j,kk))+k(i,kk);

 elseif kk<=6 & i<=3

 R(conx(j,i),conx(j,kk)+Nn)=R(conx(j,i),conx(j,kk)+Nn)+k(i,kk);

 elseif kk<=3 & i<=6

 R(conx(j,i)+Nn,conx(j,kk))=R(conx(j,i)+Nn,conx(j,kk))+k(i,kk);

 elseif kk<=6 & i<=6

 R(conx(j,i)+Nn,conx(j,kk)+Nn)=R(conx(j,i)+Nn,conx(j,kk)+Nn)+k(i,kk);

 end

 end

 for q=1:nFk

 if i<=3 & conx(j,i)==knows(q,1)

 FG(conx(j,i),1)=F1(q,1);

 break

 elseif i<=6 & conx(j,i)+Nn==knows(q,1);

 FG(conx(j,i)+Nn,1)=F2(q,1);

 break

 end

 end

 for q=1:nVk

```

    if i<=3 & conx(j,i)==knowp(q,1);
        UG(conx(j,i),1)=ux(q,1);
        break
    elseif i<=6 & conx(j,i)==knowp(q,1);
        UG(conx(j,i)+Nn,1)=vy(q,1);
        break
    end
end
end
end

end

% -----ELIMINACIÓN DE FILAS Y COLUMNAS-----
Ra=R;
Rb=R;
Vb=UG;
T=Rb*Vb;
Fb=FG;
FR=Fb-T;

cont(1,1:Nn)=0;
for i=1:Nn
    cont(1,i)=i;
end
vectam=size(cont);
tam=vectam(1,2);
for cut=1:nVk
    for a=1:tam
        if knowp(cut,1)==cont(1,a)
            Rb(:,a) = [];
            Rb(:,a+tam-1) = [];
            Rb(a,:) = [];
            Rb(a+tam-1,:) = [];
            FR(a,:) = [];
            FR(a+tam-1,:) = [];
            cont(:,a)=[];
            tam=tam-1;
            break
        end
    end
end
end

sol=Rb\FR;

% SOLUCIÓN Y GRAFICACIÓN

for i=1:tam
    UG(cont(1,i),1)=sol(i,1);
    UG(cont(1,i)+Nn,1)=sol(i+tam,1);
end

```

```

for Q=1:Ne
    UX(Q,1)=UG(conx(Q,1),1);
    UX(Q,2)=UG(conx(Q,2),1);
    UX(Q,3)=UG(conx(Q,3),1);
    VY(Q,1)=UG(conx(Q,1)+Nn,1);
    VY(Q,2)=UG(conx(Q,2)+Nn,1);
    VY(Q,3)=UG(conx(Q,3)+Nn,1);
    exx=B(Q,1)*UX(Q,1)+ E(Q,1)*UX(Q,2)+ H(Q,1)*UX(Q,3);
    eyy=C(Q,1)*VY(Q,1)+ F(Q,1)*VY(Q,2)+ J(Q,1)*VY(Q,3);
    gxy=C(Q,1)*UX(Q,1)+ F(Q,1)*UX(Q,2)+ J(Q,1)*UX(Q,3) + B(Q,1)*VY(Q,1)+ E(Q,1)*VY(Q,2)+
H(Q,1)*VY(Q,3);
    S=cr(Q,1)*De*[exx eyy gxy]';
    SX(Q,1)=S(1,1);
    SY(Q,1)=S(2,1);
    SXY(Q,1)=S(3,1);

```

end

```

VNSX=zeros(Nn,1);
VNSY=zeros(Nn,1);
VNSXY=zeros(Nn,1);
AVG=zeros(Nn,1);
for i=1:Nn
    for Q=1:Ne
        if i==conx(Q,1)|i==conx(Q,2)|i==conx(Q,3)
            VNSX(i,1)=VNSX(i,1)+ SX(Q,1);
            VNSY(i,1)=VNSY(i,1)+ SY(Q,1);
            VNSXY(i,1)=VNSXY(i,1)+ SXY(Q,1);

```

```

            AVG(i,1)=AVG(i,1)+1;

```

```

        end
    end
end

```

end

```

for i=1:Nn
    VNSX(i,1)=VNSX(i,1)/AVG(i,1);
    VNSY(i,1)=VNSY(i,1)/AVG(i,1);
    VNSXY(i,1)=VNSXY(i,1)/AVG(i,1);

```

end

```

for t=1:Ne
    SXavg(t,1)=VNSX(conx(t,1),1);
    SXavg(t,2)=VNSX(conx(t,2),1);
    SXavg(t,3)=VNSX(conx(t,3),1);
    SYavg(t,1)=VNSY(conx(t,1),1);
    SYavg(t,2)=VNSY(conx(t,2),1);
    SYavg(t,3)=VNSY(conx(t,3),1);

```

```
SXYavg(t,1)=VNSXY(conx(t,1),1);
SXYavg(t,2)=VNSXY(conx(t,2),1);
SXYavg(t,3)=VNSXY(conx(t,3),1);
```

```
S1(t,1)=0.5*(SXavg(t,1)+SYavg(t,1))+0.25*((SXavg(t,1)-SYavg(t,1))^2 + SXYavg(t,1)^2 )^0.5;
S1(t,2)=0.5*(SXavg(t,2)+SYavg(t,2))+0.25*((SXavg(t,2)-SYavg(t,2))^2 + SXYavg(t,2)^2 )^0.5;
S1(t,3)=0.5*(SXavg(t,3)+SYavg(t,3))+0.25*((SXavg(t,3)-SYavg(t,3))^2 + SXYavg(t,3)^2 )^0.5;
S2(t,1)=0.5*(SXavg(t,1)+SYavg(t,1))-0.25*((SXavg(t,1)-SYavg(t,1))^2 + SXYavg(t,1)^2 )^0.5;
S2(t,2)=0.5*(SXavg(t,2)+SYavg(t,2))-0.25*((SXavg(t,2)-SYavg(t,2))^2 + SXYavg(t,2)^2 )^0.5;
S2(t,3)=0.5*(SXavg(t,3)+SYavg(t,3))-0.25*((SXavg(t,3)-SYavg(t,3))^2 + SXYavg(t,3)^2 )^0.5;
```

```
SVMISES(t,1)=(S1(t,1)^2 - S1(t,1)*S2(t,1) + S2(t,1)^2)^0.5;
SVMISES(t,2)=(S1(t,2)^2 - S1(t,2)*S2(t,2) + S2(t,2)^2)^0.5;
SVMISES(t,3)=(S1(t,3)^2 - S1(t,3)*S2(t,3) + S2(t,3)^2)^0.5;
```

end

```
figure(1)
fill(XX',YY',UX')
colorbar
axis equal
```

```
figure(2)
fill(XX',YY',VY')
colorbar
axis equal
```

```
figure(3)
fill(XX',YY',SXavg')
colorbar
axis equal
```

```
figure(4)
fill(XX',YY',SYavg')
colorbar
axis equal
```

```
figure(5)
fill(XX',YY',SXYavg')
colorbar
axis equal
```

```
figure(6)
fill(XX',YY',SVMISES')
colorbar
axis equal
```

**RESULTADOS DE MODELAMIENTO COMPUTACIONAL CON MATLAB PARA
UNA CARGA DE 210 KN CON UNA MALLA DE 1437 ELEMENTOS.**

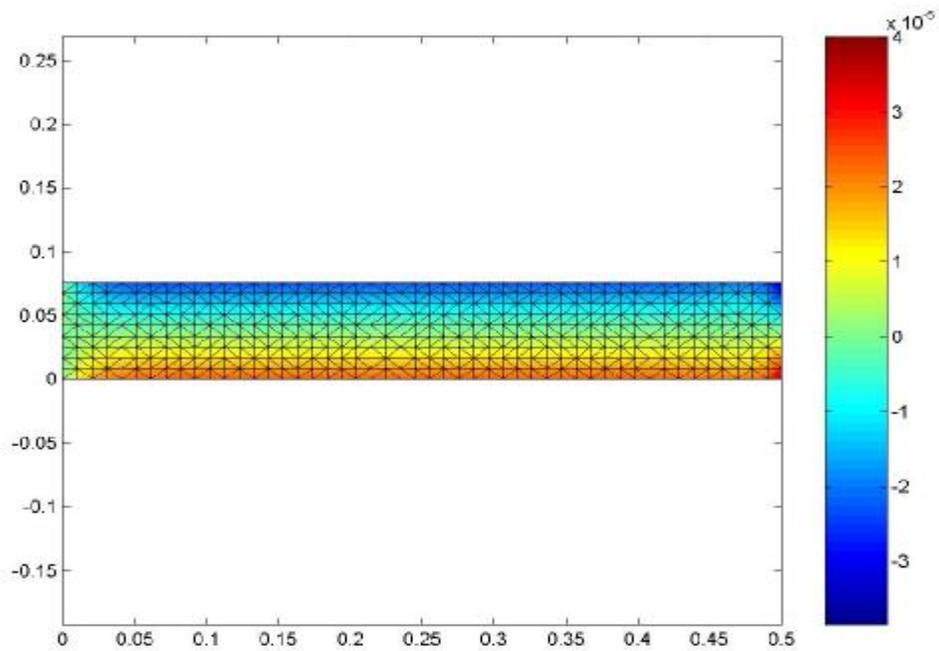


Figura 7.1. Desplazamientos en X (UX)

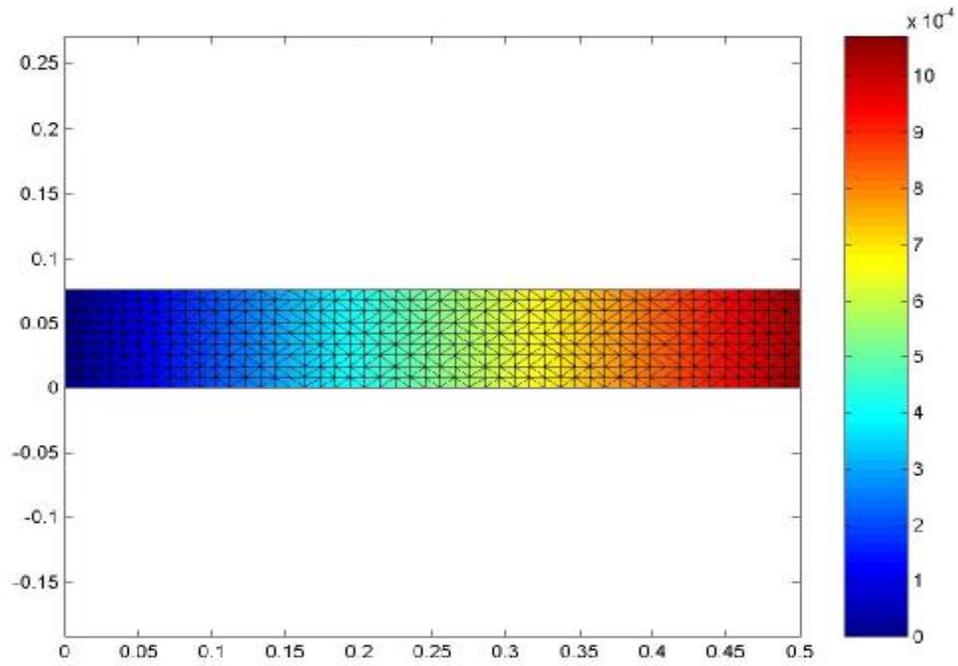


Figura 7.2. Desplazamientos en Y (UY)

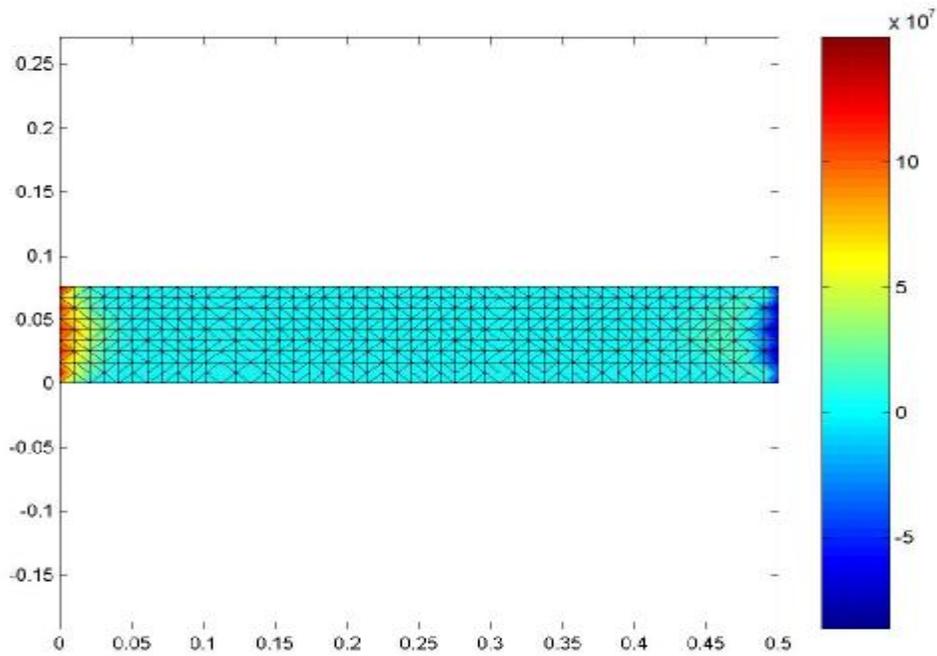


Figura 7.3. Esfuerzo en X (SX)

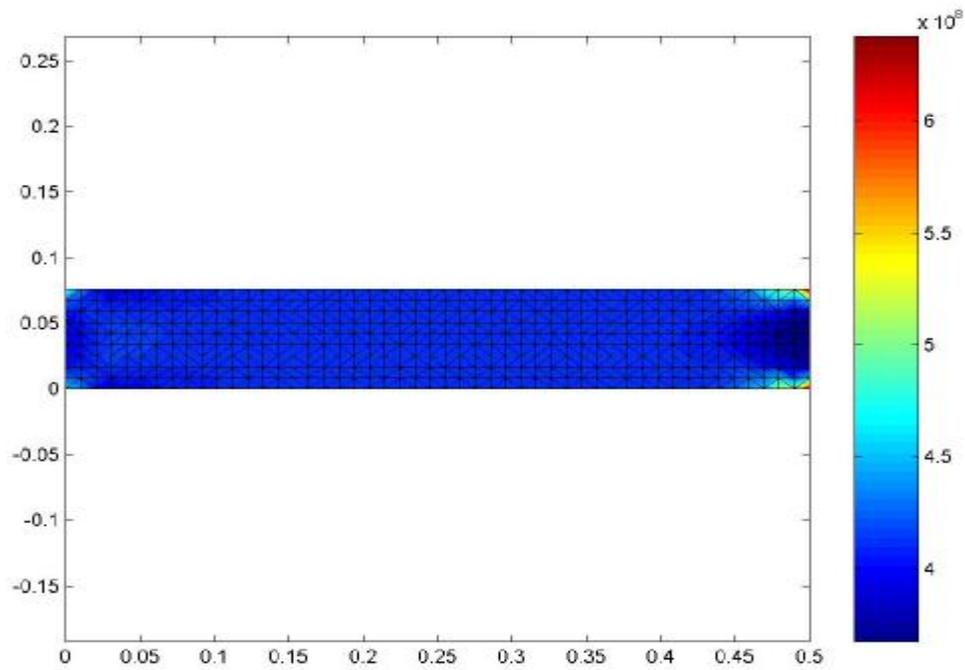


Figura 7.4. Esfuerzo en Y (SY)

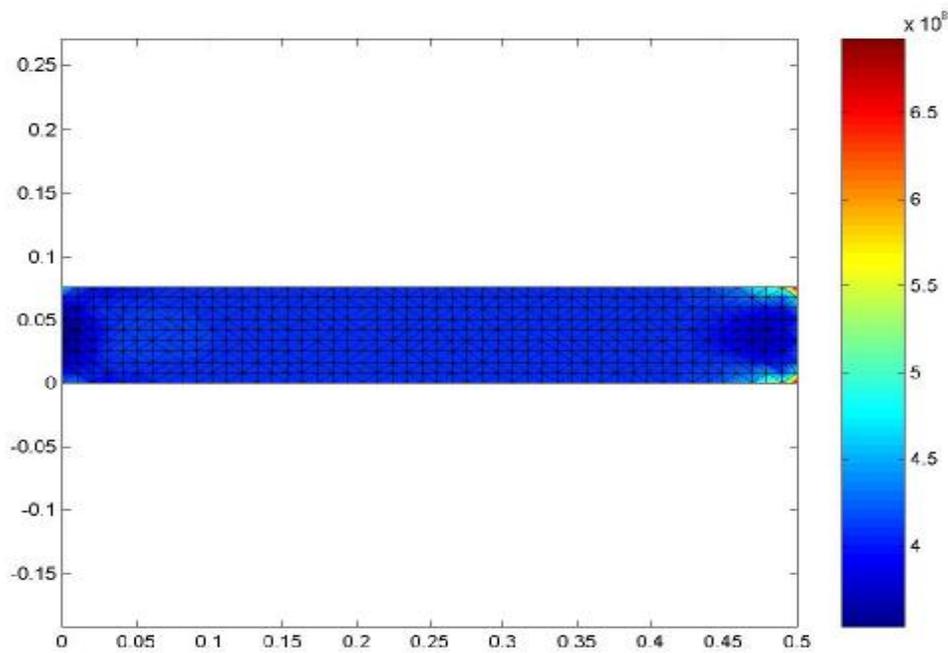


Figura 7.5. Esfuerzos de Von Mises

COMPARACIÓN ENTRE EL MODELO EXPERIMENTAL Y EL MODELOS COMPUTACIONAL CON MATLAB, UTILIZANDO LOS ESFUERZOS DE VON MISES Y DEFORMACIONES EN UNA LAMINA SOMETIDA A TRACCIÓN PURA PARA LA ZONA VISCOPLASTICA.

Para realizar la comparación entre el modelo experimental y el modelo computacional basado en la teoría de elemento finito aplicando Matlab. En el modelo experimental para obtener los valores de esfuerzo y deformaciones se hizo un promedio de los resultados de los ensayos realizado en el laboratorio de resistencia de materiales de UTB, teniendo en cuenta una carga de 210 KN la hace que el material sobrepase su resistencia a la fluencia encontrándose en la Zona visco plástica.

para modelar computacionalmente se uso el programa MATLAB, para hacer un modelamiento utilizando una solución matemática como teoría de elemento finito e utilizando las leyes constitutivas de la visco plasticidad e elasticidad en materiales. Los valores de esfuerzos y deformación en el caso de modelamiento computacional se tomaran de los dibujos de los resultados nodales.

Tabla 1. Valores promedios de esfuerzo y deformación de el modelo experimental a una carga a tracción de 210 000 N.

Numero de ensayo	ESFUERZOS(Mpa)	DEFORMACIÓN en eje Y(mm)
1	425	15
2	421	13
3	430	19
4	429	14
Valores Promedios	426,25	15,25

Tabla 2 . Valores de esfuerzos y deformación utilizando modelamiento computacional con Elemento finito a una carga a tracción de 210.000 N

NUMERO DE ELEMENTOS	Esfuerzos de Von Mises(Mpa)	DEFORMACION EN EL EJE Y(mm)
1437	425	1

COMPARACION DE VALORES OBTENIDO A TRAVES DE UN MODELO EXPERIMENTAL Y UN MODELO COMPUTACIONAL DE UNA LAMINA DE ACERO AISIS 1020 ESTRUCTURAL SOMETIDO A UNA CARGA DE TRACCION DE 200.000 N, EN LA ZONA VISCO PLÁSTICA.

Tabla 3 . En la siguiente tabla están los valores de esfuerzos de Von Mises y deformación.

Modelo experimental	Esfuerzos de Von Mises (Mpa)	Deformación (mm)
Ensayos con maquina universal	426,25	15.25
Elemento Finito (FEM)	425	1

Tabla 4. Porcentaje de error de los esfuerzo del modelo experimental y elementos finitos (FEM)

Valor de esfuerzos modelo experimental	426.25 Mpa
Elementos finitos (FEM)	425 MPa
Formula de porcentaje de error	$\frac{(s_{EXP} - s_{ANSYS})}{s_{EXP}} \times 100$
Porcentaje de error	0.29 %

ANALISIS DE RESULTADOS

- en el estudios plástico de una lamina sometida a tracción se observo que los porcentajes de error entre el modelo experimental y el modelo computacional utilizando los esfuerzos de Von Mises tuvo un valor pequeño, por los cual concluimos que las ecuaciones de esfuerzo de la zona plástica tienen cierta validez para los valores cercanos a la fluencia del material (viscoplasticidad).

- En el modelamiento computacional basado en la teoría de elemento finito utilizado como herramienta Matlab, no fue posible utilizar las ecuaciones constitutivas del material para la zona plástica debido a que se hace necesario alta carga computacional, por ejemplo, memoria, procesador, etc. para realizar un modelamiento computacional con Matlab utilizando las ecuaciones constitutivas de visco plasticidad tarda alrededor de 5 horas, produciendo bloqueo del equipo.