



**Universidad  
Tecnológica de Bolívar**

CARTAGENA DE INDIAS

El conocimiento **crece** en la **UTB**

**FORMULACION METODOLOGIA PARA LA SOLUCION NUMERICA DE LA  
ECUACION DE NAVIER STOKES BIDIMENSIONAL POR EL METODO DE  
GALERKIN**

**Tesis presentada como requisito para optar al título de  
Magíster en Ingeniería**

**Presentado**

**EDWIN JOSE CAÑATE GONZALEZ, M.Sc.**

**Director**

**EDGARDO W. ARRIETA ORTIZ, M.Sc.I.M.**

**Facultad de Ingenierías  
Programa de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica  
Universidad Tecnológica de Bolívar  
Cartagena de Indias D.T. y C.  
2013**

## **DEDICATORIA**

**A Dios** por darme fortaleza para iniciar y terminar los estudios en la Maestría de Ingeniería Eléctrica.

**A mis Padres:** Marina Gonzalez y Manuel Esteban Cañate por el cariño y colaboración a lo largo de mi vida.

**A mi Esposa:** Elvia Rosa y **mis Hijos:** Betsy Malely, Edwin José y José David por su sacrificio y profundo cariño.

**A mis Hermanos: Ofelia, Mariela**

## **AGRADECIMIENTOS**

Por su asesoría, apoyo y dedicación para la realización de este trabajo especial, queremos agradecer al profesor Edgardo Arrieta Ortiz y a los demás profesores de la Universidad Tecnológica de Bolívar que colaboraron de manera desinteresada para la culminación de este trabajo. Un agradecimiento especial a la empresa Electricaribe S.A E.S.P por su colaboración.

## RESUMEN

En este trabajo se formula una metodología de solución numérica de las ecuaciones de Navier Stokes para el caso de fluidos Newtonianos incompresibles en dos dimensiones utilizando el método de Galerkin. Básicamente se realizó el estudio de dos fenómenos físicos representados en dos modelos matemáticos aplicando el método de Galerkin. Este se fundamenta en las aproximaciones discretas del modelo y la integración numérica; presentando la formulación mixta de las ecuaciones de Navier-Stokes que consta de un sistema lineal y con parte no lineal de ecuaciones diferenciales parciales. Para finalmente obtener las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales parciales de Navier-Stokes. Con el objetivo de validar el desarrollo matemático en la solución numérica aplicando la metodología de Galerkin y se procedió a confeccionar dos programas de cómputo que permite resolver y visualizar las soluciones de las ecuaciones de flujo en régimen laminar entre planos paralelos y capa límite laminar incompresible estacionaria sobre la pared, sometida a gradientes de presión arbitrarios.

Los programas presentados en los Anexo A, B y C; fueron validados, analizados, con los resultados obtenidos mediante el software y se comparan satisfactoriamente con los presentados en la literatura.

# TABLA DE CONTENIDOS

DEDICATORIA	i
AGRADECIMIENTOS	ii
ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS	v
TABLA DE CONTENIDOS	vi
INDICE DE TABLAS	viii
INDICE DE FIGURAS	ix
Resumen .....	iv
Capitulo 1 1. Introducción.	9
1. Introducción	9
1.2. Necesidad de generar metodologías de solución libre de malla.	11
1.2.1 Aspectos computacionales	11
<i>Capitulo 22. Mmetodología de solución numérica por el método de Galerkin.</i>	14
2. Formulación de la metodología de solución numérica por el método de Galerkin.	14
2.1 Discretizacion	14
2.2 Metodología para la resolución de Galerkin	16
2.2.1-Las funciones polinomiales.	16
2.2.1.1 Características de las funciones base polinomiales	16
2.2.2-Aproximacion Numérica.	17
2.2.3-Integracion Numérica.	17
2.3. Aproximación de funciones usando el método de Galerkin.	19
2.3.1 Discretizacion de las ecuaciones lineales de Navier Stokes por el método de Galerkin.	22
2.3.2 Discretizacion de las ecuaciones no lineales de Navier Stokes por el método de Galerkin.	25
2.3.2.1 Componente de la velocidad del termino convectivo en el eje x	26
2.3.2.2 Componente de la velocidad del termino convectivo en el eje y	26
Capitulo 3 3. ESQUEMA DE INTEGRACION PARA LA DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES.	33
3. Aplicación de la discretizacion a las ecuaciones componentes de NAVIER STOKES.	30
3.1 La integración numérica Laplacino de la velocidad	30
3.1.2 La integración numérica Laplacino de la velocidad $u_x$ .	30
3.1.3 La integración numérica del Laplacino de la velocidad $u_y$ .	33
3.2 La integración numérica del termino convectivo.	35
3.2.1 Termino convectivo de la Divergencia de la velocidad $u_x$ .	35
3.2.2 Termino convectivo de la Divergencia de la velocidad $u_y$ .	39
3.3 La integración numérica del gradiente de presión.	39
3.3.1 Gradiente de presión $u_x$ .	39
3.3.2 Gradiente de presión $u_y$ .	40
3.4 La integración numérica aceleración de la velocidad	41
3.4.1 Aceleración de la velocidad $u_x$ .	41
3.4.2 Aceleración de la velocidad $u_y$ .	42

3.5 Discretización de la ecuación de continuidad .	42
3.6 Discretización de las condiciones de contorno.	43
3.7 Solución del método de Galerkin	43
Capítulo 4 4.Las ecuaciones de Navier- Stokes para flujos de fluidos entre planos paralelos.	49
4. Aplicación de Ec Navier- Stokes bidimensional dinámica en flujos de fluidos entre planos paralelos.	46
4.1 Modelo Matemático: Galerkin	47
4.2 Condiciones de frontera para flujo entre planos paralelos.	48
4.2.1 Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann de flujo laminar en un ducto.	53
Capítulo 5 5. Las ecuaciones de Navier- Stokes bidimensional estacionaria.	54
5. Aplicación de las ecuaciones de Navier- Stokes bidimensional estacionaria.	55
5.1 Fundamento del método de Galerkin.	55
5.1.2 La integración numérica de la divergencia de la velocidad	55
5.1.2.1 Divergencia de las velocidades $u_x$ y $u_y$ .	55
5.2. La integración numérica Laplaciano de la velocidad	56
5.2.1 La integración numérica Laplaciano de las velocidades $u_x$ y $u_y$ .	56
5.3. La integración numérica del gradiente de presión	57
5.3.1 Gradiente de presiones en $u_x$ y $u_x$ .	57
5.4 Solución del método de Galerkin	58
5.5 Condiciones de frontera para flujo incompresible de capa límite laminar	59
5.5.1 Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann en capa límite laminar.	60
5.6 Algoritmo Computacional	66
Capítulo 6 6. Análisis de resultados de las aplicaciones	67
6.1 Introducción de los análisis de resultados	67
6. 2 Resultados	68
6.2.1 Simulación de la ecuación de Navier Stokes Bidimensional dinámica	72
6.2.2 Analisis del perfil de velocidades	73
6.3 Validación de los resultados de la capa límite laminar	74
6.3.1 Análisis del flujo laminar de capa límite.	74
6.3.2 Resultados Análisis del perfil de velocidades en capa límite laminar	76
6.4 Solución analítica de la ecuación de NAVIER STOKES	77
CAPITULO 7 7. Conclusiones y Trabajos Futuros	80
7. Conclusiones	80
7.1 Trabajos Futuros	82
8. Bibliografía	86

## INDICE DE TABLAS

Tabla No 1. Polinomios base que depende del tiempo.	17
Tabla No 2. Polinomios base que no depende del tiempo.	18
Tabla No 3. Perfiles de Blasius	76
Tabla No 4 Valores normalizados de la ecuación de Blasius	76

## INDICE DE FIGURAS

Fig.2.1 –Esquema de proceso de resolución de la ecuación de Navier Stokes	20
Fig.2.2 –Esquema de ortogonalidad en la ecuación de Navier Stokes	21
Fig 2.3. Ecuaciones diferenciales lineales	26
Fig 3.1. Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales	33
Figura No 6.1. FLUJO LAMINAR ENTRE PLANOS PARALELOS	68
Figura No 6.2. FLUJO LAMINAR ENTRE PLANOS PARALELOS CON CONDICIONES DE BORDE	69
Figura 6.1.1. Efecto de embocadura para el flujo entre placas planas semiinfinitas: Evolución del perfil de velocidad con la distancia desde la entrada.	72
Figura No 6.2. PERFIL DE VELOCIDAD DE FLUJO LAMINAR ENTRE PLANOS PARALELOS	73
Figura No 6.3.SECUENCIA DE FLUJO LAMINAR ENTRE PLANOS PARALELOS	75
Figura No 6.4.SECUENCIA DE FLUJO LAMINAR DE CAPA LIMITE	75
Figura No 6.5.SECUENCIA DE FLUJO LAMINAR DE CAPA LIMITE	76
Figura No 6.6.SECUENCIA DE FLUJO LAMINAR DE CAPA LIMITE	76
Figura No 6.7.REPRESENTACION DE LA ECUACION DE BLASIUS	77
Figura No 6.8.GRAFICA DE LA ECUACION ANALITICA SOBRE LA SOLUCION NUMERICA	77
Figura No 6.9.GRAFICAS DE PERFILES DE VELOCIDADES PARA DIFERENTES ORDEN POLINOMIAL	78



## CAPITULO 1

### 1. INTRODUCCION

Las ecuaciones de Navier-Stokes modelan el comportamiento de fluidos mediante la conservación de 3 cantidades, a saber: masa, cantidad de movimiento y energía. A comienzos de la era de la computación estos modelos no podían ser utilizados en simulaciones dadas su alta complejidad computacional y matemática, en su lugar se utilizaron modelos de flujo potencial y posteriormente descripciones Eulerianas. Conforme la tecnología de las computadoras fue evolucionando, estos modelos comenzaron a utilizarse cada vez con más frecuencia hasta que resulta natural hoy en día simular complejos sistemas en donde los fluidos son resueltos por una formulación de Navier-Stokes. Se introducen los conceptos básicos de análisis funcional, utilizándose posteriormente para desarrollar lo propuesto en este informe final.

Este informe es generado como trabajo final de la Maestría en Ingeniería Eléctrica y Electrónica donde se presenta una formulación de la metodología de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso de flujo incompresible bidimensional utilizando la metodología de Galerkin. Con el objeto de validar esta metodología de solución numérica de N-S; se simula el flujo laminar entre planos paralelos y el flujo en la capa límite bidimensional incompresible estacionario. Inicialmente se muestra el tratamiento riguroso del método de Galerkin en la discretización y en la integración numérica que se le da al modelo físico matemático de la ecuación de N-S para obtener resultados precisos.

En segundo lugar, se presenta la implementación y desarrollo del software; para confeccionar dos programas de cómputo que permitan resolver y visualizar en 2D las soluciones de las ecuaciones de flujo en régimen laminar entre planos paralelos y capa límite laminar incompresible estacionaria sobre la pared y sometida a gradientes de presión arbitrarios. Se describe un panorama general para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales, dando la motivación del uso de métodos libres de malla.

Se utiliza la solución analítica de las ecuaciones simplificadas por Blasius para, hacer un análisis comparativo de las aproximaciones numéricas que se obtienen por esta formulación. De esta manera, se utiliza el modelo “analítico” para estudiar el modelo numérico inicial.

Adicionalmente al papel de herramienta de validación, se desarrolló en esta tesis un software que permite la simulación de los dos (2) fenómenos anteriores, que se pueden utilizar, además, como una herramienta pedagógica en cursos de dinámica de fluidos, física y matemáticas aplicadas, pensando que el software como elemento de laboratorio virtual. Los estudiantes pueden usar este software para el desarrollo de proyectos de aplicación dentro de tales cursos, previa capacitación (a ser ofrecida como parte de un curso) en su manejo.

Este informe final está integrado por ocho capítulos. El capítulo uno presenta la introducción y los antecedentes correspondientes al método de Galerkin aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes.

En el capítulo dos, se presenta el objetivo principal de la tesis que es la discretización por el método de Galerkin y se hace un análisis detallado correspondiente paso a paso al proceso de transformar las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales en ecuaciones algebraicas discretas.

El capítulo tres presenta algún detalle del desarrollo matemático de las ecuaciones aplicadas al flujo laminar entre planos paralelos y comentario del software.

En el capítulo cuarto; encontramos la aplicación del flujo de fluido entre planos paralelos con su desarrollo matemático y su simulación numérica correspondiente presentando paso a paso el algoritmo de algunas soluciones particulares que ayudan a entender la forma operativa del software. El capítulo cinco se aplica el método al caso del flujo de capa límite laminar.

El capítulo seis se presenta el análisis de resultados correspondiente a las dos aplicaciones simuladas. El capítulo siete; encontramos las conclusiones y trabajos futuros.

## **1.2 NECESIDAD DE GENERAR METODOLOGIAS DE SOLUCION LIBRE DE MALLA.**

El conjunto de ecuaciones de Navier–Stokes junto con condiciones de contorno compatibles; se conocen como problema de Navier Stokes. Tal como se aprecia a la vista de las ecuaciones, el problema plantea un sistema acoplado de cuatro (4) ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales donde encontramos la derivada de segundo orden en la velocidad (debido al termino viscoso) y una ecuación diferencial no lineal (debido al termino convectivo). Este problema es uno de los de mayor complejidad de los que se encuentra habitualmente en aplicaciones industriales y tecnológicas.[1],[2],[3]

La formulación metodológica correspondiente a la solución numérica en la ecuación de Navier- Stokes se fundamenta en el desarrollo matemático y la construcción de algoritmos computacionales; donde las formulaciones más comunes empleadas para generar códigos computacionales son:

- 1- La formulación en variables primitivas velocidad-presión tal y como se ha hecho en esta tesis.
- 2- Formulación en variables derivadas: es decir, mediante la ecuación de Poisson para la presión y la ecuación de transporte de la vorticidad, o mediante la función de corriente y la vorticidad.

### **1.2.1 Aspectos computacionales**

La generación de mallas usando el método de los elementos finitos es actualmente un cuello de botella en el proceso de la simulación numérica; cuando se tiene fronteras variables o móviles. Al mismo tiempo, los requerimientos de mallado rápido y de calidad conllevan un incremento en el número de nodos y esto es un problema; debido que el mallado de un objeto es una de las tareas que consume mayor cantidad de tiempo de cómputo, típicamente se gasta el 70% del proceso total. Por esto, la generación de mallas móviles para fronteras móviles

en este tipo de simulación resulta extremadamente compleja y costosa computacionalmente.

Debido a que los métodos sin malla han atraído el interés de los investigadores, por su flexibilidad para resolver problemas prácticos de simulación y el principal objetivo es superar las dificultades al tener que mallar y remallar los dominios en estudio que aparecen en los problemas de simulación, ya que en estos métodos es suficiente añadir nodos donde sea necesario.[4].

El método de aproximación numérica que se utiliza en este trabajo es una formulación de Galerkin libre de malla que se fundamenta en la aproximación mediante el método de mínimos cuadrados o de las proyecciones ortogonales utilizando las funciones de base y de aproximación polinomial. Para resolver una EDP por métodos computacionales hay que definir adecuadamente las condiciones de frontera. Esta metodología Mesh Free presenta dos dificultades; la primera es la de imponer las condiciones de contorno y la otra dificultad es la del cálculo de la integración numérica en cada una de las componentes de las ecuaciones de Navier Stokes, que implica un mayor número de operaciones junto con la necesidad de recurrir al aumento del orden de los polinomios. El mayor poder computacional que tienen las supercomputadoras, no es la panacea para dar solución a las dificultades que se generan con la cantidad de operaciones y el almacenamiento de la información numérica que se deben realizar para generar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales componentes de las ecuaciones de Navier-Stokes.

La tendencia actual del cómputo científico es combinar las estrategias computacionales con el análisis numérico. Se trata por lo tanto de nuevos métodos de computación que pueden cambiar el actual enfoque de los métodos de simulación numérica basados fundamentalmente en los métodos de diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos.

Existen en la actualidad varios métodos sin mallas en desarrollo y otros que han sido recientemente publicados o que están en proceso. La motivación del uso de métodos libres de malla ("MeshFree") es reducir los tiempos de cómputo y que el

orden de convergencia sea mayor o igual al de los métodos numéricos actuales. Entendiendo por convergencia al decrecimiento del error obtenido conforme  $N$  crece, siendo  $N$  el número de nodos.[5],[6]. Consideramos que los métodos libres de malla no suplantarán de forma definitiva a diferencias finitas, elementos finitos o volúmenes finitos, tendiendo a utilizar una combinación de ellos aprovechando la teoría ya establecida y los métodos numéricos que se han desarrollado a lo largo de décadas.[7].

## **CAPITULO 2**

### **2. FORMULACION DE LA METODOLOGIA DE SOLUCION NUMERICA POR EL METODO DE GALERKIN**

En este capítulo se presenta la dimensión técnica de la metodología por el método de Galerkin. El objetivo es presentar de manera ordenada y detallada, tanto las estrategias metodológicas desarrolladas durante la realización de esta investigación, como la forma de elección de los instrumentos matemáticos más adecuados para hacer las cuantificaciones requeridas, así como la forma y criterios utilizados en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes que esta constituidas por ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales.

#### **2.1 Discretizacion**

Definición: El proceso de transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica se denomina discretizacion. En este trabajo se va a representar el comportamiento de un fluido en una cierta área de control en el dominio  $\Omega$  y su frontera o contorno  $\Gamma$ . La velocidad  $(u_x, u_y)$  es una función vectorial que tiene dependencias espacio-temporales y la presión  $(p_x, p_y)$  que corresponde a las incógnitas del sistema.

Las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos que van a construir la base física de este trabajo son:

1. La ecuación de conservación de la Masa o ecuación de Continuidad.
2. La ecuación de la Conservación de la Cantidad de Movimiento.

Las expresiones matemáticas de dichas ecuaciones son conocidas como Ecuaciones de Navier-Stokes bidimensional dinámica [8], las cuales, están dadas por las siguientes expresiones:

derivada del operador material o sustancial

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}}_{\text{termino convectivo}} \right) = - \frac{\partial p_x}{\partial x} + \underbrace{\mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right)}_{\text{termino difusivo}} \quad (2.0)$$

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\text{convectivo}} \right) = - \frac{\partial p_y}{\partial y} + \rho g + \underbrace{\mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right)}_{\text{difusivo}} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Este conjunto de ecuaciones (2.0), (2.1) y (2.2) junto con un conjunto de condiciones de contorno Dirichlet y Neuman compatibles se conocen como problema de Navier- Stokes; tal como se aprecia, se plantea un sistema acoplado de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden en la velocidad (debido al termino viscoso o difusivo) y al termino no lineal (debido al termino convectivo).[9]. Se debe tener en cuenta que para el desarrollo de este trabajo los vectores de velocidades y presiones están en el espacio bidimensional en función de tres variables para la aplicación de flujo laminar en planos paralelos. Así como, las condiciones de borde tipo Dirichlet y Neumann, que son convertidas en un sistema discreto de ecuaciones algebraicas tanto en el contorno  $\Gamma$ , como en el dominio  $\Omega$  de las funciones.[10].

Para realizar la discretizacion en las ecuaciones de Navier Stokes por el método de Galerkin se requieren tres (3) pasos:

- 1- Definir la función exacta, las funciones de base y de aproximación.
- 2- Desarrollar la aproximación numérica.
- 3- Aplicar la integración numérica.

La discretización de las condiciones de contorno tipo Dirichlet y Neumann se representa por una función que genera un conjunto de valores discretos de puntos en el dominio ( $\Omega$ ) y en el contorno ( $\Gamma$ ) respectivamente.

## 2.2. METODOLÓGIA PARA LA RESOLUCIÓN DE GALERKIN

### 2.2.1-Las funciones de base polinomiales.

Los polinomios figuran entre las funciones más sencillas que se estudian en análisis para trabajar en cálculos numéricos porque sus valores pueden obtenerse efectuando un número finito de multiplicaciones y adiciones. Cualquier función vectorial o escalar se pueden expresar o aproximar como una función de polinomios; en lugar de hacerlo con la función original. La primera estrategia es utilizar tres tipos de funciones que son: la función exacta, las funciones base y de aproximación; como función de polinomios expresadas en forma de variables separables.

#### 2.2.1.1 Características de las funciones base polinomiales

- La función exacta corresponde a la solución de la ecuación de Navier-Stokes y se expresa como  $f(x, y, t)$ ; pero no se conocen los valores de los coeficientes, de los exponentes y de las variables  $(x, y, t)$ .
- La función de prueba se expresa  $\sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t)$ ; donde no se conocen los valores de los coeficientes, pero si se conocen los valores de los exponentes y de las variables  $(x, y, t)$  correspondiente a la base.

Cada  $w_j(x, y, t)$  donde es de la forma  $w_j(x, y, t) \approx x^{ex(j)} \cdot y^{ey(j)} \cdot t^{et(j)}$

Así resulta:

$$\sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t) = a_1 x^{xe(1)} y^{ye(1)} t^{te(1)} + a_2 x^{xe(2)} y^{ye(2)} t^{te(2)} + a_3 x^{xe(3)} y^{ye(3)} t^{te(3)} + \dots + a_n x^{xe(n)} y^{ye(n)} t^{te(n)} \quad (2.3)$$



- Como también, la función de aproximación; que corresponde a la ecuación (2.4) respectivamente.

$$\sum_{j=1}^n a_j u_j(x, y, t) = a_1 x^{xe(1)} y^{ye(1)} t^{te(1)} + a_2 x^{xe(2)} y^{ye(2)} t^{te(2)} + a_3 x^{xe(3)} y^{ye(3)} t^{te(3)} + \dots + a_n x^{xe(n)} y^{ye(n)} t^{te(n)} \quad (2.4)$$

Donde similarmente las incógnitas son los coeficientes y las variables son las funciones base conocidas; pero esta función de aproximación es ortogonal a la combinación lineal de la función exacta y la función de prueba. Se muestra tabla No 1 de polinomios base que depende del tiempo que se utilizan en el capítulo 5 en la aplicación de flujo de fluidos entre planos paralelos.

NOMBRE	BASE	DIMENSION	GRADO TOTAL	GRADO POR VARIABLE
CONSTANTE	1	1	0	0,0,0
LINEAL	1,x,y,t	4	1	1,1,1
BILINIAL	1,x,y,t,xy,x <sup>2</sup> ,y <sup>2</sup> ,t <sup>2</sup> ,xt,yt	10	2	2,2,2
CUBICO	1,x,y,t, xy,xt,xyt,x <sup>2</sup> ,x <sup>2</sup> t, ,x <sup>3</sup> ,y <sup>2</sup> ,y <sup>3</sup> ,y <sup>2</sup> x,y <sup>2</sup> t,t <sup>2</sup> ,t <sup>3</sup>	16	3	3,3,3

Tabla No 1. Polinomios base que depende del tiempo.

La tabla No 2 muestra los polinomios base que no depende del tiempo que se utilizan en el capítulo 6 en la aplicación de flujo en capa límite laminar.

Nombre	Base	Dimensión	Grado total	Grado por variable
Constante	1	1	0	0,0
Lineal	1, $x$ , $y$	3	1	1,1
Bilineal	1, $x$ , $y$ , $xy$	4	2	1,1
Cúbica	1, $x$ , $y$ , $xy$ , $x^2$ , $y^2$ , $x^2y$ , $xy^2$ , $x^3$ , $y^3$	10	3	3,3
Bicúbica	1, $x$ , $y$ , $xy$ , $x^2$ , $y^2$ , $xy^2$ , $xy^3$ , $x^2y$ , $x^2y^2$ , $x^2y^3$ , $x^3$ , $y^3$ , $x^3y$ , $x^3y^2$ , $x^3y^3$	16	6	3,3

Tabla No 2. Polinomios base que no depende del tiempo.

### 2.2.2-Aproximación Numérica.

Al realizar los cálculos reemplazando las funciones base, en los vectores de velocidades y presiones para cada uno de los operadores; Divergencia, Laplaciano y Gradiente que están en las ecuaciones de Navier-Stokes, resultan las expresiones como (2.5)

$$\left\| f(x, y, t) - \sum_{k=1}^n d_k u_k(x, y, t) \right\| \quad (2.5)$$

La aproximación numérica se fundamenta en hallar los valores mínimos en la desigualdad correspondiente a la ecuación (2.5) que se generan en cada una de las ecuaciones diferenciales lineales que forman las ecuaciones de Navier-Stokes.

Los coeficientes  $d_k$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots, n$  que se encuentra en la ecuación (2.5) son los valores mínimos que son las incógnitas.

### 2.2.3-Integración Numérica.

La integración numérica se fundamenta en el producto interno del espacio de Hilbert entre combinación lineal de la función exacta y la función de prueba que es el error y la función de aproximación. Un espacio de Hilbert es un espacio de funciones que se encuentran definidas en un intervalo y cuyas integrales en el sentido de Lebesgue sobre dicho intervalo existen. [11]

Esencialmente el método de Galerkin, busca garantizar que el error sea ortogonal a las funciones de bases usadas para discretizar, según el producto interno de “L<sup>2</sup>”, en general cada operador lineal es discretizado como se expresa a continuación:

$$D(u) \cong D(a_i w_i) \simeq a_i D(w_i) \text{ Generando las aproximaciones anteriores.}$$

$$\text{Error} = D(u) - a_i D(w_i)$$

Y el producto punto de Galerkin es:

$$\langle \text{error}, w_k \rangle \simeq 0 \text{ Esto es:}$$

$$\langle D(u) - a_i D(w_i), w_k \rangle \simeq 0$$

Es decir,

$$\langle D(u), w_k \rangle - a_i \langle D(w_i), w_k \rangle \simeq 0$$

La integración numérica se define de la siguiente forma: el producto escalar de dos funciones es igual a la integral del producto de esas dos funciones en el dominio ( $\Omega$ ) correspondiente a la ecuación (2.6).

$$\left\langle f(x, y, t), \sum_{j=1}^n d_j u_j^*(x, y, t) \right\rangle \simeq \int_{\Omega} f(x, y, t) \circ \sum_{j=1}^n d_j u_j^*(x, y, t) d\Omega \quad (2.6)$$

El conjunto de técnicas mencionadas forman parte del proceso de discretización y que es el “corazón” que alimenta la estructura de solución a nivel metodológico para tratar con un sistema de ecuaciones como el de Navier-Stokes que se

encuentra expresado en el campo del continuo. Es necesario utilizar técnicas de discretización espacio-temporal para finalmente obtener el modelo físico-matemático que puede ser tratado por una computadora para la obtención de la solución numérica.

En este trabajo se desarrolla la formulación metodológica a partir de técnicas o estrategias para la solución numérica de las ecuaciones de Navier Stokes por el método de aproximación de Galerkin. El objetivo final de este proceso es la obtención de la formulación metodológica para la solución numérica computacional aproximada en las ecuaciones de Navier Stokes bidimensional dinámica que se desarrolla en 2 pasos que son: [4]

- Discretización de las ecuaciones de Navier Stokes por el método de Galerkin.
- Solución numérica por el método de Galerkin.

Esto se puede esquematizar como muestra la figura 2.1

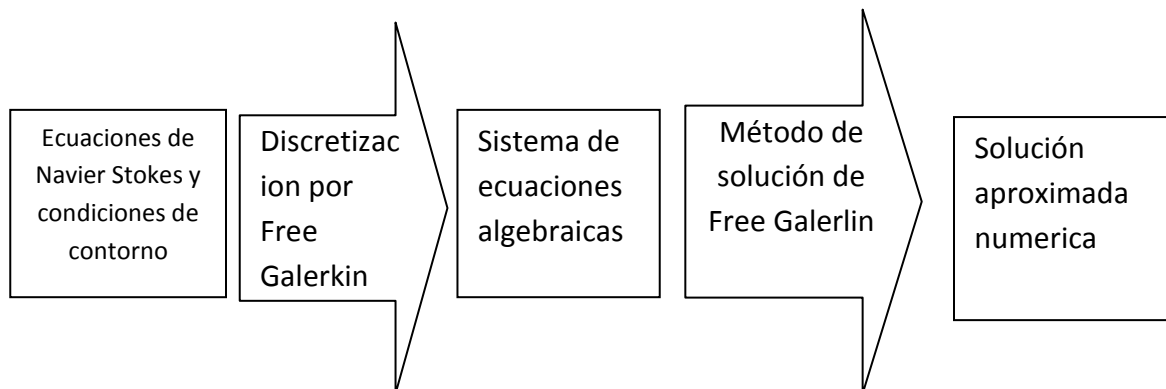


Fig.2.1 –Esquema de proceso de resolución de la ecuación de Navier Stokes

### 2.3. Aproximación de funciones usando el método de Galerkin.

Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Se dice que dos vectores  $B(x, y, t)$  y  $u_i(x, y, t)$  de  $H$ , son ortogonales si su producto escalar es cero.[12] Esto es:

$$\langle B(x, y, t), u_i(x, y, t) \rangle = 0 \quad (2.7.1)$$

Si  $f(x, y, t)$  es una función, que queremos aproximar mediante la sumatoria de funciones base  $\sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t)$ . Entonces resulta que la diferencia es igual al Error,  $R(x, y, t)$ :

$$f(x, y, t) \cong \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t) \quad (2.7)$$

$$R(x, y, t) = f(x, y, t) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t) \neq 0$$

Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $f(x, y, t) \in H$  en un espacio lineal cerrado. El espacio  $H$  se puede escribir como la suma directa (ortogonal) de  $f(x, y, t)$  y su complemento ortogonal  $f(x, y, t)$ . [13],[14]. Es decir todo vector  $f(x, y, t)$  se puede expresar de forma única como la suma directa de dos vectores ortogonales.[15],[16].

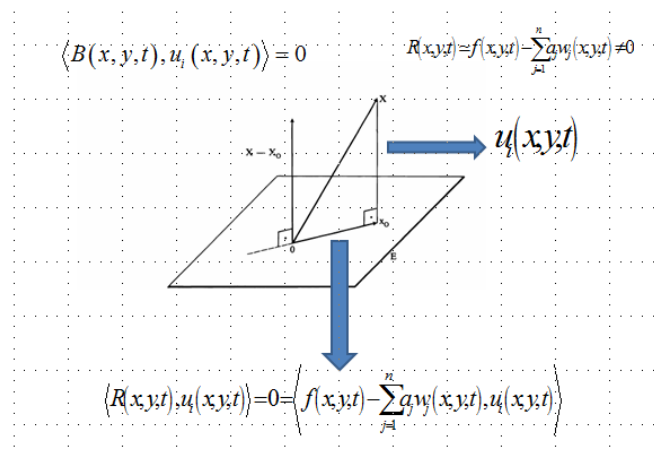


Fig.2.2 –Esquema de ortogonalidad en la ecuación de Navier Stokes

$$f(x, y, t) = \text{proy}_H f(x, y, t) \oplus \text{proy}_V f(x, y, t) \quad (2.8)$$

$$proy_V f(x, y, t) = f(x, y, t) - \sum_{j=1}^n a_j X_j(x, y, t) \quad (2.9)$$

$$u_i(x, y, t) \in proy_H f(x, y, t) \quad (2.10)$$

Multiplicando la ecuación (2.9) por la función de aproximación  $u_i(x, y, t)$ ; resultan los componentes de la ecuación (2.11) ortogonal, si su producto escalar es cero.

$$\langle R(x, y, t), u_i(x, y, t) \rangle = 0 = \left\langle f(x, y, t) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t), u_i(x, y, t) \right\rangle \quad (2.11)$$

Donde el conjunto de funciones base corresponde a la ecuación (2.13) y la función de aproximación a la ecuación (2.14) en forma extendida como se muestra a continuación; se multiplica componente a componente como se mostrara posteriormente.

$$\sum_{j=1}^n a_j X_j(x, y, t) = a_1 x^{xe(1j)} y^{ye(1j)} t^{te(1j)} + a_2 x^{xe(2j)} y^{ye(2j)} t^{te(2j)} + a_3 x^{xe(3j)} y^{ye(3j)} t^{te(3j)} + \dots + a_n x^{xe(nj)} y^{ye(nj)} t^{te(nj)} \quad (2.13)$$

$$u_i(x, y, t) = a_1 x^{xe(1i)} y^{ye(1i)} t^{te(1i)} + a_2 x^{xe(2i)} y^{ye(2i)} t^{te(2i)} + a_3 x^{xe(3i)} y^{ye(3i)} t^{te(3i)} + \dots + a_n x^{xe(ni)} y^{ye(ni)} t^{te(ni)} \quad (2.14)$$

Sea  $S$  un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces, para cada  $w(x, y, t) \in X$  existe un único punto  $S(x, y, t) \in S$  que minimiza la distancia de  $w$  a  $S$ , esto es, encontrar la mínima distancia  $d$  entre

$$f(x, y, t) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t); \text{ como se muestra:}$$

$$\left\| f(x, y, t) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t) \right\| = d(X, C) = \inf \{ f(x, y, t) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t) : f(x, y, t) \in C \} \quad (2.14)$$

Existe un vector de aproximación que minimiza la distancia, y es único.[16]. Como la ecuación (2.11) es equivalente a la ecuación (2.15) por lo que los coeficientes  $a_j$  son los valores a determinar para que sea la ecuación (2.15) equivalente a cero.[17].

$$\left\langle f(x, y, t) \circ u_i(x, y, t) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t) \circ u_i(x, y, t) \right\rangle = 0 \quad (2.15)$$

Resolviendo la ecuación (2.15) se obtiene la ecuación (2.16) que básicamente se está aplicando el concepto de aproximación numérica; cuando se hallan los

valores de los coeficientes. El significado de la mejor aproximación depende de la norma utilizada. [18]. En este trabajo se utilizó la norma euclidiana. Se define a partir de introducir la operación producto escalar en el espacio lineal.[19]. Las técnicas de aproximación basadas en esta norma reciben el nombre de Teoría de Aproximación por Mínimos Cuadrados.[13].

$$\langle f(x, y, t), u_i(x, y, t) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t), u_i(x, y, t) \right\rangle \quad (2.16)$$

Esto justifica que el método de Galerkin sea usado como equivalente a la aproximación de mínimos cuadrados para resolver problemas de aproximación de funciones.

En la aproximación de por mínimos cuadrados se minimiza la suma del cuadrado del error entre la función real y la que se aproxima. La característica anterior de la mejor aproximación en  $L_2$  permite calcular la solución planteando las ecuaciones de perpendicularidad, o en ecuaciones normadas, a partir de vectores linealmente independientes, que generen el subespacio  $u_i(x, y, t)$ . Sea una base linealmente independiente de  $u_i(x, y, t)$ , entonces la función con mejor aproximación a  $f(x, y, t)$  será una combinación de los vectores anteriores.

Las ecuaciones de Navier-Stokes se modelan por medio de sistemas de ecuaciones de evolución que involucran operadores diferenciales como los operadores Divergencia, Laplacino y Gradientes. La formulación metodológica para la solución de las ecuaciones de Navier Stokes tiene como objeto obtener un problema bien propuesto, para lo cual se añaden datos iniciales y de contorno, se suministra un adecuado marco funcional y eventualmente se imponen condiciones de compatibilidad. Problema bien propuesto quiere decir para el matemático existe una solución en el marco descrito, que es única y depende continuamente de los datos (estabilidad). Las teorías matemáticas clásicas involucran operadores lineales para los que existe hoy día una enorme teoría matemática desarrollada en el marco del Análisis Funcional. Por suerte existen importantes teorías físicas que se modelan en forma lineal en su rango de aplicación usual, como son el operador Laplacino y el Gradiente. Sin embargo, el término convectivo que involucra la

Divergencia es modelada por formas no lineales y se ha comprobado que tales teorías tienden a una dificultad matemática mayor; y que exhiben un número de propiedades que no se dan en los modelos lineales.[6].

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden (debido al término viscoso o difusivo) muestran que estos fenómenos o propiedades reflejan aspectos esenciales de la realidad que se pretendía describir, por lo que volver la vista al mundo lineal, más sereno y regular, no resuelve nada, salvo como primera aproximación. Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineal (debido al término convectivo) describen propiedades que distinguen el mundo no lineal que es precisamente lo desarrollado en este informe final, a saber, la posibilidad de que datos perfectamente regulares den lugar a una evolución que está bien propuesta en el sentido matemático para tiempos pequeños, en un determinado tiempo la solución clásica deja de existir pues se genera una singularidad. Nótese que pueden existir singularidades en problemas lineales, pero éstas deben ser ya patentes en la regularidad de los datos o coeficientes adecuadamente examinados. En cambio, en los problemas no lineales, las singularidades surgen del mecanismo interno a la ecuación, incluso a partir de datos y coeficientes extremadamente regulares. La forma más simple en que se observan singularidades espontáneas en un problema de evolución es aquel en que la variable o variables tienden a infinito cuando el tiempo se acerca a un valor finito  $T > 0$ .

### **2.3.1 Discretización de las ecuaciones lineales de Navier Stokes por el método de Galerkin.**

Aplicando el principio de transferencia a las ecuaciones diferenciales lineales que dan como resultado las ecuaciones algebraicas; debidas a que son formas lineales se puede aplicar la siguiente función para obtener una matriz.[21]. Un *funcional lineal* es un caso particular de un operador lineal, es decir, es un operador lineal que transforma el espacio dado  $E$  en valores de  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .[17]. En general, si  $E$  es un espacio lineal normado sobre un cuerpo  $K$ , entonces un funcional lineal  $f$  es una aplicación lineal de  $E \rightarrow K$  tal que



$$1. f(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{w})$$

$$2. (\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{E}, \alpha \in \mathbf{K}.$$

El espacio de todos los funcionales lineales de un espacio normado  $E$  sobre su cuerpo,  $L(E, K)$ , se llama espacio dual de  $E$  y suele denotarse por  $E^1$ .

Definición: Se denomina forma lineal sobre un espacio vectorial  $V$  a toda aplicación:[22].

$$F : V \rightarrow R$$

Se considera las funciones base y el conjunto de escalares  $\{ a_j / 1 \leq i, j \leq n \} \subset R$ . Entonces, la aplicación  $F : V \rightarrow R$

Definida por las siguientes expresiones:

$$\langle u_i, u_j \rangle \rightarrow \sum_i a_j w_i w_j, \quad \forall i, j = 1, \dots, N \Rightarrow \text{forma lineal algebraica}$$

$$\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x}, u_k \right\rangle \rightarrow \sum a_j \frac{\partial w_j}{\partial x} w_i, \quad \forall i, j = 1, \dots, N \Rightarrow \text{ecuacion diferencial lineal}$$

$$\langle \Delta u_j, u_k \rangle \rightarrow \sum a_j \Delta w_j w_i, \quad \forall i, j = 1, \dots, N \Rightarrow \text{ecuacion diferencial lineal}$$

Resultan ser una aplicación de la forma lineal algebraica; como también una aplicación de la ecuación diferencial lineal.[23].

Se realiza el producto punto y expandiendo la sumatoria en la ecuación (2.16), resulta una matriz; donde la incógnita son los coeficientes  $a_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

El objeto es transformar un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que es el resultado final del proceso de discretización. Estos sistemas lineales vienen como es habitual caracterizados por una matriz de coeficientes y un vector de términos independientes.

$$\begin{bmatrix} a_1 \langle w_1, u_1 \rangle & a_2 \langle w_2, u_1 \rangle & \dots & a_n \langle w_n, u_1 \rangle \\ a_1 \langle w_1, u_2 \rangle & a_2 \langle w_2, u_2 \rangle & \dots & a_n \langle w_n, u_2 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 \langle w_1, u_n \rangle & a_2 \langle w_2, u_n \rangle & \dots & a_n \langle w_n, u_n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(x, y, t), u_1 \rangle \\ \langle f(x, y, t), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(x, y, t), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

De la matriz anterior; resulta el vector de coeficiente al factorizar cada uno de las componentes de la matriz para encontrar la aproximación lineal o aproximación numérica.

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, u_1 \rangle & \langle w_2, u_1 \rangle & \dots & \langle w_n, u_1 \rangle \\ \langle w_1, u_2 \rangle & \langle w_2, u_2 \rangle & \dots & \langle w_n, u_2 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle w_1, u_n \rangle & \langle w_2, u_n \rangle & \dots & \langle w_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(x, y, t), u_1 \rangle \\ \langle f(x, y, t), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(x, y, t), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

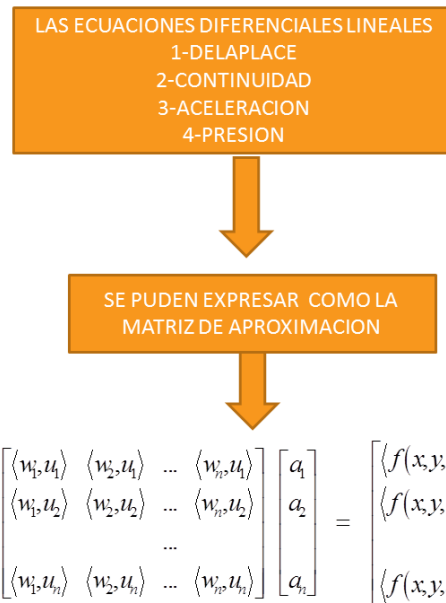


Fig No 2.3. Ecuaciones diferenciales lineales

Donde el vector formado por los coeficientes son las incógnitas a determinar.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(x, y, t), u_1 \rangle \\ \langle f(x, y, t), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(x, y, t), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Al reemplazar los términos diferenciales individuales de las ecuaciones de Navier-Stokes por funciones polinomial algebraicas de tres variables que conectan valores en nodos de la red finita; se introducen errores de truncamiento en cada una de las componentes  $(i, j)$  de la matriz.

La matriz de aproximación obtenida es una forma generalizada del proceso de aproximación para el caso lineal; donde la función  $w_j(x, y, t)$ , pueden ser sustituida por los operadores Laplacino y Gradiente para cada una de las variables por determinar (velocidades en x, velocidades y, presiones en x y presiones y). Estas variables por determinar son sustituidas por las funciones base  $u_j(x, y, t)$  aplicado el operador correspondiente en las ecuaciones de Navier Stokes para cada componente  $(i, j)$  de la matriz ; se realiza el producto punto con la función de aproximación  $u_i(x, y, t)$  correspondiente; resultado aproximaciones locales en cada una de las componente  $(i, j)$  de la matriz de aproximación numérica resultante para cada uno de los coeficientes  $a_j$  por determinar. En cada componente  $(i, j)$  de la matriz se realiza la integración numérica correspondiente a la componente la ecuación (2.16).

### **2.3.2 Discretizacion de las ecuaciones no lineales de Navier Stokes por el método de Galerkin.**

Una función bilineal  $F : V \times V \rightarrow R$  queda especificada mediante una matriz trilineal, por lo tanto, es un mapeo bilineal; entonces existe una matriz  $[F]$  de  $n \times n$  dimensiones que tienen componentes  $F_{ijk}$  para determinar la forma cuadrática.[16].

Otro tipo especial de operador que pueden ocurrir muy frecuentemente en el estudio de problemas de valor de frontera es uno que mapea un par de elementos a los números reales, y que es lineal en cada uno de estos.[24].

Un operador  $B : U \times V \rightarrow R$  (U,V espacios lineales) se dice que es una *forma bilineal* si:

$$1. B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v), u, w \in U, v \in V$$

$$2. B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w), u \in U, v, w \in V$$

Formas bilineales continuas. Consideremos una forma bilineal  $B : U \times V \rightarrow R$ , donde  $U$  y  $V$  son espacios lineales normados. Si existe una constante  $k > 0$  tal que  $|B(u, v)| \leq k \|u\| \|v\|$  para todo  $u \in U, v \in V$ , entonces  $B$  es llamada una *forma bilineal continua*.

Formas bilineales  $H$  - elípticas. Dada una forma bilineal  $B : H \times H \rightarrow R$ , donde  $H$  es un espacio con producto interno, se dice que  $B$  es  $H$  - elíptica si existe una constante  $\alpha > 0$  tal que  $B(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in H$ .

Así una forma  $H$  - elíptica es acotada inferiormente.

Definición: Se denomina forma bilineal o cuadrática sobre un espacio vectorial  $V$  a toda aplicación:

$$F : V \times V \rightarrow R$$

Se consideran las funciones base  $y$  el conjunto de escalares  $\{ a_i a_j / 1 \leq i, j \leq n \} \subset R$ . Entonces, la aplicación  $F : V \times V \rightarrow R$

Definida por las siguientes expresiones:

$$\langle u_i, u_j \rangle \rightarrow \sum a_i a_j w_i w_j, \quad \forall i, j = 1, \dots, N \Rightarrow \text{forma bilineal algebraica}$$

$$\left\langle u_j \frac{\partial u_j}{\partial x}, u_i \right\rangle \rightarrow \sum a_i a_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N \Rightarrow \text{ecuacion diferencial no lineal}$$

La forma bilineal algebraica o cuadrática también se presentan en las ecuaciones diferencial no lineal. El producto punto definido en la expresión  $\left\langle u_j \frac{\partial u_j}{\partial x}, u_i \right\rangle$

genera el termino convectivo  $\sum a_i a_j w_j \frac{\partial w_j}{\partial x} w_i$ , correspondiente en las ecuaciones de

Navier- Stokes.

La ecuación diferencial no lineal que se transforma en las ecuaciones algebraicas no lineales a través del proceso de discretizacion que resulta ser una forma cuadrática, que es en general, un polinomio con cualquier número de variables. Existe un modo simple de asociar una matriz con una forma cuadrática o una ecuación diferencial parcial no lineal: como cada termino de la forma contiene el

producto  $w_i w_j$  o  $w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}$  de dos de las variables, el coeficiente  $a_i a_j$  de dicho producto puede tomarse como el elemento de la i-esima línea y la j-esima columna de una matriz; como, sin embargo,  $w_i w_j = w_j w_i$  o  $w_i \frac{\partial w_j}{\partial x} = w_j \frac{\partial w_i}{\partial x}$ , se asigna el mismo elemento a la i-esima línea y j-esima columna y a la j-esima línea e i-esima columna. Así, la forma cuadrática o la variedad diferenciable son equivalentes a una representación vectorial trilineal. Como se asignan coeficientes iguales a  $w_i w_j$  o  $(w_i \frac{\partial w_j}{\partial x})$  y a  $w_j w_i$  o  $(w_j \frac{\partial w_i}{\partial x})$ , la matriz  $A$  es simétrica respecto a su diagonal principal; dicha matriz satisface la condición  $A^T = A$  y recibe el nombre de matriz simétrica. Por consiguiente, es claro que, asociado a toda forma cuadrática en  $w_1, w_2, \dots, w_n$  o  $w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}, w_2 \frac{\partial w_2}{\partial x}, \dots, w_n \frac{\partial w_n}{\partial x}$ , existe una matriz simétrica de orden  $n$ , determinada en forma única, e inversamente.

El término convectivo se expresa de la siguiente forma:

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \therefore \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \therefore u = u_1 \quad \therefore v = u_2 \quad (2.20)$$

### 2.3.2.1 Componente de la velocidad del termino convectivo en el eje x.

Expandiendo la componente de la velocidad del termino convectivo del eje x, ecuación (2.21), como se muestra en las ecuaciones (2.22) y (2.23).

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.21)$$

Donde resultan las siguientes ecuaciones con sus respectivos coeficientes por determinar que son las incógnitas:

$$1. \quad u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = (a_i w_i) \left( a_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) = (a_1 w_1 + \dots + a_N w_N) \left( a_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \dots + a_N \frac{\partial w_N}{\partial y} \right) = \sum a_i a_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, i, j = 1, \dots, N \quad (2.22)$$

$$2. \quad u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = (b_i w_i) \left( a_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) = (b_1 w_1 + \dots + b_N w_N) \left( a_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \dots + a_N \frac{\partial w_N}{\partial y} \right) = \sum b_i a_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, i, j = 1, \dots, N \quad (2.23)$$

### 2.3.2.2 Componente de la velocidad del termino convectivo en el eje y.

De igual forma se presenta la expansión de ecuación (2.24) correspondiente a la componente de la velocidad en el eje y, que son las ecuaciones (2.25) y (2.26).

$$\left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.24)$$

$$3. \quad u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} = (a_i w_i) \left( b_j \frac{\partial w_j}{\partial x} \right) = (a_1 w_1 + \dots + a_N w_N) \left( b_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \dots + b_N \frac{\partial w_N}{\partial x} \right) = \sum a_i b_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, i, j = 1, \dots, N \quad (2.25)$$

$$4. \quad u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = (b_i w_i) \left( b_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) = (b_1 w_1 + \dots + b_N w_N) \left( b_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \dots + b_N \frac{\partial w_N}{\partial y} \right) = \sum b_i b_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, i, j = 1, \dots, N \quad (2.26)$$

Resultan las siguientes ecuaciones anteriores con sus respectivos coeficientes por determinar que son las incógnitas de este problema de investigación.

### 2.3.3 Construcción de la matriz trilineal

Las expresiones anteriores son equivalente a la representación vectorial trilineal de la forma bilineal del término convectivo; como se muestra:

$$\begin{array}{c} \text{vector de velocidad} \\ \Downarrow \\ \sum a_i a_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x} \Leftrightarrow \text{vector diferencial de velocidad}, \forall i, j = 1, \dots, N \quad (2.27) \\ \Downarrow \\ \text{vector coeficiente} \end{array}$$

A continuación se multiplica las funciones base con la función de aproximación para cada una de las componentes; donde la función de aproximación está representada por la  $w_k$ .

$$\begin{bmatrix} a_i a_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle + b_i a_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle \\ a_i b_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle + b_i b_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Se hace la sustitución como se muestra a continuación para cada uno de los términos de la velocidad y en cada uno de los términos componentes.

$$B_x^k = \left[ \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle \right] \quad (2.29)$$

$$(B_x^k)_{ij} = \iint w_i \frac{\partial w_j}{\partial x} w_k dx dy \quad (2.29 A)$$

$$B_y^k = \left[ \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle \right] \quad (B_y^k)_{ij} = \iint w_i \frac{\partial w_j}{\partial y} w_k dx dy \quad (2.30)$$

$$a_i a_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle + a_i b_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle = [a_1, \dots, a_N] [B_x^k] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} + [a_1, \dots, a_N] [B_x^k] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$b_i b_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle + b_i a_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle = [b_1, \dots, b_N] [B_y^k] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} + [a_1, \dots, a_N] [B_y^k] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ \vec{b} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

El desarrollo matemático anterior nos lleva nuevamente a una forma vectorial trilineal equivalente a la forma bilineal o cuadrática; donde está presente el término convectivo de la ecuación de Navier-Stokes y se ha realizado la discretización para llegar a una ecuación algebraica no lineal.

Vector de variables algebraicas

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ [b_1, \dots, b_N] [B_y^k] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \Leftrightarrow \text{vector coeficiente}, \forall i, j = 1, \dots, N \\ \Updownarrow \\ \text{vector coeficiente} \end{array} \quad (2.34)$$

Esta es la expresión general de la componente  $(i, j, k)$  de matriz que representa a la forma vectorial trilineal que se aplica en la generación de códigos computacionales en este trabajo.



## CAPITULO 3

### 3. ESQUEMA DE INTEGRACION PARA LA DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES.

Se procede a desarrollar la discretización para cada uno de las ecuaciones componentes que forman las ecuaciones de Navier Stokes. Se inicia la discretización con el Laplaciano en las direcciones (x,y); seguidamente el término no lineal, el gradiente de presión, la ecuación de continuidad, la aceleración de velocidad con sus dos componentes y finalmente las condiciones de contorno con la solución del método de Galerkin.



Fig No 3.1. Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales

#### 3.1.1 La integración numérica Laplaciano de la velocidad

La matriz de aproximación numérica obtenida anteriormente que es una forma generalizada; se sustituye por el Laplaciano de las velocidades (x,y) en cada una de sus componentes.

El estudio de las ecuaciones de Navier Stokes en este trabajo es bidimensional, en estado dinámico y también en estado estacionario; por lo tanto, se tienen

componentes en los ejes (x,y), dadas por las ecuaciones (3.1) , (3.2) y (3.3) correspondiente al Laplacino de la velocidad en los diferentes ejes.

$$\langle \nabla^2 u_k, u_i \rangle = \langle \nabla^2 u_x, u_i \rangle + \langle \nabla^2 u_y, u_i \rangle \quad (3.1)$$

$$\langle \nabla^2 u_x, u_i \rangle = a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \circ u_i d\Omega + a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \circ u_i d\Omega \quad (3.2)$$

$$\langle \nabla^2 u_y, u_i \rangle = a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \circ u_i d\Omega + a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \circ u_i d\Omega \quad (3.3)$$

### 3.1.2 La integración numérica Laplacino de la velocidad $u_x$ .

Como el operador Laplaciano de la velocidad es equivalente a la expresión (3.2); cada componente  $(i, j)$  de la matriz de aproximación es sustituido por los componentes  $(i, j)$  del Laplacino de la velocidad  $u_x$  como se muestra a continuación.

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j, u_i \right\rangle = a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \circ u_i d\Omega + a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \circ u_i d\Omega \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x^2}, u_1 + \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y^2}, u_1 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2}, u_1 + \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial y^2}, u_1 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial^2 u_{xn}}{\partial x^2}, u_1 + \frac{\partial^2 u_{xn}}{\partial y^2}, u_1 \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x^2}, u_2 + \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y^2}, u_2 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2}, u_2 + \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial y^2}, u_2 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial^2 u_{xn}}{\partial x^2}, u_2 + \frac{\partial^2 u_{xn}}{\partial y^2}, u_2 \right\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x^2}, u_n + \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y^2}, u_n \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2}, u_n + \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial y^2}, u_n \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial^2 u_{xn}}{\partial x^2}, u_n + \frac{\partial^2 u_{xn}}{\partial y^2}, u_n \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(x, y, t), u_1 \rangle \\ \langle f(x, y, t), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(x, y, t), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

El procedimiento a seguir en esta parte es el siguiente; remplazar las funciones base y de aproximación por los polinomios correspondientes a las variables separables.

$$\sum_{j=1}^n a_j u_j(x, y, t) = a_1 x^{xe(1j)} y^{ye(1j)} t^{te(1j)} + a_2 x^{xe(2j)} y^{ye(2j)} t^{te(2j)} + a_3 x^{xe(3j)} y^{ye(3j)} t^{te(3j)} + \dots + a_n x^{xe(nj)} y^{ye(nj)} t^{te(nj)} \quad (3.6)$$

Se realiza la segunda derivada de la velocidad  $u_x(x, y, t)$  de cada componente  $(i, j)$  con respecto a  $(x, y)$  en las funciones base y seguidamente el producto punto con la función de aproximación.

Tanto las funciones base y de aproximación se pueden expresar como funciones de variables separables; donde se realiza una discretización local de la componente  $(i, j)$  en la matriz de aproximación como se muestra a continuación en forma generalizada.

$$u_x(x, y, t) = x^{xe(j)} y^{ye(j)} t^{te(j)} \quad (3.7)$$

$$u_i(x, y, t) = x^{xe(i)} y^{ye(i)} t^{te(i)} \quad (3.8)$$

De la siguiente forma se desarrolla el Laplaciano para cada componente en la dirección del eje x.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_x(x, y, t)}{\partial x^2} = xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)-2}y^{ye(j)}t^{te(j)+te(i)} \\ \frac{\partial^2 u_x(x, y, t)}{\partial y^2} = ye(j)(ye(j)-1)x^{xe(j)}y^{ye(j)-2}t^{te(j)+te(i)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{componente } (i, j)$$

Este es el producto punto generalizado para cada componente entre el Laplaciano y la función de aproximación al sustituir la función de base en el Laplaciano.

$$(xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)-2}y^{ye(j)}t^{te(j)+te(i)}) \circ (x^{xe(i)}y^{ye(i)}t^{te(i)}) = xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)+xe(i)-2}y^{ye(j)+ye(i)}t^{te(j)+te(i)} \quad (3.9)$$

Esta expresión (3.9) corresponde a los aportes x

$$(ye(j)(ye(j)-1)x^{xe(j)}y^{ye(j)-2}t^{te(j)+te(i)}) \circ (x^{xe(i)}y^{ye(i)}t^{te(i)}) = ye(j)(ye(j)-1)x^{xe(j)+xe(i)}y^{ye(j)+ye(i)-2}t^{te(j)+te(i)} \quad (3.10)$$

De forma similar se llega a los aportes y correspondiente a la ecuación (3.10).

Las ecuaciones (3.11) y (3.12) describen el cálculo matemático generalizado de cada componente  $(i, j)$  de la matriz de integración numérica.

$$a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \circ u_i d\Omega = a_x \iiint_{[0,1]} xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)+xe(i)-2}y^{ye(j)+ye(i)}t^{te(j)+te(i)}\partial x\partial y\partial t \quad (3.11)$$

$$a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \circ u_i d\Omega = a_y \iiint_{[0,1]} ye(j)(ye(j)-1)x^{xe(j)+xe(i)}y^{ye(j)+ye(i)-2}t^{te(j)+te(i)}\partial x\partial y\partial t \quad (3.12)$$

Las soluciones en las integrales triples con límites entre [0,1] utilizando las funciones de integración de scilab o la implementación de un algoritmo basados en las aproximaciones de Simpson que tienen un costo muy alto computacionalmente de tiempo. Por lo anterior; se desarrolló matemáticamente la integración triple en cada componente  $(i, j)$  de la matriz resultando las ecuaciones (3.13) y (3.14) que son los resultados de la integración numérica local correspondiente a la ecuación (3.15).

$$\text{aportex de } u_x(x, y, t) = a_x xe(j)(xe(j)-1)/(xe(j)+xe(i)-1)(ye(j)+ye(i)+1)(te(j)+te(i)+1) \quad (3.13)$$

$$\text{aportey de } u_x(x, y, t) = a_y ye(j)(ye(j)-1)/(ye(j)+ye(i)-1)(xe(j)+xe(i)+1)(te(j)+te(i)+1) \quad (3.14)$$

$$M = \text{aportex de } u_x(x, y, t) + \text{aportey de } u_x(x, y, t) \quad (3.15)$$

De acuerdo con los desarrollos matemáticos realizados en el método de Galerkin, se aplica la solución de la integral para cada componente  $(i, j)$  de la matriz, como el objetivo principal para alcanzar una solución numérica de alta precisión con el menor costo computacional.

### 3.1.3 La integración numérica del Laplaciano de la velocidad $u_y$ .

De igual modo se desarrolla matemáticamente el Laplaciano de la velocidad  $u_y(x, y, t)$ , correspondiente a la ecuación (3.16); para cada componente  $(i, j)$  de la matriz de aproximación que es sustituido por los componentes  $(i, j)$  del Laplaciano de la velocidad  $u_y$  como se muestra a continuación.

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j, u_i \right\rangle = a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \circ u_i d\Omega + a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \circ u_i d\Omega \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial x^2}, u_1 + \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial y^2}, u_1 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial x^2}, u_1 + \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial y^2}, u_1 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial^2 u_{yn}}{\partial x^2}, u_1 + \frac{\partial^2 u_{yn}}{\partial y^2}, u_1 \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial x^2}, u_2 + \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial y^2}, u_2 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial x^2}, u_2 + \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial y^2}, u_2 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial^2 u_{yn}}{\partial x^2}, u_2 + \frac{\partial^2 u_{yn}}{\partial y^2}, u_2 \right\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial x^2}, u_n + \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial y^2}, u_n \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial x^2}, u_n + \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial y^2}, u_n \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial^2 u_{yn}}{\partial x^2}, u_n + \frac{\partial^2 u_{yn}}{\partial y^2}, u_n \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(X), u_1 \rangle \\ \langle f(X), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(X), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

El procedimiento a seguir en esta parte es el siguiente, es similar al anterior, donde se remplazan las funciones base y de aproximación por los polinomios correspondientes. Se realiza la segunda derivada de la velocidad  $u_y(x,y,t)$  de cada componente  $(i, j)$  con respecto a  $(x,y)$  en las funciones base y seguidamente el producto punto con la función de aproximación.

$$a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \circ u_i d\Omega + a_j \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \circ u_i d\Omega \quad (3.16)$$

Por último, la integración numérica local correspondiente a la ecuación (3.16) para la componente  $(i, j)$  de la matriz del laplaciano de la velocidad  $u_x(x,y,t)$  en la dirección del eje  $y$ . Tanto las funciones base y de aproximación se pueden expresar como funciones de variables separables; donde se realiza una discretización local de la componente  $(i, j)$  de la matriz de aproximación como se muestra a continuación.

$$u_y(x, y, t) = x^{xe(j)} y^{ye(j)} t^{te(j)} \quad (3.18)$$

$$u_i(x, y, t) = x^{xe(i)} y^{ye(i)} t^{te(i)} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)-2}y^{ye(j)}t^{te(j)+te(i)} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = ye(j)(ye(j)-1)x^{xe(j)}y^{ye(j)-2}t^{te(j)+te(i)} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & (xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)-2}y^{ye(j)}t^{te(j)+te(i)}) \circ (x^{xe(i)}y^{ye(i)}t^{te(i)}) \\ & = xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)+xe(i)-2}y^{ye(j)+ye(i)}t^{te(j)+te(i)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & (ye(j)(ye(j)-1)x^{xe(j)}y^{ye(j)-2}t^{te(j)+te(i)}) \circ (x^{xe(i)}y^{ye(i)}t^{te(i)}) \\ & = ye(j)(ye(j)-1)x^{xe(j)+xe(i)}y^{ye(j)+ye(i)-2}t^{te(j)+te(i)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Las componenetes de las velocidades  $u_y(x,y,t)$  del laplaciano en la dirección del eje  $y$ , corresponden a las siguientes ecuaciones:

$$a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \circ u_i(x,y,t) d\Omega = a_j \iiint_{[0,1]} xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)+xe(i)-2}y^{ye(j)+ye(i)}t^{te(j)+te(i)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.24)$$

$$a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \circ u_i(x,y,t) d\Omega = a_j \iiint_{[0,1]} ye(j)(ye(j)-1)y^{ye(j)+ye(i)-2}x^{xe(j)+xe(i)}t^{te(j)+te(i)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.25)$$

Las soluciones en las integrales triples utilizan los límites entre  $[0,1]$ . Por lo anterior; se desarrolla matemáticamente la integración triple en cada componente  $(i, j)$  de la matriz resultando las ecuaciones (3.26) y (3.27) que son los resultados de la integración numérica local correspondiente a la ecuación (3.28).

$$\text{aportex de } u_y(x,y,t) = a_j xe(j)(xe(j)-1)/(xe(j)+xe(i)-1)(ye(j)+ye(i)+1)(te(j)+te(i)+1) \quad (3.26)$$

$$\text{aportey de } u_y(x,y,t) = a_j ye(j)(ye(j)-1)/(ye(j)+ye(i)-1)(xe(j)+xe(i)+1)(te(j)+te(i)+1) \quad (3.27)$$

$$B_0 = \text{aportex de } u_y(x,y,t) + \text{aportey de } u_y(x,y,t) \quad (3.28)$$

De acuerdo con los desarrollos matemáticos realizados en el método de Galerkin, se aplica la solución de la integral para cada componente  $(i, j)$  de la matriz,

como el objetivo principal de alcanzar una solución numérica de alta precisión con el menor costo computacional.

### 3.2 La integración numérica del gradiente de presión.

La discretización se ha formulado en tres pasos; de igual forma se aplicará para cada componente (x,y) de la variación de la presión respectivamente.

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j, u_i \right\rangle = \langle \nabla p_k, u_i \rangle \quad (3.59)$$

#### 3.2.1 Gradiente de presión $u_x$ .

Cuando se extiende la función presión en cada una de las componentes se genera la matriz de aproximación numérica de la variación de la presión, a la cual, se aplica la discretización.

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial u_{x1}}{\partial x}, u_1 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{x2}}{\partial x}, u_1 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{xn}}{\partial x}, u_1 \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial u_{x1}}{\partial x}, u_2 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{x2}(x,y,t)}{\partial x}, u_2 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{xn}}{\partial x}, u_2 \right\rangle \\ & & \dots & \\ \left\langle \frac{\partial u_{x1}}{\partial x}, u_n \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{x2}}{\partial x}, u_n \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{xn}}{\partial x}, u_n \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(X), u_1 \rangle \\ \langle f(X), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(X), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$c_j \int_{\Omega} \frac{\partial u_x(x,y,t)}{\partial x} \circ u_i(x,y,t) d\Omega = c_j \iiint_{[0,1]} x e(j) x^{x e(j)+x e(i)-1} y^{y e(j)+y e(i)} t^{t e(j)+t e(i)+1} dx dy dt \quad (3.61)$$

Las soluciones en las integrales triples con límites entre [0,1]; da como resultado en cada componente de la matriz correspondiente al aporetex.

$$\text{aportex} = c_j x e(j) / (x e(j) + x e(i)) (y e(j) + y e(i) + 1) (t e(j) + t e(i) + 1) \quad (3.62)$$

### 3.2.2 Gradiente de presión $u_y$ .

Análogamente el proceso anterior se realiza para la componente de la presión en el eje  $y$ ; dando como resultado la matriz de aproximación numérica de la variación de la presión, a la cual, se aplica la discretización.

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial u_{y1}}{\partial y}, u_1 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{y2}}{\partial y}, u_1 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{yn}}{\partial y}, u_1 \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial u_{y1}}{\partial y}, u_2 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{y2}}{\partial y}, u_2 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{yn}}{\partial y}, u_2 \right\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle \frac{\partial u_{y1}}{\partial y}, u_n \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{y2}}{\partial y}, u_n \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{yn}}{\partial y}, u_n \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(X), u_1 \rangle \\ \langle f(X), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(X), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Para cada componente  $(i,j)$  de la matriz se llega a la siguiente expresión:

$$c_j \int_{\Omega} \frac{\partial u_y(x, y, t)}{\partial y} \circ u_i(x, y, t) d\Omega = c_j \iiint_{[0,1]} ye(j)y^{ye(j)+ye(i)-1} x^{xe(j)+xe(i)+1} t^{te(j)+te(i)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.64)$$

Las soluciones en las integrales triples con límites entre  $[0,1]$ ; se llega a la componente  $(i,j)$  de la matriz de la variación de la presión del eje  $y$ .

$$aportey = c_j ye(j) / (ye(j) + ye(i)) (xe(j) + xe(i) + 1) (te(j) + te(i) + 1) \quad (3.65)$$

### 3.3 La integración numérica aceleración de la velocidad

Esta es una ecuación diferencial lineal que al realizar las operaciones que se muestran a continuación se genera la matriz de aproximación.

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y, t), u_i(x, y, t) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u_k(x, y, t)}{\partial t}, u_i(x, y, t) \right\rangle \quad (3.66)$$



### 3.3.1 Aceleración de la velocidad $u_x$ .

En cada componente (i,j) de la matriz que se muestra a continuación , se realiza el \*proceso de discretización.

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial u_{x1}}{\partial t}, u_1 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}, u_1 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{xn}}{\partial t}, u_1 \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial u_{x1}}{\partial t}, u_2 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}, u_2 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{xn}}{\partial t}, u_2 \right\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle \frac{\partial u_{x1}}{\partial t}, u_n \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u_{x2}}{\partial t}, u_n \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u_{xn}}{\partial t}, u_n \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(X), u_1 \rangle \\ \langle f(X), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(X), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_x(x, y, t)}{\partial t} \circ u_i(x, y, t) d\Omega = \iiint_{[1,0]} te(j) t^{te(j)+te(i)-1} y^{ye(j)+ye(i)} x^{xe(j)+xe(i)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.68)$$

De la integral anterior resulta, la componente (i,j) de la aceleración correspondiente al eje x ; que se denomina aportex.

$$M_{tx} = \text{aportex} = te(j) / (te(j)+te(i)) (ye(j)+ye(i)+1) (xe(j)+xe(i)+1) \quad (3.69)$$

### 3.3.2 Aceleración de la velocidad $u_y$ .

Similarmenete en cada componente de la matriz se efectuará el proceso de discretización; para la componente de la aceleración en la dirección del eje y.

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_1 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_1 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_1 \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_2 \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_2 \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_2 \right\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_n \right\rangle & \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_n \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u_n \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(X), u_1 \rangle \\ \langle f(X), u_2 \rangle \\ \dots \\ \langle f(X), u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_y}{\partial t} \circ u_i(x, y, t) d\Omega = \iiint_{[1,0]} te(k) x^{te(k)+te(i)-1} y^{ye(k)+ye(i)} x^{te(k)+te(i)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.71)$$

Las soluciones en las integrales triples con límites entre [0,1]; se llega a la componente (i,j) de la matriz de aceleración en la dirección del eje y.

$$M_{ty} = \text{aportey} = te(k) / (te(k) + te(i)) (ye(k) + ye(i) + 1) (xe(k) + xe(i) + 1) \quad (3.72)$$

### 3.5 Discretización de la ecuación de continuidad.

La integración numérica de la ecuación de continuidad corresponde a las ecuaciones (3.75) y (3.76).

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_x}{\partial x} \circ u_i d\Omega = \iiint_{[1,0]} xe(k) x^{xe(k)+xe(i)-1} y^{ye(k)+ye(i)} t^{te(k)+te(i)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.73)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_y}{\partial y} \circ u_i d\Omega = \iiint_{[1,0]} ye(k) y^{ye(k)+ye(i)-1} t^{te(k)+te(i)} x^{te(k)+te(i)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.74)$$

Las ecuaciones (3.75) y (3.76) muestran las contribuciones de los aportes de la ecuación de continuidad en las variaciones de x y y respectivamente.

$$D = (xe(i) / ((xe(i) + xe(j)) * (ye(i) + ye(j) + 1) * (te(i) + te(j) + 1))) \quad (3.75)$$

$$H = (ye(i) / ((xe(i) + xe(j) + 1) * (ye(i) + ye(j)) * (te(i) + te(j) + 1))) \quad (3.76)$$

### 3.4 La integración numérica del término convectivo.

La presencia de término convectivo o no lineal de las ecuaciones es un tema interesante desde el punto de vista numérico ya que es bien sabido que es fuente de dificultad desde el punto de vista matemático y computacional.

Las componentes de las velocidades de la divergencia en la dirección del eje x forman parte del término convectivo en las ecuaciones de Navier Stokes.

Encontramos una matriz trilineal que tiene alto costo computacional en su solución computacional.

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j, u_i \right\rangle = \langle u_k \nabla u_k, u_i \rangle \quad (3.29)$$

### 3.4.1 Término convectivo de la Divergencia de la velocidad $u_x$ .

Esta es la matriz resultante al aplicar el proceso de multiplicación de las velocidades en la dirección del los eje (x,y), la variación de la velocidad (x,y) y la velocidad de aproximación.

$$[Du]u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i w_i \\ b_j w_j \end{bmatrix}, i, j = 1, \dots, N \quad (3.31)$$

$$1. u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = (a_i w_i) \left( a_j \frac{\partial w_j}{\partial x} \right) = (a_1 w_1 + \dots + a_N w_N) \left( a_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \dots + a_N \frac{\partial w_N}{\partial x} \right) = a_i a_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, i, j = 1, \dots, N \quad (3.32)$$

$$2. u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = (b_i w_i) \left( a_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) = (b_1 w_1 + \dots + b_N w_N) \left( a_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \dots + a_N \frac{\partial w_N}{\partial y} \right) = b_i a_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, i, j = 1, \dots, N \quad (3.33)$$

$$3. u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} = (a_i w_i) \left( b_j \frac{\partial w_j}{\partial x} \right) = (a_1 w_1 + \dots + a_N w_N) \left( b_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \dots + b_N \frac{\partial w_N}{\partial x} \right) = a_i b_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, i, j = 1, \dots, N \quad (3.34)$$

$$4. u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = (b_i w_i) \left( b_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) = (b_1 w_1 + \dots + b_N w_N) \left( b_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \dots + b_N \frac{\partial w_N}{\partial y} \right) = b_i b_j w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, i, j = 1, \dots, N \quad (3.35)$$

$$\langle E(u), w_k \rangle, k = 1, \dots, N$$

$$[Du]u = \begin{bmatrix} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a_i a_j \frac{\partial w_i}{\partial x} + b_i a_j \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ a_i b_j \frac{\partial w_j}{\partial x} + b_i b_j \frac{\partial w_j}{\partial y} \end{bmatrix} \approx [Du]u, \forall, k = 1, \dots, N \quad (3.36)$$

$$[Du]u = \begin{bmatrix} a_i a_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle + b_i a_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle \\ a_i b_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle + b_i b_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$a^T B_x^k a = [a_1, \dots, a_N] \begin{bmatrix} \left\langle w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}, w_k \right\rangle & \left\langle w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x}, w_k \right\rangle & \dots & \left\langle w_1 \frac{\partial w_N}{\partial x}, w_k \right\rangle \\ & \left\langle w_i \frac{\partial w_i}{\partial x}, w_k \right\rangle & \dots & \\ & & & \left\langle w_N \frac{\partial w_N}{\partial x}, w_k \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$B_x^k = \left[ \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle \right] \quad (3.39)$$

$$(B_x^k)_{ij} = \iint w_i \frac{\partial w_j}{\partial x} w_k dx dy \quad (3.40)$$

$$B_y^k = \left[ \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle \right] \quad (3.41)$$

$$(B_y^k)_{ij} = \iint w_i \frac{\partial w_j}{\partial y} w_k dx dy \quad (3.42)$$

Las dos ecuaciones que a continuación se expresan corresponden al término convectivo en la dirección del eje x; que son las componentes de la matriz de aproximación donde se desarrolla el proceso de discretización que se expresó anteriormente.

$$a_i a_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle = [a_1, \dots, a_N] [B_x^k] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$b_i a_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle = [b_1, \dots, b_N] [B_y^k] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$a_i b_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial x}, w_k \right\rangle = [a_1, \dots, a_N] [B_x^k] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$b_i b_j \left\langle w_i \frac{\partial w_j}{\partial y}, w_k \right\rangle = [b_1, \dots, b_N] [B_y^k] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ \vec{b} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$[Du] u = \begin{bmatrix} \vec{a}^T B_x^k \vec{a} + \vec{b}^T B_y^k \vec{a} \\ \vec{a}^T B_x^k \vec{b} + \vec{b}^T B_y^k \vec{b} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$a_j \int_{\Omega} u_x \circ \frac{\partial u_x}{\partial x} \circ u_i \, d\Omega = a_j \iiint_{[0,1]} x e(j) x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)-1} y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)} t^{te(j)+te(i)+te(k)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.49)$$

$$a_j \int_{\Omega} u_y \circ \frac{\partial u_x}{\partial y} \circ u_i \, d\Omega = a_j \iiint_{[0,1]} y e(j) y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)-1} x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)} t^{te(j)+te(i)+te(k)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.50)$$

Las soluciones en las integrales triples con límites entre [0,1] utilizando las funciones de integración de scilab o la implementación de un algoritmo basados en las aproximaciones de Simpson tienen un costo muy alto computacionalmente de tiempo.

$$\text{aportex} = a_j \cdot x e(j) / (x e(j) + x e(i) + x e(k)) (y e(j) + y e(i) + y e(k) + 1) (t e(j) + t e(i) + t e(k) + 1) \quad (3.51)$$

$$\text{aportey} = a_j \cdot y e(j) / (y e(j) + y e(i) + y e(k)) (x e(j) + x e(i) + x e(k) + 1) (t e(j) + t e(i) + t e(k) + 1) \quad (3.52)$$

$$M = \text{aportex de trilinear } u_x(x,y,t) + \text{aportey de Trilinear } u_x(x,y,t) \quad (3.53)$$

De acuerdo con los desarrollos matemáticos realizados en el método de Free Galerkin, se aplica la solución de la integral para cada componente  $(i, j, k)$  de la matriz, como el objetivo principal alcanzar una solución numérica de alta precisión con el menor costo computacional.[25] [26].

### 3.4.2 Terminio convectivo de la Divergencia de la velocidad $u_y$ .

Las dos ecuaciones que muestran a continuación corresponden al terminio convectivo en la dirección del eje  $y$ ; que son las componentes de la matriz de aproximación donde se desarrolla el proceso de discretización que se expresó anteriormente.

$$a_j \int_{\Omega} u_x \circ \frac{\partial u_y}{\partial x} \circ u_i \, d\Omega = a_j \iiint_{[0,1]} x e(j) x^{x e(j)+x e(i)+x e(k)-1} y^{y e(j)+y e(i)+y e(k)} t^{t e(j)+t e(i)+t e(k)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.54)$$

$$a_j \int_{\Omega} u_y \circ \frac{\partial u_y}{\partial y} \circ u_i \, d\Omega = a_j \iiint_{[0,1]} y e(j) y^{y e(j)+y e(i)+y e(k)-1} x^{x e(j)+x e(i)+x e(k)} t^{t e(j)+t e(i)+t e(k)} \partial x \partial y \partial t \quad (3.55)$$

Las soluciones en las integrales triples con límites entre [0,1] utilizando las funciones de integración de scilab o la implementación de un algoritmo basados en las aproximaciones de Simpson tiene un costo muy alto computacionalmente de tiempo.

$$\text{aportex} = a_j \cdot x e(j) / (x e(j) + x e(i) + x e(k)) (y e(j) + y e(i) + y e(k) + 1) (t e(j) + t e(i) + t e(k) + 1) \quad (3.56)$$

$$\text{aportey} = a, ye(j) / (ye(j) + ye(i) + ye(k)) (xe(j) + xe(i) + xe(k) + 1) (te(j) + te(i) + te(k) + 1) \quad (3.57)$$

$$B = \text{aportex de trilinear } u_y(x,y,t) + \text{aportey de Trilinear } u_y(x,y,t) \quad (3.58)$$

### 3.5 Discretizacion de las condiciones de contorno.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , un dominio abierto y conexo, cuyo contorno se llama  $(\Gamma)$ , lo suficientemente regular tal que se pueda definir un vector unitario normal excepto en un conjunto finito de medida nula (Lipchitz-continuo). Consideremos entonces, un sistema de ecuaciones definidas en este dominio  $\Omega$ , cuyas soluciones deberán cumplir las condiciones de contorno impuestas sobre  $(\Gamma)$  y las diversas excitaciones distribuidas, correspondientes a cada caso particular.

### 3.6 Solución del método de Galerkin

En la solución general se encuentran con la construcción la matriz lineal y la bilineal y las ecuaciones de contorno [27],[28],[29].

Convenciones de términos correspondiente a las matrices.

Mtx : Aceleración de velocidad en el eje x.

Mty : Aceleración de velocidad en el eje y.

M<sub>o</sub> : Terminio difusivo en el eje x.

B<sub>o</sub> : Terminio difusivo en el eje y.

D : Ecuación de continuidad componente en el eje x

H : Ecuación de continuidad componente en el eje y

.a : Coeficiente de la aceleración, terminio difusivo y Convectivo en el eje x.

.b : Coeficiente de la aceleración, terminio difusivo y Convectivo en el eje y.

.c : Coeficiente del gradiente de presión y ecuación de Continuidad.

$$A = \begin{bmatrix} (Mtx - Mo) & Cero & D \\ Cero & (Mty - Bo) & H \\ D & H & Cero \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

• Solución lineal

$$Lap = \begin{bmatrix} (Mtx - Mo) & Cero & D \\ Cero & (Mty - Bo) & H \\ D & H & Cero \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

- Esquema de solución no lineal o cuadrática.

$$[a \ b] \begin{bmatrix} M & B \\ M & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\begin{bmatrix} aM & aB \\ bM & bB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} aMa & aBb \\ bMa & bBb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

- Esquema trilineal de solución total sin las condiciones de fronteras.

$$Y = Lap + [a \ b] \begin{bmatrix} M & B \\ M & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (3.80)$$



## CAPITULO 4

### 4. Aplicación de Ec Navier Stokes bidimensional dinámica en flujos de fluidos entre planos paralelos.

En este capítulo se presentan las ecuaciones de Navier Stokes que describen el comportamiento de un fluido incomprensible en régimen laminar entre planos paralelos para posteriormente plantear su resolución mediante el método de elementos finitos utilizando el procedimiento clásico de Galerkin se toman las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 3.

Para la descripción de fluidos en movimiento en general se utilizan las denominadas ecuaciones de Navier–Stokes en derivadas parciales no lineales que surgen de aplicar principios de conservación de la mecánica que representa el comportamiento de un fluido en un volumen de control , utiliza como variables el campo vectorial de la velocidad  $u \simeq u_k(x, y, t)$  que puede ser descrita por medio de una función vectorial de la posición  $X \simeq x(x, y, t)$ , dentro del área de estudio y en el instante t entre  $[0,1]$  y el campo escalar de las presiones.[27],[28]. Como se expresó anteriormente no existe solución analítica para dichas ecuaciones, salvo en el caso de algunos flujos simples en dominios poco complejos, por lo tanto la aproximación de la solución de las ecuaciones de Navier–Stokes por medio de simulación numérica resulta un activo campo de investigación.[30].

En este trabajo se aplica una implementación del método de Galerkin al flujo laminar entre planos paralelos. Este desarrollo fue programado en lenguaje Scilab R: C, versión 5.3.3 o la 5.4.1

#### 4.1 Modelo Matemático: Galerkin

Con el fin de comprobar la eficacia de los algoritmos computacionales, se ha partido de un ejemplo que es flujo laminar entre dos capas paralelas, creando un programa en el lenguaje scilab que realizara exactamente los mismos pasos que se describen en la formulación metodológica. Este ejemplo consiste en la resolución

de las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes 2D dinámicas, ecuaciones lineales y no lineales que gobiernan fluidos incompresibles.[25].

El experimento de simulación numérica, en concreto, es el conocido test de la cavidad rectangular,  $[0, 1]$ , llena de un fluido al que se impone una velocidad constante en lado superior, en dirección paralela este, y en los lados restantes se impone una condición de no deslizamiento. La discretización en espacio se realiza mediante la formulación de galerkin formada por una matriz de  $21 \times 21$  para el caso de polinomios de orden dos (2) con la posibilidad de cambiar el orden de polinomio.

- **Calculo computacional de las funciones base y de aproximación**

Este algoritmo iterativo propuesto genera los exponentes de las funciones base y de aproximación para diferentes órdenes del polinomio desarrollada en el capítulo 2 como se muestra a continuación.

$$\sum_{j=1}^n a_j X_j(x, y, t) = a_1 x^{xe(1j)} y^{ye(1j)} t^{te(1j)} + a_2 x^{xe(2j)} y^{ye(2j)} t^{te(2j)} + a_3 x^{xe(3j)} y^{ye(3j)} t^{te(3j)} + \dots + a_n x^{xe(nj)} y^{ye(nj)} t^{te(nj)} \quad (2.13)$$

$$u_i(x, y, t) = a_1 x^{xe(1i)} y^{ye(1i)} t^{te(1i)} + a_2 x^{xe(2i)} y^{ye(2i)} t^{te(2i)} + a_3 x^{xe(3i)} y^{ye(3i)} t^{te(3i)} + \dots + a_n x^{xe(ni)} y^{ye(ni)} t^{te(ni)} \quad (2.14)$$

- **Termino convectivo en la velocidad en la dirección del eje x.**

Se realiza el cálculo del termino convectivo correspondiente a la velocidad  $U_x$  en cada componente de la matriz. Inicialmente se utilizaron las funciones de Scila y el método de Simpson para realizar el cálculo de las integrales, pero esas dos formas de cálculo tienen un costo computacional muy alto. Desarrollando la integración de este término se llega a una generalidad que facilita el cálculo numérico de las componentes  $(i, j, k)$  como se expreso en el capítulo 3 correspondiente a las ecuaciones (3.51), (3.52) y (3.53).

$$aportex = a_j x^{xe(j)} / (x^{xe(j)} + x^{xe(i)} + x^{xe(k)}) (y^{ye(j)} + y^{ye(i)} + y^{ye(k)} + 1) (t^{te(j)} + t^{te(i)} + t^{te(k)} + 1) \quad (3.51)$$

$$aportey = a_j y^{ye(j)} / (y^{ye(j)} + y^{ye(i)} + y^{ye(k)}) (x^{xe(j)} + x^{xe(i)} + x^{xe(k)} + 1) (t^{te(j)} + t^{te(i)} + t^{te(k)} + 1) \quad (3.52)$$

$$M = aportex \text{ de trilinear } u_x(x, y, t) + aportey \text{ de Trilinear } u_x(x, y, t) \quad (3.53)$$

- **Termino convectivo en la velocidad en la dirección del eje y.**

De forma simultánea y similar estos resultados se desarrollaron en el capítulo 3 correspondiente al cálculo numérico del termino convectivo de la velocidad  $U_y$  en cada componente de la matriz.

$$\text{aportex} = a_j x_e(j) / (x_e(j) + x_e(i) + x_e(k)) (y_e(j) + y_e(i) + y_e(k) + 1) (t_e(j) + t_e(i) + t_e(k) + 1) \quad (3.56)$$

$$\text{aportey} = a_j y_e(j) / (y_e(j) + y_e(i) + y_e(k)) (x_e(j) + x_e(i) + x_e(k) + 1) (t_e(j) + t_e(i) + t_e(k) + 1) \quad (3.57)$$

$$B = \text{aportex de trilinear } u_y(x,y,t) + \text{aportey de Trilinear } u_y(x,y,t) \quad (3.58)$$

- **Laplaciano con respecto a las velocidades  $u_x$**

$$\text{aportex de } u_x(x,y,t) = a_x x_e(j) (x_e(j) - 1) / (x_e(j) + x_e(i) - 1) (y_e(j) + y_e(i) + 1) (t_e(j) + t_e(i) + 1) \quad (3.13)$$

$$\text{aportey de } u_x(x,y,t) = a_y y_e(j) (y_e(j) - 1) / (y_e(j) + y_e(i) - 1) (x_e(j) + x_e(i) + 1) (t_e(j) + t_e(i) + 1) \quad (3.14)$$

$$M_0 = \text{aportex de } u_x(x,y,t) + \text{aportey de } u_x(x,y,t) \quad (3.15)$$

- **Laplaciano con respecto a las velocidades  $u_y$**

$$\text{aportex de } u_y(x,y,t) = a_j x_e(j) (x_e(j) - 1) / (x_e(j) + x_e(i) - 1) (y_e(j) + y_e(i) + 1) (t_e(j) + t_e(i) + 1) \quad (3.26)$$

$$\text{aportey de } u_y(x,y,t) = a_j y_e(j) (y_e(j) - 1) / (y_e(j) + y_e(i) - 1) (x_e(j) + x_e(i) + 1) (t_e(j) + t_e(i) + 1) \quad (3.27)$$

$$B_0 = \text{aportex de } u_y(x,y,t) + \text{aportey de } u_y(x,y,t) \quad (3.28)$$

- **Aceleración de la velocidad con respecto al eje y.**

Se genera la matriz de aceleración con respecto a la aceleración en el eje x

$$\text{aportex} = t_e(j) / (t_e(j) + t_e(i)) (y_e(j) + y_e(i) + 1) (x_e(j) + x_e(i) + 1) \quad (3.69)$$

- **Aceleración de la velocidad con respecto al eje y.**

Se genera la matriz de aceleración con respecto a la aceleración en el eje y

$$\text{aportex} = te(j) / (te(j) + te(i)) (ye(j) + ye(i) + 1) (xe(j) + xe(i) + 1) \quad (3.69)$$

- **Ecuación de continuidad.**

Se calcula la divergencia de la velocidad con respecto a los ejes (x,y)

$$D = (xe(i) / ((xe(i) + xe(j)) * (ye(i) + ye(j) + 1) * (te(i) + te(j) + 1))) \quad (3.75)$$

$$H = (ye(i) / ((xe(i) + xe(j) + 1) * (ye(i) + ye(j)) * (te(i) + te(j) + 1))) \quad (3.76)$$

- **Solución numérica.**

La solución numérica se resuelve iterativamente tomando la ecuación (3.80); como se muestra en el Anexo A, cuando se imponen las condiciones de fronteras.

$$Y = Lap + \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & B \\ M & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

- **Visualización de los resultados.**

Esta función produce gráficas en dos dimensiones. Como ambos argumentos son vectores, los elementos de y son dibujados versus los elementos de x. El algoritmo para generar las graficas se encuentran en el Anexo A y las figuras se encuentran en el capítulo 6.

## 4.2 Condiciones de frontera para flujo entre planos paralelos.

Cuando la solución aproximada de la ecuación de Navier Stokes dinámica correspondiente a un problema de valores de contorno; se busca a través de la formulación diferencial, se deben satisfacer localmente, no sólo las condiciones esenciales de contorno (prerrequisitos del funcional), sino también las naturales (consecuencia de la estacionalidad del funcional). En general, las condiciones pueden tomar dos formas diferentes: (a) Aquellas que sólo especifican valores de la función sobre el contorno (de tipo Dirichlet); (b) Las que prescriben valores de la función y sus derivadas (de tipo Newman o Churchill). En el primer caso (Dirichlet) las condiciones se introducen directamente en el

sistema global (9) una vez planteadas las ecuaciones de dominio. Cuando las condiciones de contorno contienen derivadas, el problema es mucho más complicado; varios procedimientos han sido sugeridos o implementados en la literatura, y serán discutidos a continuación. Este problema merece especial atención, dado que no todos los procedimientos propuestos son de aplicación general. Por otro lado, la forma en que tales condiciones se satisfacen afecta considerablemente los resultados. Una posible clasificación de los procedimientos es según qué ecuaciones se discretizan en el contorno distinguiéndose entre: Sobre el contorno se discretizan las ecuaciones de dominio y de contorno. Esta propuesta discretiza sobre el contorno tanto las ecuaciones de dominio como las de contorno

#### 4.2.1 Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann en el fluido 2D entre placas paralelas.

Cuando se fija la solución a lo largo de la frontera corresponde a la condición de contorno tipo **Dirichlet**. Cuando se fijan las derivadas a lo largo de la frontera y se especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera o contorno del dominio corresponde al tipo **Neumann**. En general en esta aplicación se fijo en la frontera la solución de algunas de sus variables  $(u_i, v_j, y, p)$  y además, se fijo su derivada en algunas de sus variables  $\left( \frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial v_j}{\partial y}, \frac{\partial p_x}{\partial x}, y \frac{\partial p_y}{\partial y} \right)$ ; resultando un contorno **Mixto**. De acuerdo

con las condiciones impuestas en cada una de las fronteras encontramos:

-Frontera No 1 corresponde al eje positivo de las x

1-Las velocidades en el eje x se aplicaron las condiciones Dirichlet ;

$$u \simeq u_i(x, y, t) \simeq 0 \quad (4.1)$$

2- Las velocidades en el eje y se aplicaron las condiciones Dirichlet,

$$v \simeq u_j(x, y, t) \simeq 0 \quad (4.2)$$

3-El gradiente de presión en el eje x corresponde a la condición Neumann

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} \approx \frac{\partial p_x(x, y, t)}{\partial x} \approx 0 \quad (4.3)$$

-Frontera No 2 corresponde al eje positivo de las y-1=0

1-Las velocidades en el eje x se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$u \approx u_i(x, y, t) \approx 0 \quad (4.4)$$

2- Las velocidades en el eje y se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$v \approx u_j(x, y, t) \approx 0 \quad (4.5)$$

3-El gradiente de presión en el eje x corresponde a la condición Neumann

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} \approx \frac{\partial p_x(x, y, t)}{\partial x} \approx 0 \quad (4.6)$$

-Frontera No 3 corresponde al eje positivo de las y

1-Las velocidades en el eje x se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$u \approx u_i(x, y, t) \approx 1 \quad (4.7)$$

2- Las velocidades en el eje y se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$v \approx u_j(x, y, t) \approx 0 \quad (4.8)$$

3-La presión en el eje y corresponde a la condición Neumann

$$\frac{\partial p_y}{\partial y} \approx \frac{\partial p_y(x, y, t)}{\partial y} \approx 0 \quad (4.9)$$

-Frontera No 4 corresponde al eje positivo de las y-1=0

1-Las variaciones de las velocidades en el eje x se aplicaron las condiciones

$$\text{Dirichlet } u \approx u_i(x, y, t) \approx 1 \quad (4.10)$$

2- Las variaciones de las velocidades en el eje y se aplicaron las condiciones

$$\text{Dirichlet } v \approx u_j(x, y, t) \approx 0 \quad (4.11)$$

3-El gradiente de presión en el eje y corresponde a la condición Neumann

$$\frac{\partial p_y}{\partial y} \approx \frac{\partial p_y(x, y, t)}{\partial y} \approx 0 \quad (4.12)$$

## CAPITULO 5

### 5. Modelado comparativo del flujo en capa limite laminar

En este capítulo se optimiza el modelo de Galerkin para el modelo de fluidos en capa limite estacionaria y se compara el resultado con los encontrados en la literatura. Por lo tanto no hay aceleración porque no existe dependencia en el tiempo.

#### 5.1 Las Ecuaciones de Navier- Stokes bidimensional estacionaria.

En esta sección se presenta la metodología enfocada para el caso estacionario; donde las aceleraciones en las dos componentes son iguales a cero, además, como las funciones vectoriales de las velocidades y de las presiones no dependen del tiempo; resultando las ecuaciones de Navier-Stokes bidimensional para el problema plano estacionario. Las incógnitas por determinar son los coeficientes de las velocidades y de las presiones en los ejes (x, y) correspondientes a las ecuaciones (5.1) y (5.2) respectivamente; como se muestran no depende del tiempo.

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \approx \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right] \quad (5.1)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \approx \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right] \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \approx 0 \quad (5.3)$$

#### 5.2 Fundamento del método de Galerkin para flujo estacionario.

El fundamento del método de Galerkin tiene la misma estructura como se mostro en los capítulos anteriores; ahora, en esta aplicación las funciones base y de aproximación no son funciones del tiempo como se expresa a continuación:

$$\sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y) = a_1 x^{xe(1j)} y^{ye(1j)} + a_2 x^{xe(2j)} y^{ye(2j)} + a_3 x^{xe(3j)} y^{ye(3j)} + \dots + a_n x^{xe(nj)} y^{ye(nj)} \quad (5.4)$$

$$u_i(x, y) = a_1 x^{xe(1i)} y^{ye(1i)} + a_2 x^{xe(2i)} y^{ye(2i)} + a_3 x^{xe(3i)} y^{ye(3i)} + \dots + a_n x^{xe(ni)} y^{ye(ni)} \quad (5.5)$$

De igual forma como se desarrollo en el capítulo 2; se trabaja en el espacio de Hilbert,  $\mathbf{H}$ ; pero los vectores no depende del tiempo ecuaciones (5.4) y (5.5). Los vectores  $B(x, y)$  y  $u_i(x, y)$  son ortogonales si su producto escalar es cero. Como  $f(x, y)$  es la función exacta que representa un vector velocidad o presión que

puede aproximarse a la sumatoria de funciones base  $\sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y)$ ; pero su resta no es igual cero; entonces resulta una diferencia que es igual  $R(x, y)$ .

$$f(x, y) \cong \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y) \Rightarrow R(x, y) = f(x, y) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y) \neq 0 \quad (5.6)$$

Multiplicando la ecuación (5.6) por la función de aproximación  $u_i(x, y)$ ; que es un vector que pertenece  $proy_H f(x, y)$ ; resulta las componentes de la ecuación (5.7) ortogonales cuando se efectúa el producto escalar que igual a cero.

$$\langle R(x, y), u_i(x, y) \rangle = 0 = \left\langle f(x, y) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y), u_i(x, y) \right\rangle \quad (5.7)$$

Como la ecuación (5.7) al multiplicarse por el vector de aproximación es equivalente a la ecuación (5.8) por lo que los coeficientes  $a_j$  son los valores a determinar.

$$\left\langle f(x, y) \circ u_i(x, y) - \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y) \circ u_i(x, y) \right\rangle = 0 \quad (5.8)$$

Resolviendo la ecuación (5.8) resulta la ecuación (5.9); donde básicamente se está aplicando el concepto de aproximación numérica; cuando se hallan los



valores de los coeficientes y posteriormente al realizar la expansión resulta una matriz con la misma estructura que las encontradas en el capítulo 2.

$$\langle f(x, y), u_i(x, y) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y), u_i(x, y) \right\rangle \quad (5.9)$$

### 5.3 La integración numérica de la divergencia de la velocidad

El termino convectivo está constituido por las multiplicaciones de una componente de la velocidad, por componente de la divergencia de la velocidad y de la función de aproximación en las direcciones de los ejes (x,y). Se genera una matriz trilinear que no depende del tiempo.

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j(x, y), u_i(x, y) \right\rangle = \langle u_k(x, y) \nabla u_k(x, y), u_i(x, y) \rangle \quad (5.10)$$

#### 5.3.1 Divergencia de las velocidades $u_x$ .

La integración numérica se realiza en el plano (x,y); cuando se efectúan las integrales dobles con límites entre [0,1] para cada componente.

La Divergencia de la velocidad  $u_x$  en la dirección del eje x tiene dos componentes como se muestra en la ecuación (5.1.A)

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (5.1.A)$$

La primera componente de la divergencia de la velocidad en la dirección del eje x, se multiplica por la función de aproximación y se realiza la integración numérica ecuación (5.12) que es equivalente a la ecuación (2.12) del capítulo 2, en el intervalo correspondiente. De forma similar se toma la segunda componente ecuación (5.13) y se efectúa la integración numérica como se muestra en la ecuación (5.14). La ecuación (5.17) es el resultado de los aportes de la integración numérica de cada componente (i,j,k) correspondiente a las ecuaciones (5.12) y (5.14).

- **La primera componente de la divergencia de la velocidad eje x.**

$$a_j \int_{\Omega} u_x(x, y) \circ \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} \circ u_i(x, y) d\Omega = a_j \int_{[0,1]} xe(j) x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)-1} y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)} \partial x \partial y \quad (5.11)$$

$$a_j \int_{[0,1]} xe(j) x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)-1} y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)} \partial x \partial y = a_j xe(j) / (xe(j) + xe(i) + xe(k)) (ye(j) + ye(i) + ye(k) + 1) \quad (5.12)$$

- **La segunda componente de la divergencia de la velocidad eje x.**

De igual forma se muestran las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 2; correspondiente al tema en estudio que para llevar un orden se le asignara al del capítulo 5.

$$a_j \int_{\Omega} u_y(x, y) \circ \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} \circ u_i(x, y) d\Omega = a_j \int_{[0,1]} ye(j) y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)-1} x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)} \partial x \partial y \quad (5.13)$$

$$a_j \int_{[0,1]} ye(j) y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)-1} x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)} \partial x \partial y = a_j ye(j) / (ye(j) + ye(i) + ye(k)) (xe(j) + xe(i) + xe(k) + 1) \quad (5.14)$$

Aportes parciales del termino convectivo en la dirección x.

$$\text{aportex} = a_j xe(j) / (xe(j) + xe(i) + xe(k)) (ye(j) + ye(i) + ye(k) + 1) \quad (5.15)$$

$$\text{aportey} = a_j ye(j) / (ye(j) + ye(i) + ye(k)) (xe(j) + xe(i) + xe(k) + 1) \quad (5.16)$$

La ecuación (5.17) genera una matriz trilineal localmente en las componentes (i,j,k); correspondiente a una aproximación cuadrática.

$$M = \text{aportex de trilineal } u_x(x, y) + \text{aportey de Trilineal } u_x(x, y) \quad (5.17)$$

### 5.3.2 Divergencia de las velocidades $u_y$ .

La Divergencia de la velocidad  $u_y$  en la dirección del eje y tiene **dos componentes como se muestra en la ecuación (5.2.A)**

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (5.2.A)$$

De igual forma la primera componente de la divergencia de la velocidad en la dirección del eje y tiene dos componentes. En la ecuación (5.18) se realiza la integración numérica de una parte del termino convectivo con variación en x. Se

multiplica por la función de aproximación y se realiza la integración numérica dada por la ecuación (5.19) en el intervalo correspondiente. De forma similar se toma la segunda componente ecuación (5.20) y se efectúa la integración numérica como se muestra en la ecuación (5.21). La ecuación (5.24) es el resultado de los aportes de la integración numérica de cada componente (i,j,k) correspondiente a las ecuaciones (5.22) y (5.23).

- **La primera componente de la divergencia de la velocidad eje y.**

$$a_j \int_{\Omega} u_x(x, y) \circ \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} \circ u_i(x, y) d\Omega = a_j \iint_{[0,1]} xe(j) x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)-1} y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)} \partial x \partial y \quad (5.18)$$

$$a_j \iint_{[0,1]} xe(j) x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)-1} y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)} \partial x \partial y = a_j xe(j) / (xe(j) + xe(i) + xe(k)) (ye(j) + ye(i) + ye(k) + 1) \quad (5.19)$$

- **La segunda componente de la divergencia de la velocidad eje y**

$$a_j \int_{\Omega} u_y(x, y) \circ \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} \circ u_i(x, y) d\Omega = a_j \iint_{[0,1]} ye(j) y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)-1} x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)} \partial x \partial y \quad (5.20)$$

En la ecuación (5.20) se realiza la integración numérica de una parte del termino convectivo con variación en y.

$$a_j \iint_{[0,1]} ye(j) y^{ye(j)+ye(i)+ye(k)-1} x^{xe(j)+xe(i)+xe(k)} \partial x \partial y = a_j ye(j) / (ye(j) + ye(i) + ye(k)) (xe(j) + xe(i) + xe(k) + 1) \quad (5.21)$$

La solución del termino convectivo da como resultado una matriz trilineal o cuadrática debido a los componentes (i,j,k) de cada uno de los términos componentes correspondientes.

Estas son las contribuciones de los aporte del término convectivo en la dirección del eje y, son las siguientes:

Aportes parciales del termino convectivo en la dirección y.

$$aportex = a_j xe(j) / (xe(j) + xe(i) + xe(k)) (ye(j) + ye(i) + ye(k) + 1) \quad (5.22)$$

$$aportey = a_j ye(j) / (ye(j) + ye(i) + ye(k)) (xe(j) + xe(i) + xe(k) + 1) \quad (5.23)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.24) generan una matriz trilineal localmente en las componentes (i,j,k); donde estas expresiones facilitan y contribuyen a la optimización del algoritmo.

$$B = \text{aportex } u_y(x,y) + \text{aportey } u_x(x,y) \quad (5.24)$$

#### 5.4 La integración numérica Laplaciano de la velocidad

La matriz de aproximación numérica obtenida anteriormente que es una forma generalizada es sustituida por el laplaciano de las velocidades (x,y) en cada una de sus componentes; como se muestra a continuación :

$$\langle f(x,y), u_i(x,y) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j(x,y), u_i(x,y) \right\rangle \quad (5.25)$$

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j(x,y), u_i(x,y) \right\rangle = \langle \nabla^2 u_k(x,y), u_i(x,y) \rangle \quad (5.26)$$

##### 5.2.1 La integración numérica Laplaciano de las velocidades $u_x$ y $u_y$ .

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j(x,y), u_i(x,y) \right\rangle = a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial x^2} \circ u_i(x,y) d\Omega + a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial y^2} \circ u_i(x,y) d\Omega \quad (5.27)$$

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j w_j(x,y), u_i(x,y) \right\rangle = a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y(x,y)}{\partial x^2} \circ u_i(x,y) d\Omega + a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y(x,y)}{\partial y^2} \circ u_i(x,y) d\Omega \quad (5.28)$$

El procedimiento para calcular la integración numérica es el siguiente:

1-reemplazando las funciones base ecuación (5.3) y las función de aproximación (5.4) en los diferentes componente del Laplaciano.

2-Se realiza la segunda derivada con respecto a (x,y) de acuerdo a la dirección de las velocidades

3-Efectuar el producto entre las funciones.

4-Resolver la integral en el dominio correspondiente.

- **Las componentes de las velocidades  $u_x(x,y)$  del laplaciano en la dirección del eje x**

$$a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial x^2} \circ u_i(x,y) d\Omega + a_j \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial y^2} \circ u_i(x,y) d\Omega \quad (5.29)$$

$$a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial x^2} \circ u_i(x,y) d\Omega = a_j \iint_{[0,1]} xe(j)(xe(j)-1)x^{xe(j)+ye(i)-2}y^{ye(j)+ye(i)} \partial x \partial y \quad (5.30)$$

$$a_x \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial y^2} \circ u_i(x,y) d\Omega = a_j \iint_{[0,1]} ye(j)(ye(j)-1)y^{ye(j)+ye(i)-2}x^{xe(j)+xe(i)} \partial x \partial y \quad (5.31)$$

Las soluciones en las integrales dobles con límites entre [0,1] utilizando las funciones de integración de scilab o la implementación de un algoritmo basados en las aproximaciones de Simpson tiene un costo muy alto computacionalmente de tiempo.

$$\text{aportex de } u_x(x,y) = a_j xe(j)(xe(j)-1)/(xe(j)+xe(i)-1)(ye(j)+ye(i)+1) \quad (5.32)$$

$$\text{aportey de } u_x(x,y) = a_j ye(j)(ye(j)-1)/(ye(j)+ye(i)-1)(xe(j)+xe(i)+1) \quad (5.33)$$

$$M_0 = \text{aportex de } u_x(x,y) + \text{aportey de } u_x(x,y) \quad (5.34)$$

- **Las componentes de la velocidades  $u_y(x,y)$  del laplaciano en la dirección del eje y.**

De acuerdo con los desarrollos matemáticos realizados en el método de Galerkin, se aplica la solución de la integral para cada ij en cada componente, como el objetivo principal alcanzar una solución numérica de alta precisión con el menor costo computacional. La componente de la velocidad está en la dirección del eje y con variaciones en los dos ejes; como se muestra en la ecuación (5.28). Las ecuaciones (5.35) y (536) son los resultados de la integración numérica de las contribuciones de esas variaciones; al final, tenemos el aporte total correspondiente al eje y en la ecuación (5.37).

$$a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y(x, y)}{\partial x^2} \circ u_i(x, y) d\Omega + a_y \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_y(x, y)}{\partial y^2} \circ u_i(x, y) d\Omega \quad (5.28)$$

$$\text{aportex de } u_y(x, y) = a_j x e(j) (x e(j) - 1) / (x e(j) + x e(i) - 1) (y e(j) + y e(i) + 1) \quad (5.35)$$

$$\text{aportey de } u_y(x, y) = a_j y e(j) (y e(j) - 1) / (y e(j) + y e(i) - 1) (x e(j) + x e(i) + 1) \quad (5.36)$$

$$B_0 = \text{aportex de } u_y(x, y) + \text{aportey de } u_y(x, y) \quad (5.37)$$

### 5.3 La integración numérica del Gradiente de presión.

Encontramos las componentes en el eje x y eje y; correspondientes a los Gradientes de presión de las ecuaciones (5.38) y (5.39) respectivamente.

$$\frac{dP_x}{dx} \circ u_i(x, y) \approx c_i \int_{\Omega} \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} \circ u_i(x, y) d\Omega \quad (5.38)$$

$$\frac{dp_y}{dy} \circ u_i(x, y) \approx c_j \int_{\Omega} \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} \circ u_i(x, y) d\Omega \quad (5.39)$$

#### 5.3.1 Gradiente de presiones en $u_x$ y $u_y$ .

- **Gradiente de presiones en  $u_x$**

$$c_j \int_{\Omega} \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} \circ u_i(x, y) d\Omega = c_j \iint_{[0,1]} x e(j) x^{x e(j) + x e(i) - 1} y^{y e(j) + y e(i)} \partial x \partial y \quad (5.38)$$

$$\text{aportex} = c_j x e(j) / (x e(j) + x e(i)) (y e(j) + y e(i) + 1) \quad (5.39)$$

- **Gradiente de presiones en  $u_y$**

$$c_j \int_{\Omega} \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} \circ u_i(x, y) d\Omega = c_j \iint_{\nu} y e(j) y^{y e(j) + y e(i) - 1} x^{x e(j) + x e(i)} \partial x \partial y \quad (5.40)$$

$$\text{aportey} = c_j y e(j) / (y e(j) + y e(i)) (x e(j) + x e(i) + 1) \quad (5.41)$$

Las soluciones en las integrales dobles con límites entre [0,1] utilizando las funciones de integración de scilab o la implementación de un algoritmo basados en las aproximaciones de Simpson tiene un costo muy alto computacionalmente

de tiempo. El resultado de cada uno de los aportes es una de las contribuciones más importantes de este trabajo; debido a que con esos resultados el costo computacional se redujo sustancialmente en un 99%.

#### 5.4 Solución del método de Galerkin

En la solución general se encuentran la matriz con las aproximaciones lineales y cuadráticas por el bilineal

$$A = \begin{bmatrix} (M_{tt}x - M_o) & Cero & D \\ Cero & (M_{tt}y - M_o) & H \\ D & H & Cero \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_o & Cero & -D \\ Cero & M_o & H \\ D & H & Cero \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

- **Aproximación lineal**

$$\begin{bmatrix} M_o & Cero & -D \\ Cero & M_o & H \\ D & H & Cero \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Lap \quad (5.43)$$

- **Aproximación cuadrática.**

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & B \\ M & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

- **Ecuación complete sin las condiciones de fronteras.**

$$Y = Lap + \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & B \\ M & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

#### 5.5 Condiciones de frontera para flujo incompresible de capa limite laminar

Durante la fase de propagación del flujo sobre la capa limite, es necesario tener en cuenta las fronteras del sistema y para ello se deben aplicar condiciones que determinen el comportamiento del mismo en estos extremos. Como se conoce

información adicional de ese fenómeno, lo que equivale a saber que el valor de las variables o de las derivadas bajo condiciones específicas. En punto del proceso, la solución de la ecuación de Navier Stokes en estado estacionario; es una familia de soluciones generales. Para obtener la solución particular que se ajuste a las condiciones del problema, se utilizan las condiciones de borde, que son los datos del problema en particular, que permite determinar los valores de las constantes de la función. Las condiciones utilizadas en el proyecto actual han sido las condiciones de Dirichlet y las condiciones Neumann, que se aplican simultáneamente en cada una de las fronteras. En este caso las fuerzas de inercia prevalecen en el interior del fluido, mientras que los efectos de la viscosidad aquí casi desaparecen.[11][7].

Considérese la corriente plana de un fluido con pequeña viscosidad alrededor de un cuerpo afilado. El cuadro de líneas de corriente e incluso la distribución de velocidades coinciden ampliamente con las de una corriente sin rozamiento. Sin embargo junto a la superficie el fluido no se desliza como la corriente potencial, sino que se detiene. La transición de la velocidad nula, junto a la pared, a la plena velocidad a cierta distancia del cuerpo, se verifica dentro de una capa muy delgada, llamada capa limite. En esta se distingue dos regiones:[8].

Una capa muy delgada en contacto inmediato con el cuerpo, dentro de la cual el gradiente de velocidad en dirección perpendicular a la pared es muy grande.

El resto del campo, fuera de esta capa, donde no aparece un gradiente de velocidad tan grande, y donde, por consiguiente, el efecto de la viscosidad resulta sin importancia. [9].

En general, puede decirse que la capa limite es tanto más delgada cuando menor es la viscosidad, o dicho en otras palabras, cuando mayor es el número de Reynolds.



### 5.5.1 Condiciones de contorno Dirichlet y Neumann en capa límite laminar.

Como se tiene cuatro (4) fronteras en la retícula cuadrada  $[0,1] \times [0,1]$  donde se imponen las condiciones de fronteras esenciales y naturales en cada una de las fronteras.

-Frontera No 1 corresponde al eje positivo de las  $x$  en el intervalo  $[0,1]$ .

1- Se aplicaron la condición Dirichlet a la velocidad en la dirección del eje  $x$ .

$$u \approx u_i(x, y, t) \approx 0. \quad (5.46)$$

Las velocidades en el fondo son iguales a cero.

2- Se aplicaron la condición Dirichlet a la velocidad en la dirección del eje  $y$ .

$$v \approx u_j(x, y, t) \approx 0. \quad (5.47)$$

Las velocidades en el fondo son iguales a cero.

3-El gradiente de presión en el eje  $x$  corresponde a la condición Neumann

$$\frac{\partial p_y}{\partial y} \approx \frac{\partial p_y(x, y, t)}{\partial y} \approx 0. \quad (5.48)$$

Las presión es normal en el fondo en la dirección del eje  $y$ .

-Frontera No 2 corresponde a la recta  $y-1 \approx 0$ , en el intervalo  $[0,1]$ .

1-La velocidad en el eje  $x$  se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$u \approx u_i(x, y, t) \approx 0 \quad (5.49)$$

2- La velocidad en el eje  $y$  se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$v \approx u_j(x, y, t) \approx 0 \quad (5.50)$$

3-El gradiente de presión en el eje  $x$  corresponde a la condición Neumann

$$\frac{\partial p_y}{\partial y} \approx \frac{\partial p_y(x, y, t)}{\partial y} \approx 0 \quad (5.51)$$

-Frontera No 3 corresponde al eje positivo de las  $y$ , para  $x$  en el intervalo  $[0,1]$ .

1-La velocidad en el eje  $x$  se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$u \approx u_i(x, y, t) \approx 0 \quad (5.52)$$

2- La velocidad en el eje y se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$v \approx u_j(x, y, t) \approx 0 \quad (5.53)$$

3-La presión en el eje y corresponde a la condición Dirichlet

$$p_x \approx p_x(x, y, t) \approx 0 \quad (5.54)$$

-Frontera No 4 corresponde a la ecuación de la recta  $x = 1$ , para valores de  $y$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

1-La variación de la velocidad en el eje x se aplicaron las condiciones Dirichlet

$$u \approx u_i(x, y, t) \approx 1 \quad (5.55)$$

2- La variación de las velocidades en el eje y se aplicaron las condiciones

$$\text{Dirichlet } v \approx u_j(x, y, t) \approx 0 \quad (5.56)$$

3-El gradiente de presión en el eje y corresponde a la condición Neumann

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} \approx \frac{\partial p_x(x, y, t)}{\partial x} \approx 0 \quad (5.57)$$

## 5.6 Algoritmo Computacional

La dinámica de fluidos computacional es una de las ramas de la mecánica de fluidos que usa métodos numéricos y algoritmos para estudiar y analizar problemas que involucran fluidos en movimiento, mediante la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes. En el Anexos se muestra el algoritmo de la aplicación de capa limite laminar con el programado en Scilab.

## CAPITULO 6

### 6.1 Introducción de los análisis de resultados

En el siguiente capítulo se analizan los resultados obtenidos mediante la visualización utilizando el programa desarrollado, basado en la aplicación del método de free Galerkin, para los estudios de fluidos en régimen laminar entre dos placas planas y capa limite laminar. Para el estudio se evalúan las distribuciones de los perfiles de velocidades correspondientes a cada una de las aplicaciones. Los resultados obtenidos se representan gráficamente para una mejor interpretación, utilizando el programa de visualización, el cual permite generar un archivo gráfico mediante el uso de una subrutina ejecutada en Visual Scilab (ver Anexo A), facilitando de esta forma la exportación de la data necesaria para la realización de los perfiles o distribuciones antes mencionados. Entre las mejoras del programa con respecto a trabajos similares, cabe destacar:

- El desarrollo matemático en cada uno de los operadores dando como resultados expresiones que se pueden codificar con facilidad. De igual forma, las ecuaciones diferenciales no lineales al transformarlas en ecuaciones algebraicas no lineales desarrollando las matrices trilineales; es uno de los aportes más significativos porque este es un tema que está en investigación.
- La entrega directa de las integrales de cada uno de los operadores que constituyen las ecuaciones de Navier Stokes, que permite mejorar el rendimiento del programa, ya que se utiliza el espacio de memoria necesario. No fue necesario utilizar una supercomputadora para que el programa funcionara muy rápidamente.

- La organización del programa en estructuras funcionales que se pueden conectar a causalmente o dirigida a objeto.

## 6.2 RESULTADOS

### 6.2.1 Simulación de la ecuación de Navier Stokes Bidimensional dinámica

- **Análisis del flujo en régimen laminar entre planos paralelos.**

La figura 6.1 es una visualización de la aplicación de flujo laminar entre planos paralelos, donde, el fluido en movimiento tiene las “láminas” bien definidas, cada una viajando a su velocidad rozando a las de al lado, sin mezclarse unas con otras. El régimen laminar se caracteriza por un movimiento ordenado de las partículas de fluido, existiendo unas líneas de corriente y trayectorias bien definidas.

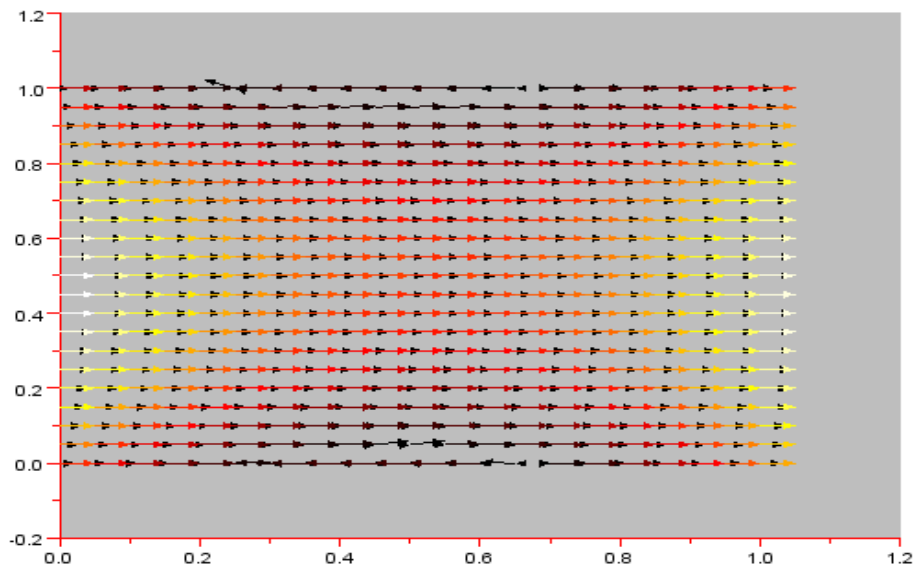


Figura No 6.1. FLUJO LAMINAR ENTRE PLANOS PARALELOS

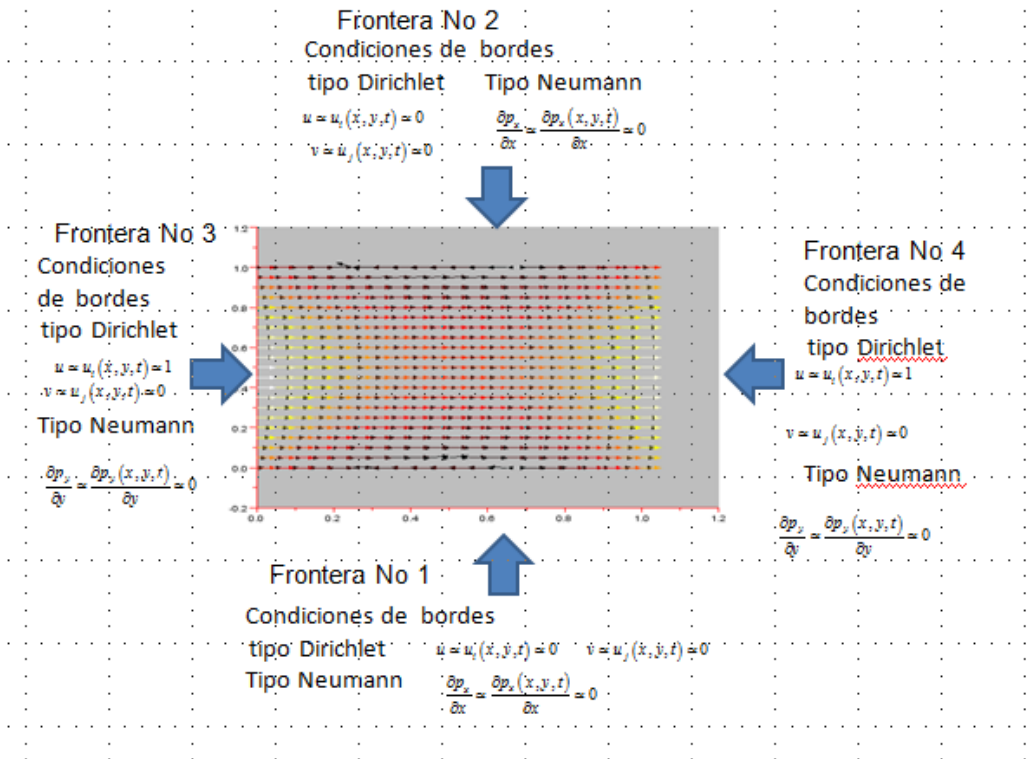


Figura No 6.2. FLUJO LAMINAR ENTRE PLANOS PARALELOS CON CONDICIONES DE BORDE

- **Efecto de entrada**

Un fenómeno estrechamente vinculado con el desarrollo de la capa límite es el efecto de entrada (o de embocadura), debido al cual el perfil estacionario asintótico que se establece recién a cierta distancia de la embocadura de los planos paralelos. La Fig.6.1.1 esquematiza este proceso para el flujo entre dos caras paralelas semi infinitas separadas por una distancia  $h$ . A una pequeña distancia  $x$  desde la embocadura, se tiene un perfil de velocidad casi uniforme cuyo módulo es igual a  $U$ , la velocidad corriente arriba. La transición con la condición de velocidad nula en la superficie de las placas tiene lugar dentro de una capa de espesor (local)  $\Delta x$ . A medida que nos alejamos de la embocadura, el espesor de las capas límites de ambas placas crece hasta que ambas terminan por juntarse a una distancia  $x_e$ . Por lo tanto  $x_e$  es la distancia necesaria para que se establezca entre las placas el perfil de velocidad parabólico estacionario que ya

conocemos. Donde  $Re(h)$  es el número de Reynolds construido con la velocidad  $U$  y la distancia  $h$  entre placas.[10].

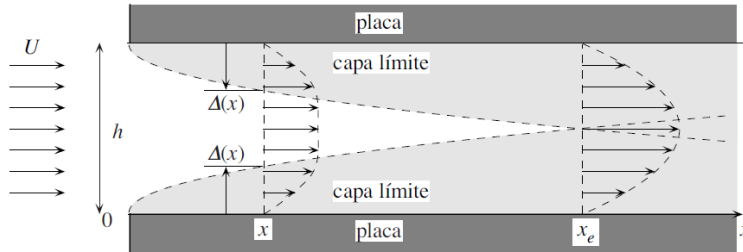


Figura 6.3. Efecto de embocadura para el flujo entre placas planas semiinfinitas: evolución del perfil de velocidades con la distancia desde la entrada.[11]

### 6.2.2 Análisis del perfil de velocidades

Esta figura 5.2.2 es una visualización de la aplicación de flujo laminar entre planos paralelos, donde se realiza el siguiente análisis, de acuerdo con los resultados de la simulación; se observa que el perfil de las velocidades en el régimen laminar es parabólico, siendo cero en la pared de la conducción y máxima en el centro, e igual al doble de la velocidad media (figura 5.2.2). Con este análisis se evidencia que la simulación de la ecuación de Navier Stokes con el algoritmo desarrollado es válida para la aplicación en flujo de régimen laminar bidimensional entre planos paralelos.

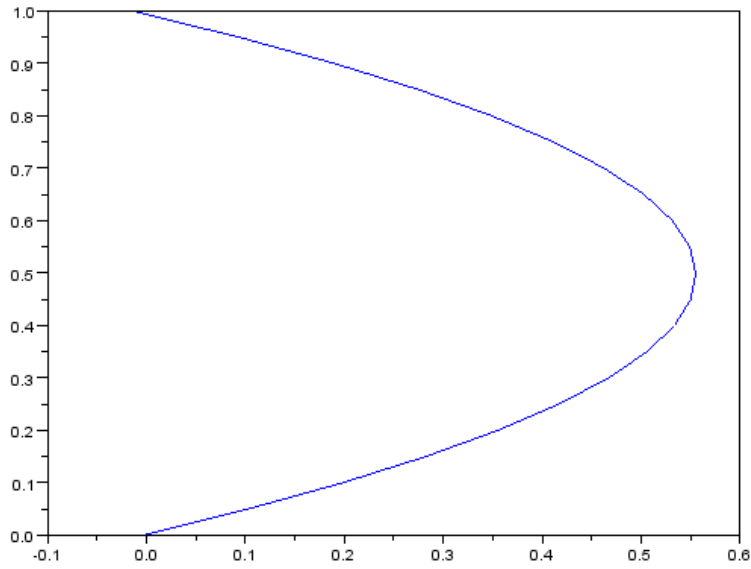


Figura No 6.4. PERFIL DE VELOCIDAD DE FLUJO LAMINAR ENTRE PLANOS PARALELOS

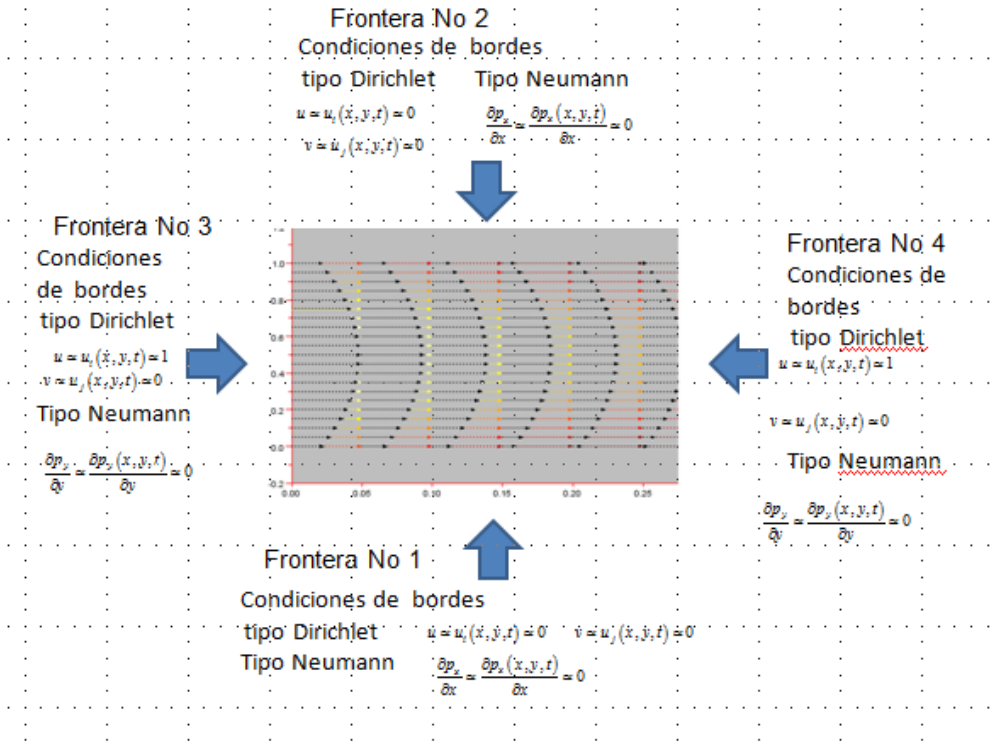


Figura No 6.5. SECUENCIA DE FLUJO LAMINAR ENTRE PLANOS PARALELOS

### 6.3 Validación de los resultados de la capa límite laminar

Seguidamente se hace una breve descripción del análisis de los resultados de la aplicación de la capa límite laminar y se presentan los resultados obtenidos.

#### 6.3.1 Análisis del flujo laminar de capa límite.

En esta figura se presenta la visualización de la aplicación de flujo laminar en capa límite, donde se realiza el análisis para validar los resultados obtenidos con el método de Galerkin. Se procedió a correr el algoritmo para diferentes modelos simples de capa límite cuyos resultados son conocidos ya que existe solución analítica cuando se simplifica las ecuaciones de Navier-Stokes.

De acuerdo con los resultados de las simulaciones; se observa que el perfil de la velocidad en el régimen capa límite laminar es parabólico, siendo cero en la pared y aumentado parabólicamente su velocidad como se muestran en las figuras.

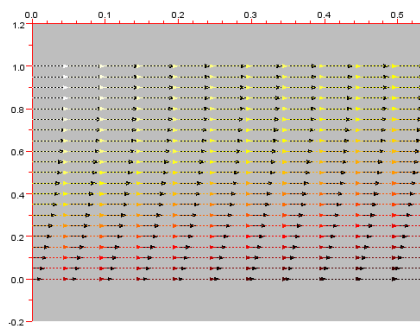
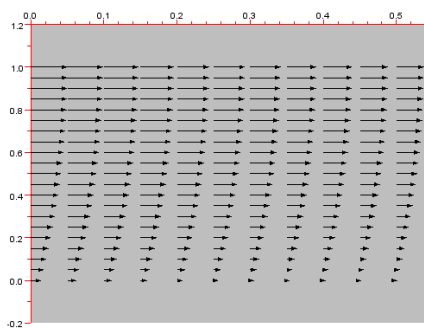


Figura No 6.6.SECUENCIA DE FLUJO LAMINAR DE CAPA LIMITE

Figura No 6.7.SECUENCIA DE FLUJO LAMINAR DE CAPA LIMITE



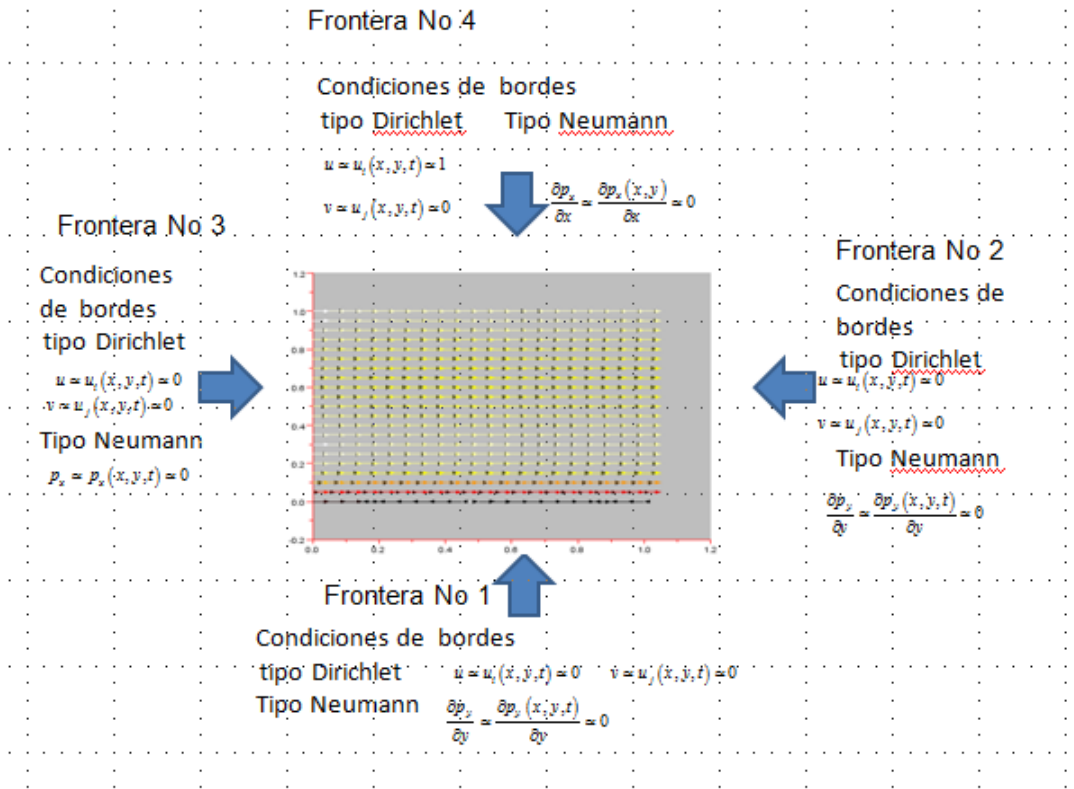


Figura No 6.8.SECUENCIA DE FLUJO LAMINAR DE CAPA LIMITE

En este caso, el fluido en movimiento tiene las “láminas” bien definidas, cada una viajando a su velocidad rozando una al lado de la otra, sin mezclarse unas con otras. El régimen laminar se caracteriza por un movimiento ordenado de las partículas de fluido, existiendo unas líneas de corriente y trayectorias bien definidas.

En este caso las fuerzas de inercia prevalecen en el interior del fluido, mientras que los efectos de la viscosidad aquí casi desaparecen.

Considérese la corriente plana de un fluido con pequeña viscosidad alrededor de un cuerpo afilado. El cuadro de líneas de corriente e incluso la distribución de velocidades coinciden ampliamente con las de una corriente sin rozamiento. Sin embargo junto a la superficie el fluido no se desliza como la corriente potencial, sino que se detiene. La transición de la velocidad nula, junto a la pared, a plena

velocidad a cierta distancia del cuerpo, se verifica dentro de una capa muy delgada, llamada capa límite. En esta se distinguen dos regiones:

Una capa muy delgada en contacto inmediato con el cuerpo, dentro de la cual el gradiente de velocidad en dirección perpendicular a la pared es muy grande.

El resto del campo, fuera de esta capa, donde no aparece un gradiente de velocidad tan grande, y donde, por consiguiente, el efecto de la viscosidad resulta sin importancia.

En general, puede decirse que la capa límite es tanto más delgada cuando menor es la viscosidad, o dicho en otras palabras, cuando mayor es el número de Reynolds. Fundamentado se en algunas soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes, se puede afirmar que el espesor de la capa límite es proporcional a la raíz cuadrada de la viscosidad cinemática:

### **6.3.2 Resultados Análisis del perfil de velocidades en capa límite laminar**

i) Se obtiene una solución mediante un esquema de Galerkin polinomial libre de malla para la ecuación de Navier-Stokes viscosa, no lineal, caso estacionario bidimensional, mediante un esquema de minimización de mínimos cuadrados.

El esquema es innovador en cuanto no depende de una triangulación subyacente, ni para la evaluación de las funciones de peso, ni para la evaluación de las condiciones de borde. Esta metodología novedosa permitirá la aplicación de esta misma metodología en condiciones de fronteras móviles o en esquemas de optimización de forma.

ii) Las soluciones obtenidas se validan en casos simples contra los valores dados en la literatura y contra soluciones conocidas para el flujo viscoso en la capa límite laminar como es caso de la ecuación de Blasius. La coincidencia de los resultados numéricos obtenidos con la metodología propuesta es satisfactoria.

iii) El esquema de residuos ponderados de Galerkin aplicado a la ecuación de Navier-Stokes completa con su componente no-lineal generalmente conduce a modelos computacionalmente exigentes. El debilitamiento de las soluciones no se

impone, sino que prefiere trabajar con un procedimiento que no recurre a este proceso. A cambio, el uso de funciones de peso polinomiales permite la evaluación directa de las integrales involucradas reduciendo el consumo .computacional.

i.v) El proceso de optimización sigue un esquema de mínimos cuadrados estándar que utiliza el gradiente del término trilineal previamente calculado como matriz.

#### 6.4 Solución analítica para el flujo laminar en capa limite

Inicialmente resolvemos la ecuación de Navier Stokes en forma simplificada analíticamente para encontrar la solución de Blasius de capa limite laminar como de muestra en la figura 5.4. Donde el perfil de velocidades de color azul como se muestra en la figura alcanza su valor máximo cuando el valor de  $y=1.0$  y el valor de  $x=5$ ; correspondiente al valor máximo de Reynolds para flujo laminar.[9]

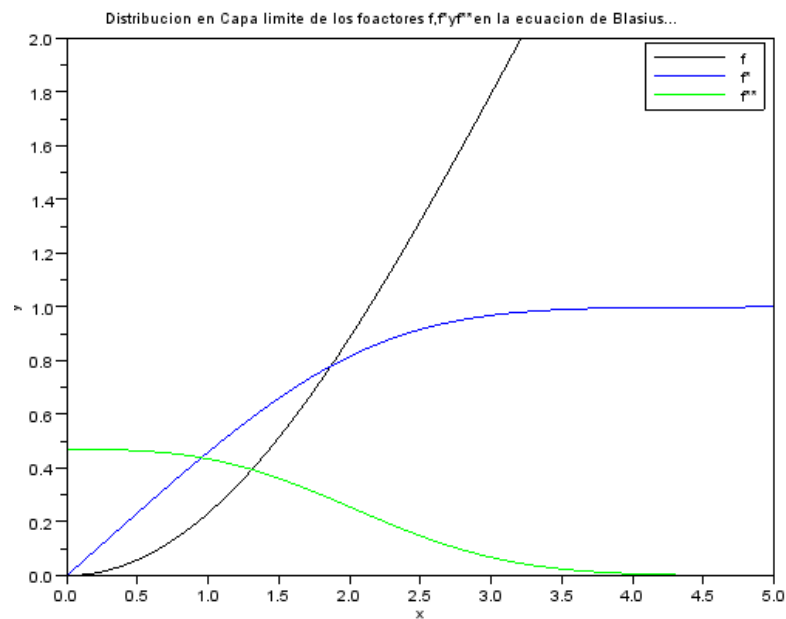


Figura No 6.9.REPRESENTACION DE LA ECUACION DE BLASIUS [12].

Tabla No 3. Perfiles de Blasius [13],[15]

ITEM	N	F	F	F
1	0	0	0	0,33206
2	0,2	0,00664	0,006641	0,33199
3	0,4	0,02656	0,13277	0,33147
4	0,8	0,10611	0,26471	0,32739
5	1,2	0,23795	0,39378	0,31659
6	1,6	0,65003	0,51676	0,29667
7	2	0,65003	0,62977	0,26675
8	2,4	0,9223	0,72899	0,22809
9	2,8	1,23099	0,81152	0,18401
10	3,2	1,56911	0,87609	0,13913
11	3,6	1,92954	0,92333	0,09809
12	4	2,30576	0,95552	0,06424
13	4,4	2,69238	0,97587	0,03897
14	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
15	5	3,28329	0,99155	0,01591
16	8,8	7,07923	1	0

Tabla No 4 Valores normalizados de la ecuación de Blasius [14].

ITEM	$u/U$	$y/d$
1	0.	0.
2	0.133	0.08
3	0.265	0.16
4	0.394	0.24
5	0.517	0.32
6	0.63	0.4
7	0.729	0.48
8	0.811	0.56
9	0.876	0.64
10	0.923	0.72
11	0.956	0.8
12	0.976	0.88
13	0.988	0.96
14	1.	1.

Seguidamente se comparan los resultados de la solución de Blasius con el software del trabajo final. Donde el perfil de velocidades de capa limite con la solución de la ecuación de Blasius para el caso de capa limite laminar sobre una placa plana coincide con uno de los perfiles de velocidades de la ecuación de Navier-Stokes.

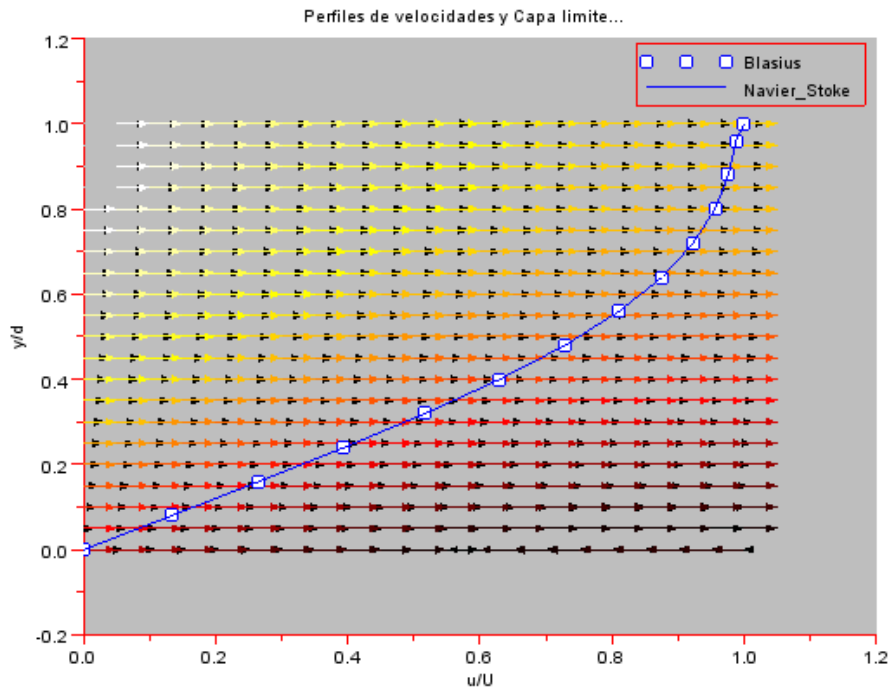


Figura No 6.9.1GRAFICA DE LA ECUACION ANALITICA SOBRE LA SOLUCION NUMERICA

En la figura 6.8 mostramos la grafica de la ecuación de Blasius con sus valores normalizados sobre los diferentes perfiles simulados con la ecuación de Navier-Stokes con la metodología de Galerkin.

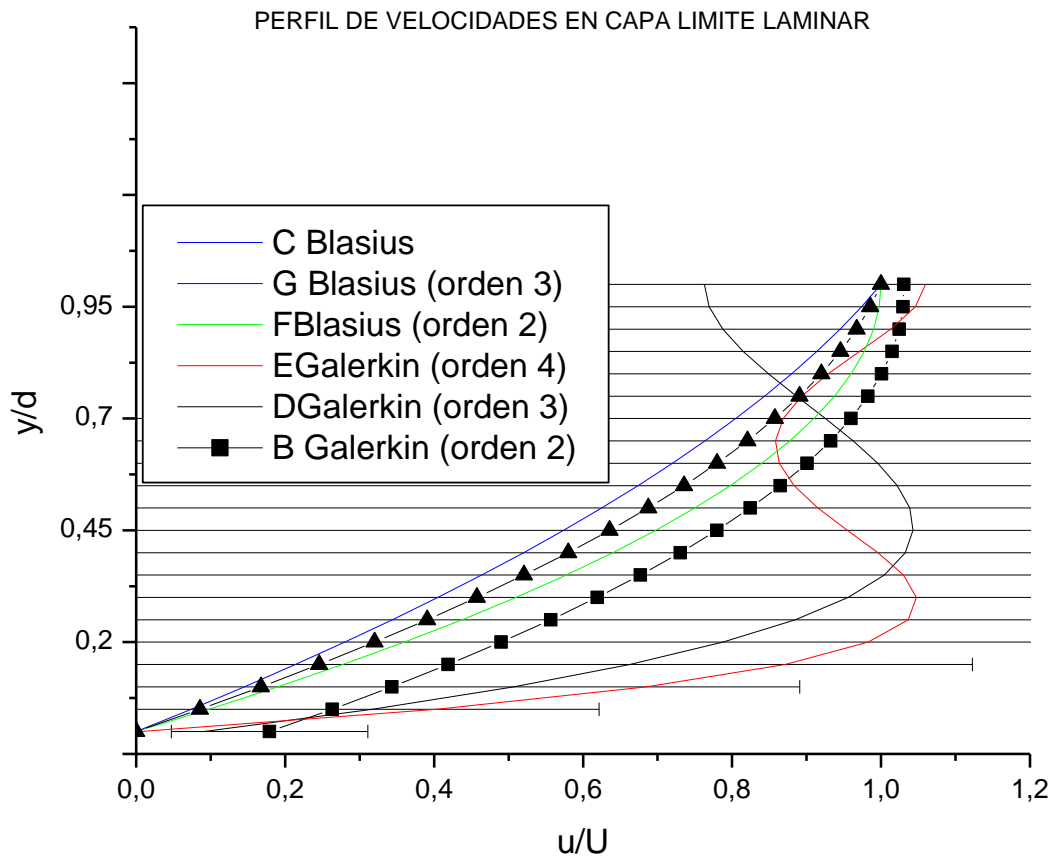


Figura No 6.9.2.GRAFICAS DE PERFILES DE VELOCIDADES PARA DIFERENTES ORDEN POLINOMIAL

La grafica 5.9 muestra diferentes perfiles de velocidades para funciones polinomiales de diferentes orden; encontramos que la línea de color azul corresponde a la solución de Blasius con polinomios de orden 3 y la de color verde corresponde a la solución de Blasius con polinomios de orden dos (2). Los triángulos corresponden a la solución analítica de la solución de Blasius y la solución numérica completa. Las soluciones numérica de las ecuaciones Navier

Stokes completas correspondientes a los orden tres (3) y cuatro (4) presenta variaciones bruscas del gradiente de presión.

Por otro lado la problemática que presenta el hecho de que el termino convectivo sea mucho mayor que el viscoso o difuso es bien conocido en el ámbito de los métodos numéricos. Este hecho se produce para altos números de Reynolds y provoca que la solución numérica clásica del método de los elementos finitos (esquema desarrollado a partir del método de Galerkin) falla y aparezcan oscilaciones en todo el dominio. Las mencionadas oscilaciones desaparecen a medida que se disminuyen el tamaño de malla, algo que desde el punto de vista práctico-computacional es impensable debido a su lentitud y gasto enorme de memoria. Desde el punto de vista físico, se sabe que al aplicar el método de Galerkin se añaden viscosidades negativas proporcionales al número de Reynolds, provocando una mala estabilidad al problema y dando lugar a oscilaciones. Estas oscilaciones suelen ser localizadas y no tienden a propagarse en sistemas lineales, pero dado que las ecuaciones de Navier Stokes tienen términos no lineales que a elevados números de Reynolds tienen gran importancia, se llega a inestabilidades globales.[15],[16].

## CAPITULO 7

### 7. CONCLUSIONES

1-Computacionalmente se solucionó el problema de la ecuación de Navier-Stokes bidimensional en estado dinámico de un flujo en régimen laminar entre dos planos paralelos con frontera reflectiva sobre el cuadrado unitario, por el método de Galerkin usando funciones de base libre de malla.

2- Se procedió a confeccionar dos programas de cómputo que permite la resolver las ecuaciones de flujo en régimen laminar entre dos planos paralelos y la capa límite laminar incompresible sobre una pared plana y sometida a un gradiente de presión arbitrario.

3- Se validó el programa comparando sus resultados con resultados analíticos y se comparan satisfactoriamente con los presentados en la literatura.

4- El algoritmo de la discretización que se desarrollo redujo el costo computacional en las dos aplicaciones en estudio.

5- Además se calculó el comportamiento de la capa límite con la solución analítica simplificada correspondiente a la ecuación de Blasius, no encontrándose discrepancia con respecto a los resultados presentados.

6- Se concluye finalmente que los programas son válidos para el estudio de estas dos aplicaciones.



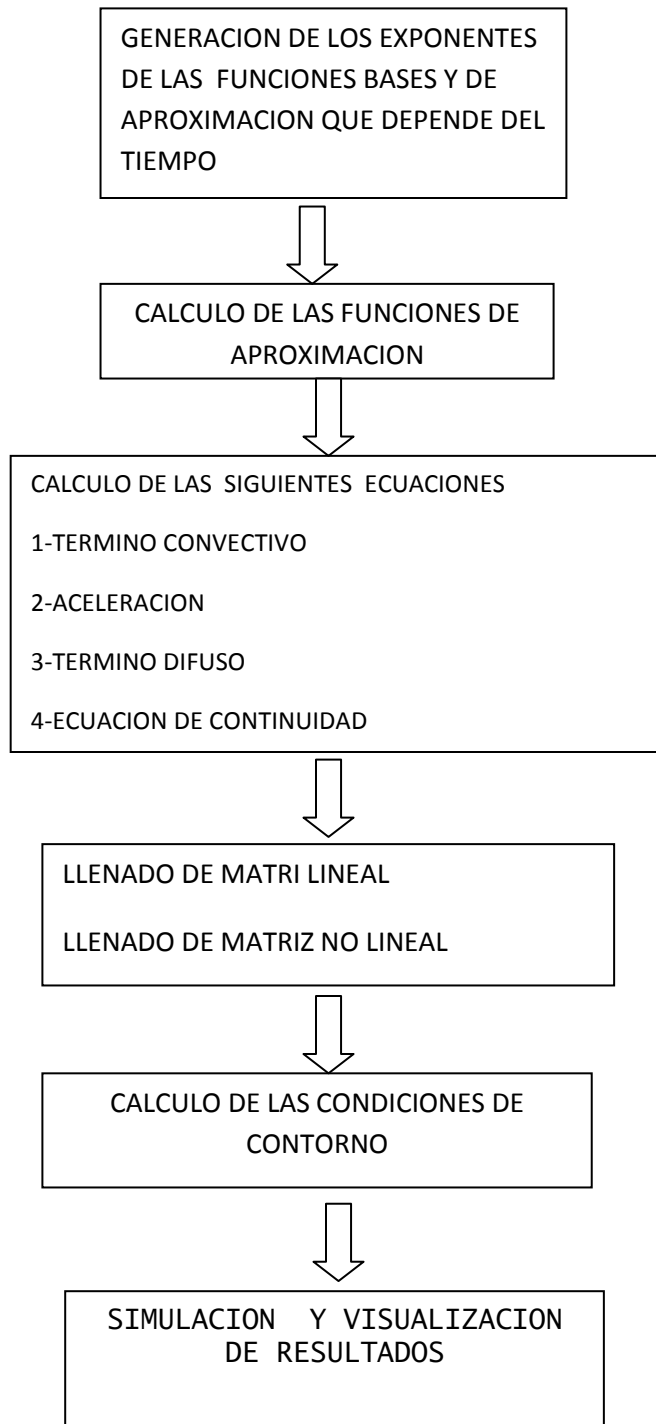
## 7.1 Trabajos Futuros

Gracias a este estudio se puede dar inicio a otras investigaciones aplicadas a las ecuaciones de Navier Stokes correspondientes a los cuerpos sumergidos en fluidos.

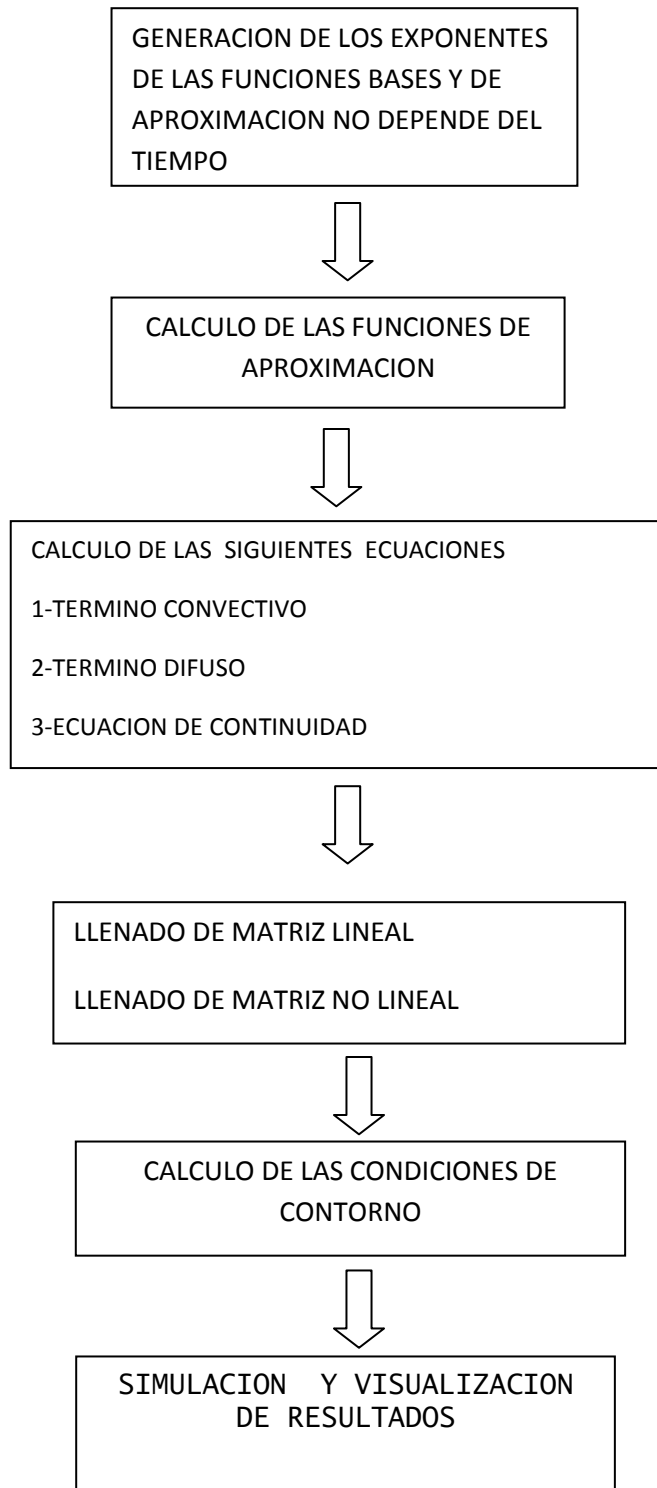
Las ecuaciones de Navier Stokes son consideradas el séptimo problema del milenio y son utilizadas como modelo físico matemático aplicadas actualmente en investigaciones de Astrofísica, Electrodinámica y Mecánica cuántica por lo que la metodología desarrollada puede contribuir a la solución de los problemas presentados en esas aéreas de la ciencia.

Muchos modelos matemáticos- físicos tienen su aplicación a problemas prácticos de la física, tales como los sistemas dinámicos que interpretan problemas de las ciencias exactas y naturales vienen dados por ecuaciones diferenciales lineales y no lineales en su mayoría los cuales no pueden ser resueltos por métodos exactos. Este trabajo de investigación busca proyectarse como una de las herramientas para estudios futuros aplicandos al análisis de ecuaciones diferenciales no lineales, para conocer sus propiedades más importantes en la solución de estas y la convergencia del mismo en comparación con otros métodos cuasi-analítico-numéricos. Algunos tipos de ecuaciones diferenciales no lineales presentan relativa dificultad, e incluso imposibilidad, para la búsqueda de su solución por los métodos analíticos conocidos.

## DIAGRAMA DE BLOQUE DEL FLUJO DE FLUIDO ENTRE DOS PLANOS PARALELOS



## DIAGRAMA DE BLOQUE DEL FLUJO DE FLUIDO DE CAPÁ LÍMITE



# Bibliografía

[1] Tesis. "integración de las ecuaciones de Navier Stokes mediante el método de los elementos finitos y método de las características aplicados a casos con superficies libre" ,Leo Miguel Gonzalez Gutiérrez, Mayo 2001.

[2] Solución numérica de capa limite Bidimensional laminar incompresible estacionaria, trabajo final de Maestría en ciencias de ingeniería .A. Rizzo y G.Scarpin, 10 Dic 2001. Córdoba Argentina.

[3] Etude de experimentale et numerique d'un ecoulement autor d'obstacles carre et cylindrique Par BEDJEGHIT EL-HOUAS Université Mentouri Constantine 2009/2010.

[4].Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Fletcher.

[5] Métodos Libres de Malla para Ecuaciones Diferenciales Parciales Evolutivas J. Antonio Muñoz-Gómez, Pedro González-Casanova Henríquez, Gustavo Rodríguez-Gómez. Cómputo Científico, DGSCA, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Circuito.

[6] Tesis de Licenciatura Generacion de mallas de elementos finitos en 3D y aplicaciones a problemas elipticos. Javier A. Kreiner

[7] Charles Hirsch. Numerical computation of internal & external ows : Volume I. Elsevier, 2th edition, 2007.

[8] Lisandro D. Dalc\_\_n Mario A. Storti, Rodrigo R. Paz and Santiago D. Costarelli. A \_t preconditioning technique for the solution of incompressible ow with fractional step methods on graphic is processing units. Mecanica Computacional, 2010.

[9] j. Benitez. Breve historia de las ecuaciones diferenciales, 2008.

[10]Michael R. Cullen Dennis G.Zill. Ecuaciones duferenciales con problemas de valores en la frontera 6ta edición ,2006.

[11] Bachman, G.and Narici,L , Functional Analysis, Academic Pres, New York 1966.

- [12] Berberian ,S.K., Introducción al espacio de Hilbert, Teide, Barcelona , 1970.
- [13] Rudin,W.,Análisis Funcional, Reverte, Barcelona,1979.
- [14] Rudin ,W.,Análisis Real y Complejo, Alhambra, Madrid,1985.
- [15] D.C. MURDOCH, Geometria Analitica con vectores y Matrices. Editorial Limusa Mexico.1989.
- [16] Rojo J.Grossman S. Algebra Lineal A.C 2<sup>a</sup> edicion .1989.
- [17] Conway,J.,A Course in Functional Analisis, Spriger-Verlag, New York,1985.
- [18] Dieudonne,J.,History of Functional Analysis, North Holland, Amsterdam,1981.
- [19] Jos Stam Stable Fluids ,2008.
- [20]Tesis de Licenciatura Generacion de mallas de elementos finitos en 3D y aplicaciones a problemas elipticos. Javier A. Kreiner  
Director: Gabriel Acosta Universidad politécnica de Madrid España.
- [21] Rosa barbolla, Paloma Sanz. Algebra Lineal y teoria de Matrices.1998.
- [22] Fox.L. An Introduction to Numerical Linear Algebra. Oxford University Press, New York, 1965.
- [23] Holmes,R., Geometric Functional Analysis and its Applications. Springer-Verlag New York 1975.
- [24] Valdivia, M.,Análisis Matematico V,U.N.E.D., Madrid, 1979.
- [25] Stewart G.W. An Introduction to matrix Computations. Academic Press,1983.
- [26] Panton, Ronald L., Incompressible Fluid Flow, John Wiley and Sons, New York, 1996, pp. 581-591.
- [27]. Gad-el-Hak, Mohamed, Journal of Fluids Engineering 121, 5-33 (1999).
- [28] Luenberger D.G. Introduction to Dynamic Systems, Theory, Models and Applications, John Wiley, 1979.

[29] Sanjit Patel Jeroen Molemaker, Jonathan M. Cohen and Jonyong Noh. Low viscosity flow simulations for animation. Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation, 2008.

[30] Niels Joubert , An Introduction to Simulation Lagrangian simulation of spring-mass systems 2009-04-30