



Universidad
Tecnológica
de Bolívar

CARTAGENA DE INDIAS



IV ENCUENTRO
MATEMÁTICO
DEL CARIBE

MEMORIAS

2022



Universidad
Tecnológica
de Bolívar

CARTAGENA DE INDIAS



IV ENCUENTRO
MATEMÁTICO
DEL CARIBE

MEMORIAS

2022

COMITÉ ORGANIZADOR

Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo - Universidad Tecnológica de Bolívar
Carlos Rafael Payares Guevara - Universidad Tecnológica de Bolívar
Jorge Luis Muñiz Olite - Universidad Tecnológica de Bolívar
Andrea Estefanía Cabarcas Sánchez - Universidad Tecnológica de Bolívar

COMITÉ CIENTÍFICO

Andy Rafael Domínguez Monterroza - Universidad Tecnológica de Bolívar
Carlos Wilson Rodríguez Cardenas - Universidad Industrial de Santander
Catalina María Rúa Álvarez - Universidad de Nariño
César Adolfo Hernández Melo - Universidade Estadual de Maringá
Elkin Oveimar Quintero Vanegas - Universidade Federal do Amazonas
Fabián Antonio Arias Amaya - Corporación Politécnico de la Costa
German Alonso Benitez Monsalve - Universidade Federal do Amazonas
Hector Jose Cabarcas Urriola - Universidad de Cartagena
Michael Alexander Rincon Villamizar - Universidad Industrial de Santander
Mikhail Malakhaltsev - Universidad de los Andes
Raibel de Jesus Arias Cantillo - Universidade Federal do Maranhão
Sergio Augusto Romaña Ibarra - Universidade Federal do Rio de Janeiro

RECTOR

Alberto Roa Varelo

VICERRECTOR ACADÉMICO

Daniel Toro González

VICERRECTORA ADMINISTRATIVA

María del Rosario Gutiérrez de Piñeres Perdomo

SECRETARIA GENERAL

Ana María Horrillo Caraballo

DECANA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Lenny Alexandra Romero Perez

DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN,
INNOVACIÓN Y EMPRENDIMIENTO

Jairo Useche Vivero

Diagramación

Ediciones UTB

ISSN: 2744-8835

Cartagena de Indias, D. T. y C., - Colombia

www.utb.edu.co

2023

**EDICIONES
UTB**



Prefacio

El Encuentro Matemático del Caribe ([Página Web IV Encuentro Matemático del Caribe](#)) tiene como finalidad reflexionar sobre el quehacer matemático y la enseñanza de las Matemáticas en el Caribe colombiano. Así mismo, extender las redes académicas con investigadores locales, nacionales e internacionales en las Ciencias Matemáticas. A través del encuentro se busca motivar a la comunidad de nuestra región a participar activamente en eventos matemáticos para conocer de primera mano la evolución y el amplio alcance que posee esta ciencia a nivel mundial por cuenta de los expositores.

La cuarta versión del Encuentro Matemático del Caribe se realizó de forma híbrida desde el 29 de noviembre al 2 de diciembre de 2022 en la Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena – Colombia. En el mismo, se presentaron 47 conferencias, 4 pósters y 3 minicursos, abarcando las diferentes áreas de las Matemáticas. Adicionalmente, se realizó una mesa redonda, titulada “Matemáticas, ciencia de datos y tecnología”, en la que participaron los siguientes expertos nacionales e internacionales:

- Marlon Michael López Flores - Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Brasil.
- Angélica Rosario Santos - Universidad de Puerto Rico.
- David Sierra Porta - Universidad Tecnológica de Bolívar.
- Andy Dominguez Monterrosa - Universidad Tecnológica de Bolívar.

En esta mesa redonda se discutió sobre la importancia que tienen las matemáticas tanto en la tecnología, como en la ciencia de datos y la inteligencia artificial. Estas últimas han tenido un gran auge en los últimos años y se han vuelto herramientas indispensables en diversos campos como la industria, investigación, educación, entre otros.

En estas memorias presentaremos los resúmenes de las conferencias, pósters y minicursos que se impartieron durante el IV Encuentro Matemático del Caribe. Las conferencias y pósters están organizados por áreas: Matemática aplicada, Sistemas Dinámicos, Topología, Álgebra, Geometría, Análisis, Ecuaciones Diferenciales y finalmente se encuentran los minicursos impartidos.

Los videos de las actividades los pueden ver en los siguientes enlaces:

- Día 1: [Ver video](#)
- Día 2: [Ver video](#)
- Día 3: [Ver video](#)
- Día 4: [Ver video](#)

El comité organizador reitera su agradecimiento a los conferencistas del evento, al comité científico, y al público asistente.

AGRADECIMIENTOS

Facultad de Ciencias Básicas - Universidad Tecnológica de Bolívar

Equipo de Audiovisuales - Universidad Tecnológica de Bolívar

Equipo de Comunicaciones - Universidad Tecnológica de Bolívar

Departamento de compras - Universidad Tecnológica de Bolívar

Autor: Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo

Índice de conferencias y minicursos

Matemática aplicada

La importancia de la modelación matemática en el desarrollo tecnológico – Marlon Michael López Flores	12
Impacto Covid 19 sobre el mercado financiero de Latinoamérica: una aproximación desde entropía de redes de permutaciones ordinales – Andy Domínguez	13
Discretización por diferencias finitas en mallas adaptativas generadas con tabla Hash – Catalina M. Rúa, Priscila C. Calegari, Álvaro J. P. Franco	14
Modelo matemático para el control de barrenadores del género <i>Diatraea</i> en la caña de azúcar mediante la avispa <i>Cotesia flavipes</i> – Angie Sandalie Enriquez Jaramillo y Carlos Andres Trujillo Salazar	16
Mathematical model of HIV/AIDS considering sexual preferences under antiretroviral therapy, a case study in San Juan de Pasto, Colombia – Cristian Camilo Espitia Morillo	18
Caracterización del riesgo cardiovascular en una institución de salud de primer nivel en Armenia – Sol de Amor Vasquez Quintero, Gladys Elena Salcedo Echeverry, Hernan Darío Toro Zapata	20
Modelo matemático que describe las interacciones entre las células del sistema inmune y las células tumorales – Mayra Alejandra Quiroga Quintero, Paulo César Carmona Tabares	22
Modelo para el análisis de una vacunación con protección y sin protección contra diferentes variantes de SARS-CoV-2 – Oswaldo A. Vargas V., Cesar A. Acosta M., Oscar A. Manrique A.	24
Diagramas causales para el estudio del rendimiento académico – Maria Teresa Sanz, Emilia López Iñesta	27
Sobre la teoría musical y sus aplicaciones matemáticas – Daniel Ricardo Vásquez Calderón, Laura Catalina Alzate Ortíz, Nidia Yadira Caicedo Bravo, Leonardo Duván Restrepo Alape	29
Natural factor based solvers – Omar Andrés Cuervo, Juan Galvis, Markus Sarkis	30
Dinámica de un modelo de depredación del tipo Leslie – Paulo Cesar Tintinago Ruiz, Leonardo Duvan Restrepo Alape	32

Gradient boosting classifier: un modelo tentativo para entender el consumo de sustancias psicoactivas en un ámbito universitario 34
– Johanna Lizeth Bustos Gonzalez

Análisis de la dinámica de un modelo tritrófico tipo Leslie 35
– Fidadelfo Mondragón Sánchez, Miguel Angel de la Rosa Castillo, Gamaliel Blé González

Comportamiento de la correlación integral en series de tiempo estacionarias 37
– John E. Gómez

Soluciones exactas en modelos farmacocinéticos fraccionarios de tipo mammilia 38
– Víctor Fabián Morales Delgado

Sistemas Dinámicos

Finding finite order periodic orbits for a homeomorphism on two-dimensional torus 41
– Germán Fabian Escobar Fiesco

Sobre endomorfismos intrínsecamente ergódicos 43
– Carlos Fabian Álvarez Escorcía

Dimensión métrica media: propiedades, conjeturas y aplicaciones 45
– Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo

Existencia de medidas invariantes en espacios métricos compactos 47
– Brian Esteban Rojas Becerra, Liliana Katherine Esquivel Mora

Simetrías de campos vectoriales 48
– Gaspar León Gil

Topología

Condiciones de tipo compacidad para que un semigrupo topológico sea un grupo 50
– Julio César Hernández Arzusa

Análisis

Maximal regularity for degenerate multiterm fractional integro-differential equations and applications 52
– Rafael Aparicio and Valentin Keyantuo

Integral inequalities of Simpson-Mercer type using weighted integrals – Juan Eduardo Nápoles Valdes	53
El espacio $\mathcal{P}_{w^*K}({}^n X^*, Y)$ – Michael Alexánder Rincón Villamizar	55

Álgebra

Teoremas de factorización de Kronecker para el álgebra de Malcev excepcional – Victor Hugo López Solís	57
A new construction of few-weight codes via our GU codes – Eddie Arrieta Arrieta	59
New criteria for absolutely irreducible polynomials defined over finite fields – Moises Delgado	61
Álgebras de grupo y teoría de códigos – John H. Castillo, Alexander Holguín Villa	62
Anillos de grupo dúo – Brayan Stiven Flórez Burbano, Alexander Holguín, John H. Castillo	64
Buenas graduaciones en anillos de matrices – Héctor Pinedo Tapia	66
Partial difference sets from uniform standard cyclotomy on a product of two equal finite fields – Juan Manuel Montoya, L. Martínez	67
Teorema de Wedderburn-Artin & anillos de grupo – Alexander Holguín Villa, John H. Castillo	68
Identities for a parametric Weyl algebra over a ring – Carlos Arturo Rodríguez Palma	69
La conjetura de la suma exponencial local en dos variables – Adriana Alexandra Albarracín Mantilla, Omar Felipe Osorio Cortés	70
Las matemáticas detrás de algunos dibujos de Escher – María Isabel Hernández	72
Nil álgebras conmutativas de potencias asociativas y sus módulos – Elkin Oveimar Quintero Vanegas	73

Geometría

- Estructuras de contacto y sus singularidades 76
– Mikhail Malakhaltsev, Fabián Antonio Arias Amaya
- Estudio de la estabilidad en ramas de bifurcación de hipersuperficies con CMC y frontera libre 77
– Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas
- Ecuaciones de movimiento para el problema de los dos cuerpos 80
– Ruben D. Ortiz Ortiz, Ana M. Marin Ramirez, Pedro P. Ortega Palencia†
- Relación entre el espacio proyectivo y el espacio proyectivo dual 81
– Astrid Liliana Contreras Mendoza, Claudia Inés Granados Pinzón
- Sobre aproximaciones de irracionales por números racionales 82
– Raibel de Jesus Arias Cantillo

Ecuaciones Diferenciales

- Ecuaciones diferenciales difusas de orden fraccionario 84
– Gilberto Arenas Díaz, Duvan A. Contreras Páez, Elder J. Villamizar Roa
- Análisis teórico de la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo 88
– José Camilo Rueda Niño
- Existence and uniqueness of solution for a family of nonlinear degenerate mixed parabolic equations 90
– Ramiro Acevedo, Christian Gómez, Juan David Samboní
- Un problema de continuación única para las soluciones de una ecuación de Shrödinger no lineal 92
– Héctor José Cabarcas Urriola
- Multigrid for the nonlinear power flow equations 94
– Enrique Pereira Batista
- Funciones elípticas de Jacobi y de Weierstrass en EDP 96
– Luis Andrés Rosso Cerón
- Efecto del operador fraccionario de Caputo-Fabrizio para la modelación de flujo en medios porosos 98
– Luis X. Vivas-Cruz
- Aplicaciones modernas del cálculo de variaciones y del control óptimo 100
– Tovias Enrique Castro Polo

Minicurso

- Una breve introducción a los modelos de ondas de choque 103
– Marlon Michael López Flores, Edson Landim de Almeida
- Algoritmo de descenso de gradiente: una inmersión profunda 104
– David Sierra Porta
- A bayesian statistical analysis of the demographics of Puerto Rico:
what we can expect in the next years? 105
– Angélica M. Rosario Santos

Matemática aplicada

La importancia de la modelación matemática en el desarrollo tecnológico

Autor: Marlon Michael López Flores
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
E-mail: mmlf@impa.br

Resumen: El propósito de la modelación matemática es aumentar nuestra comprensión del mundo y ayudarnos a dominar los desafíos de nuestra cultura tecnológica moderna. A menudo nos interesa diseñar dispositivos, procesos y sistemas. Una parte crucial del proceso de modelación es la evaluación de si un modelo matemático determinado describe o no con precisión un sistema. Un modelo matemático generalmente describe un sistema mediante un conjunto de variables y un conjunto de ecuaciones que establecen relaciones entre las variables. La validez de un modelo radica no solo en su ajuste a las observaciones empíricas, sino también en su capacidad de extrapolar a situaciones o datos más allá de los descritos originalmente en el modelo. El análisis teórico y numérico de estas formulaciones matemáticas a menudo proporciona información, respuestas y orientación útiles para la situación original que queremos representar. En esta presentación daremos algunos ejemplos de modelos matemáticos aplicados en ciencia y tecnología. Además, discutiremos el proceso general de modelación matemática. El objetivo principal aquí es alentar a las generaciones más jóvenes de científicos e ingenieros a explorar diferentes metodologías y áreas de modelación matemática.

Impacto COVID 19 sobre el mercado financiero de Latinoamérica: una aproximación desde entropía de redes de permutaciones ordinales

Autor: Andy Domínguez
Universidad Tecnológica de Bolívar
E-mail: adominguez@utb.edu.co

Resumen: La pandemia COVID 19 ha logrado impactar notablemente muchos aspectos de la sociedad, como también sensiblemente a diversos sectores económicos. Los mercados financieros no han sido ajeno a ello. La volatilidad y dinámica del precio de los activos ha sido recientemente interés de estudio durante el periodo COVID 19. En este trabajo exploramos una aplicación para evaluar el impacto de la pandemia sobre el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA) haciendo uso de una aproximación de redes complejas. Específicamente caracterizamos como un grafo los patrones de permutaciones de las series financieras de mayor capitalización que inciden a explicar la dinámica del MILA. Los primeros resultados indican interesantes rasgos diferencias de la red de patrones de permutación antes y durante la crisis de la pandemia. Estos hallazgos podrían sugerir nuevas alternativas de valorar el riesgo sistémico financiero, así como proveer nuevos elementos en el diseño de portafolios de inversión en relación al MILA.

Palabras clave: Mercados financieros, MILA, Redes Complejas, Entropía de redes

Referencias

- [1] C.W. Kulp, J.M. Chobot, H.R. Freitas, G.D. Sprechini. Using ordinal partition transition networks to analyze ECG data. *Chaos*, 26 (2016), p. 073114

Discretización por diferencias finitas en mallas adaptativas generadas con tabla Hash

Autores: Catalina M. Rúa, Priscila C. Calegari, Álvaro J. P. Franco
Universidad de Nariño, Universidade Federal de Santa Catarina, Araranguá y
Florianópolis

E-mail: catalina.rua@udenar.edu.co, priscila.calegari@ufsc.br y alvaro.junio@ufsc.br

Resumen: En esta charla se presentará una técnica eficiente para la creación de mallas adaptativas cartesianas con refinamientos por bloques usando tablas Hash y se introducirá una interpolación entre vecindad de células de diferentes refinamientos para generar aproximaciones de EDP con el método de diferencias finitas manteniendo la estabilidad numérica. Adicionalmente se presentarán resultados numéricos con la aproximación de la EDP elíptica de Poisson bidimensional, verificación de orden de convergencia y comparaciones de eficiencia computacional en estas mallas.

Palabras clave: Adaptive mesh refinement, Finite Difference Method, Hash table, Partial Differential equations

Introducción

La necesidad de solucionar numéricamente modelos matemáticos en Ecuaciones Diferenciales Parciales ha llevado a la aplicación de métodos numéricos como diferencias, volúmenes o elementos finitos sobre particiones o mallados del dominio en células. En regiones de interés bien sea por propiedades específicas del problema en análisis, por discontinuidades o variación de errores numéricos, computacionalmente es eficiente la generación de refinamientos de forma adaptativa. Las tablas Hash permiten con la aplicación de una función adecuada, la dispersión de elementos con pocas colisiones y con ello su búsqueda con orden constante lo cual facilita una estructura de datos para creación de mallas con una relación de vecindad directa que permite el uso de métodos de diferencias finitas que con una adecuada relación de interpolación mantienen su esquema de discretización o «Stencil».

Es necesario resaltar que algoritmos eficientes para la comunicación de células y la generación de mallas de forma dinámica para que acompañen el flujo de las aplicaciones, se deben investigar, comparar e implementar. Entre ellos están el uso de grafos, árboles y tablas de dispersión, ver [1, 2, 3] y [4]. Estas estructuras de datos combinadas con métodos como el de mínimos cuadrados móviles u otros que permitan la comunicación de células de diferentes niveles sin el uso de células fantasmas, posibilitan la realización de una buena herramienta computacional con la que se podrán simular aplicaciones como por ejemplo las relacionadas a dinámica de fluidos, ver [5] y [6]. Una exhaustiva verificación teórica y computacional debe ser realizada por medio de experimentación numérica con técnicas computacionales para el análisis de software y pruebas numéricas como lo son el orden de convergencia, la estabilidad y consistencia de los métodos empleados, lo cual será presentado en esta charla con la discretización de la EDP elíptica de Poisson bidimensional.

Este trabajo surge como resultado del Proyecto de Investigación *Simulación computacional para modelos matemáticos en mallas adaptativas*, financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones e Interacción Social de la Universidad de Nariño.

Referencias

- [1] Calegari, P.; Franco, A., (2021). *Geração de malhas com refinamento adaptativo usando tabelas de dispersão*. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1.

IV Encuentro Matemático del Caribe

- [2] Collom, G.; Redman, C.; Robey, R., (2018). *Fast Mesh-to-Mesh Remaps Using Hash Algorithms*. SIAM Journal on Scientific Computing. 40, 450-476.
- [3] Cormen, T.; Leiserson, C.; Rivest, R.; Stein, C., (2009). *Introduction to Algorithms*. 3a ed. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [4] Knuth, D. E., (1997). *The art of computer programming*, 3a. ed. Pearson Education.
- [5] Rua, C., (2013). *Simulação computacional adaptativa de escoamentos bifásicos viscoelásticos*, Universidad de San Paulo, Brasil, tesis doctorado.
- [6] Sousa, F. S.; Lages, C. F.; Ansoni, J. L.; Castelo, A.; Simao, A., (2019). *A finite difference method with meshless interpolation for incompressible flows in non-graded tree-based grids*. Journal of Computational physics 396, 848-866.

Modelo matemático para el control de barrenadores del género *Diatraea* en la caña de azúcar mediante la avispa *Cotesia flavipes*

Autores: Angie Sandalie Enriquez Jaramillo y Carlos Andres Trujillo Salazar
Universidad del Quindío
E-mail: asenriquez@uniquindio.edu.co

Resumen: Los barrenadores del género *Diatraea* son considerados como los insectos plaga que mas afectan a la caña de azúcar, agroindustria muy importante en Colombia después del café, debido al alto impacto que tienen en la producción generando pérdidas tanto en tonelaje de caña por hectárea, como en la calidad de la misma; *Cotesia flavipes* es una avispa que controla a esta plaga gracias a su tamaño, rapidez y eficacia. En esta investigación, se plantea un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales que describe la interacción entre la avispa *Cotesia flavipes* y los barrenadores del género *Diatraea*, se analiza su estabilidad para determinar el efecto que tiene esta avispa cuando se la utiliza como controlador biológico de los barrenadores en la caña de azúcar y además se realizan las simulaciones numéricas. El objetivo de esta charla es presentar los avances y algunos resultados sobre esa investigación.

Palabras clave: modelación matemática, avispa, *Cotesia flavipes*, barrenador, ecuaciones diferenciales

Introducción

El cultivo y producción de la caña de azúcar, es una agroindustria muy importante en Colombia después del café, puesto que de ella se derivan diferentes productos, como el azúcar (*Saccharum officinarum*) y los biocombustibles: alcohol carburante, etanol, biodiesel, cogeneración de energía entre otros, además genera ingresos y mas de 2700 empleos por ejemplo en [1] afirma que en 2020 se produjeron 24,3 millones de toneladas de caña; 2,3 millones de toneladas de azúcar; su zona de cultivo e industrialización en Colombia se ubican en los departamentos de Valle del Cauca, Cauca, Risaralda, Caldas y Quindío [5].

Infortunadamente, esta agroindustrias es afectada por enemigos naturales llamados plagas; en la caña, las plagas se catalogan debido al daño que producen, por ejemplo se encuentran los barrenadores del tallo y la semilla especialmente del género *Diatraea*; estos barrenadores perforan los nudos de los tallos de la caña y una vez adentro, depositan sus huevos, de los cuales emergen las larvas, que a su vez se alimentan de la planta impidiendo el desarrollo natural de la caña, disminuyendo la cantidad y pureza del jugo que se extrae de esta y reduciendo el contenido de la Sacarosa [6, 1, 4].

A lo largo de los años, ha resultado pertinente realizar investigaciones que ayuden a mitigar estas plagas, estudiando su comportamiento, aspectos biológicos entre otros; en ellas se han encontrado diferentes controles tanto biológicos como culturales, físicos o químicos. En cuanto a los biológicos, se encuentra *Cotesia flavipes*, que es una avispa de 4 mm de tamaño de tipo parasitoide que logra controlar a esta plaga y ha sido efectiva gracias a su tamaño y rapidez con que logra matarlos; además es atraída por el olor del excremento de las larvas del barrenador y no presenta ninguna preferencia por alguna especie de barrenadores [2, 7, 8, 3].

Referencias

- [1] (2020) Varios Autores, Sector agroindustrial de la caña, <https://www.asocana.org/publico/info.aspx?Cid=215>.
- [2] (2019) Narrea M. Astola S, Biología y comportamiento de *cotesia avipes cameron* (braconidae) parasitoide de *diatraea saccharalis fabricius* (crambidae), *Ecología Aplicada*, 77-83.
- [3] (2018) Osorio P., Preferencia de *cotesia flavipes* (hymenoptera: Braconidae) sobre barrenadores *diatraea* spp. (lepidoptera: Crambidae) de caña para panela, p. 1-59.
- [4] (2015) SAGARPA, Ficha técnica barrenador de la caña de azúcar.
- [5] (2013) Bustillo A., Insectos plaga y organismos benéficos del cultivo de la caña de azúcar en Colombia, Cenicaña
- [6] (2011) Bustillo A., Parasitoides, predadores y entomopatógenos que afectan las plagas de la caña de azúcar en Colombia, Cenicaña, 1-25.
- [7] (2010) Hernandez D., Estudio de algunos aspectos biológicos de *Cotesia flavipes* Cameron (Hymenoptera : Braconidae) parasitoide de *Diatraea saccharalis* Fabricius (Lepidoptera : Crambidae). *Ontomotropica*, 69-81
- [8] (2003) Lozano J., Manejo integrado del complejo barrenadores de la caña panelera en el piedemonte.

Mathematical model of HIV/AIDS considering sexual preferences under antiretroviral therapy, a case study in San Juan de Pasto, Colombia

Author: Cristian Camilo Espitia Morillo
 Universidad de los Llanos
 E-mail: cristian.espitia@unillanos.edu.co

Abstract: This presentation is an exposition of the research [1] published in Journal Computational Biology by the author. The abstract is as follows: While several studies on human immunodeficiency virus (HIV)/acquired immunodeficiency syndrome (AIDS) in the homosexual and heterosexual population have demonstrated substantial advantages in controlling HIV transmission in these groups, the overall benefits of the models with a bisexual population and initiation of antiretroviral therapy have not had enough attention in dynamic modeling. Thus, we used a mathematical model based on studying the impacts of bisexual behavior in a global community developed in the PhD thesis work in [2]. The model is governed by a nonlinear ordinary differential equation system, the parameters of which are calibrated with data from the cumulative cases of HIV infection and AIDS reported in San Juan de Pasto in 2019 adapted from [3]. Our model estimations show which parameters are the most influential and how to modulate them to decrease the HIV infection.

Keywords: Mathematical Model, Antirretroviral Therapy. Human Immunodeficiency Virus, System of Ordinary Differential Equations.

Introduction

A compartmental model of HIV/AIDS is represented by a system of ordinary differential equations (ODE) formed by observing the flow of individuals from one compartment to the others. As an example, the target population is divided into 8 compartments, where the number of individuals changes with respect to time; the susceptible class $S_{h,w,m}(t)$ comprises individuals homosexual men, women and heterosexual men respectively, who were not exposed to infection, the infected class $I_{h,w,m}(t)$ consists of infected individuals homosexual men, women and heterosexual men respectively, who infect others and the class of individuals living with AIDS $A(t)$ involves individuals who have already developed the syndrome as a result of HIV infection. The infection occurs due to the interaction of susceptible individuals with infected ones, and depends on the initial hypotheses of the model.

The model assumed that the only way to transmit the HIV virus is through sexual relations between heterosexuals, homosexuals and bisexual individuals; moreover, the effect of ART among infected people is studied making use of a deterministic mathematical model of nonlinear ordinary differential equations.

Parameters in the model are Ψ represent Constant Recruitment, θ represent Men Proportion γ represent Heterosexual Proportion, p represent Proportion of Initially, μ represent Natural Mortality Rate, d represent Induced Disease Mortality, δ represent AIDS Development Rate, α represent Departure Rate of infected, $c_{s,h,hw,hm}$ represent Sexual Partners Rate and $\beta_{s,h,hw,hm}$ represent Sexual Transmission Probability.

References

- [1] C. Espitia, M. Botina, M. Solarte, I. Hernandez, R. Riascos, J. Meyer. "Mathematical model of HIV/AIDS considering sexual preferences under antiretroviral therapy, a case study in San Juan de Pasto, Colombia. *Journal Computational Biology* 29.5 (2022) 483 – 493.

IV Encuentro Matemático del Caribe

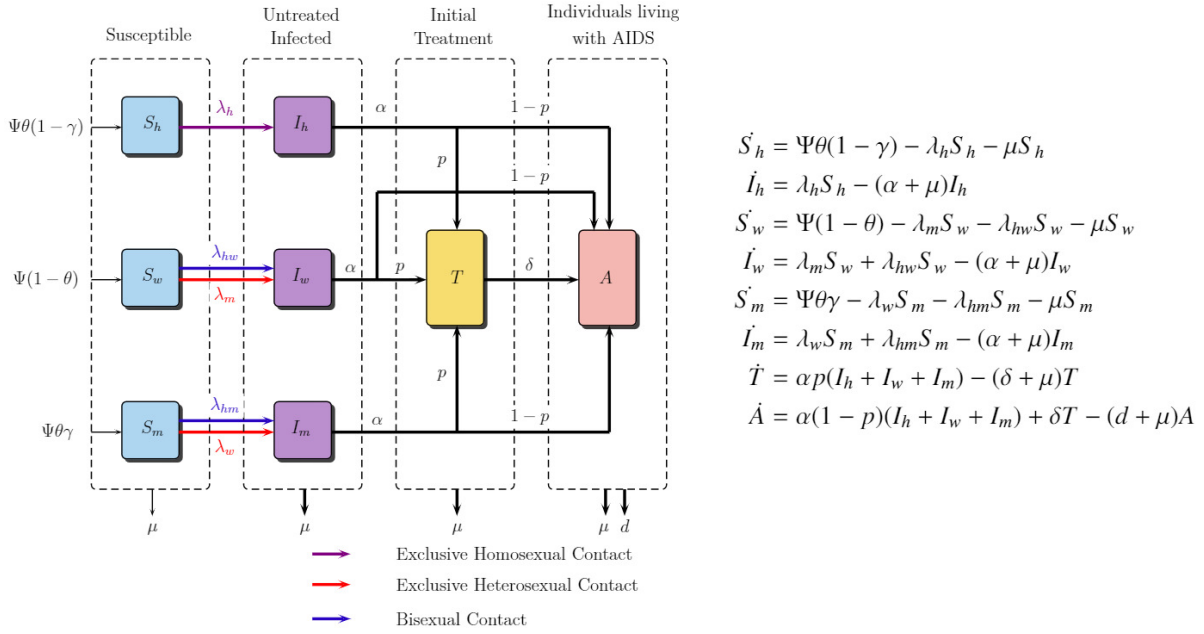


Figura 1: Diagram and ODE System for Mathematical Model.

- [2] C. Espitia 2021. (in press). Mathematical Modeling of HIV/AIDS Spread in Human Population [Unpublished doctoral dissertation]. University of Campinas. Brazil.
- [3] IDSN 2019. Instituto Departamental de Salud de Nariño, fuente SIVIGILA. Available at: <https://n9.cl/g6at5>. Accessed March 8, 2021.

Caracterización del riesgo cardiovascular en una institución de salud de primer nivel en Armenia

Autores: Sol de Amor Vasquez Quintero, Gladys Elena Salcedo Echeverry,
Hernan Darío Toro Zapata
Universidad del Quindío
E-mail: solvasquez@uniquindio.edu.co, gسالcedo@uniquindio.edu.co,
hdtoro@uniquindio.edu.co

Resumen: Se pretende planear una investigación formal, donde se analice y caracterice el riesgo cardiovascular en una institución de salud de primer nivel en Armenia mediante la realización de estudios exploratorios de análisis de componentes principales y análisis de correspondencias, y la formulación de un modelo de regresión lineal.

Palabras clave: Enfermedades cardiovasculares, riesgo cardiovascular, factores de riesgo cardiovascular, prevalencia, análisis de correspondencias, análisis de componentes principales, modelo de regresión lineal.

Introducción

Las enfermedades cardiovasculares (ECV) son trastornos del corazón y de los vasos sanguíneos; se posicionan como la primera causa de muerte en todo el mundo [1], es así como en el 2019, las muertes fueron en un 40% causadas por ECV a nivel mundial [2]. Las ECV representan un desafío para la comunidad científica en el presente siglo XXI, esto debido a que se pronostica que para el año 2030 habrá aproximadamente 25 millones de muertes por esta causa en el mundo. El riesgo cardiovascular se define como la probabilidad que tiene una persona de sufrir alguna de las ECV en un periodo de tiempo, lo cual está directamente relacionado con el número de factores de riesgo que la persona pueda presentar; el riesgo cardiovascular también incluye la posibilidad de padecer enfermedad cerebrovascular y arterial periférica [3]. Los factores de riesgo son hechos que aumentan la probabilidad de que una persona presente una o varias ECV; pueden ser de tipo biológico o de tipo adquirido [4].

En Colombia, la enfermedad coronaria y la enfermedad cardíaca isquémica predomina en los hombres; por el contrario, en las mujeres predominan las enfermedades relacionadas con la hipertensión arterial, como la enfermedad cerebrovascular y la insuficiencia cardíaca [5]. El grupo de edad con mayor probabilidad de padecer ECV son los adultos mayores de 65 años de edad [4]. Todo lo anterior abre paso a la intención de analizar y caracterizar el riesgo cardiovascular en una institución de salud de primer nivel en Armenia, durante un periodo de 6 años, estudiando la prevalencia de las ECV y considerando variables demográficas, clínicas, poblacionales, espaciales, entre otras. La pregunta de investigación que se quiere resolver en esta investigación es ¿cómo se caracteriza el riesgo cardiovascular en una institución de salud de primer nivel en Armenia, conociendo la prevalencia de las ECV y considerando variables demográficas, clínicas, poblacionales, espaciales, entre otras?

Finalmente, los objetivos a lograr para responder la pregunta son: realizar el preprocesamiento de los datos; estudiar los datos (estudios exploratorios) mediante las técnicas estadísticas de análisis de correspondencias múltiples, para las variables de tipo cualitativo, y análisis de componentes principales, para las variables de tipo cuantitativo; construir un modelo de regresión lineal con el fin de analizar el riesgo cardiovascular en una institución de salud de primer nivel en Armenia; calcular la prevalencia de las ECV y del riesgo cardiovascular en una institución de salud de primer nivel en Armenia durante un periodo de 6 años.

Referencias

- [1] Heads of State commit to Noncommunicable Disease Global Compact to save 50 million lives by 2030. Recuperado de <https://www.who.int/news/item/21-09-2022-heads-of-state-commit-to-noncommunicable-disease-global-compact-to-save-50-million-lives-by-2030>
- [2] Día Mundial de Corazón: Llamado a la acción sobre las enfermedades cardiovasculares en las Mujeres en la Región de las Américas Recuperado de <https://www.siacardio.com/consejos/mujersiac/noticias/dia-mundial-de-corazon-llamado-a-la-accion-sobre-las-enfermedades-cardiovasculares-en-las-mujeres-en-la-region-de-las-americas>
- [3] Vega Abascal, Jorge, Mayra Guimara Mosqueda, and Luis Vega Abascal. "Riesgo cardiovascular, una herramienta util para la prevención de las enfermedades cardiovasculares." *Revista Cubana de Medicina General Integral* 27.1 (2011): 91-97.
- [4] Factores de riesgo cardiovascular. Texas Heart Institute. Recuperado de <https://www.texasheart.org/heart-health/heart-information-center/topics/factores-de-riesgo-cardiovascular/>.
- [5] Gomez, Luis Alberto. "Las enfermedades cardiovasculares: un problema de salud pública y un reto global." *Biomédica* 31.4 (2011).

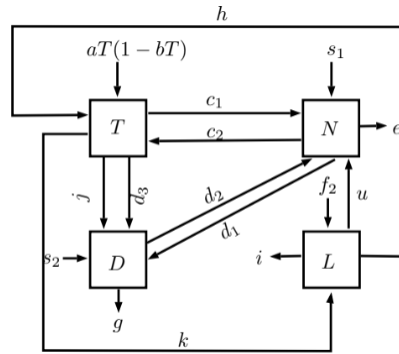


Figura 3: Interacciones entre células dendríticas, *Natural Killers*, CD8+ y tumorales. Adaptación de diagrama en [3]

explícitamente los distintos tipos de células efectoras mencionadas anteriormente como se puede observar en la Figura 3.

En este trabajo se estudia un modelo que considera los supuestos de Unni & Seshaiyer en [3] y adicionalmente se incluye dentro del modelo el tratamiento por quimioterapia.

Referencias

- [1] Instituto Nacional del Cáncer. ¿Qué es el cáncer?. Recuperado de <https://www.cancer.gov/espanol/cancer/naturaleza/que-es>.
- [2] Kuznetsov, Vladimir A., et al. "Nonlinear dynamics of immunogenic tumors: parameter estimation and global bifurcation analysis." *Bulletin of mathematical biology* 56.2 (1994): 295-321.
- [3] Unni Pranav and Padmanabhan Seshaiyer. "Mathematical modeling, analysis, and simulation of tumor dynamics with drug interventions." *Computational and mathematical methods in medicine* 2019 (2019).

Modelo para el análisis de una vacunación con protección y sin protección contra diferentes variantes de SARS-CoV-2

Autores: Oswaldo A. Vargas V., Cesar A. Acosta M., Oscar A. Manrique A.
Universidad del Quindío
E-mail: oavargas@uniquindio.edu.co, cminoli@uniquindio.edu.co,
oamanrique@uniquindio.edu.co

Resumen: El COVID-19 es una enfermedad producida por el virus SARS-CoV-2 que se transmite de persona a persona y ha generado una crisis de salud pública a nivel mundial, al punto de ser declarada como pandemia y conllevar a varios países a decretar un confinamiento. En la presente charla, se presenta un modelo matemático con base en ecuaciones diferenciales no lineales, que interpreta la transmisión de una nueva variante del COVID-19 en una población vacunada con el fin de analizar teóricamente el efecto de la propagación de la variante, considerando que no se ve afectada por los efectos de la vacunación, además, se determina el número básico de reproducción y se muestran algunas simulaciones del modelo.

Palabras clave: COVID-19, modelo matemático, retardo, reinfección, variante.

Introducción

En el mes de diciembre del año 2019, aparece un brote de una enfermedad que sería de gran interés en China y a nivel mundial, esta nueva enfermedad se presenta inicialmente como un brote de neumonía de causa desconocida, la cual conlleva a un gran número de individuos hospitalizados. A inicios del mes de enero del 2020 las autoridades sanitarias y la comunidad científica advierten a la población sobre el impacto que tiene este nuevo virus en las personas e inmediatamente se aísla (genoma) para su respectivo estudio, no obstante a finales del mes de enero del 2020 las autoridades sanitarias informan de la rápida expansión y propagación del virus, alcanzando 23 provincias en China [1, 2].

La enfermedad de Coronavirus 2019 se origina en la antigua ciudad de Wuhan, China, la cual cuenta con alrededor de 11 millones de habitantes en la provincia de Hubei, el surgimiento del virus se da en un mercado de mariscos, donde se encontraban animales vivos y no procesados para su respectiva comercialización; la culpable es una cepa llamada SARS-COV-2 causante de la enfermedad COVID-19 y desde su aparición, hasta finales de enero ya tenía contagiado a más de diez mil personas en China y más de 90 casos reportados en los siguientes países: Taiwan, Tailandia, Vietnam, Malasia, Nepal, Sri Lanka, Camboya, Japón, Singapur, la República de Corea, Emiratos Árabes Unidos, Estados Unidos, Filipinas, India, Irán, Australia, Canadá, Finlandia, Francia y Alemania [3, 4], y en el 1 mes de marzo del 2020 la Organización Mundial de Salud (OMS) declara a esta enfermedad como una pandemia [1, 6, 5].

La forma de transmisión del virus SARS-CoV-2 es a través del contacto cercano de persona a persona y ocurre a través de gotitas de líquido provenientes de la tos y estornudos, este tipo de transmisión es de manera directa y se da comúnmente en los hogares, las reuniones familiares o sociales y lugares cerrados donde hay poca ventilación y hay diferentes grupos de personas, también de manera indirecta la transmisión se origina cuando las gotitas caen a una superficie inerte y se tiene contacto con ellas (fomites), sin lugar a dudas estas dos formas de transmisión son un factor de alto riesgo, sin embargo hay una transmisión silenciosa la cual se da por medio del contacto con personas asintomáticas que portan el virus y no poseen síntomas, en este sentido el distanciamiento social y el uso de tapabocas es de suma importancia ya que la transmisión ocurre a una distancia menor a 2 metros [7, 8].

IV Encuentro Matemático del Caribe

De acuerdo con La Organización Mundial de la Salud (OMS), el mundo ha presenciado diferentes tipos de brotes de enfermedades y epidemias producidas por diferentes agentes infecciosos, no obstante, la aparición de enfermedades relacionadas con los coronavirus (SARS y MERS) han sido un desafío mundial para los sistemas de salud pública [1].

La evolución de los síntomas de la enfermedad Covid-19 varía según la persona, ya que depende de los problemas de salud adicionales que tiene el individuo infectado, los cuales pueden conllevar a la enfermedad crónica y la muerte, no obstante los síntomas más comunes son: fiebre, tos, cansancio, pérdida del gusto o del olfato, dificultad para respirar, dolor en el pecho, entre otros, no obstante, en Wuhan se estimó en un principio que el tiempo de incubación era de 2 a 5 días, mientras que la OMS asume que el periodo de incubación de la enfermedad COVID-19 es de 1 a 14 días y el Centro Europeo para la Prevención y el Control de las Enfermedades (ECDC) contempla que el tiempo medio de incubación es de 1 a 5 días [9].

Las medidas de control, prevención y reducción de la enfermedad Covid 2019 es responsabilidad de cada individuo, sin embargo, las entidades de salud presentan las siguientes medidas de control: la aplicación de vacunas autorizadas por la OMS Pfizer-BioNTech, AstraZeneca, Janssen, Moderna, Sinopharm/BIBP y Sinovac, seguido del lavado de manos, el uso preventivo del tapabocas, al toser o estornudar cubrirse con el codo o un pañuelo, mantener distanciamiento social y por último, si tiene fiebre, tos y dificultad para respirar buscar ayuda médica inmediata [11, 10].

Los casos de reinfección actúan como alerta y fortalecen la necesidad de mantener las medidas de prevención y control que se tienen respecto a la pandemia, según la Organización Panamericana de la Salud y la OMS se han confirmado varios casos de reinfección en el mundo, sin embargo no existe evidencia suficiente sobre las personas que se han recuperado de la infección por SARS-CoV-2 que generen anticuerpos y las protejan de una nueva reinfección; cuando un individuo es infectado y se recupera, pero al cabo de un tiempo vuelve a infectarse, se denomina reinfección; en los casos particulares de reinfección o infección es importante el distanciamiento social y las medidas de prevención, no obstante en la actualidad el proceso de vacunación, tiende a evitar nuevos contagios y reducir la posibilidad de circulación de la enfermedad COVID-19 [1, 11, 12].

El desarrollo de las variantes del virus SARS-CoV-2 es provocado por diferentes mutaciones y se convierte en un evento habitual y natural en el transcurso del proceso de transformación y evolución de los virus; los cambios en la composición del virus a través de las mutaciones se definen a través de grupos genéticos, los cuales a su vez, se conocen como linajes y se distribuyen por todo el mundo causando emergencias de salud pública, además cuando las mutaciones generan diferencias significativas dentro de cada grupo genético se denominan variantes y suelen aparecer cuando el nivel de transmisión y contagio del virus es alto [12].

Las variantes del SARS-CoV-2 están relacionadas con las mutaciones de la proteína S (Spike), estas variantes han causado alerta y preocupación con respecto a la eficacia que tienen las vacunas que se están aplicando actualmente; las variantes Alpha, Beta, Gamma, Delta, Mu y Omicron, implican una mayor transmisión del virus y un aumento en la incidencia de la enfermedad, lo cual conlleva a más hospitalizaciones, admisiones en UCI, muertes y preocupación en el sistema sanitario [1, 7, 13, 14].

Distintos autores plantean la importancia que tienen los modelos matemáticos para estudiar enfermedades infecciosas, además del impacto que tienen las simulaciones para investigar diferentes escenarios relacionados con determinadas epidemias, en el estudio que realizan Gonzalez, et al., (2021) proporcionan un modelo para ver el impacto que tiene una variante de SARS-COV-2 más transmisible, la cual pudiera ocasionar problemas en el sistema de salud, la incidencia, la hospitalización y las muertes; los autores estudian diferentes escenarios en cuanto a la transmisibilidad con el fin de proporcionar un apoyo científico para las políticas de salud pública y concientizar sobre posibles situaciones futuras relacionadas con la pandemia de COVID-19 [15].

Además, Muhammad, et al. estudian el análisis teórico matemático del modelo de la enfermedad COVID-19 con efecto de retardo temporal y manifiestan que los factores de retraso más importantes son: el distanciamiento social, la cuarentena, las restricciones de viaje, la extensión de vacaciones, la hospitalización y el

aislamiento los cuales se utilizan como herramientas importantes para controlar la pandemia producida por la enfermedad; los investigadores analizan el número básico de reproducción respecto al comportamiento y la naturaleza que tiene la enfermedad a través del modelo retardado [16].

Referencias

- [1] Mohammadi, Mehrdad, Mohammad Shayestehpour, and Hamed Mirzaei. "The impact of spike mutated variants of SARS-CoV2 [Alpha, Beta, Gamma, Delta, and Lambda] on the efficacy of subunit recombinant vaccines." *Brazilian Journal of Infectious Diseases* 25 (2021).
- [2] Wang, Chen, et al. A novel coronavirus outbreak of global health concern. *The Lancet* 395.10223 (2020): 470-473.
- [3] Gonzalez, Juan Miguel Koury, and Miguel Hirschhaut. Reseña histórica del COVID-19: ¿Cómo y por qué llegamos a esta pandemia?. *Acta odontologica venezolana* 58.1 (2020): 3-4.
- [4] Khan, Muhammad Altaf, and Abdou Atangana. "Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-nCov) with fractional derivative." *Alexandria Engineering Journal* 59.4 (2020): 2379-2389.
- [5] Pinzon, Jorge Enrique Díaz. Efecto de la aplicación de vacunas contra COVID-19 sobre la nueva incidencia de los índices de mortalidad por SARS-COV-2 en Colombia. *Revista Repertorio de Medicina y Cirugía* (2021): 51-55.
- [6] Amin Blanco, N. *Revista VacciMonitor (Vacunología y temas afines) Vaccimonitor*, 30(2), 47-50 <http://scielo.sld.cu/pdf/vac/v30n2/1025-0298-vac-30-02-47.pdf> (2021).
- [7] Duong, D. Alpha, Beta, Delta, Gamma: What's important to know about SARS-CoV2 variants of concern? *Canadian Medical Association Journal*, 193(27), E1059-E1060. <https://doi.org/10.1503/cmaj.1095949> (2021).
- [8] Balkhair, A. A. Covid-19 pandemic: A new chapter in the history of infectious diseases. *Oman Medical Journal*, 35(2), 2-3. <https://doi.org/10.5001/OMJ.2020.41> (2020).
- [9] McMahon, Andrew, and Nicole C. Robb. "Discrete SIR modelling using empirical infection data shows that SARS-CoV-2 infection provides short-term immunity." *medRxiv* (2020).
- [10] Organización Panamericana de la Salud/Organización Mundial de la Salud. Variantes de SARS-CoV-2 en las Américas. Paho, 11. <https://www.paho.org/es/file/81083/download?token=TiS4tiRi>, <https://www.who.int/groups/strategic-advisory-group-of-experts-on-immunization/covid-19-materials> (2021).
- [11] Organización de Naciones Unidas. (1 de septiembre de 2021). Colombia: La OMS vigila de cerca una nueva variante del coronavirus, llamada "Mu". Obtenido de <https://news.un.org/es/story/2021/09/1496152>
- [12] Kantor, Isabel N., Isabel A. Luthy, and Viviana Ritacco. "Las variantes de SARS-CoV-2 y la llamada resistencia a las vacunas." *Medicina (Buenos Aires)* 81.3 (2021): 421-426.
- [13] Barboza, Joshuan J. "Variante "Delta" del COVID-19: ¿Por qué debemos preocuparnos?." *Revista Peruana de Investigación en Salud* 5.3 (2021): 151-151.
- [14] Pastrian-Soto, Gabriel. "Presencia y expresión del receptor ACE2 (Target de SARS-CoV-2) en tejidos humanos y cavidad oral. Posibles rutas de infección en órganos orales." *International journal of odontostomatology* 14.4 (2020): 501-507.
- [15] Gonzalez-Parra, Gilberto, David Martínez-Rodríguez, and Rafael J. Villanueva-Mico. "Impact of a new SARS-CoV-2 variant on the population: A mathematical modeling approach." *Mathematical and Computational Applications* 26.2 (2021): 25.
- [16] Naveed, Muhammad, et al. "Mathematical analysis of novel coronavirus (2019-nCov) delay pandemic model." *Comput. Mater. Continua* 64.3 (2020): 1401-1414.

Diagramas causales para el estudio del rendimiento académico

Autores: Maria Teresa Sanz y Emilia López-Iñesta
Universitat de València, España
E-mail: m.teresa.sanz@uv.es, emilia.lopez@uv.es

Resumen: Muchas de las investigaciones realizadas sobre el rendimiento escolar en diferentes niveles educativos han tenido como finalidad conocer cuáles son los factores que inciden y condicionan el rendimiento académico del alumnado [1]. A lo largo del tiempo, se ha consensuado que el rendimiento académico del estudiantado se puede ver afectado por distintos factores, que van desde lo personal hasta lo sociocultural. Según [2] existen cuatro bloques de variables socioeducativas entendidas como factores que inciden en el rendimiento escolar: a) factores organizativos a nivel de centro, b) factores organizativos a nivel de aula, c) factores relativos al docente, y d) factores relacionados con el contexto familiar

La predicción del rendimiento académico es una de las herramientas que permite delimitar los factores más influyentes para entender mejor el problema y poder abordarlo. Para las instituciones académicas, la calidad en la educación y tener alumnado con buenos resultados académicos son objetivos prioritarios. Por ello existen muchas investigaciones que estudian la predicción del rendimiento académico, a través de distintas técnicas como la inteligencia artificial ([3, 4, 5, 6]), la dinámica de sistemas ([7, 8]) o los modelos de regresión ([9, 10]).

En los dos últimos años han proliferado los estudios sobre los diferentes factores que pueden afectar al rendimiento del alumnado relacionados con el impacto de la COVID-19. Así, el presente trabajo plantea un estudio en el que se tiene como objetivo principal el análisis de la incidencia de diferentes factores externos al ámbito escolar (tecnología, economía y características del alumnado) sobre el rendimiento académico de estudiantado universitario durante el confinamiento del curso 2019/2020 mediante la aplicación de métodos propios del modelado a través de regresión

En este trabajo, se construye un diagrama causal que permite cuantificar la relación existente entre el rendimiento académico del estudiantado, el acceso tecnológico y los factores personales y/o económicos. Estas relaciones permiten determinar, a partir de un modelo de regresión, la predicción del rendimiento, siendo determinante en este trabajo para obtener mayores resultados académicos, estar en situación personal laboral donde solo se estudia y un acceso a internet con banda ADSL o teléfono móvil.

El análisis del diagrama causal permite comprobar que la situación personal laboral del alumnado es la variable de primer nivel que más incide sobre los resultados académicos, obteniendo las mejores calificaciones el alumnado que solo estudiaba, con una diferencia de casi dos puntos con aquellos que también trabajaban o que habían perdido el trabajo a causa del COVID-19. La variable de segundo nivel asociada con la situación personal laboral es la edad, siendo los más jóvenes aquellos que únicamente estudian.

La edad también incide sobre tres variables consideradas de primer nivel, pero que tienen menor efecto sobre el rendimiento académico. En primer lugar, el sustento familiar, siendo los más jóvenes los estudiantes que marcan como opción que el sustento familiar corre a cargo de su padre y/o madre, y con diferencias estadísticamente significativas con aquellos cuya opción es que toda la familia se ha quedado en paro por el COVID-19 o que son ellos mismos quienes sustentan al núcleo familiar. En segundo lugar, el acceso tecnológico, definido a través de la compañía telefónica y el tipo de acceso a internet, manifiesta una asociación de nivel medio con los resultados académicos, pero no marca diferencias estadísticamente significativas entre las diferentes categorías. Finalmente, y como variable de segundo nivel, se sitúa el lugar de residencia donde el alumnado ha pasado el estado de alarma relacionado con el tipo de acceso a internet.

Futuras líneas de investigación podrían ampliar el alcance del estudio y abordar, desde un análisis más amplio de factores cognitivos del estudiante, así como desde la perspectiva del profesorado, el modelo de

enseñanza a distancia que ha sido implementado tras la COVID-19. Esto permitiría identificar las dificultades y las fortalezas y continuar evidenciando empíricamente la educación impuesta.

Palabras clave: dinámica de sistemas; diagramas causales; enseñanza superior; tecnología; COVID-19.

Referencias

- [1] Quintero, María Teresa Quintero, and Germán Manuel Orozco Vallejo. "Desempeño académico: una opción para la cualificación de las instituciones educativas." *Plumilla educativa* 12.2 (2013): 93-115. <https://doi.org/10.30554/plumillaedu.12.375.2013>
- [2] García-Martín, S., and I. Cantón. "Factores que inciden en el rendimiento académico. El camino hacia el éxito escolar de todos." (2016). <http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/64221>
- [3] Hejazi, Elaheh, et al. "Prediction of academic performance: the role of perception of the class structure, motivation and cognitive variables." *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 15 (2011): 2063-2067. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.04.054>
- [4] Helal, Sumyea, et al. "Predicting academic performance by considering student heterogeneity." *Knowledge-Based Systems* 161 (2018): 134-146. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.07.042>
- [5] Fonteyne, Lot, Wouter Duyck, and Filip De Fruyt. "Program-specific prediction of academic achievement on the basis of cognitive and non-cognitive factors." *Learning and Individual Differences* 56 (2017): 34-48. <http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2017.05.003>
- [6] Paunonen, Sampo V., and Michael C. Ashton. "On the prediction of academic performance with personality traits: A replication study." *Journal of Research in Personality* 47.6 (2013): 778-781. <https://doi.org/10.1016/j.jrp.2013.08.003>
- [7] Sanz, María T., et al. "Uso de la comprensión lectora para la construcción de un modelo predictivo del éxito de estudiantes de 4o de Primaria cuando resuelven problemas verbales en un sistema inteligente [Using reading comprehension to build a predictive model for the fourth-grade grade students' achievement when solving word problems in an intelligent tutoring system]." *Rev. Educ* 384 (2019): 41-69. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:24b09336-644b-4c2e-ab16-c6e05eda04f4/02sanzesp-ingl.pdf>
- [8] De Vinatea Ramírez, José Andrés. "Modelo de dinámica de sistemas para predecir el efecto de las tutorías en la población de alumnos en riesgo de deserción académica de la Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Universidad Nacional de Ingeniería." (2019). <http://repositorio.unjbg.edu.pe/handle/UNJBG/3715>
- [9] Tanujaya, Benidiktus, Jeinne Mumu, and Gaguk Margono. "The Relationship between Higher Order Thinking Skills and Academic Performance of Student in Mathematics Instruction." *International Education Studies* 10.11 (2017): 78-85. <https://doi.org/10.5539/ies.v10n11p78>
- [10] Sanz, Maria T., et al. "Measuring arithmetic word problem complexity through reading comprehension and learning analytics." *Mathematics* 8.9 (2020): 1556. <https://doi.org/10.3390/math8091556>

Sobre la teoría musical y sus aplicaciones matemáticas

Autores: Daniel Ricardo Vásquez Calderón, Laura Catalina Alzate Ortiz,
Nidia Yadira Caicedo Bravo, Leonardo Duván Restrepo Alape
Universidad del Tolima, Universidad del Quindío
E-mail: drvasquezc@ut.edu.co, lcalzateor@ut.edu.co, nycaicedob@ut.edu.co,
ldrestrepoa@ut.edu.co

Resumen: En este comunicado se presentan algunos estudios que relacionan la música y la matemática. El primero de ellos se refiere a los hallazgos de la Escuela Pitagórica que explora la armonía musical a partir de tres proporciones clave:

- Media aritmética: Representada mediante la fórmula $b = \frac{a+c}{2}$, donde a y c son octavas.
- Media armónica: Representada mediante la fórmula $b = \frac{2*a*c}{a+c}$, donde a y c son octavas.
- Media geométrica: Representada mediante la fórmula $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ donde a y c son octavas.

Del mismo modo se presentan las aplicaciones de otras áreas de la matemática en la teoría musical, como las aplicaciones de logaritmos para construir una definición de octava musical, las aplicaciones de teoría de grupos y geometrías para representar los acordes musicales y por último, se presentan algunas aplicaciones en programación para lenguaje Python.

Palabras clave: Logaritmo, música, permutación, proporciones.

Introducción

ARTE Y CIENCIA. Dos aristas de la cultura universal, dos conceptos de belleza, dos pilares del saber. Para algunos pueden parecer antónimos, y para otros parecen caminos con vastas coincidencias y puntos de convergencia en común. El objetivo es estudiar a las matemáticas como arte y a la música como ciencia con el fin de encontrar en la teoría musical estructuras algebraicas y utilizar la teoría de grupos para definir esta relación. En el trabajo presentado se hace énfasis en la teoría de grupos a partir de la acción de sus elementos (rotaciones y reflexiones) y así encontrar la forma de relacionar acordes musicales con el grupo diédrico D_{12} .

Referencias

- [1] Fraleigh, John B. ALGEBRA ABSTRACTA: PRIMER CURSO: JHON B. FRALEIGH. No. QA162 F7218.1987.
- [2] Gallian, Joseph A. Contemporary abstract algebra. Chapman and Hall/CRC, 2021.
- [3] Hoyos, Diego L. "La matemática de la música." *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* 20.1 (2012): 29-48.
- [4] Klima, Richard, Neil Sigmon, and Ernest Stitzinger. Applied Abstract Algebra with MapleTM and MATLAB®: A Maple and MATLAB Approach. Vol. 34. CRC Press, 2015.
- [5] Tomasini, María Cecilia. "El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas." *C&T Universidad de Palermo* (2007): 15-27.

Natural factor based solvers

Authors: Omar Andrés Cuervo, Juan Galvis, Markus Sarkis
 Universidad Nacional de Colombia, Institute Worcester USA
 E-mail: oacuervof@unal.edu.co, jcgalvisa@unal.edu.co, msarkis@wpi.edu

Abstract: We consider parametric families of partial differential equations–PDEs where the parameter κ modifies only the (1,1) block of a saddle point matrix product of a discretization below. The main goal is to develop an algorithm that removes some of the dependence of iterative solvers on the parameter κ . The algorithm we propose requires only one matrix factorization which does not depend on κ , therefore, allows to reuse it for solving very fast a large number of discrete PDEs for different κ and forcing terms. The design of the proposed algorithm is motivated by previous works on natural factor formulation of the stiffness matrices and their stable numerical solvers. As an application, in two dimensions, we consider an iterative preconditioned solver based on the null space of Crouzeix, Raviart discrete gradient represented as the discrete curl of P_1 conforming finite element functions. For the numerical examples, we consider the case of random coefficient pressure equation where the permeability is modeled by an stochastic process. We note that contrarily from recycling Krylov subspace techniques, the proposed algorithm does not require fixed forcing terms.

Keywords: Crouzeix-Raviart nonconforming finite elements; saddle point system; mixed finite elements.

Introduction

The general form of a saddle point system of linear equations we consider is

$$\begin{bmatrix} D(\kappa)^{-1} & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ b \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where the matrix D is symmetric positive definite. This form is standard in the formulation of mixed finite elements. What is not very well known, as pointed out by Argyris and Bronlund, is that classical conforming and nonconforming finite element methods – FEMs can also be written in the form (1) with $r = 0$. We show that the stiffness matrix, associated to the Crouzeix, Raviart FEM element discretization for the PDE with isotropic coefficients $\kappa(x)$, has the natural factor of the form $A_{CR} = G_{CR}^T D(\kappa) G_{CR}$, where G_{CR} is the discrete gradient (not affected by the parameter κ) and $D(\kappa)$ is a diagonal matrix with entries depending of the integration of κ in each element, hence, it is easy to update the natural factor if κ is modified. Due to the superior numerical stability with respect to roundoff errors when operating with G^T , $D(\kappa)$ and G rather than the assembled stiffness matrix. The methods start by representing q on the range of the matrix $[GZ]$ where Z is such that $Q = [GZ]$ is a square invertible matrix; two common choices of Z are $Z^T G = 0$ or $Z^T D^{-1} G = 0$. These works generate very stable algorithms for ill-conditioned κ , however, they do not remove the dependence on D of the factorizations, hence, they do not it our goal of reusing the same factorization for different values of κ . Then we consider the coupled system

$$(\text{grad}u_{CR} + \text{curl}w_{P_1}, \kappa(\text{grad}v_{CR} + \text{curl}v_{P_1}))_{L^2(\Omega)}$$

as a preconditioner for the uncoupled system

$$(\text{grad}u_{CR}, \kappa \text{grad}v_{CR})_{\kappa} + (\text{curl}w_{P_1}, \kappa \text{curl}v_{P_1})_{L^2(\Omega)}.$$

References

- [1] Argyris, JiH, and O. E. Brønlund. "The natural factor formulation of the stiffness for the matrix displacement method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 5.1 (1975): 97-119.
- [2] Drmač, Zlatko. "Numerical methods for accurate computation of the eigenvalues of Hermitian matrices and the singular values of general matrices." *SeMA Journal* 78.1 (2021): 53-92.
- [3] Rees, Tyrone, and Jennifer Scott. "A comparative study of null-space factorizations for sparse symmetric saddle point systems." *Numerical Linear Algebra with Applications* 25.1 (2018): e2103.
- [4] Vavasis, Stephen A. "Stable numerical algorithms for equilibrium systems." *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 15.4 (1994): 1108-1131.
- [5] Vavasis, Stephen A. "Stable finite elements for problems with wild coefficients." *SIAM journal on numerical analysis* 33.3 (1996): 890-916.

Dinámica de un modelo de depredación del tipo Leslie

Autores: Paulo Cesar Tintinago Ruiz, Leonardo Duvan Restrepo Alape
 Universidad del Quindío, Universidad del Tolima
 E-mail: pctintinago@uniquindio.edu.co, ldrestrepo@ut.edu.co

Resumen: En esta charla presentaremos las principales propiedades matemáticas del estudio de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower, descrito por un sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se demuestra que las soluciones del sistema son acotadas, mostrando que el modelo está bien propuesto. Se determinan las condiciones de existencia de los puntos de equilibrio y se establece la naturaleza de cada uno de ellos. Se demuestra la existencia de una curva heteroclina que une dos puntos de equilibrio.

Mostramos la existencia de una curva separatriz que divide el comportamiento de las trayectorias, esto implica que dos trayectorias cercanas pueden tener diferentes ω -límites, haciendo que el sistema sea altamente sensible a las condiciones iniciales.

Se determina la existencia de dos ciclos límite originados por bifurcación de Hopf, que rodean un punto de equilibrio positivo estable, y se realizan algunas simulaciones mostrando las diferentes situaciones.

Palabras clave: Modelo depredador-presa, respuesta funcional, bifurcación, estabilidad, curva separatriz.

Introducción

Los modelos depredador-presa del tipo Leslie-Gower (ver [5] y [6]) se caracterizan fundamentalmente porque la ecuación diferencial que describe el crecimiento de los depredadores es del tipo logístico (ver [7] y [10]). En estos modelos se asume que la capacidad de soporte del medio ambiente es variable y proporcional a la cantidad de presas disponibles y la respuesta funcional es lineal (ver [1] y [2]).

En este trabajo se incorporan dos modificaciones: i) la función de crecimiento de los depredadores es de tipo logístico (ver [3]), y ii) la respuesta funcional es no monótonica o Holling tipo IV (ver [9]). Esta función se utiliza para modelar un comportamiento antidepredatorio, denominado *formación de grupos de defensa* (ver [8]).

El modelo es descrito por un sistema autónomo bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo del tipo Kolmogorov (ver [4]) dado por:

$$X_{\mu}(x, y) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qy}{x^3+a} \right) x \\ \frac{dy}{dt} &= s \left(1 - \frac{y}{nx} \right) y, \end{cases} \quad (1)$$

donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representan los tamaños poblacionales de presas y depredadores, respectivamente para $t \geq 0$. Los parámetros son todos positivos, esto es $\mu = (r, K, q, s, n, a) \in \mathbb{R}_+^6$, y tienen diferentes significados ecológicos. En este modelo los depredadores no tienen un tipo de presa preferida (ver [3]); esto implica que los depredadores son *generalistas*.

Los cálculos son realizados en un sistema polinomial topológicamente equivalente al sistema (1) (ver [2] y [3]), el cual es obtenido mediante un cambio de variables y un reescalamiento del tiempo.

Referencias

- [1] B. González-Yaez, E. González-Olivares and J. Mena-Lorca, Multistability on a Leslie-Gower type predator-prey model with non-monotonic functional response, in R. Mondaini and R. Dilao (Eds), BIO-MAT 2006 International Symposium on Mathematical and Computational Biology (2007) 359-384.
- [2] González-Olivares, Eduardo, Paulo C. Tintinago-Ruiz, and Alejandro Rojas-Palma. "A Leslie-Gower-type predator-prey model with sigmoid functional response." *International Journal of Computer Mathematics* 92.9 (2015): 1895-1909.
- [3] E. González-Olivares, C. Arancibia-Ibarra, A. Rojas-Palma and B. González-Yaez, Bifurcations and multistability on the May-Holling-Tanner predation model considering alternative food for the predators, *Mathematical Biosciences and Engineering* 16(5) (2019) 4274-4298.
- [4] Freedman, Herbert I. *Deterministic mathematical models in population ecology*. Vol. 57. Marcel Dekker Incorporated, 1980.
- [5] P. H. Leslie, Some further notes on the use of matrices in population mathematics, *Biometrika* 35 (1948) 213-245.
- [6] P. H. Leslie and J. C. Gower, The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species, *Biometrika* 47 (1960) 219-234.
- [7] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems* (2nd edition), Princeton University Press, 2001.
- [8] S. Ruan and D. Xiao, Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 61, No 4 pp. 1445-1472, 2001.
- [9] Taylor RJ. *Predation*, Chapman and Hall, 1984.
- [10] Turchin, P. "Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis. Princeton (NJ): Princ. Univ. Press, 2003. 456 p." *Monographs in Population Biology*.

Gradient boosting classifier: un modelo tentativo para entender el consumo de sustancias psicoactivas en un ámbito universitario

Autor: Johanna Lizeth Bustos Gonzalez
Universidad del Tolima
E-mail: jlbustosg@ut.edu.co

Resumen: Colombia guarda un precedente histórico que le ha permitido abordar el tema de drogas bajo enfoques académicos, políticos y de seguridad nacional, por lo que es importante entender las causas que incitan a un consumo de sustancia psicoactivas (SPA) recurrente en el entorno universitario y de esta manera generar escenarios de reflexión de políticas de prevención y mitigación. Es por ello que en el presente estudio se busca identificar los factores individuales y del entorno que pueden pronosticar si es o no consumidor recurrente de SPA y de estos cuáles tienen mayor incidencia con el apoyo de modelos de aprendizaje automático supervisado. Se realizaron 717 encuestas a estudiantes de la una institución de educación pública. Se obtuvo una exactitud y precisión del 67 % usando un modelo Gradient Boosting Classifier, cuyas variables de mayor incidencia son: Percepción de acuerdo con el Consumo De Alcohol, Desempeño Sexual, y El Efecto Que Producen De Acuerdo A La Dosis, Calidad y Organismo De Cada Persona.

Palabras claves: Palabras claves: Modelo de aprendizaje; Sustancias psicoactivas; Universitist; Consumidor recurrente de sustancias psicoativas.

Análisis de la dinámica de un modelo tritrófico tipo Leslie

Autores: Fidadelfo Mondragón Sánchez, Miguel Angel De la Rosa Castillo,
 Gamaliel Blé González
 Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
 E-mails: fida1844@hotmail.com, madelarosaca@conacyt.mx, gble@ujat.mx

Resumen: Se estudia la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales que modela la interacción entre una presa, un depredador y un superdepredador. Se supone una respuesta funcional general y se analiza los diferentes conjuntos límites que presenta el sistema. En particular, se muestra la presencia de una bifurcación cero-Hopf y mediante simulaciones numéricas, se calculan algunos conjuntos límite. Además, usando el máximo exponente de Lyapunov se demuestra la existencia de caos en el sistema.

Palabras clave: Modelo tritrófico, bifurcación cero-Hopf, toros invariantes, caos, máximo exponente de Lyapunov.

Introducción

Una línea de investigación de la ecología matemática consiste en determinar la coexistencia de especies, que interactúan entre sí, usando modelos matemáticos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre los sistemas que han modelado una interacción depredador-presa se tienen los de tipo Leslie [7, 9]. En tales sistemas se supone que el depredador es generalista y el beneficio de alimentarse de la presa se refleja en su capacidad de carga (ver [3, 5, 4, 8] y las referencias allí citadas). Asimismo se han analizado sistemas tritróficos tipo Leslie Gower y se han mostrado numéricamente comportamientos caóticos, ver [10], [1].

Una alternativa para determinar la presencia de caos en sistemas de ecuaciones diferenciales es el análisis de bifurcaciones de tipo global, tal es el caso de la bifurcación cero-Hopf, para la cual el valor de bifurcación en el espacio de parámetros está en la intersección de dos ramas, una donde ocurre bifurcación silla-nodo y otra donde aparece bifurcación de Hopf, por lo que esta bifurcación permite encontrar conjuntos límites estables invariantes más complicados que los puntos de equilibrio o los ciclos límite. De hecho, se puede detectar toros invariantes o atractores caóticos [6, 2, 11].

En este trabajo se analiza la dinámica de un sistema diferencial que modela la interacción entre una presa (P), un depredador (MP) y un superdepredador (SP). Explícitamente se estudia el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h_1(x) - yf_1(x), \\ \dot{y} &= ys_1 \left(1 - \frac{y}{\alpha_1 x + \beta_1} \right) - zg_1(y), \\ \dot{z} &= zs_2 \left(1 - \frac{z}{\alpha_2 y + \beta_2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

donde x, y y z , representan la densidad de población de la especie presa, la especie depredadora y la especie superdepredadora, respectivamente. La tasa de crecimiento de la población P es de la forma $h_1(x) = xh(x)$ y las respuestas funcionales generales de la interacción MP-P y SP-MP, son $f_1(x) = xf(x)$ y $g_1(y) = yg(y)$, respectivamente; donde f, g y h son funciones positivas de clase $C^3(\mathbb{R}_+)$. Los parámetros adimensionales s_1 y s_2 son las tasas de crecimiento intrínsecas del MP y SP, respectivamente. El parámetro β_1 es la capacidad de carga del MP en ausencia de la población presa y β_2 es la capacidad de carga del SP en ausencia de la población MP. Por otra parte, los parámetros α_1 y α_2 miden el aprovechamiento derivado de la depredación.

Referencias

- [1] Agrawal, Rashmi, et al. "Complex dynamics of sexually reproductive generalist predator and gestation delay in a food chain model: double Hopf-bifurcation to chaos." *Journal of Applied Mathematics and Computing* 55.1 (2017): 513-547.
- [2] Guckenheimer, John, and Yuri A. Kuznetsov. "Fold-hopf bifurcation." *Scholarpedia* 2.10 (2007): 1855.
- [3] Hsu, Sze-Bi, and Tzy-Wei Huang. "Global stability for a class of predator-prey systems." *SIAM Journal on Applied Mathematics* 55.3 (1995): 763-783.
- [4] Huang, Jicai, Shigui Ruan, and Jing Song. "Bifurcations in a predator-prey system of Leslie type with generalized Holling type III functional response." *Journal of Differential Equations* 257.6 (2014): 1721-1752.
- [5] Huang, Ji-cai, and Dong-mei Xiao. "Analyses of bifurcations and stability in a predator-prey system with Holling type-IV functional response." *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 20.1 (2004): 167-178.
- [6] Kuznetsov, Yuri A., Iu A. Kuznetsov, and Y. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Vol. 112. New York: Springer, 1998.
- [7] Kot, Mark. *Elements of mathematical ecology*. Cambridge University Press, 2001.
- [8] Li, Yilong, and Dongmei Xiao. "Bifurcations of a predator-prey system of Holling and Leslie types." *Chaos, Solitons and Fractals* 34.2 (2007): 606-620.
- [9] Murray, James D. "Mathematical biology: I. An introduction. *Interdisciplinary applied mathematics*." *Mathematical Biology*, Springer 17 (2002).
- [10] Priyadarshi, Anupam, and Sunita Gakkhar. "Dynamics of Leslie-Gower type generalist predator in a tri-trophic food web system." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.11 (2013): 3202-3218.
- [11] Stephen Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Vol. 2. No. 3. New York: Springer, 2003.

Comportamiento de la correlación integral en series de tiempo estacionarias

Autor: John E. Gómez
Universidad Federico Santa María
E-mail: eagomezdaza@gmail.com

Resumen: La correlación integral (CI) de una serie de tiempo es un coeficiente normalizado que representa el número de pares cercanos entre dos puntos diferentes de una serie de tiempo y permite estimar la dimensión de un atractor en un régimen caótico. Calculando la dimensión de un atractor, es posible distinguir entre un comportamiento determinista y uno estocástico. En esta presentación estableceremos una ley de potencias para el comportamiento esperado de la CI, para series de tiempo Gaussianas estacionarias, cuya función de correlación satisface $\rho(h) = O(h^{-\alpha})$ para $\alpha > 2$. Ejemplos de series de tiempo lineales ilustran el resultado.

Keywords: Correlación integral, series de tiempo estacionarias, procesos Gaussianos, ley de potencias.

Introducción

Desde el punto de vista estadístico, la CI es uno de los métodos mas utilizados para estimar la dimensión fractal de los atractores caóticos debido a su buen rendimiento al calcular este valor a partir de datos experimentales. Wolff [1] fue un pionero en el estudio de la CI para series temporales, propuesta por primera vez por Grassberger y Procaccia [2]. Wolff analizó el comportamiento caótico de las series temporales autorregresivas y de media móvil y demostró que el atractor generado por este tipo de procesos estocásticos sigue una ley de potencia. Esto caracteriza el comportamiento de los procesos que imponen una estructura al ruido con respecto al comportamiento de los procesos de ruido puro. En esta ponencia vamos a definir la CI para las secuencias de tiempo, a continuación, establecemos una ley de potencia para el límite del valor esperado de la CI para una serie de tiempo gaussiana con una función de correlación que satisface $\rho(h) = O(h^{-\alpha})$ para $\alpha > 2$ y proporcionamos ejemplos para ilustrar que las condiciones de nuestro resultado principal no son demasiado restrictivas.

References

- [1] Wolff, Rodney CL. "A note on the behaviour of the correlation integral in the presence of a time series." *Biometrika* 77.4 (1990): 689-697.
- [2] Grassberger, Peter, and Itamar Procaccia. "Characterization of strange attractors." *Physical review letters* 50.5 (1983): 346.

Soluciones exactas en modelos farmacocinéticos fraccionarios de tipo mammilia

Autor: Víctor Fabián Morales Delgado
Universidad Autónoma de Guerrero
E-mail: fabianmate1@gmail.com

Resumen: Varios estudios han demostrado que ciertos fármacos se rigen por cinéticas anómalas que difícilmente pueden ser representadas por modelos clásicos. En visto de eso, en esta charla, hablaremos de modelos farmacocinéticos de orden fraccionario de tipo mammilia, ya que han resultado ser más adecuados para representar el curso temporal de estos fármacos en el organismo. Presentamos soluciones exactas escritas en términos de la función de Mittag-Leffler multivaluada. Finalmente mostramos algunas simulaciones que corroboran nuestros resultados.

Palabras clave: Cálculo fraccionario, Función Mittag-Leffler Trivalente, farmacocinética fraccionaria.

Introducción

La farmacocinética (PK) es la ciencia que se ocupa del estudio de la cinética de la absorción, distribución y eliminación (excreción y metabolismo) de los fármacos. En otras palabras, describe el curso temporal de una determinada droga dentro del cuerpo humano. Además, es fundamental para el desarrollo de regímenes de dosificación, para predecir el comportamiento de nuevos fármacos así como para evaluar los efectos terapéuticos. El estudio de la farmacocinética incluye enfoques experimentales y teóricos. Los enfoques experimentales implican el desarrollo de técnicas de muestreo, métodos analíticos y procesos de recopilación y procesamiento de datos. Los enfoques teóricos se refieren al desarrollo de modelos farmacocinéticos que predicen la distribución del fármaco.

Los términos de adsorción y distribución tienen un significado importante. La absorción está relacionada con el movimiento del fármaco hacia el torrente sanguíneo. Su tasa depende de las características físicas del fármaco y de la fórmula química del fármaco. Mientras que la distribución se define como el proceso en el que un fármaco sale del torrente sanguíneo y entra en los órganos y tejidos vecinos. Además, se ha demostrado que varios tipos de fármacos siguen un proceso cinético después de entrar en el cuerpo humano, lo que se describe mejor mediante Ecuaciones Diferenciales Fraccionales. El cálculo fraccional y sus aplicaciones es un sector de investigación activa en desarrollo. La farmacocinética, en particular, es una herramienta prometedora y la literatura correspondiente está creciendo cada vez más.

Las ecuaciones diferenciales, que contienen derivadas fraccionarias, pueden describir cinéticas anómalas sin la introducción de coeficientes dependientes del tiempo a diferencia de la cinética fractal. Existen varios fármacos cuya cinética se desvía de un proceso de primer orden y se describen mejor utilizando la ley de potencia. Esto se atribuye, por supuesto, a la lenta propagación del fármaco a los tejidos más profundos. Un fármaco bien conocido que sigue la cinética de la ley de potencias es la amiodarona, el cual es un fármaco antiarrítmico que se utiliza para tratar los trastornos del ritmo cardíaco y se puede administrar por vía oral o intravenosa. La amiodarona se desvía de la cinética clásica, como lo demuestran [1], donde después de múltiples dosis no se alcanza un estado estacionario mediante modelos farmacocinéticos clásicos.

Referencias

- [1] Weiss, Michael. "The anomalous pharmacokinetics of amiodarone explained by nonexponential tissue trapping." *Journal of pharmacokinetics and biopharmaceutics* 27.4 (1999): 383-396.

IV Encuentro Matemático del Caribe

- [2] West, Bruce J., and William Deering. "Fractal physiology for physicists: Lévy statistics." *Physics Reports* 246.1-2 (1994): 1-100.
- [3] Ionescu, C., et al. "The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 51 (2017): 141-159.

Sistemas Dinámicos

Finding finite order periodic orbits for a homeomorphism on two-dimensional torus

Author: Germán Fabian Escobar Fiesco
 Universidad Surcolombiana
 E-mail: german.escobar@usco.edu.co

Abstract: In this work, we describe finite order periodic orbits for a torus homeomorphism isotopic to the identity. Given any rational rotation vector in the interior of rotation set, we define necessary conditions to list the periodic orbits that realize such vector, and from the symbolic representation we separate those of finite order. This study is motivated in recognize the finite order isotopy class relative to periodic orbits using simple closed curves along such orbits. Our approach start showing that any torus homeomorphism isotopic to the identity, the finite order isotopy class relative to a periodic orbit has a representative which its lift at the universal cover acts as a translation by the rotation vector that realize the orbit.

Keywords: rotation vectors, finite order isotopy class, finite order periodic orbits.

Introduction

Theorem: Let $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ be a homeomorphism isotopic to identity, and let P be a period- n periodic orbit with rotation vector $v = \frac{k}{n}(m_1, m_2)$. The orbit P is a finite order periodic orbit if and only if there exists a simple closed curve $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2$ with $P \subset \gamma$, such that

1. $\text{Hom}(\gamma) = (m_1, m_2)$.
2. $f(\gamma) \simeq \gamma(\text{rel. } P)$.

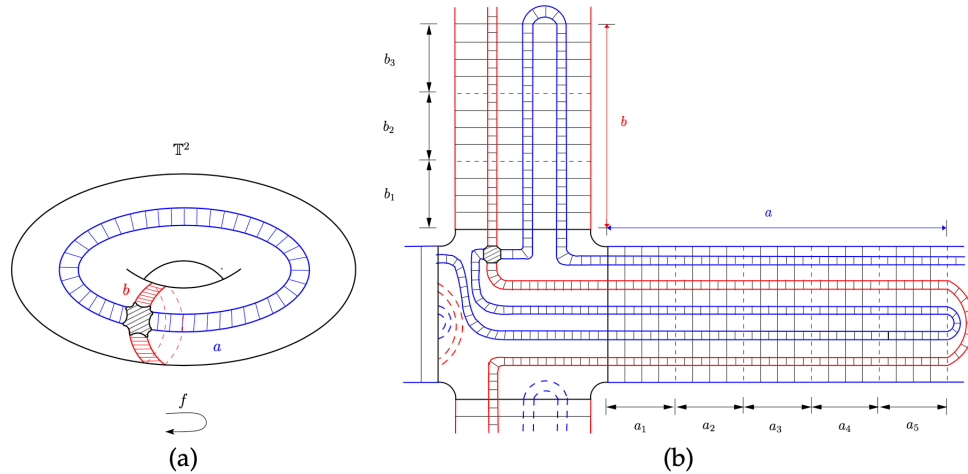


Figura 4: (a) Thick graph embedded in the torus (b) Thick graph map.

Definition: Let $(\mathbb{T}^2, \mathbb{X})$ be a thick graph, where \mathbb{X} is a fibered subsurface modelled by a 4-junction \mathbb{V} , and two fibered strips a, b (see Figure 4(a)). Let us define the homeomorphism $f: (\mathbb{T}^2, \mathbb{X}) \rightarrow (\mathbb{T}^2, \mathbb{X})$ described in Figure 4(b), such that f induces the graph endomorphism $F: X \rightarrow X$, where $X = \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$ (i.e., $\pi \circ f|_{\mathbb{X}} = F \circ \pi$ with $\pi: \mathbb{X} \rightarrow X$).

References

- [1] K. Parwani, Monotone periodic orbits for torus homeomorphisms, *Proc. Am. Math. Soc.* **133**, No. 6 (2004), 1677-1683. (electronic)
- [2] P. Boyland, A. de Carvalho and T. Hall, New rotation sets in a family of torus homeomorphisms, *Invent Math.* **204** (2016), 895-937.
- [3] P. Boyland, Rotation sets and monotone orbits for annular homeomorphisms, *Comm. Math. Helv.*, **67** (1992), 203-213.
- [4] P. Boyland, Topological methods in surface dynamics, *Topology and its Applications*, **58** (1994), 223-298.
- [5] P. Holmes, Knotted periodic orbits in suspensions of annulus maps, *R. Soc. London.* **A411**(1987), 351-378.
- [6] J. Guaschi, J. Lliebre, and R. Mackay, A classification of braid types for periodic orbits of diffeomorphisms of surfaces of genus one with topological entropy zero, *Pub. Matemàtiques.* **35** (1991), 543-558.
- [7] M. Misiurewicz, K Ziemian, Rotation sets for maps of tori, *J. London Math. Soc.* **40** (1989), 490-506.

Sobre endomorfismos intrínsecamente ergódicos

Autor: Carlos Fabian Álvarez Escorcía
Universidad del Sinú, seccional Cartagena
E-mail: carlosfalvarez@unisnu.edu.co

Resumen: En esta charla vamos a estudiar sistemas dinámicos no invertibles que presentan un comportamiento hiperbólico parcial. Abordaremos el problema de la unicidad de la medida de máxima entropía para una clase de endomorfismos parcialmente hiperbólicos. En 2012, R. Ures [8] mostró que difeomorfismos parcialmente hiperbólicos tienen una única medida de máxima entropía (caso invertible). Este es un trabajo en conjunto con Marisa R. Cantarino

Palabras clave: Endomorfismo parcialmente hiperbólico, medida de máxima entropía

Introducción

Se dice que un sistema es intrínsecamente ergódico si este admite una única medida que maximiza la entropía métrica. Estos sistemas fueron estudiados por primera vez en [9], luego R. Bowen mostró que sistemas hiperbólicos (Anosov) admiten una única medida de máxima entropía [2]. Mostrar la existencia, unicidad o finitud del número de medidas de máxima entropía en dinámica parcialmente hiperbólica es un problema desafiante en sistemas dinámicos. Existen contextos de la dinámica parcialmente hiperbólica donde han sido exploradas las medidas de máxima entropía [1, 3, 6, 7, 8]. Existen ejemplos de endomorfismos parcialmente hiperbólicos que no son intrínsecamente ergódicos y cuya linealización es un mapa en expansión [4, 5], pero la ergodicidad intrínseca de los endomorfismos parcialmente hiperbólicos con linealización hiperbólica que presenta direcciones de contracción aún no se exploró, hasta donde sabemos.

Referencias

- [1] Carlos F. Alvarez. Hyperbolicity of maximal entropy measures for certain maps isotopic to Anosov. arXiv, preprint arXiv:2011.06649, 2020.
- [2] Rufus Bowen. Some systems with unique equilibrium states. *Math. Systems Theory*, 8(3): 193–202, 1974/75.
- [3] Jérôme Buzzi, Todd Fisher, Martín Sambarino, and Carlos H. Vasquez. Maximal entropy measures for certain partially hyperbolic, derived from Anosov systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32(1): 63–79, 2012.
- [4] Ittai Kan. Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1): 68–74, 1994.
- [5] Barbara Núñez Madariaga, Sebastián A. Ramírez, and Carlos H. Vasquez. Measures maximizing the entropy for Kan endomorphisms. *Nonlinearity*, 34(10):7255–7302, 2021.
- [6] Joas Elias Rocha and Ali Tahzibi. On the number of ergodic measures of maximal entropy for partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center leaves. *Math. Z.*, 301(1): 471–484, 2022.
- [7] Federico Rodríguez Hertz, María A. Rodríguez Hertz, Ali Tahzibi, and Raul Ures. Maximizing measures for partially hyperbolic systems with compact center leaves. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32(2): 825–839, 2012.

- [8] Raul Ures, Intrinsic ergodicity of partially hyperbolic diffeomorphisms with a hyperbolic linear part. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140(6): 1973–1985, 2012.
- [9] Benjamin Weiss. Intrinsically ergodic systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76: 1266–1269, 1970.

Dimensión métrica media: propiedades, conjeturas y aplicaciones

Autor: Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo
 Universidad Tecnológica de Bolívar
 E-mail: jmuentes@utb.edu.co

Resumen: A finales de los 90, M. Gromov introdujo la noción de dimensión topológica media para funciones continuas en espacios topológicos compactos (ver [4]), el cual es un invariante por conjugaciones topológicas entre funciones continuas y refina la noción de entropía topológica para el caso en el que esta última sea infinita. Sin embargo, la dimensión topológica media es difícil de calcular.

En el 2000, E. Lindenstrauss y B. Weiss introdujeron la noción de dimensión métrica media para funciones continuas en espacios métricos compactos (ver [5]), la cual es una cota superior para la dimensión topológica media. Durante los últimos años, la dimensión métrica media ha sido ampliamente estudiada, como podemos apreciar en la literatura.

En esta ponencia, además de presentar ejemplos y aplicaciones de la dimensión métrica media, abordaremos los siguientes resultados (ver [2] y [3] para más detalles):

Si $\phi : N \rightarrow N$ es una función continua en una variedad riemanniana compacta N , de dimensión n , con métrica d , la dimensión métrica media inferior y superior de ϕ son denotadas respectivamente por $\underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi)$ y $\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi)$. Para cualquier $a \in [0, n]$, sean

$$\begin{aligned} C_a(N) &= \{\phi \in C^0(N) : \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) = \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) = a\} \\ H_a(N) &= \{\phi \in \text{Hom}(N) : \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) = \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) = a\} \\ \overline{C}_n(N) &= \{\phi \in C^0(X) : \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) = n\} \\ \overline{H}_n(N) &= \{\phi \in \text{Hom}(N) : \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) = n\}. \end{aligned}$$

Para cualquier función continua $\phi : N \rightarrow N$ siempre se tiene que

$$0 \leq \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) \leq \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(N, d, \phi) \leq n.$$

Teorema: Se tiene que:

- Para cada $a \in [0, 1]$, $C_a([0, 1])$ es denso en $C^0([0, 1])$.
- Para cada $a \in [0, n]$, $C_a(N)$ es denso en $C^0(N)$.
- Para cada $a \in [0, n]$, $H_a(N)$ es denso en $\text{Hom}(N)$.
- $\overline{C}_n(N)$ es residual en $C^0(N)$.
- $\overline{H}_n(N)$ es residual en $\text{Hom}(N)$.

Por otro lado, estudiando la existencia de funciones α -Hölder continuas con dimensión métrica media positiva, se derivaron las siguientes conjeturas, las cuales serán abordadas más explícitamente durante la ponencia y que, de ser ciertas, presentan relaciones sorprendentes entre el exponente de Hölder y la dimensión métrica media (ver [1] para más detalles):

Conjetura A: Si $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función α -Hölder continua, entonces

$$\underline{\text{mdim}}_{\text{M}}([0, 1], |\cdot|, \phi) \leq 1 - \alpha.$$

Conjetura B: No hay ninguna función α -Hölder $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, con $\alpha > 0$ y

$$\text{mdim}_M([0, 1], |\cdot|, \phi) = 1.$$

Conjetura C: Si $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función α -Hölder para cualquier $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$\text{mdim}_M([0, 1], |\cdot|, \phi) = 0.$$

Referencias

- [1] Acevedo, Jeovanny M., Sergio Romaña, y Raibel Arias. "Holder continuous maps with positive metric mean dimension." (2022). *Acceptado para publicación en la Revista Colombiana de Matemáticas*.
- [2] Acevedo, Jeovanny Muentes. "Genericity of continuous maps with positive metric mean dimension." *Results in Mathematics* 77.1 (2022): 1-30.
- [3] Carvalho, Maria, Fagner B. Rodrigues, and Paulo Varandas. "Generic homeomorphisms have full metric mean dimension." *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 42.1 (2022): 40-64.
- [4] Gromov, Misha. "Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps: I." *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* 2.4 (1999): 323-415.
- [5] Lindenstrauss, Elon, and Benjamin Weiss. "Mean topological dimension." *Israel Journal of Mathematics* 115.1 (2000): 1-24.

Existencia de medidas invariantes en espacios métricos compactos

Autores: Brian Esteban Rojas Becerra, Liliana Katherine Esquivel Mora
Universidad de Pamplona
E-mail: brian.rojas@unipamplona.edu.co

Resumen: En este trabajo se presentará un resultado que garantiza la existencia de medidas invariantes para una amplia clase de funciones.

Palabras clave: medida invariante, espacio medible, topología

Introducción

Sea (M, \mathcal{B}) un espacio medible, se dice que una medida μ es invariante bajo una transformación medible $f : M \rightarrow M$ si $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo $E \subset M$ es de notar que muchos fenómenos de la naturaleza pueden ser modelados por sistemas dinámicos que dejan invariantes alguna medida que está relacionada directamente con el problema estudiado, además de esto, desde el punto de vista matemático la estructura matemática (M, \mathcal{B}, μ) que es invariante bajo f presentan propiedades bastante interesantes.

Pero, antes de ahondar en dichas propiedades, es natural cuestionarse sobre la existencia de tal estructura matemática.

Se inicia la definición y se observan algunas propiedades de la topología, con esta información se muestra la existencia de medidas invariantes en un espacio métrico compacto.

Referencias

[1] Oliveira, Krerley, and Marcelo Viana. "Fundamentos da teoria ergódica." IMPA, Brazil (2014): 3-12.

Simetrías de campos vectoriales

Autor: Gaspar León Gil
Instituto Tecnológico Superior de Tacámbaro
E-mail: gaspar.lg@tacambaro.tecnm.mx

Resumen: En esta charla se presenta la relación entre las simetrías de un campo vectorial $C^\infty(X)$ y sus factores integrantes.

Referencias

- [1] León-Gil, G. "Muciño-Raymundo, J. Integrability and adapted complex structures to smooth vector fields on the plane." *Lob. J. of Math.*, 43. (2022).
- [2] Muciño-Raymundo, J. "Complex structures adapted to smooth vector fields." *Math. Ann.*, 322. (2003).
- [3] Weiner, J. "First integrals for a direction field on a simply connected plane domain." *Pacif. J. Math.*, 132. (1988).

Topología

Condiciones de tipo compacidad para que un semigrupo topológico sea un grupo

Julio César Hernández Arzusa
Universidad de Cartagena
E-mail: jhernandez2@unicartagena.edu.co

Resumen: En esta charla presentamos una serie de resultados, donde damos condiciones de tipo compacidad (compacidad, pseudocompacidad, compacidad secuencial, etc) para que un semigrupo topológico cancelativo sea un grupo.

Palabras clave: Grupo topológico, semigrupo topológico, pseudocompacidad.

Introducción

Encontrar condiciones bajo las cuales un semigrupo topológico cancelativo y Hausdorff es un grupo, es un problema muy antiguo, ya existen resultados (entre otros) para semigrupos cancelativos topológicos Hausdorff y:

- Compactos (ver [3]).
- Secuencialmente compactos (ver [1]).
- Contablemente compactos y 1-contables (ver [1]).
- Pseudocompactos, localmente compactos, conmutativos y con traslaciones abiertas (ver [2]).

Se presentarán pruebas de estos resultados y se divulgarán algunos problemas que aún están abiertos.

Referencias

- [1] Bokalo, Bogdan, and Igor Guran. "Sequentially compact Hausdorff cancellative semigroup is a topological group." *Mat. Stud* 6 (1996): 39-40.
- [2] Hernández, Julio C., and Karl H. Hofmann. "A note on locally compact subsemigroups of compact groups." *Semigroup Forum*. Vol. 103. No. 1. Springer US, 2021.
- [3] Numakura, Katsumi. "On bicomact semigroups." *Mathematical Journal of Okayama University* 1.1 (1952): 99-108.

Análisis

Maximal regularity for degenerate multiterm fractional integro-differential equations and applications

Authors: Rafael Aparicio and Valentin Keyantuo
University of Puerto Rico, Río Piedras Campus
E-mails: rafael.aparicio@upr.edu

Abstract: Many problems in the applied sciences can be formulated as multi-term differential or integro-differential equations. In this work, we use the now well-developed theory of operator-valued Fourier multipliers to obtain characterizations for well-posedness of degenerate multi-term degenerate fractional differential equations with infinite delay in Banach spaces. We adopt the right-sided Liouville fractional derivative on the real axis and the Lebesgue-Bochner spaces $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq p < \infty$ where X is a given Banach space. In the situation where X is a *UMD* space and $1 < p < \infty$, concrete conditions are given for well-posedness based on the concept of \mathcal{R} -boundedness for operator families. Applications are given for some concrete integro-differential equations which appear in several models in the applied sciences, particularly physics, biological sciences, rheology, and material science.

Keywords: Well-posedness, maximal regularity, operator-valued Fourier multiplier, \mathcal{R} -boundedness, Liouville-Weyl fractional derivative, Lebesgue-Bochner spaces.

Integral inequalities of Simpson-Mercer type using weighted integrals

Author: Juan E. Nápoles Valdes
 Universidad Nacional del Nordeste
 E-mail: jnapoles@exa.unne.edu.ar

Abstract: In this work, using weighted integrals, we obtain new integral inequalities of the Simpson-Mercer type for the class of s -convex functions. Throughout the work it is shown that the results obtained contain as particular cases, several known from the literature.

Keywords: Inequalities of Simpson-Mercer, weighted integral, s -convex function

Introduction

One of the basic concepts of a number of mathematical disciplines (function theory, optimization theory, theory of inequalities, etc.) is the concept of convexity. This concept is closely related to the estimation of the mean value of a function given on an interval.

Today, in the literature there are quite a few different convexity classes of functions that are defined to refine, extend and improve estimates of the mean value of a function. A rather wide spectrum of convexity classes and their relations is given in [3].

For convex functions on interval $[v_1, v_2]$, the following inequality is one of the best known

$$\phi\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \leq \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} \phi(x) dx \leq \frac{\phi(v_1) + \phi(v_2)}{2} \quad (3)$$

and it is called the Hermite-Hadamard Inequality ([1, 2]). Both inequalities hold in the reversed direction if ϕ is concave.

Next we present the weighted integral operators, which will be the basis of our work.

Definición: Let $\phi \in L([v_1, v_2])$ and let w be a continuous and positive function, $w : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$, with first order derivatives piecewise continuous on I . Then the weighted fractional integrals are defined by (right and left respectively):

$$J_{v_1^+}^w \phi(r) = \int_{v_1}^r w' \left(\frac{\sigma - v_1}{r - v_1} \right) \phi(\sigma) d\sigma$$

and

$$J_{v_2^-}^w \phi(r) = \int_r^{v_2} w' \left(\frac{v_2 - \sigma}{v_2 - r} \right) \phi(\sigma) d\sigma,$$

with $v_1 < r \leq v_2$.

The main purpose of this work is to obtain new variants of the classical Hermite-Hadamard Inequality, in the context of the weighted integrals of the above definition. We will show that our results complement or generalize several of those known from the literature.

Referencias

- [1] J. Nápoles, B. Bayraktar, S. Butt. "New integral inequalities of Hermite-Hadamard type in a generalized context." *Punjab University Journal Of Mathematics*, 53(11), (2021).
- [2] J. Nápoles, B. Bayraktar. "On The Generalized Inequalities Of The Hermite - Hadamard Type." *FILOMAT*, 35(14), (2021).
- [3] J. E. Nápoles, F. Rabossi, A. D. Samaniego. "Convex functions: Ariadne's thread or Charlotte's spiderweb?". *Advanced Mathematical Models & Applications* Vol.5, No.2, 2020.

El espacio $\mathcal{P}_{w^*K}({}^n X^*, Y)$

Autor: Michael Alexander Rincón Villamizar
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: marinvil@uis.edu.co

Resumen: $\mathcal{P}_{w^*K}({}^n X^*, Y)$ denota el espacio de Banach de los polinomios n -homogéneos de X^* a Y que son compactos y w^* - w -continuos. Mostraremos que $\mathcal{P}_{w^*K}({}^n X^*, Y)$ tiene un subespacio topológicamente isomorfo a ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contienen un subespacio topológicamente isomorfo a ℓ_∞ .

Palabras & frases claves: Polinomios n -homogéneos, copias de ℓ_∞ .

Introducción

Si X y Y son espacios de Banach spaces y $n \in \mathbb{N}$, entonces

1. $\mathcal{L}_s({}^n X, Y)$ es el espacio de Banach de todos los operadores n -lineales, continuos y simétricos definidos de $X \times X \times \dots \times X := X^n$ a Y junto con la norma del supremo. Si $n = 1$, escribimos $\mathcal{L}({}^1 X, Y) := \mathcal{L}(X, Y)$.
2. $\mathcal{L}_{w^*s}({}^n X^*, Y)$ es el subespacio de $\mathcal{L}_s({}^n X^*, Y)$ que consta de todos los operadores n -lineales y w^* - w -continuos. $\mathcal{L}_{w^*}({}^n X^*, Y)$ denota $\mathcal{L}_{w^*s}({}^n X^*, Y)$.
3. $\mathcal{P}({}^n X, Y)$ denota el espacio de Banach de todos los polinomios n -homogéneos continuos de X en Y con la norma del supremo
4. $\mathcal{P}_{w^*}({}^n X^*, Y)$ es el conjunto de elementos de $\mathcal{P}({}^n X^*, Y)$ que son w^* - w -continuos.
5. El subespacio de elementos compactos de $\mathcal{L}(X, Y)$ es denotado por $\mathcal{K}(X, Y)$. También $\mathcal{K}_{w^*}({}^n X^*, Y)$ es el subespacio de todos los elementos compactos de $\mathcal{L}_{w^*}({}^n X^*, Y)$.

Definición: Decimos que $P \in \mathcal{P}({}^n X, Y)$ es compacto si $P(B_X)$ es un subconjunto relativamente compacto de Y .

$\mathcal{P}_{w^*K}({}^n X^*, Y)$ es el subespacio cerrado de todos los elementos compactos de $\mathcal{P}_{w^*}({}^n X^*, Y)$. Note que si $n = 1$, entonces $\mathcal{P}_{w^*K}({}^n X^*, Y) = \mathcal{K}_{w^*}({}^n X^*, Y)$.

En [1] es mostrado que $\mathcal{K}_{w^*}({}^n X^*, Y)$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contienen un subespacio isomorfo a ℓ_∞ . El objetivo de la charla es extender el resultado mencionado para el espacio $\mathcal{P}_{w^*K}({}^n X^*, Y)$.

Referencias

- [1] Drewnowski, Lech. *Copies of ℓ_∞ in an operator space*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 108 (1990), 3, 523-526.

Álgebra

Teoremas de Factorización de Kronecker para el álgebra de Malcev excepcional

Autor: Victor Hugo López Solís
 Universidad Nacional de Barranca
 E-mail: vlopez2019@unab.edu.pe

Resumen: Probamos que una álgebra de Malcev \mathcal{M} conteniendo el álgebra de Malcev excepcional \mathbb{M} de dimensión 7 es isomorfa a una suma directa $(\mathbb{M} \otimes_F A) \oplus \mathcal{N}$, donde A es una álgebra asociativa y conmutativa. También, probamos que una superálgebra de Malcev $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$ cuya parte par \mathcal{M}_0 contiene \mathbb{M} , es isomorfa a una suma directa $(\mathbb{M} \otimes_F \mathcal{A}) \oplus \mathcal{N}'$, donde \mathcal{A} es una superálgebra asociativa y superconmutativa.

Palabras claves: (Super) álgebra de Malcev, álgebra de Malcev no de Lie, módulo de Malcev, Teorema de Factorización de Kronecker.

Introducción

Una *álgebra de Malcev* es un espacio vectorial \mathcal{M} con una operación binaria bilineal $(x, y) \mapsto xy$ que satisface las siguientes identidades:

$$x^2 = 0, \quad J(x, y, xz) = J(x, y, z)x, \quad (4)$$

donde $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ es el Jacobiano de los elementos $x, y, z \in \mathcal{M}$.

Todas las álgebras de Lie son claramente álgebras de Malcev porque el Jacobiano de cualesquiera tres elementos es cero. El espacio tangente $T(L)$ de un bucle analítico de Moufang L es otro ejemplo de álgebra de Malcev. Sea \mathcal{A} una álgebra alternativa, si introducimos una nueva multiplicación por medio del conmutador $[x, y] = xy - yx$ en \mathcal{A} , obtenemos una nueva álgebra que será denotada por $\mathcal{A}^{(-)}$. Es fácil de verificar que el álgebra $\mathcal{A}^{(-)}$ es una álgebra de Malcev. Todas las álgebras obtenidas de esta forma son llamadas *especiales*. Un ejemplo clásico de una álgebra de Malcev no de Lie \mathbb{M} está formado por los elementos de traza cero de los elementos del álgebra de Cayley-Dickson con el corchete de Lie, esta nueva álgebra es de dimensión 7 y es uno de los ejemplos más fundamentales.

Wedderburn probó que si una álgebra asociativa unitaria \mathcal{A} contiene una subálgebra simple central de dimensión finita \mathcal{B} con el mismo elemento de identidad, entonces \mathcal{A} es isomorfo a un producto de Kronecker $S \otimes_F \mathcal{B}$, donde S es la subálgebra de los elementos que conmutan con cada $b \in \mathcal{B}$. En particular, si \mathcal{A} contiene $M_n(\mathbb{F})$ como subálgebra con el mismo elemento identidad, tenemos $\mathcal{A} \cong S \otimes_F M_n(\mathbb{F})$, donde S es la subálgebra de los elementos que conmutan con cada matriz unitaria e_{ij} . Kaplansky en el Teorema 2 de [6] extendió el resultado de Wedderburn para las álgebras alternativas \mathcal{A} y el álgebra de Cayley split \mathcal{B} . Jacobson en el Teorema 1 de [4] dio una nueva prueba del resultado de Kaplansky utilizando su clasificación de bimódulos alternativos completamente reducibles sobre un cuerpo de características diferentes de 2 y finalmente el autor en [9] demostró que este resultado es válido para cualquier característica. Usando este resultado, Jacobson [4] demostró un teorema de factorización de Kronecker para el álgebra de Jordan excepcional simple de las matrices de Cayley simétricas de dimensión 27.

En el caso de las superálgebras, M. López-Díaz y I. Shestakov [8, 7] estudiaron las representaciones de las superálgebras de Jordan excepcionales y alternativas simples en característica 3 y a través de estas representaciones obtuvieron algunos análogos del teorema de factorización de Kronecker para estas superálgebras. También, el autor [9] demostró algunos análogos del teorema de factorización de Kronecker para

las superálgebras alternativas simples centrales $M_{(1|1)}(\mathbb{F})$, $\mathbb{O}(4|4)$ y $\mathbb{O}[u]$, donde en particular el teorema de factorización de Kronecker para $M_{(1|1)}(\mathbb{F})$ responde el análogo del problema de Jacobson para las superálgebras [4], que fue resuelto recientemente por el autor y I. Shestakov [10] en el caso split. Similarmente, C. Martínez y E. Zelmanov [11] obtuvieron un teorema de factorización de Kronecker para la superálgebra de Kac excepcional K_{10} de dimensión 10. También, Y. Popov [12] estudió las representaciones de las superálgebras de Jordan no conmutativas simples de dimensión finita y demostró algunos análogos del teorema de factorización de Kronecker para tales superálgebras.

Referencias

- [1] Elduque, A., Shestakov, I.P., Irreducible non-Lie modules for Malcev superalgebras, *J. Algebra* 173 (1995) 622–637
- [2] V. T. Filippov, Varieties of Mal'tsev algebras. *Algebra and Logic* 20 (1981) no 3, 200-210.
- [3] V. T. Filippov, Prime Malcev algebras, *Mat. Zametki* 31 (1982), 669-677; English transl. in *Math. Notes* 31 (1982).
- [4] N. Jacobson, A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra. *Amer. J. Math.* 76, (1954). 447-452.
- [5] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. XXXIX, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [6] I. Kaplansky, Semi-simple alternative rings, *Portugal. Math.* 10 (1966), 37-50.
- [7] López-Díaz, M. C., Shestakov, Ivan P., Representations of exceptional simple Jordan superalgebras of characteristic 3. *Comm. Algebra* 33 (2005), no. 1, 331-337.
- [8] López-Díaz, M. C., Shestakov, Ivan P., Representations of exceptional simple alternative superalgebras of characteristic 3. *Trans. Amer. Math. Soc.* 354 (2002), no. 7, 2745-2758.
- [9] López-Solís, V. H., Kronecker Factorization Theorems for Alternative Superalgebras, *J. Algebra* 528 (2019) 311-338.
- [10] López-Solís, V. H., Shestakov, Ivan P., On a problem by Nathan Jacobson, *Rev. Mat. Iberoam.* 38 (2022), no. 4, pp. 1219–1238.
- [11] Martínez, C., Zelmanov, E., A Kronecker factorization theorem for the exceptional Jordan superalgebra. *Journal of Pure and Applied Algebra* 177 (2003) no.1, 71-78.
- [12] Popov, Y., Representations of simple noncommutative Jordan superalgebras I. *J. Algebra* 544 (2020): 329-390.
- [13] Sagle, Arthur A., Malcev algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 101 (1961) no 3, p. 426-458.
- [14] Shestakov, I.P., Prime Malcev Superalgebras, *Mat. Sb.* 182 (1991), 1357–1366.

A new construction of few-weight codes via our GU codes

Autor: Eddie Arrieta Arrieta
Inter American University of Puerto Rico, PR, USA.
E-mail: earrieta@bayamon.inter.edu

Abstract: Linear codes with few weights have applications in cryptography, association schemes, designs, strongly regular graphs, finite group theory, finite geometries, and secret sharing schemes, among other disciplines. Two-weight linear codes are particularly interesting because they are closely related to objects in different areas of mathematics such as strongly regular graphs, 3-rank permutation groups, ovals, and arcs. There exist techniques to construct linear codes with few weights, for example, the systematic exposition by Calderbank and Kantor in [9]. Ding et al., in [11] and [12] constructed few-weight codes using the trace function and Tonchev et al., in [10] generalized Ding's construction. In this talk, we present an elementary way to get two- and three-weight codes from simplex codes and antipodal linear codes [1]. An interesting application is the construction of uniformly packed linear codes from two-weight codes and quaternary quasi-perfect linear codes from three-weight codes.

Keywords: Two- and three-weight codes, simplex code, antipodal linear codes, and optimal additive code

Introduction

Our formulation of linear codes is via the axiomatic approach introduced by Assmus and Mattson in [3]. In this formulation a linear code C of length n and dimension k over \mathbb{F}_q will be viewed as a pair (V, Λ) , where V is a k -dimensional vector space over \mathbb{F}_q and $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is an n -tuple of (possibly repeated) linear functionals in the dual space V^* of V . The members of Λ are the coordinate functionals of C , and a vector $v \in V$ is encoded as the codeword

$$c = \Lambda(v) = (\lambda_1(v), \dots, \lambda_n(v)).$$

One assumes that Λ satisfies the coding axiom, i.e.,

$$v \rightarrow c$$

is one-to-one, that is, $\lambda_i(v) = 0$ for all i , implies $v = 0$. The weight of the codeword c is

$$\omega(c) = |\{i \mid \lambda_i(v) \neq 0\}|$$

where $v \rightarrow c$, see [15] and [18].

The q -ary simplex code of length $n = \frac{q^k - 1}{q - 1}$ and dimension k , denoted by $S_k(q)$, is then obtained by taking Λ to comprise one nonzero element of each one-dimensional subspace of V^* . One can show that these q -ary simplex codes have constant weight, minimum distance $d = q^{k-1}$, and weight distribution $A_0 = 1, A_d = q^k - 1$.

Let C be a code. There exists an integer $r \geq 1$ such that $C \setminus \{0\} = \cup_{i=1}^r C_{w_i}$, where $C_{w_i} = \{u \in C : \omega(u) = w_i\}$, and we call $A_{w_i} = |C_{w_i}|$.

From [5], [8] and [12] we have the following definition.

Definition: An $[n, k, d]_q$ code C such that $C \setminus \{0\} = \cup_{i=1}^r C_{w_i}$ is called an r -weight code. The sequence $1, A_{w_1}, A_{w_2}, \dots, A_{w_r}$ is called the weight distribution of C . In addition, if C is a two-weight code such that $w_1 = d$ and $w_2 = n$, the code is called antipodal.

References

- [1] Arrieta Arieta, Eddie, and Heeralal, Jandwa. "A new construction of two-, three- and few-weight codes via our GU codes and their applications." *AAECC*(2022). <https://doi.org/10.1007/s00200-022-00561-8>
- [2] Arrieta Arrieta, Eddie, and Janwa, Heeralal. "A Go-Up code construction from linear codes yielding additive codes for quantum stabilizer codes." *Proceedings of the 52nd Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, PROMS*, (2021)
- [3] Assmus, Jr.E.F., and Mattson, H. F. "Error-correcting codes: An axiomatic approach." *Information and Control*, 6(4), 315 – 330, (1963)
- [4] Assmus Jr, E.F., and Mattson Jr, H. F. "New 5-designs." *J. Comb. Theory*. 6, 122 – 151, (1969)
- [5] Bierbrauer, J. "Introduction to coding theory." CRC Press Taylor Francis Group, 2nd, (2017)
- [6] Bierbrauer, J., Bartoli, D., Giorgio, F., Marcugini S., and Pambianco F. "The nonexistence of an additive quaternary $[15, 5, 9]$ -code." *Finite Fields and Their Applications*, 36, 29 – 40, (2015)
- [7] Borges, J., Rifa, J., and Zinoviev, V. A. "On Completely Regular Codes." *Problems of Information Transmission*, 55, 1 – 45, (2019)
- [8] Borges, J., Rifa, J., and Zinoviev, V. A. "On q -ary linear completely regular codes with $\rho = 2$ and antipodal dual." *Advances in Mathematics of Communications*, 4, 567, (2010)
- [9] Calderbank, R., and Kantor, W.M. "The Geometry of two-weight codes." *Bulletin of the London Mathematical Society*, 18(2), 97 – 122, (1986)
- [10] Crnkovic, D., Svob, A., and Tonchev, V. D. "Cyclotomic trace codes." *Algorithms*, 12(8), (2019)
- [11] Ding, C., Luo, J., and Niederreiter, H. "Two-weight codes punctured from irreducible cyclic codes." *Coding And Cryptology*, World Scientific, 119 – 124, (2008)
- [12] Ding, K., and Ding, C. "A Class of two-weight and three-weight codes and their applications in secret sharing." *IEEE Transactions on Information Theory*, 61(11), 5835 – 5842, (2015)
- [13] Janwa, Heeralal. "Relation among parameters of codes. Ph.D. Thesis". Syracuse University, United States, (1966).
- [14] Huffman, W. C., and Pless, V. "Fundamentals of error-correcting codes." Cambridge university press, (2010)
- [15] Jungnickel, D., and Tonchev, V. D. "On Bonisolis theorem and the block codes of Steiner triple systems." *Designs, Codes and Cryptography*. 86(3), 449 – 462, (2018)
- [16] MacWilliams F. J., and Sloane N. J. A. "The theory of error correcting codes." Elsevier, (1977)
- [17] van Tilborg Henricus C. A. "Uniformly packed codes" (1976).
- [18] Ward, H. N. " An Introduction to divisible codes." *Designs, Codes, and Cryptography*, 17(1): 73 – 79, (1999)
- [19] Weiss, E.: "Addendum: Linear codes of constant weight." *Siam Journal on Applied Mathematics*, 1(15), (1966).
- [20] Peterson, W. W., and Weldon, E. J. Jr "Error-correcting codes." MIT press, (1972)

New criteria for absolutely irreducible polynomials defined over finite fields

Autor: Moises Delgado
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Cayey
E-mail: moises.delgado@upr.edu

Abstract: A multivariate polynomial defined over a field K is absolutely irreducible if it is irreducible over the algebraic closure of the field (\bar{K}). Finding criteria to test absolute irreducibility is fundamental for applications in pure and applied mathematics as in coding theory and cryptography. There are very few practical criteria for absolute irreducibility known so far. In this research we introduce novel techniques based on the 2 higher-degree terms of polynomials and introduce new absolute irreducibility criteria for multivariate polynomials over finite fields. As a consequence of our techniques, a bound for the number of absolutely irreducible factors of some multivariate polynomials is presented.

Keywords: Multivariate Polynomial, homogeneous polynomials, irreducibility, absolute irreducibility, square-free polynomials, degree-gap.

References

- [1] Delgado Moises, and Heeralal Janwa. On the conjecture on APN functions and absolute irreducibility of polynomials. *Designs, Codes and Cryptography* 82.3 (2017): 617-627.
- [2] Delgado, Moises, and Heeralal Janwa. "Some new results on the conjecture on exceptional APN functions and absolutely irreducible polynomials: the gold case." *Advances in Mathematics of Communications* 11.2 (2017): 389.
- [3] Agrinoni Santiago, Carlos Alberto. Some new absolutely irreducibility testing criteria and their applications to the proof of a conjecture on exceptional almost perfect nonlinear (E-APN) function. Diss. 2022.

Álgebras de grupo y teoría de códigos

Autores: John H. Castillo, Alexander Holguín Villa
 Universidad de Nariño, Universidad Industrial de Santander
 E-mail: jhcastillo@udenar.edu.co, aholguin@uis.edu.co

Resumen: En esta segunda charla presentamos las nociones básicas de *Teoría de Códigos* y usamos la versión del Teorema de Wedderburn-Artin en el contexto de los anillos de grupo, conocido como Teorema de Maschke, para exponer algunos resultados obtenidos por Polcino Milies y colaboradores en [1, 2].

Palabras clave: Álgebras de grupo, idempotentes, ideales minimales, teoría de códigos.

Introducción

Un R -módulo M es semisimple, si todo submódulo de él es sumando directo. Esto es, para todo submódulo N de M existe un submódulo W de M tal que $M = N \oplus W$. Así las cosas, el anillo R se dice que es semisimple si ${}_R R$ es semisimple. En otras palabras, R es semisimple si $\forall I \trianglelefteq_l R, \exists J \trianglelefteq_l R, R = I \oplus J$.

Teorema: Sea R un anillo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes

1. Todo R -módulo es semisimple.
2. R es un anillo semisimple.
3. R es una suma directa de un número finito de ideales izquierdos minimales.

La caracterización de anillos semisimples se conoce como Teorema de Wedderburn-Artin, [2, Thm. 2.6.18, pág. 104].

Teorema de Wedderburn-Artin: Un anillo R es semisimple, si y solo si, es isomorfo a una suma directa de álgebras de matrices sobre anillos de división, es decir

$$R \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i),$$

donde los D_i son anillos de división y los n_i son las dimensiones de ciertos R -módulos simples vistos como D_i -módulos.

Además se puede demostrar que en un anillo semisimple R todo ideal izquierdo es generado por un idempotente.

Teorema: Sea $R = \bigoplus_{i=1}^t L_i$ una descomposición como una suma directa de ideales izquierdos minimales. Entonces, existe una familia $\{e_1, \dots, e_t\}$ de elementos de R tal que

1. $0 \neq e_i$ es un idempotente,
2. $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$,
3. $1 = e_1 + \dots + e_t$,
4. e_i es primitivo.

IV Encuentro Matemático del Caribe

Recíprocamente, si existe una familia $\{e_1, \dots, e_t\}$ satisfaciendo las condiciones 1) – 4) arriba, entonces los ideales $L_i = Re_i$ son minimales y $R = \bigoplus_{i=1}^t L_i$.

Dado un un anillo R y un grupo G son conocidas las condiciones necesarias y suficientes, claro está sobre R y G , para que el anillo de grupo RG sea *semisimple*, [2, Thms. 3.4.7 & 3.4.9, pág. 141-142].

Teorema de Maschke: Sea G un grupo. Entonces el anillo de grupo RG es semisimple si y solo si se cumplen las siguientes condiciones

- i) R es semisimple. ii) G es finito. iii) $|G| \in \mathcal{U}(R)$.

Un ideal en una álgebra de grupo abeliana finita se denomina código abeliano. Un ideal (izquierdo) de una álgebra de grupo se denomina código de grupo (izquierdo). El peso de $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{F}_q G$, es el número de elementos en su soporte

$$w(\alpha) = |\{g \in G : \alpha_g \neq 0\}| = |\text{supp}(\alpha)|.$$

Para un ideal I de $\mathbb{F}_q G$, definimos el peso mínimo de I como

$$w(I) = \min\{w(\alpha) : 0 \neq \alpha \in I\}.$$

Un código de grupo se denomina minimal si el ideal correspondiente es minimal. Se puede demostrar que estudiar códigos de grupo minimales es equivalente a encontrar un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos.

Referencias

- [1] Guerreiro, Marinês. "Group algebras and coding theory." *São Paulo Journal of Mathematical Sciences* 10.2 (2016): 346-371.
- [2] Polcino Millies, César. "Group algebras and coding theory: a short survey." *Revista Integración* 2 37.1 (2019): 153-166.
- [3] Polcino Milies, César and Sehgal, Sudarshan K. *An introduction to group rings*. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 2002.

Anillos de grupo dúo

Autores: Brayan Stiven Flórez Burbano, Alexander Holguín Villa, John H. Castillo

Universidad Industrial de Santander, Universidad de Nariño
E-mail: brayansfb@hotmail.com, aholguin@uis.edu.co, jhcastillo@udenar.edu.co

Resumen: Los anillos conmutativos son un caso particular de la teoría de anillos; estos anillos cuentan con una amplia investigación y resultados muy importantes, sin embargo, su comportamiento es diferente del caso general, puesto que existen varios teoremas que son ciertos en el caso conmutativo pero no en general. En este sentido, cualidades como *dúo*, *reversible*, *simétrico* y *SI*, son ejemplos de algunas propiedades de la teoría de anillos que generalizan la conmutatividad, es decir, se busca extender ciertos teoremas de anillos conmutativos a un caso más general.

En esta propuesta se desea mostrar algunos avances del trabajo de investigación titulado “*La propiedad dúo en anillos y anillos de grupo*”, específicamente presentar algunos resultados que se han estudiado en el marco de esta investigación sobre la propiedad dúo en anillos con unidad y en anillos de grupo KG donde K es un cuerpo y G un grupo y sus posibles conexiones con las propiedades reversible, simétrico y SI.

Palabras clave: Anillos, Grupos, Anillos de de grupo, Dúo, Reversible, Simétrico, SI.

Introducción

Dados un grupo multiplicativo G y un anillo R , al usar conjuntamente las operaciones de estas estructuras se obtiene una nueva denominada *anillo de grupo*. Más exactamente se tiene.

Definición: Sean R un anillo y G un grupo multiplicativo (no necesariamente finito). El conjunto

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g : a_g \in R, a_g = 0 \text{ casi siempre} \right\},$$

de todas las combinaciones lineales formales (finitas) con las operaciones de suma y producto dadas por:

$$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g \quad \text{y} \quad \alpha\beta = \sum_{g, h \in G} a_g b_h g h,$$

donde $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ y $\beta = \sum_{g \in G} b_g g$, se llama el **anillo de grupo de G sobre R** .

Observación: El anillo RG tiene estructura de R -módulo definiendo el producto de $\lambda \in R$ por

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g \in RG$$

de la siguiente forma

$$R \times RG \ni (\lambda, \alpha) \mapsto \lambda \cdot \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} (\lambda a_g) g \in RG.$$

Si R es conmutativo, RG es una R -álgebra y se llama **la álgebra de grupo de G sobre R** .

IV Encuentro Matemático del Caribe

A continuación, se presenta la propiedad dúo, la cual es el objetivo principal de estudio en este trabajo.

Definición: Sea R un anillo asociativo. El anillo R es dúo izquierdo (derecho) si cada ideal izquierdo (derecho) es un ideal bilateral. Se dice que R es dúo si es dúo izquierdo y dúo derecho.

Observación: Es claro que todo anillo conmutativo R tiene la propiedad dúo. Con base en esto, el estudio de la propiedad dúo tiene sentido en anillos no conmutativos, de hecho, esta y otras propiedades anillo-teóricas se estudian con el fin de extender algunos resultados conocidos para anillos conmutativos a un caso más general.

En este trabajo se está estudiando las siguientes propiedades y la relación que tienen con la propiedad dúo en anillos y anillos de grupo, siendo esta última estructura la de mayor interés.

Definición: Sean R un anillo asociativo y $\alpha, \beta \in R$.

1. R es **reversible**, si $\alpha\beta = 0$ implica que $\beta\alpha = 0$.
2. R es **simétrico**, si $\alpha\beta\gamma = 0$ implica que $\alpha\gamma\beta = 0$, para todo $\gamma \in R$.
3. R tiene la propiedad **SI**, si $\alpha\beta = 0$ implica que $\alpha R\beta = \{0\}$, es decir, $\alpha\gamma\beta = 0$, para todo $\gamma \in R$.

Referencias

- [1] Bell, Howard E., and Yuanlin Li. "Duo group rings." *Journal of Pure and Applied Algebra* 209.3 (2007): 833-838.
- [2] Bhattacharya, Phani Bhushan, Surender Kumar Jain, and S. R. Nagpaul. *Basic abstract algebra*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] Gao, Weidong, and Yuanlin Li. "On duo group rings." *Algebra Colloquium*. Vol. 18. No. 01. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, and Suzhou University, 2011.
- [4] Gutan, Marin, and Andrzej Kisielewicz. "Reversible group rings." *Journal of algebra* 279.1 (2004): 280-291.
- [5] Marks, Greg. "Reversible and symmetric rings." *Journal of Pure and Applied Algebra* 174.3 (2002): 311-318.
- [6] Polcino Milies, César, and Sudarshan K. Sehgal. "An introduction to group rings." *Algebras and Applications* 1 (2002).

Buenas graduaciones en anillos de matrices

Autor: Héctor Pinedo Tapia
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: hpinedot@uis.edu.co

Resumen: Dado un anillo de matrices con una buena graduación, presentaremos caracterizaciones sobre cuando este es fuertemente graduado o un producto cruzado y abordaremos el problema de determinar las condiciones para que sea ϵ -fuertemente graduado.

Palabras clave: Anillos fuertemente graduados, Anillos ϵ -fuertemente graduados, anillos de matrices.

Introducción

Un anillo R es graduado por un grupo G o G -graduado cuando hay una familia $\{R_g : g \in G\}$ de subgrupos abelianos de R tales que $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ y para cada $g, h \in G$ se verifica que $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ en el caso en que la contención anterior sea una igualdad decimos que R es fuertemente graduado, además si cada $R_g, g \in G$ contiene un elemento invertible decimos que R es un producto cruzado, es bien sabido que todo producto cruzado es fuertemente graduado, pero la recíproca no es necesariamente cierta. En esta charla trataremos sobre graduaciones en álgebras de matrices $M_n(k)$, donde k es un cuerpo, en particular sobre las llamadas *buenas graduaciones*, en estas las matrices elementales $e_{i,j}$ son elementos homogéneos. Sigue de [1] que una graduación en $M_n(K)$ es buena si y solo si se puede obtener de la siguiente forma:

Sea k un cuerpo con G -graduación trivial, esto es $k_g = \{0\}$, para $g \neq e$ y $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ un k -espacio vectorial graduado de dimensión n . El isomorfismo $\text{End}_k(V) \simeq M_n(\mathbb{K})$ induce una G -graduación en $M_n(\mathbb{K})$ como sigue: Sea $(v_i)_{i=1}^n$ una base de V que consiste de elementos homogéneos, digamos $\partial(v_i) = g_i$, $1 \leq i \leq n$, luego los operadores lineales $\{T_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$, donde $T_{i,j}(v_k) = \delta_{k,j} v_i$ para $1 \leq k \leq n$ y δ la función de Kronecker, forman una base $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ y el isomorfismo de álgebras $\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \simeq M_n(\mathbb{K})$ se obtiene enviando $T_{i,j}$ a $e_{i,j}$, en particular $e_{i,j}$ es homogéneo con $\partial(e_{i,j}) = \partial(v_i) \partial(v_j)^{-1}$. Además en [1], se dieron condiciones suficientes y necesarias para determinar cuando este tipos de matrices son fuertemente graduadas o productos cruzados.

Por otro lado, en [2] fue recientemente introducida y estudiada la clase de anillos *epsilon-fuertemente graduados*, un anillo G -graduado $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ es llamado ϵ -fuertemente graduado, si para $g \in G$ el grupo R_g es un $(R_g R_{g^{-1}}, R_{g^{-1}} R_g)$ -bimódulo unitario; presentaremos condiciones suficientes y necesarias para determinar cuando un anillo de matrices con una buena graduación es ϵ -fuertemente graduado.

Referencias

- [1] S. Dăscălescu, S. Ion, B., Năstăsescu C., and Rios Montes, J. (1999) Group Gradings on FullMatrix Rings. J. Algebra 220 : 709 728.
- [2] Nystedt, P., Öinert, J., Pinedo, H. (2018). Epsilon-strongly graded rings, separability and semisimplicity. Journal of Algebra 514: 1-24.

Partial difference sets from uniform standard cyclotomy on a product of two equal finite fields

Authors: Juan Manuel Montoya, L. Martínez
 University of Pamplona - Colombia, University of the Basque Country
 E-mail: jmontoya002@ikasle.ehu.es

Abstract: In the article “cyclotomy over products of finite fields and combinatorial applications” G.A. Fernandez Alcober, R. Kwashira and L. Martínez introduced a new type of cyclotomy in products of finite fields, which they called standard cyclotomy, and used it to obtain partial difference sets, divisible difference sets, relative difference sets, and three-class association schemes. We will use a particular case of this cyclotomy to link the uniform standard cyclotomy over products of two equal finite fields with the partial spread constructions of partial difference sets and analyze some of their automorphism groups, and we will show that they are larger than the ones obtained when a randomly chosen partial spread is taken, and so the use of this uniform standard cyclotomy produces partial difference sets that are more symmetric than the ones obtained when a random partial spread is used.

Keywords: cyclotomy, partial difference sets, strongly regular graphs.

Introducción

Strongly regular graphs are undirected regular graphs in which the number of 2-paths joining two different vertices depends only on if those vertices are adjacent or are non-adjacent. A useful way to obtain strongly regular graphs with prescribed automorphisms groups acting regularly on the vertex sets is to use partial difference sets on finite groups. A classic construction of partial difference sets uses partial spreads of projective spaces.

G. A. Fernandez-Alcober, R. Kwashira, and L. Martínez introduced in [1] a new type of cyclotomy over products of finite fields, the standard cyclotomy, in which, given n fields $\mathbb{F}_{q_1}, \dots, \mathbb{F}_{q_n}$ of orders q_1, \dots, q_n , respectively, and given a primitive root θ_k in each \mathbb{F}_{q_k} for $k = 1, \dots, n$ and a natural number e which is a common divisor of all the $q_k - 1$, the multiplicative group

$$H = \{(\theta_1^{r_1}, \dots, \theta_n^{r_n}) \mid \sum_{k=1}^n r_k = 0\}$$

acts by multiplication on the additive group of the cartesian product $\mathbb{F}_{q_1} \times \dots \times \mathbb{F}_{q_n}$, and this action originates the cyclotomy. We will obtain an application of standard cyclotomy to get special spread constructions of partial difference sets in which the automorphism groups are larger than the ones obtained taking randomly chosen partial spreads. These automorphism groups will be analyzed using the computational package GAP (Groups, Algorithms and Computing).

References

- [1] G.A. Fernandez-Alcober, R. Kwashira, L. Martínez. “Cyclotomy over products of finite fields and combinatorial applications.” *European Journal of Combinatorics* 31 (2010).

Teorema de Wedderburn-Artin & anillos de grupo

Autores: Alexander Holguín Villa, John H. Castillo
 Universidad Industrial de Santander, Universidad de Nariño
 E-mail: aholguin@uis.edu.co, jhcastillo@udenar.edu.co

Resumen: En esta primera charla presentamos (hecho conocido) una traducción del teorema de Wedderburn-Artin en el contexto de los anillos de grupo, haciendo notar la información adicional que se obtiene sobre dicha estructura cuando ahora el anillo R es un cuerpo \mathbf{F} . Además, se desarrollan algunos ejemplos específicos mostrando la potencialidad del resultado en este contexto.

Palabras clave: Anillo semisimple, anillos de grupo, suma directa.

Introducción

Debido al gran desarrollo que se presentó en la segunda mitad del siglo XIX de las así denominadas álgebras asociativas lineales, que consideradas en abstracto son los anillos, y la necesidad de clasificar estas estructuras, varios conceptos importantes aparecieron y nuevas técnicas fueron creadas; trabajo que condujo al teorema de estructura de Wedderburn-Artin, [2, Thm. 2.6.18, pág. 104].

Teorema de Wedderburn-Artin: Un anillo R es semisimple, si y solo si, es isomorfo a una suma directa de álgebras de matrices sobre anillos de división, es decir

$$R \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i),$$

donde los D_i son anillos de división y los n_i son las dimensiones de ciertos R -módulos simples vistos como D_i -módulos.

Dado un un anillo R y un grupo G son conocidas las condiciones necesarias y suficientes, claro está sobre R y G , para que el anillo de grupo RG sea *semisimple*, [2, Thms. 3.4.7 & 3.4.9, pág. 141-142].

Teorema de Maschke: Sea G un grupo. Entonces el anillo de grupo RG es semisimple si y solo si se cumplen las siguientes condiciones

- i) R es semisimple. ii) G es finito. iii) $|G| \in \mathcal{U}(R)$.

Referencias

- [1] Polcino Mllies, César. "Group algebras and coding theory: a short survey." *Revista Integración* 37.1 (2019): 153-166.
- [2] Polcino Milies, César and Sehgal, Sudarshan K. *An introduction to group rings*. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 2002.

Identities for a parametric Weyl algebra over a ring

Author: Carlos Arturo Rodriguez Palma
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: carpal1878@gmail.com

Abstract: Let A be an associative algebra over \mathbb{F} and $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, where $\mathbb{F}\langle X \rangle$ be the free associative algebra on the countable set $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ over a field \mathbb{F} . We say that f is a *Polynomial Identity* of A if $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ for all $a_1, \dots, a_n \in A$. In this case, we write $f \equiv 0$. The set $\text{Id}(A)$ of polynomial identities of A is a T -ideal of $\mathbb{F}\langle X \rangle$, i.e. $\Phi(\text{Id}(A)) \subseteq \text{Id}(A)$ for all $\Phi \in \text{End}(\mathbb{F}\langle X \rangle)$. If $\text{Id}(A) \neq 0$, then A is called a *PI-algebra*.

This is a joint work with Artem Lopatin, professor at the State University of Campinas (Brazil). In 2015 Benkart, Lopes and Ondrus introduced and studied in a series of papers the infinite-dimensional unital associative algebra A_h generated by elements x, y , which satisfy the relation $yx - xy = h$ for some $0 \neq h \in \mathbb{F}[x]$. We generalize this construction to $A_h(\mathbb{B})$ by working over the fixed \mathbb{F} -algebra \mathbb{B} instead of \mathbb{F} . Namely, for $h \in Z(\mathbb{B})[x]$, the *parametric Weyl algebra* $A_h(\mathbb{B})$ over the ring \mathbb{B} is the unital associative algebra over \mathbb{F} generated by \mathbb{B} and letters x, y commuting with \mathbb{B} subject to the defining relation $yx - xy + h$ (equivalently, $[y, x] = h$, where $[y, x] = yx - xy$), i.e.,

$$A_h(\mathbb{B}) = \mathbb{B}\langle x, y \rangle / \text{id}\{yx - xy - h\}.$$

We describe the polynomial identities for $A_h(\mathbb{B})$ over the infinite field \mathbb{F} in case $h \in \mathbb{B}[x]$ satisfies certain restrictions.

Keywords: polynomial identities, matrix identities, Weyl algebra, Ore extensions, positive characteristic.

References

- [1] A. GIAMBRUNO, M. ZAICEV, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monographs vol. 122, AMS, 2005.
- [2] A. Lopatin, C.A. Rodriguez Palma, *Identities for a parametric Weyl algebra over a ring*, J. Algebra, **595** (2022), 279–296.
- [3] G. Benkart, S.A. Lopes, M. Ondrus, *A parametric family of subalgebras of the Weyl algebra I. Structure and automorphisms*, Transactions of the American Mathematical Society **367** (2015), no. 3, 1993–2021.

La conjetura de la suma exponencial local en dos variables

Autores: Adriana Alexandra Albarracín Mantilla, Omar Felipe Osorio

Cortés

Universidad Industrial de Santander

E-mail: alealbam@uis.edu.co, omar2208105@correo.uis.edu.co

Resumen: Sean p -primo, $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ un espacio métrico completo, donde \mathbb{Z}_p es el anillo de enteros del campo p -ádico \mathbb{Q}_p , \mathbb{Z}_p^\times denota al grupo de unidades, y $p\mathbb{Z}_p$ es su ideal maximal, entonces se definen las sumas exponenciales

$$S(\phi, p^s) = \frac{1}{p^{sn}} \sum_{x \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^n} e^{2\pi i \phi(x)/p^s} \quad \text{y} \quad S_0(\phi, p^s) := \frac{1}{p^{sn}} \sum_{\substack{x \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^n \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} e^{2\pi i \phi(x)/p^s}$$

donde $\phi(x) \in \mathbb{Z}[x]$, es un polinomio no constante, con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, y $s \in \mathbb{C}$. Un problema central es describir el comportamiento asintótico de $S(\phi, p^s)$. En esta charla se mostrará la conjetura sobre la suma exponencial local $S_0(\phi, p^s)$, que postula la existencia de una constante C , independiente de p y s , y un conjunto finito $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\phi$ de primos tales que para todo $p \notin \mathcal{P}$, se tiene que $|S_0| \leq C s^{n-1} p^{-\sigma_c s}$, donde $\sigma_c = \sigma_c(\phi)$ es el índice de oscilación compleja.

Palabras clave: Suma exponencial, suma local, conjetura de Igusa.

Introducción

Los números p -ádicos \mathbb{Q}_p fueron introducidos por Kurt Hensel en 1897, cuando mostró la relación de las estructuras de los anillos de factorización única $\mathbb{Z}, \mathbb{C}[x]$ y su correspondiente cuerpo de fracciones $\mathbb{Q}, \mathbb{C}(x)$. Este campo p -ádico se construye definiendo una norma sobre \mathbb{Q} , distinta a la usual, conocida como norma p -ádica, $|\cdot|_p$, entonces se fija p -primo, se define una función de valuación ν sobre \mathbb{Q} , de tal forma que $|x|_p := p^{-\nu(x)}$. Dado que $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ es un espacio métrico y por lo tanto está dotado de una topología que permite definir una medida de Haar, es posible integrar, el estudio de la integración p -ádica ha dado respuesta a diversos problemas planteados en esta área de la matemática, uno de ellos, son las sumas exponenciales. Fijando un caracter aditivo $e : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$, es posible describir la suma exponencial como

$$S(\phi, p^s) = \int_{\mathbb{Z}_p^s} e^{\phi(x)/p^s} dx,$$

un problema central en matemática, es describir el comportamiento asintótico de $S(\phi, p^s)$. La conjetura de la suma exponencial local se demuestra en el caso general en [2], para ello se establece la conjetura de Igusa para una suma exponencial completa donde ϕ es un polinomio homogéneo. En dimensión dos, Lichtin en [4] da una prueba alternativa de la conjetura de Igusa y desde una perspectiva diferente, en [1] se muestra una descripción detallada del comportamiento de la suma truncada en dos dimensiones basada en los polos correspondientes de la función zeta local bajo una condición de no degeneración adicional. En esta charla se estudia la suma exponencial local en dimensión dos, y se explica la demostración de la conjetura asociada al poliedro de Newton, objeto matemático que asocia un polinomio con un poliedro en el espacio lineal \mathbb{R}^n , y se define como la envolvente convexa de las n -uplas formadas por las potencias de los monomios que conforman al polinomio [3].

Referencias

- [1] Albarracín-Mantilla, Adriana A., and Edwin León-Cardenal. "Igusa Local Zeta Functions and Exponential Sums for Arithmetically Non Degenerate Polynomials." *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux* 30.1 (2018): 331-354.
- [2] Cluckers, R., and Mustata, M. "Igusa Conjecture for exponential sums: Optimal estimates for nonrational singularities." *Forum of Mathematics, Pi*, 7, E3. doi:10.1017/fmp.2019.3
- [3] Hoornaert Kathleen, "Newton Polyhedra and the poles of Igusa local zeta function." Catholic Unviersity Leuven, Department of Mathematics, *Bull. Belg. Math. Soc.* 9(2002), 589-606.
- [4] Lichtin, Ben. "On a conjecture of Igusa. *Mathematika*", 59(2), 399-425. doi:10.1112/S0025579312001167, 2013.

Las Matemáticas detrás de algunos dibujos de Escher

Autor: María Isabel Hernández
Centro de investigación en Matemáticas, A .C.-CIMAT, Mérida Yucatán - México
E-mail: isabel@cimat.mx

Resumen: M. C. Escher fue un artista que entendía muy bien algunos conceptos matemáticos (simetrías, proyecciones, etc.) los cuales le ayudaron a realizar algunas de sus obras. En esta charla hablaremos sobre la matemática que usó para generar sus mosaicos.

Nil álgebras conmutativas de potencias asociativas y sus módulos

Autor: Elkin Oveimar Quintero Vanegas
Universidade Federal do Amazonas
E-mail: eoquinterov@ufam.edu.br

Resumen: En esta charla introduciremos una clase particular de álgebras, aquellas que para cada elemento satisface que la subálgebra generada por ese elemento es asociativa, álgebras llamadas de potencias asociativas. Esta clase de álgebras es una generalización de clases bien conocidas y estudiadas, como las álgebras de Jordan, las álgebras de Lie, las álgebras asociativas, entre otras. Después, vamos a estudiar el comportamiento de los módulos irreducibles para algunas álgebras con producto cero. El estudio de estos módulos aún es vago y es necesario un mayor conocimiento de estos objetos.

Palabras clave: álgebras de potencias asociativas, módulos, Problema de Albert

Introducción

Las álgebras conmutativas de potencias asociativas son una generalización de las álgebras asociativas, las álgebras de Jordan, entre otras clases de álgebras que son de interés de muchos matemáticos. Debido a ese grande interés, las álgebras simples de dimensión finita en las clases de álgebras asociativas, de Jordan, de Lie, entre otras, son bien conocidas. De está forma, su envolvente multiplicativa es también conocida. Sin embargo, en la clase de las álgebras conmutativas de potencias asociativas, la clasificación de las álgebras simples aún no se ha completado. Cuando una álgebra en esa clase tiene un elemento idempotente, su clasificación es conocida, pero para las nilálgebras esta es una pregunta que continua abierta hasta el momento. A. A. Albert sugirió que todas las nilálgebras de dimensión finita sobre cuerpos de característica diferente de 2 en esta clase debían ser nilpotentes. Sin embargo, en 1972 se dio a conocer un ejemplo de una nilálgebra de dimensión 5 que es soluble pero no nilpotente. Desde entonces, se le conoce al siguiente problema como:

Problema de Albert: Toda nilálgebra conmutativa de potencias asociativas de dimensión finita sobre un cuerpo de característica diferente de 2 es soluble.

Hasta el momento se conocen soluciones parciales, sin embargo, todas esas soluciones estudian las propiedades internas del álgebra. Recientemente, I. Shestakov sugirió que estudiar los módulos irreducibles sobre la clase de las álgebras conmutativas de potencias asociativas de nilíndice 4 puede ayudar a comprender mejor el Problema de Albert. La gran dificultad para desenvolver este camino es el poco conocimiento acerca de estos objetos. Solo se conoce su clasificación completa para la cero álgebra de dimensión 2. En este caso, existe un único módulo irreducible no trivial de dimensión 3. Para otras álgebras esta clasificación esta lejos de concluir. Sobre la cero álgebra de dimensión 4 serán dados algunos ejemplos de módulos irreducibles de dimensión $3n$ para cualquier número natural n . Esto, particularmente, implica que la envolvente multiplicativa de las álgebras conmutativas de potencias asociativas de dimensión finita no satisfacen una condición general en su dimensión, contráριο a las álgebras de Jordan, donde dada una álgebra de Jordan de dimensión finita, su envolvente multiplicativa es de dimensión finita también, o como en las álgebras de Lie, donde dada una álgebra de Lie de dimensión finita, su envolvente multiplicativa es de dimensión infinita. En el caso de las álgebras conmutativas de potencias asociativas, tenemos que la envolvente multiplicativa de la cero álgebra de dimensión 2 es finita, sin embargo, la envolvente multiplicativa de la cero álgebra de dimensión 4 es de dimensión infinita.

Referencias

- [1] E. O. Quintero Vanegas and J. C. Gutierrez Fernandez, *Nilpotent linear spaces and Albert's problem*, Lin. Alg. its Appl. Vol 518 (2017) 57 – 78
- [2] E. O. Quintero Vanegas, *Embedding of $sl_2(C)$ -modules into four-dimensional power-associative zero-algebra modules*, Bull. Braz. Math. Soc., Vol 53 (2022), 343-355

Geometría

Estructuras de contacto y sus singularidades

Author: Mikhail Malakhaltsev, Fabián Antonio Arias Amaya
Universidad de los Andes, Corporación Politécnico de la Costa
E-mail: mikarm@uniandes.edu.co, farias374@hotmail.com

Resumen: Una estructura de contacto sobre una variedad M de dimensión $(2n + 1)$ es una distribución Δ completamente no integrable. Localmente esta estructura viene determinada por 1-forma ω que no se anula y tal que $\Delta = \ker(\omega)$ y $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$. En la charla vamos a hablar un poco sobre la historia del concepto de estructura de contacto y explicar los resultados principales sobre las estructuras de contacto, en particular la relación entre la geometría de variedades de contacto y variedades simplécticas. Luego consideraremos varios tipos de singularidades de la estructura de contacto con ejemplos correspondientes y mostraremos como se puede encontrar invariantes de las singularidades.

Referencias

- [1] B. Jakubczyk and M. Zhitomirskii. "Local reduction theorems and invariants for singular contact structures." *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(1), 237–295 (2001).
- [2] F. A. Arias Amaya and M. Malakhaltsev. "Topological and Differential Invariants of Singularities of Contact Structure on a Three-Dimensional Manifold." *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41(12), 623–633 (2020).
- [3] Zhitomirskii, Mikhail. *Typical singularities of differential 1-forms and Pfaffian equations*. Vol. 113. American Mathematical Soc., 1992.

Estudio de la estabilidad en ramas de bifurcación de hipersuperficies con CMC y frontera libre

Autor: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas
 Universidad Industrial de Santander (UIS), Escuela de Matemáticas
 E-mail: cwrodrig@uis.edu.co

Resumen: Sea (M, g) es una variedad Riemanniana de dimensión $n + 1$, con frontera suave ∂M y Σ una variedad diferenciable de dimensión n , también con frontera suave $\partial\Sigma$. Sea también $\{\varphi_t\}_{-\epsilon < t < \epsilon}$ una familia suave de inmersiones tal que, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\varphi_t : \Sigma \rightarrow M$ es una inmersión con CMC (Curvatura Media Constante) y frontera libre. Dada la existencia de una rama de bifurcación para esta familia φ_t , estudiamos la estabilidad de las inmersiones en estos brazos de bifurcación.

Este trabajo hace parte de los resultados de investigación del proyecto “Bifurcación y estabilidad en familias de inmersiones con curvatura media constante y frontera libre”, (C-2020-02), financiado por la UIS.

Palabras & frases claves: Hipersuperficies con CMC y frontera libre, operador de Jacobi, perturbación suave, bifurcación, estabilidad.

Introducción

Definición: Sea $F : \Omega \subset W \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios de Banach W, Y . Sea $\omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ un arco simple, tal que, $F(\omega(t)) = 0$. Si toda vecindad de $w(t_0), t_0 \in I$, contiene ceros de F que no están $\text{Im}(\omega)$ entonces decimos que $w(t_0)$ es un punto de bifurcación de ω (vea la figura 5).

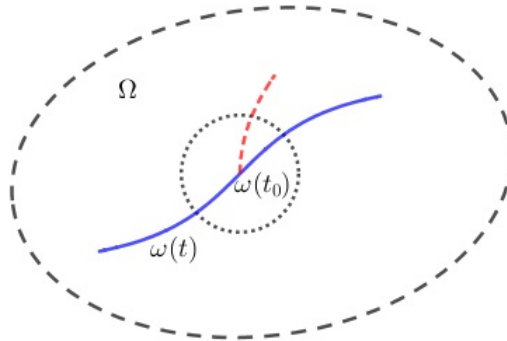


Figura 5: Punto de bifurcación

Una rama de bifurcación para una familia $\{\varphi_t\}$ ocurre sólo en el caso cuando $\lambda_k = 0$, para algún $k \geq 2$, donde $\{\lambda_k\}$ es el conjunto contable de valores propios del operador de Jacobi que se define para una inmersión $\varphi_0 : \Sigma \hookrightarrow M \in \{\varphi_t\}$, como el operador diferencial de segundo orden $J_{\varphi_0} : C^j(\Sigma) \rightarrow C^{j-2}(\Sigma)$, $j \geq 2$, dado por

$$J_{\varphi_0}(f) := \Delta_{\Sigma_0} f - (\|\mathbb{I}^{\Sigma_0}\|_{HS}^2 + Ric_g(\eta_{\Sigma_0}, \eta_{\Sigma_0}))f, \quad (5)$$

$\Sigma_0 = \varphi_0(\Sigma)$. Por lo tanto, en vista de resultados anteriores, sólo necesitamos estudiar el caso $\lambda_2 = 0$. Si φ_0 es un punto de bifurcación estable en la familia $\{\varphi_t\}$, entonces existen sólo tres tipos de bifurcación: Bifurcación en orquilla super-crítica (vea la figura 6); Bifurcación en orquilla sup-crítica (vea la figura 7) y

Bifurcación trans-crítica (vea la figura 8). En la prueba de estos criterios de estabilidad usamos nuevamente la Teoría de Crandall-Rabinowitz (see [3]). Crandall-Rabinowitz estiman el valor propio del módulo mínimo en el espectro de la derivada de Frechet del operador no lineal F a lo largo de una curva de bifurcación $\alpha(t)$, donde $F(\alpha(t)) = 0$. Siendo X y Y Espacios de Banach y $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ dos veces continuamente diferenciable, ellos muestran que el valor propio cero de $F_x(t_0, 0)$ corresponde a valores reales pequeños $\lambda(t)$ de $F_x(t, 0)$ y $\mu(s)$ of $F_x(t(s), x(s))$, donde $\lambda(t_0) = 0 = \mu(0)$. El principal interes es estudiar la relación entre $t(s)$, $\lambda(t)$ y $\mu(s)$. Ellos muestran que si $F_x(t_0, 0)$ cumple la condición de simplicidad, entonces $\mu(s)$ y $-st'(s)\lambda'(t_0)$ tienen los mismos ceros y, en el caso $\mu(s) \neq 0$, el mismo signo. Nosotros hacemos una generalización de estos resultados para el caso en el que F está en terminos de la curvatura media de φ_t , $F_x(t_0, 0)$ es el Operador de Jacobi, $X = C^{j,\alpha}_\partial(\Sigma)$ y $Y = C^{j-2,\alpha}(\Sigma)$.

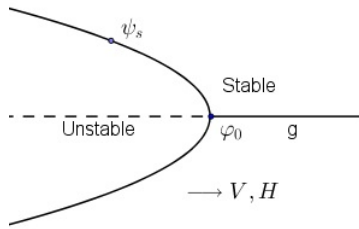


Figura 6: Supercritical pitchfork bifurcation.

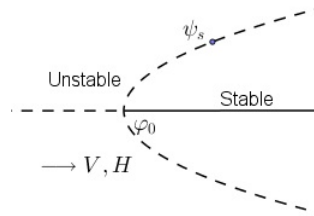


Figura 7: Subcritical pitchfork bifurcation.

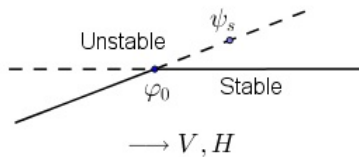


Figura 8: Transcritical bifurcation.

Cuando el parámetro de bifurcación es el volumen, se tienen dos criterios de estabilidad:

El primero es dado en términos del signo de la derivada de la función volumen en las hipersuperficies del brazo de bifurcación, adicionalmente al signo de la derivada de la función del primer valor propio de \tilde{J}_t , donde \tilde{J}_t es la restricción del operador de Jacobi J_t al campos escalares con integral cero.

Teorema: Sea $\{\psi_s\}_{s \in I}$ un brazo de bifurcación formado por hipersuperficies con CMC y frontera libre que se desprende del punto de bifurcación φ_0 sobre la familia $\{\varphi_t\}_{-\epsilon < t < \epsilon}$. $H'_0 \neq 0$. $\ker(J_{\varphi_0}|_{C^{j,\alpha}_\partial(\Sigma)}) = \text{Span}\{e \neq 0\}$. $\lambda_2 = 0$ (Equivalentemente $\tilde{\lambda}_1 = 0$). $\tilde{\lambda}'_1(0) \neq 0$ ($\tilde{\lambda}_1(t)$ el primer valor propio de $\tilde{J}_t = J_t - \frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma J_t \text{vol}_{\varphi_0^*(g)}$). Si además $V'(0) > 0$ (si es necesario, cambie el parámetro t a $-t$). Entonces,

IV Encuentro Matemático del Caribe

(1) En el caso $H'_0 < 0$:

(1-a) Si $\hat{V}'(s) = 0$ para s cercano a 0 (esto es, si \hat{V} es localmente constante), entonces, ψ_s es estable para s cercano a 0.

(1-b) Si $\hat{V}'(s) \neq 0$, $s \neq 0$, s cercano a 0, entonces, un suficientemente pequeño $s_0 > 0$, en cada intervalo $[-s_0, 0)$ y $(0, s_0]$ tenemos:

(1-b-i) Si $\tilde{\lambda}'_1(0)s\hat{V}'(s) < 0$, entonces, ψ_s es estable.

(1-b-ii) Si $\tilde{\lambda}'_1(0)s\hat{V}'(s) > 0$, entonces, ψ_s es inestable.

En particular, super-críticas y sub-críticas orquillas de bibrucación se presentan cuando $\hat{V}'(s)$ no cambian de signo en $s = 0$, y bibrucaciones trans-críticas ocurren cuando $\hat{V}'(s)$ cambian de signo en $s = 0$.

(2) En el caso $H'_0 > 0$, tenemos que ψ_s es inestable para $|s|$ pequeño.

El segundo es dado en términos del signo de la primera y segunda derivadas de la función volumen de las hipersuperficies en el brazo de bibrucación, fijando el signo positivamente para la derivada de la primera función de valor propio de \tilde{J}_t .

Corolario: Sea $\{\psi_s\}_{s \in I}$ el brazo de bibrucación formado por hipersuperficies con CMC y frontera libre. $H'_0 < 0$, $V'_0 > 0$, $\tilde{\lambda}'_1(0) > 0$. Entonces, existen constantes positivas $t_0 \in (0, \epsilon)$ y $s_0 \in \hat{I}$ tal que:

(1) φ_t es estable para todo $t \in [0, t_0]$ e inestable para todo $t \in [-t_0, 0)$.

(2) Si $\hat{V}'(0) \neq 0$, entonces tenemos bibrucación transcrítica para $\{\psi_s\}_{s \in [-s_0, s_0]}$. Esto es,

(2-a) Si $\hat{V}'(0) > 0$, entonces ψ_s es estable para $s \in [-s_0, 0]$ e inestable para $s \in (0, s_0]$.

(2-b) Si $\hat{V}'(0) < 0$, entonces ψ_s es estable para $s \in [0, s_0]$ e inestable para $s \in [-s_0, 0)$.

(3) Si $\hat{V}'(0) = 0$ y existe la segunda derivada de \hat{V} en $s = 0$, tenemos:

(3-a) Si $\hat{V}''(0) < 0$, entonces ψ_s es estable para $s \in [-s_0, s_0]$. Aquí hay una bibrucación en horquilla supercrítica.

(3-b) Si $\hat{V}''(0) > 0$, entonces ψ_s es inestable para todo $s \in [-s_0, 0) \cup (0, s_0]$. Aquí hay una bibrucación en horquilla subcrítica.

Si $H'_0 > 0$ y $V'_0 < 0$, invirtiendo la parametrización de φ_t , $t \mapsto -t$, se obtienen conclusiones similares.

Referencias

- [1] João Lucas Barbosa and Manfredo do Carmo. *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*. *Mathematische Zeitschrift*, 185(3):339-353, 1984.
- [2] Renato G Bettiol, Paolo Piccione, and Bianca Santoro. *Deformations of free boundary cmc hypersurfaces*. *The Journal of Geometric Analysis*, 27(4):3254-3284, 2017.
- [3] Michael G Crandall and Paul H Rabinowitz. *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability*. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 52(2):161-180, 1973.
- [4] Koiso, Miyuki. *Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature*, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 54(1):145-159, 2002.
- [5] Miyuki Koiso, Bennett Palmer, and Paolo Piccione. *Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature*. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 69(4):1519-1554, 2017.

Ecuaciones de movimiento para el problema de los dos cuerpos

Autores: Ruben Dario Ortiz Ortiz, Ana Magnolia Marin Ramirez, Pedro Pablo Ortega Palencia†
 Grupo Ondas, Universidad de Cartagena
 E-mail: rortizo@unicartagena.edu.co, amarinr@unicartagena.edu.co

Resumen: En este trabajo se obtiene una simplificación de las ecuaciones de movimiento en el problema de Kepler introduciendo un variante del potencial cotangente, dada por $V(\theta) = -\coth(\theta/2)$, en el semiplano hiperbólico H^2_R , que es equivalente al modelo del disco de Poincare D^2_R y al modelo de la hoja superior del hiperboloide L^2_R . Es demostrado que la nueva variante del potencial es una extensión y una mejor aproximación del potencial newtoniano en el plano; exhibe propiedades más apropiadas y con mejor significado físico que el potencial que se usa tradicionalmente, $U - (\theta) = -\coth(\theta)$. Las ecuaciones de movimiento obtenidas del problema de n cuerpos son sustancialmente simplificadas siguiendo el mismo enfoque que en [1].

Palabras clave: potencial cotangente; potencial newtoniano; curvatura gaussiana; problema de n -cuerpos; proyección estereográfica

Introducción

El problema de los n -cuerpos es un área de la mecánica clásica que ha ocupado la mente de ilustres matemáticos y astrónomos desde la época de Newton. Describe el sistema dinámico determinado por n partículas con masas positivas, interactuando gravitacionalmente en el espacio euclidiano (con curvatura gaussiana cero). En Mecánica Celeste sobre espacios curvos, el uso del llamado potencial cotangente ha sido casi unánime. Adoptada de forma inmediata, como una buena extensión del potencial newtoniano a espacios con curvatura gaussiana constante. Esto se debe principalmente a dos propiedades que comparten. El primero es de tipo analítico: al igual que el potencial newtoniano es una función armónica en R^3 , es decir, satisface la ecuación de Laplace, el potencial cotangente y el potencial cotangente hiperbólico, son funciones armónicas en S^3 y H^3 respectivamente, es decir, satisfacen la correspondiente ecuación de Laplace-Beltrami. El segundo es de tipo dinámico, ya que cada uno genera en su respectivos espacios un campo central de fuerzas, para el cual todas las órbitas acotadas están cerradas. [1], [2].

Referencias

- [1] PP Ortega Palencia, RD Ortiz Ortiz, AM Marín Ramírez. "Hyperbolic Center of Mass for a System of Particles in a Two-Dimensional Space with Constant Negative Curvature: An Application to the Curved 2-Body Problem." *Mathematics* 9 (5), 531
- [2] Florin Diacu, Ernesto Perez-Chavela, and J. Guadalupe Reyes Victoria. "An intrinsic approach in the curved n-body problem: The negative curvature case." *Journal of Differential Equations*, 252 (8), 4529-4562, 2012.

Relación entre el espacio proyectivo y el espacio proyectivo dual

Autoras: Astrid Liliana Contreras Mendoza, Claudia Inés Granados Pinzón
Universidad Industrial de Santander
E-mail: astrid2198566@correo.uis.edu.co, cigranad@uis.edu.co

Resumen: En esta charla se demuestra que existe una relación biunívoca entre el espacio proyectivo y el espacio proyectivo dual. Y concluiremos demostrando que la forma bilineal asociada a esta relación biunívoca determina una estructura simpléctica sobre el \mathcal{A} -módulo \mathcal{A}^2 como se prueba en [5].

Palabras clave: Recta proyectiva, razón doble, recta proyectiva dual, estructura simpléctica.

Introducción

La teoría estudiada sobre los espacios proyectivos tiene un enfoque algebraico, por ejemplo en [1] y [2] se definen los espacios proyectivos asociados a un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{K} , este enfoque permite considerar la generalización de los espacios vectoriales a los \mathcal{R} -módulos libres y por esto es que en la actualidad caracterizar la recta proyectiva sobre un anillo \mathcal{R} se ha convertido en un problema abierto.

En [3], Granados hace un estudio inicial de la recta proyectiva sobre los anillos totales de fracciones y en [4] se prueba que las rectas proyectivas sobre las \mathbb{R} -álgebras \mathbb{C} , \mathbb{P} y \mathbb{D} tienen estructura de variedad diferenciable bidimensional y que generan las tres geometrías clásicas del plano, Möebius, Laguerre y Minkowski, respectivamente.

El objetivo de esta charla es contextualizar este problema y posteriormente presentar los resultados más destacados de los avances recientes. Se prueban resultados relacionados con puntos fuertemente independientes, referencias proyectivas, proyectividades algebraicas y el Teorema de Staudt para rectas proyectivas.

Posteriormente se define el espacio proyectivo dual y se prueba que existe una relación biunívoca con el espacio proyectivo. Finalmente como resultado destacado se prueba que la forma bilineal asociada a esta relación biunívoca determina una estructura simpléctica sobre el \mathcal{A} -módulo \mathcal{A}^2 .

Referencias

- [1] Aroca, J.M., Fernández, M.J, *Geometría proyectiva*. Publicaciones Universidad de Valladolid, (2009).
- [2] Doneddu, A., *Complementos de la geometría algebraica*. Ed. Aguilar, Madrid, 38-68, (1980).
- [3] Granados, C., Tesis doctoral *Álgebras finitas sobre un cuerpo: la recta proyectiva*. Universidad de Valladolid, (2015).
- [4] Franco, S. M., Tesis doctoral *Interpretación proyectiva de las geometrías métricas, equiformes e inversivas*. Universidad de Valladolid, (2009).
- [5] Contreras-Mendoza, A., Tesis de maestría: *Anillos de Hermite. La recta proyectiva*. Directora: C. Granados-Pinzón, Universidad Industrial de Santander, (2021).

Sobre aproximaciones de irracionales por números racionales

Autor: Raibel de Jesus Arias Cantillo
Universidade Federal do Maranhão-Campus Universitário de Balsas
E-mail: raibel.jac@ufma.br

Resumen: En esta conferencia abordaremos una conexión entre Teoría de los Números, Geometría, y dinámica, a partir de un Teorema de Hurwitz sobre aproximaciones de números irracionales por números racionales, en [3]. Específicamente, analizamos tal teorema de Hurwitz desde un punto de vista geométrico, usando *círculos de Farey-Ford*, en [1], y su relación con sistemas dinámicos, ver [2].

Palabras clave: aproximaciones diofantinas y círculos de Farey-Ford.

Referencias

- [1] Conway, J. *The sensual quadratic Form*. The Mathematical Association Of America, 1997, pp 27-33.
- [2] Hasselblatt, B. Katok, A. *A first Course in Dynamics, with a panorama of recent developments*. Cambridge University Press, 2003. pp 369-374.
- [3] Niven, I. *Numbers: RATIONAL AND IRRATIONAL*. New Mathematical Library, 1961, pp 81-99.

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones diferenciales difusas de orden fraccionario

Autores: Gilberto Arenas Díaz, Duvan A. Contreras Páez, Elder J. Villamizar Roa
 Universidad Industrial de Santander
 E-mail: garenasd@uis.edu.co

Resumen: El estudio de ecuaciones diferenciales fraccionarias constituye un campo de creciente interés, no solo desde el punto de vista teórico, sino también debido a su aplicabilidad al análisis de fenómenos de las ciencias físicas y naturales. Su formalización se caracteriza por la sustitución de derivadas clásicas por derivadas de orden fraccionario. Por otro lado, las ecuaciones diferenciales difusas se propusieron como un intento de manejar la incertidumbre que aparece en muchos modelos matemáticos de algunos fenómenos no deterministas del mundo real en los que predomina la incertidumbre, la subjetividad o la vaguedad.

En esta comunicación se analiza la existencia de soluciones de problemas de valor inicial en el contexto difuso-fraccionario, que incluyen fenómenos de retardo. Explícitamente, considerando la derivada generalizada difusa de Caputo-Katugampola, se demuestran algunos resultados de existencia y unicidad vía teoremas de punto fijo de funciones débilmente contractivas sobre espacios métricos parcialmente ordenados.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales fraccionarias, Ecuaciones diferenciales difusas, derivada generalizada difusa de Caputo-Katugampola.

Introducción

El cálculo fraccionario y con él, las ecuaciones diferenciales fraccionarias, comprende un campo de investigación relevante debido a su aplicabilidad en la descripción de una variedad de fenómenos físicos del mundo real, entre los que se encuentra el transporte no difusivo en la teoría del plasma, la reología, la viscoelasticidad, las fluctuaciones de precios de alta frecuencia en mercados financieros, crecimiento, la teoría de la ruina de las compañías de seguros y procesos de desigualdad, la descripción de dinámicas poblacionales, bioingeniería y ciencias biomédicas, sistemas de control y procesamiento de señales en ingeniería, entre otros [16, 19, 11, 10]. Para revisar algunos temas de cálculo fraccionario se puede consultar las monografías de Podlubny [23], Kilbas *et al.* [19], y Samko *et al.* [21].

El cálculo fraccionario y la teoría de ecuaciones diferenciales fraccionarias se han venido desarrollando a gran velocidad, y con ello, el análisis de ecuaciones diferenciales fraccionarias con estructura difusa también ha sido objeto de estudio [8, 22, 17]. Cabe destacar que, las ecuaciones diferenciales difusas son una herramienta adecuada para modelar sistemas dinámicos en los que es imprescindible considerar la incertidumbre, la subjetividad o la vaguedad de los fenómenos en descripción [4]. Esta teoría se ha desarrollado en varias direcciones teóricas y se han considerado un gran número de aplicaciones en muchos y diversos problemas reales (ver, por ejemplo, [6, 9, 7]). Cuando se integran derivadas fraccionarias en ecuaciones diferenciales difusas se obtienen las denominadas ecuaciones diferenciales difusas fraccionarias.

El concepto de solución para ecuaciones diferenciales fraccionarias con incertidumbre, donde la derivada fraccionaria se considera en el sentido de Riemann-Liouville, fue introducido en el trabajo pionero de Agarwal, Lakshmikantham y Nieto [1]. En el mismo escenario, en [2], los autores demostraron la existencia de una solución para ecuaciones integrales difusas fraccionarias, donde la integral fraccionaria se consideró en el sentido de Riemann-Liouville, utilizando la medida de no compacidad de Hausdorff. En [25], Arshad y Lupulescu obtuvieron algunos resultados de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales difusas fraccionarias considerando el concepto de diferenciabilidad de Riemann-Liouville y asumiendo una

condición de decrecimiento temporal de la función f que describe la ecuación diferencial difusa fraccionaria (6). En [3], Allahviranloo *et al.* estudiaron la existencia de soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales difusas considerando el concepto de diferenciabilidad de Hukuhara de Riemann-Liouville usando funciones de Mittag-Leffler. Por otro lado, en [5], se introdujo la ecuación diferencial fraccionaria difusa de Caputo bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara, y se obtuvieron algunos resultados de existencia y unicidad de solución para la ecuación diferencial difusa fraccionaria de valor inicial. En el mismo escenario, en [26], los autores analizaron la existencia de soluciones del problema de valor inicial difuso fraccionario mediante un método de Euler fraccionario modificado. En [24], los autores consideraron un problema de valor inicial difuso fraccionario bajo la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara donde la derivada fraccionaria se tomó en el sentido de Caputo. Considerando un escenario particular del contexto difuso, a saber, el contexto intervalar, en [27], los autores utilizaron algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas en espacios parcialmente ordenados para estudiar la existencia y la unicidad de la formulación integral del problema de valor inicial. En [22], Hoa Van Ngo, Vasile Lupulescu y Donal O'Regan corrigieron el enunciado sobre la equivalencia entre los problemas de valor inicial asociados con una ecuación diferencial difusa fraccionaria y su correspondiente formulación integral, considerando la diferenciabilidad generalizada de Hukuhara, donde la derivada fraccionaria se toma en el sentido de Caputo. Presentaron una condición adecuada para que esta equivalencia sea válida.

Por otro lado, el análisis teórico de la derivada fraccionaria de Hadamard también ha sido de gran interés en la comunidad matemática. A diferencia de las expresiones que definen las derivadas de Riemann-Liouville y Caputo, la derivada de Hadamard se define en términos de una integral que involucra la función logarítmica de un determinado exponente. En [13], Katugampola introdujo el concepto de integral fraccionaria Riemann-Liouville-Katugampola (integral-RLK) que generaliza y unifica las definiciones de integral fraccionaria de Riemann-Liouville y la integral de Hadamard en una sola definición que involucra un parámetro (p) que, dependiendo de su valor, hace coincidir la integral-RLK con la integral-RL ($p = 1$) o la integral de Hadamard ($p \rightarrow 0^+$). Posteriormente, Katugampola en [14], introdujo el concepto de derivada fraccionaria de Caputo-Katugampola (derivada-CK) que generaliza las definiciones de la derivada fraccionaria de Caputo ($p = 1$). Considerando ecuaciones diferenciales fraccionarias con derivada-CK, en [17], los autores investigaron la existencia y unicidad de la solución de un problema de valor inicial utilizando aproximaciones sucesivas bajo una condición de Lipschitz generalizada.

Además, asociado al análisis matemático de un sistema dinámico, existen las denominadas ecuaciones diferenciales con retardo. Este tipo de ecuaciones diferenciales describen fenómenos en los que la función desconocida del sistema depende, no solo del estado del sistema en un instante dado, sino también, de la historia de la trayectoria hasta ese instante [4, 20, 12]. Por ejemplo, a la hora de estudiar una epidemia en una determinada región, no basta con conocer el número de infectados en un momento determinado, sino observar cómo evolucionó la enfermedad en el tiempo, para poder predecir de buena manera su comportamiento futuro. En este tipo de problemas, la condición inicial no es un número o un vector en \mathbb{R}^n , sino una función continua en un cierto intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$. Esto agrega una complejidad extra en el análisis ya que ahora el problema del valor inicial es un problema de dimensión infinita, hecho que no se observa en las ecuaciones diferenciales ordinarias clásicas. Esta clase de ecuaciones diferenciales ha mostrado su potencial en la descripción de varios fenómenos en biología, ingeniería, física, ciencias de la salud y otras áreas, en particular, aquellas en las que se requiere que los sistemas dinámicos con retardo que describen los fenómenos, tengan en cuenta la incertidumbre, la subjetividad o vaguedad de los datos. En [4], los autores utilizaron resultados de puntos fijos de funciones débilmente contractivas en espacios métricos parcialmente ordenados para obtener resultados de existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial asociados a las ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto difuso con retardo finito utilizando la noción de derivada en el contexto de la derivada de Hukuhara fuertemente generalizada. En [18], los autores utilizaron algunos resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas en espacios parcialmente ordenados para estudiar la existencia y unicidad de la solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario con retardo finito considerando la diferenciabilidad de Caputo en el sentido generalizado de Hukuhara pero en el contexto intervalar.

El objetivo de esta comunicación es analizar problemas de valor inicial asociado a ecuaciones diferen-

ciales fraccionarias con retardo en el contexto completamente difuso. Explícitamente, motivados por los resultados en [4, 17], estudiamos el siguiente problema de valor inicial asociado a una ecuación diferencial difusa fraccionaria (PVI-DF) con retardo finito

$$\begin{cases} ({}_{gH}^{CK} \mathcal{D}_0^{\alpha,p} x)(t) = f(t, x(t)), & t \in J = [0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (6)$$

donde $p, \tau, T > 0$, ${}_{gH}^{CK} \mathcal{D}_0^{\alpha,p}$ denota la derivada fraccionaria de Hukuhara generalizada difusa de Caputo-Katugampola de orden $\alpha \in (0, 1]$, $f : J = [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$ y $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathcal{F}$ son funciones difusas continuas. Para obtener la existencia y unicidad de la solución para el PVI-DF con retardo (6), en lugar de utilizar el teorema clásico del punto fijo de Banach, se aplican algunos teoremas de punto fijo, establecidos en [15], sobre funciones débilmente contractivas definidas en conjuntos parcialmente ordenados. Precisamente, bajo una propiedad de contractividad generalizada sobre elementos comparables, (que es más débil que la condición clásica de Lipschitz), se prueba que la existencia de soluciones inferiores o superiores es suficiente para demostrar la existencia y unicidad de soluciones difusas para el PVI-DF con retardo (6) en el marco de la derivada-CK. Cabe señalar que el espacio de números difusos no es un espacio de Banach, sino un espacio métrico semilineal y parcialmente ordenado.

Referencias

- [1] Agarwal, Ravi P., V. Lakshmikantham, and Juan J. Nieto. "On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty." *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 72.6 (2010): 2859-2862.
- [2] Agarwal, Ravi P., et al. "Fuzzy fractional integral equations under compactness type condition." *Fractional Calculus and Applied Analysis* 15 (2012): 572-590.
- [3] Allahviranloo, Tofigh, Soheil Salahshour, and Saeid Abbasbandy. "Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty." *Soft Computing* 16 (2012): 297-302.
- [4] Angulo-Castillo, V., et al. "Applications of generalized fixed points theorems to the existence of uncertain differential equations with finite delay." *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 17.6 (2020): 1-15.
- [5] Allahviranloo, Tofigh, Atefeh Armand, and Zienab Gouyandeh. "Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative." *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 26.3 (2014): 1481-1490.
- [6] Bede, Barnabás, and Luciano Stefanini. "Generalized differentiability of fuzzy-valued functions." *Fuzzy Sets and Systems* 230 (2013): 119-141.
- [7] Lupulescu, Vasile. "On a class of fuzzy functional differential equations." *Fuzzy Sets and Systems* 160.11 (2009): 1547-1562.
- [8] Ngo, Van Hoa. "Fuzzy fractional functional integral and differential equations." *Fuzzy Sets and Systems* 280.C (2015): 58-90.
- [9] Gomes, Luciana Takata, Laécio Carvalho de Barros, and Barnabas Bede. *Fuzzy differential equations in various approaches*. Berlin: Springer, 2015.
- [10] Scalas, Enrico, Rudolf Gorenflo, and Francesco Mainardi. "Fractional calculus and continuous-time finance." *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 284.1-4 (2000): 376-384.
- [11] Magin, Richard L. "Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues." *Computers & Mathematics with Applications* 59.5 (2010): 1586-1593.
- [12] Lupulescu, Vasile, and Umber Abbas. "Fuzzy delay differential equations." *Fuzzy optimization and decision making* 11 (2012): 99-111.

IV Encuentro Matemático del Caribe

- [13] Katugampola, Udit N. "New approach to a generalized fractional integral." *Applied mathematics and computation* 218.3 (2011): 860-865.
- [14] Katugampola, U.N. "A new approach to generalized fractional derivatives." *Bulletin of Mathematical Analysis & Applications* 6.4 (2014).
- [15] Villamizar-Roa, Elder J., Vladimir Angulo-Castillo, and Yurilev Chalco-Cano. "Existence of solutions to fuzzy differential equations with generalized Hukuhara derivative via contractive-like mapping principles." *Fuzzy sets and systems* 265 (2015): 24-38.
- [16] del-Castillo-Negrete, Diego, B. A. Carreras, and V. E. Lynch. "Nondiffusive transport in plasma turbulence: a fractional diffusion approach." *Physical review letters* 94.6 (2005): 065003.
- [17] Van Hoa, Ngo, Ho Vu, and Tran Minh Duc. "Fuzzy fractional differential equations under Caputo-Katugampola fractional derivative approach." *Fuzzy Sets and Systems* 375 (2019): 70-99.
- [18] Vinh An, Truong, Ho Vu, and Ngo Van Hoa. "A new technique to solve the initial value problems for fractional fuzzy delay differential equations." *Advances in Difference Equations* 2017.1 (2017): 1-20.
- [19] Kilbas, Anatolii Aleksandrovich, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Vol. 204. elsevier, 2006.
- [20] Hale, Jack K., and Sjoerd M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional differential equations*. Vol. 99. Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] Samko, Stefan G., Anatoly A. Kilbas, and Oleg I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives*. Vol. 1. Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and breach science publishers, Yverdon, 1993.
- [22] Van Ngo, Hoa, Vasile Lupulescu, and Donal O'Regan. "A note on initial value problems for fractional fuzzy differential equations." *Fuzzy Sets and Systems* 347 (2018): 54-69.
- [23] Podlubny, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. 1998.
- [24] Prakash, P., et al. "Fuzzy fractional initial value problem." *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 28.6 (2015): 2691-2704.
- [25] Arshad, Sadia, and Vasile Lupulescu. "On the fractional differential equations with uncertainty." *Non-linear Analysis: Theory, Methods & Applications* 74.11 (2011): 3685-3693.
- [26] Mazandarani, Mehran, and Ali Vahidian Kamyad. "Modified fractional Euler method for solving fuzzy fractional initial value problem." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.1 (2013): 12-21.
- [27] An, Truong Vinh, Ho Vu, and Ngo Van Hoa. "Applications of contractive-like mapping principles to interval-valued fractional integro-differential equations." *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 19 (2017): 2577-2599.

Análisis teórico de la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo

Autor: José Camilo Rueda Niño
Universidad Industrial de Santander
E-mail: camilorueda00@hotmail.com

Resumen: En esta charla nos centraremos en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales dispersivas no lineales y la teoría cuasilineal de Kato. Nos proponemos presentar un análisis teórico acerca de la existencia local de soluciones del problema de Cauchy asociado a la ecuación Kortweg de Vries con coeficientes dependientes del tiempo.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales parciales, teoría cuasilineal de Kato.

Introducción

Desde mediados del siglo XIX ha surgido un enorme y creciente interés por parte de matemáticos y físicos por estudiar las soluciones más simples para un modelo dispersivo, dichas soluciones son conocidas hoy como ondas viajeras. Las ondas viajeras existen como consecuencia de un equilibrio entre los efectos dispersivos y no lineales presentes en un sistema; estas ondas viajan con una velocidad constante, sin ninguna evolución temporal en forma o tamaño cuando el marco de referencia se mueve con la misma velocidad de la onda. Las investigaciones han demostrado que este tipo de soluciones especiales aparecen en diversos campos, como la mecánica de fluidos, la acústica (ver Levario-Diaz [1]), la óptica (ver Ferri [2]), la oceanografía (ver Shearman [3]), entre otros.

La ecuación Korteweg de Vries (KdV) es un modelo matemático encargado de describir el comportamiento de las ondas viajeras. Esta ecuación es una de las ecuaciones diferenciales parciales dispersivas cuasilineales más conocidas. La relevancia de este modelo se debe, no solo, a la teoría matemática que involucra su estudio y el número de problemas abiertos asociados que aún persisten, sino a lo sugestiva que resulta a la hora de abordar problemas relacionados.

Un problema resultante del estudio de la ecuación KdV es considerar el caso donde sus coeficientes sean variables, dicho problema es consecuencia de considerar un fondo variable del canal (ver Johnson en [4]). Otro camino para llegar a este problema es tener en cuenta la tensión superficial a la hora de deducir el modelo, ya que los coeficientes de la ecuación diferencial parcial (edp) dependen de la altura, la densidad del fluido y la tensión superficial (ver Ablowitz en [5]). El propósito de esta charla es plantear un análisis teórico sobre la existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy asociado a la ecuación KdV con coeficientes dependientes del tiempo.

Referencias

- [1] Levario-Diaz, Victoria, et al. Effect of acoustic standing waves on cellular viability and metabolic activity. *Scientific reports* 10.1 (2020): 1-11.
- [2] Ferri, Francesco, et al. Mapping optical standing-waves of an open-access Fabry–Perot cavity with a tapered fiber. *Review of Scientific Instruments* 91.3 (2020): 033104.
- [3] Shearman, E. D. R. Radio science and oceanography. *Radio science* 18.3 (1983): 299-320.

IV Encuentro Matemático del Caribe

- [4] Johnson, R. S. On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 73. No. 1. Cambridge University Press, 1973.
- [5] Ablowitz, Mark J. *Nonlinear dispersive waves: asymptotic analysis and solitons*. Vol. 47. Cambridge University Press, 2011.
- [6] Pazy, Amnon. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] Iorio Jr, Iorio Júnior, and Wagner Vieira L. Nunes. *Introducao as equacoes de evolucao nao lineares*. IMPA, 1991.

Existence and uniqueness of solution for a family of nonlinear degenerate mixed parabolic equations

Authors: Ramiro Acevedo, Christian Gómez and Juan David Samboní
 Universidad del Cauca
 E-mail: rmacevedo@unicauca.edu.co, christiancamilo@unicauca.edu.co,
jdsamboni@unicauca.edu.co

Abstract: The aim of this talk is to show an abstract framework to analyze the solvability of a family of nonlinear degenerate mixed parabolic equations. More precisely, we joint the well-known theory for stationary mixed problems and the theory for nonlinear degenerate parabolic equations to obtain sufficient conditions inspired in real application problems to guarantee the existence and uniqueness of solution. Furthermore, we illustrate some applications of the abstract setting through particular problems that arise from physical sciences: a nonlinear time-dependent Stokes problem and a nonlinear eddy current model in a bounded domain including conductors and dielectrics.

Keywords: Well-posedness, parabolic degenerate equations, mixed problems, nonlinear problems, time-dependent Stokes problem, eddy current model.

Introduction

The analysis of time-dependent differential equations in mixed form is a relevant topic for the numerical analysis, for instance, in the research of numerical methods to obtain the approximation of solution with the finite element method (see, for instance, [2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10]). Indeed, in [4] has been recently proposed and abstract setting to show the well-posedness of a family of linear mixed degenerate parabolic problems, which actually extends the theory presented in [7] for classical (non-degenerate) mixed parabolic problems. The analysis of degenerate parabolic problems is motivated by the study of electromagnetism applications which require to consider the problem in two subregions (the conductor and the insulator) of a bounded domain and the electromagnetic field satisfy some divergence-free or curl-free condition.

The aim of this talk is to show that the results obtained in [4] can be extended to the nonlinear case. More precisely, we combine the theory for the nonlinear degenerate parabolic equations (see, for instance, [12]) with the well-known Babuska-Brezzi theory (see [8]) in order to deduce necessary and sufficient conditions that the functional spaces and operators involved should satisfy to prove existence and uniqueness of solution for the abstract problem that can be described as follows:

Let X, Y and M be real Hilbert spaces, $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ a bilinear form, $R : Y \rightarrow Y'$ a linear and bounded operator and $A : X \rightarrow X'$ a nonlinear operator. Given $u_0 \in Y$, $f \in L^2(0, T; X')$ and $g \in L^2(0, T; M')$, find $u \in L^2(0, T; X)$ and $\lambda \in L^2(0, T; M)$ such that:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Ru(t), v \rangle + b(v, \lambda(t)) + \langle Au(t), v \rangle &= \langle f(t), v \rangle & \forall v \in X \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, T), \\ b(u(t), \eta) &= \langle g(t), \eta \rangle & \forall \eta \in M, \\ \langle Ru(0), v \rangle &= \langle Ru_0, v \rangle & \forall v \in X. \end{aligned}$$

Finally, we show two models from applied sciences and deduce their well-posedness by using the developed abstract theory: a nonlinear time-dependent Stokes model [11], which arise from fluid dynamics theory, and a nonlinear eddy current model considering ferromagnetic materials [1, 2].

References

- [1] R. Acevedo, E. Alvarez and P. Navia. A boundary and finite element coupling for a magnetically non-linear eddy current problem. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 52 (2020), pp. 230–248.
- [2] Acevedo, Ramiro, Salim Meddahi, and Rodolfo Rodríguez. “An E -based mixed formulation for a time-dependent eddy current problem.” *Mathematics of Computation* 78.268 (2009): 1929-1949.
- [3] R. Acevedo and S. Meddahi. An E -based mixed FEM and BEM coupling for a time-dependent eddy current problem. *IMA J. Numer. Anal.*, 31 (2011), pp. 667–697.
- [4] R. Acevedo, C. Gómez, and B. López-Rodríguez. Well-posedness for a family of degenerate parabolic mixed equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 498 (2021).
- [5] R. Acevedo, C. Gómez, and B. López-Rodríguez. Fully discrete finite element approximation for a family of degenerate parabolic mixed equations. *Comput. Math. Appl.*, 96 (2021). pp. 155–177.
- [6] A. Bermúdez, B. López-Rodríguez, R. Rodríguez and P. Salgado. An eddy current problem in terms of a time-primitive of the electric field with non-local source conditions. *ESAIM - Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 47 (2013), 875–902.
- [7] C. Bernardi and G. Raugel. A conforming finite element method for the time-dependent Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 22 (1985), pp.455–473.
- [8] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 44, Springer 2013.
- [9] D. Boffi, A. Buffa and L. Gastaldi. Convergence analysis for hyperbolic evolution problems in mixed form. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 20 (2013), pp. 541–556.
- [10] D. Boffi and L. Gastaldi. Analysis of finite element approximation of evolution problems in mixed form. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42 (2004), pp. 1502–1526.
- [11] V. Ervin, J. Howell and I. Stanculescu. A dual-mixed approximation method for a three-field model of a nonlinear generalized Stokes problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 197 (2008), pp. 2886–2900.
- [12] R. E. Showalter. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. *Math. Surveys Monogr.*, vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

Un problema de continuación única para las soluciones de una ecuación de Shrödinger no lineal

Author: Héctor José Cabarcas Urriola
 Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Cartagena
 E-mail: hcabarcasu@unicartagena.edu.co

Resumen: Se demostrará una propiedad de continuación única asociada al fenómeno de explosión de las soluciones de la ecuación no lineal con interacción puntual en el origen,

$$\partial_t u = i(\Delta_Z u + |u|^{p-1}u), \quad (7)$$

donde $p > 5$, $x, t \in \mathbb{R}$ y Δ_Z es el operador delta- interacción puntual, escrito formalmente, como

$$-\Delta_Z = -\frac{d^2}{dx^2} + Z\delta_0,$$

donde δ_0 es la delta de Dirac centrada en el origen.

Palabras clave: Ecuación de Schrödinger. Operador Delta, interacción puntual, continuación única

Introducción

Fue mostrado en [2] y [3] que para $Z \neq 0$, la ecuación de Schrödinger (7) posee soluciones de tipo onda viajante de la forma $u_s(x, t) = e^{i\omega t}\varphi_{\omega, Z}(x)$, donde

$$\varphi_{\omega, Z}(x) = \left[\frac{(p+1)\omega}{2} \sinh^2 \left(\frac{(p-1)\sqrt{\omega}|x|}{2} + \tanh^{-1} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\omega}} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad (8)$$

con $\omega > \frac{Z^2}{4}$ y $\varphi_{\omega, Z}$ pertenece al dominio del operador $-\Delta_Z$.

Observe que para $Z \geq 0$ este tipo de soluciones satisfacen las siguiente desigualdad,

$$|u_s(x, t)| = \varphi_{\omega, Z}(x) \leq c(p, \omega, Z)e^{\sqrt{\omega}|x|}, \quad (9)$$

para $c(p, \omega, Z)$ constante positiva y para todo $x, t \in \mathbb{R}$. De otro lado para $Z < 0$ se satisface (9) para cada $x \in \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| > \frac{2}{\sqrt{\omega(p-1)}} \left| \tanh^{-1} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\omega}} \right) \right| \right\}$ y $t \in \mathbb{R}$. Es decir, las soluciones $u_s(x, t)$ tienen decaída exponencial de la forma $e^{-\sqrt{\omega}|x|}$.

Por otro lado, aplicando la transformación pseudo conforme a una solución $u = u(x, t)$, se obtiene que la función

$$v(x, t) = \frac{e^{i\frac{p|x|^2}{4(\eta+\sigma t)}}}{(\eta + \sigma t)^{1/2}} u \left(\frac{x}{\eta + \sigma t}, \frac{\gamma + \theta t}{\eta + \sigma t} \right), \quad (10)$$

con η, σ, γ y θ constantes tal que la igualdad $\eta\theta - \sigma\gamma = 1$, satisface formalmente la ecuación

$$i\partial_t v = -\Delta_{\frac{Z}{\eta+\sigma t}} v - (\eta + \sigma t)^{\frac{p}{2} - \frac{5}{2}} |v|^{p-1}v, \quad (11)$$

IV Encuentro Matemático del Caribe

donde $v(t) \in D(-\Delta_{\frac{Z}{\eta+\sigma t}})$. em particular, para la solución tipo onda viajante, si se toma $Z = 0$, $\eta = \gamma = 1$, $\sigma = -1$ y $\theta = 0$ se sigue que

$$v(x, t) = \frac{e^{-it(1-t)} e^{i \frac{px^2}{4(1-t)}}}{(1-t)^{1/2}} \varphi_{\omega,0} \left(\frac{x}{1-t} \right), \quad \omega > 0, \quad (12)$$

es solución de la ecuación

$$i\partial_t v(x, t) = -\Delta v - |v|^{p-1}v, \quad (13)$$

que explota en tiempo $t = 1$, esto es,

$$\lim_{t \uparrow 1} \|v'(\cdot, t)\|_2 = \infty. \quad (14)$$

De la estimativa (9) y (12) se obtiene la estimativa para v ,

$$|v(x, t)| \leq \frac{1}{(1-t)^{1/2}} b_1 e^{-b_2|x|}, \quad b_1, b_2 > 0. \quad (15)$$

En [1] en el caso $Z = 0$ y $p \geq 5$, se demostró que no es posible que una solución v no trivial de la ecuación (13) explote en tiempo finito y que satisfaga la desigualdad (15) simultáneamente para algunos b_1 y b_2 . En esta dirección, se generalizó este resultado para $Z \neq 0$. Más precisamente, se obtuvo:

Teorema: Sea $p > 5$. Considere $u \in C((-1, 1) : D(\Delta_Z))$ una solución de la ecuación (7) satisfaciendo (15) para b_2 suficientemente grande. Entonces $u \equiv 0$.

Referencias

- [1] Escauriaza, L., Kenig, C. E., Ponce, G. and Vega, L.; "Unique Continuation for Schrödinger Evolutions, with Applications to Profiles of Concentration and Traveling Wave." *Commun. Math. Phys.* 305, 487-512 (2011).
- [2] Fukuizumi, R. and Jeanjean, L. "Stability of Standing Waves for a Nonlinear Schrödinger Equation with a Repulsive Dirac Delta Potencial." *Discrete and Continuous Dynamical System* Vol. 21, 121-136 (2008).
- [3] Fukuizumi, R., Ohta, M. and Ozawa, T. "Nonlinear Schrödinger Equation with a Point defect." *Ann. I. H. Poincaré* AN25, 837-845 (2008).

Multigrid for the nonlinear power flow equations

Authors: Enrique Pereira Batista, Barry Lee
Southern Methodist University
E-mail: epereirabatista@smu.edu, barryl@smu.edu

Resumen: The continuously changing structure of power systems and the inclusion of renewable energy sources are leading to changes in the dynamics of modern power grid, which have brought renewed attention to the solution of the AC power flow equations. In particular, development of fast and robust solvers for the power flow problem continues to be actively investigated. A novel multigrid technique for coarse-graining dynamic power grid models has been developed recently. This technique uses an algebraic multigrid (AMG) coarsening strategy applied to the weighted graph Laplacian that arises from the power network's topology for the construction of coarse-grain approximations to the original model. Motivated by this technique, a new multigrid method for the AC power flow equations is developed using this coarsening procedure. The AMG coarsening procedure is used to build a multilevel hierarchy of admittance matrices, which automatically leads to a hierarchy of nonlinear power flow equations. The hierarchy of power flow equations is then used in a full approximation scheme (FAS) and a multiplicative correction multigrid framework to produce multilevel solvers for the power flow equations.

Keywords: Power flow equations, graph Laplacians, multigrid, relaxation-based coarsening, FAS, AMG

Introducción

The rapid proliferation of renewable energy generation, such as hydro, bio-gas, solar, wind and geothermal sources, leads to substantial changes in the dynamics of power grid networks. Because modern society requires large amounts of energy for use in industry, commerce, transportation, communication and domestic appliances, this consumption affects the dynamics too. This increasing demand of electric energy causes large power systems to operate under stressed conditions that reach the system's stability limits. For these reasons, it is important to know the state of the system by determining the voltages and currents at every node of the power network to monitor the system under stressed conditions. This is achieved by determining and solving a system of algebraic equations known as power flow problem (power flow equations). Moreover, monitoring the system can help in long-term planning designs so that the network components (generators, lines, transformers, etc.) can be appropriately constructed and stationed to withstand the stresses they will be exposed to.

We use a relaxation-based coarsening of the graph Laplacian given by the power grid network to develop a multigrid method for solving the static non-linear AC powerflow equations. These static equations are tightly knitted to the dynamic models in that the actual power grid model is an algebraic-differential system with the powerflow equations describing the algebraic constraints. By algebraically constructing a hierarchy of approximate weighted graph Laplacians, a hierarchy of nonlinear powerflow equations immediately becomes apparent. This latter hierarchy can then be used in a full approximation scheme (FAS) framework that leads to a nonlinear solver with generally a larger basin of attraction than Newton's method. Given the algebraic multigrid (AMG) coarsening of the approximate Laplacians, the solver is an AMG-FAS scheme. The derivation of this scheme will be presented and analyzed, and numerical examples to demonstrate the performance of this scheme will be given.

References

- [1] Andersson, G. *Modelling and Analysis of Electric Power Systems*. 2004.
- [2] Brandt, A. *The Gauss Center Research in Multiscale Scientific Computation*. 1997.
- [3] Briggs W.L., Henson V.E., and McCormick S.F. *A Multigrid Tutorial*. SIAM. 2000.
- [4] Fliscounakis S., Panciatici P., Capitanescu F., and Wehenkel L. *Contingency Ranking With Respect to Overloads in Very Large Power Systems Taking Into Account Uncertainty, Preventive, and Corrective Actions*. IEEE Transactions on Power Systems, 28(4):4909–4917, Nov 2013.
- [5] Hackbusch W. *Multigrid Methods and Applications*. Springer, 2003.
- [6] Lee B. and Pereira-Batista E. *Algebraic multigrid for the nonlinear powerflow equations*. Numerical Linear Algebra with Applications, 28(2):e2347, 2021.
- [7] Lee B. *Multigrid for Model Reduction of Power Grid Networks*. Numer. Linear Algebra Appl., page e2201, 2018.
- [8] Livne O. E. *Coarsening by compatible relaxation*. Numerical Linear Algebra with Applications, 11(2-3):205–227, 2004.
- [9] MacLachlan S.P. and Oosterlee C.W. *Algebraic Multigrid Solvers for Complex-Valued Matrices*. SIAM J. Sci. Comput., 30:1548–1571, January 2008.
- [10] Livne O.E. and Brandt A. *Lean Algebraic Multigrid (LAMG): Fast Graph Laplacian Linear Solver*. SIAM J. Sci. Comput., 34(4):407–423, August 2012.
- [11] Ponce C., Bindel D., and Vassilevski P. *A Nonlinear Algebraic Multigrid Framework for the Power Flow Equations*. SIAM Journal on Scientific Computing, 40:B812–B833, Jan 2018.
- [12] Ron D., Safro I., and Brandt A. *Relaxation-Based Coarsening and Multiscale Graph Organization*. Multiscale Modeling and Simulation, 9, Apr 2010.
- [13] Ruge J. W. and Stüben K. *Algebraic multigrid*. In Multigrid methods, pages 73–130. SIAM, 1987.
- [14] Stüben K. *Algebraic Multigrid (AMG): An Introduction with Applications*. March 1999.
- [15] Trottenberg U. and Schuller A. *Multigrid*. Academic Press, Inc., USA, 2000.
- [16] Zimmerman R. D., Murillo-Sánchez C. E., and Thomas R. J. *MATPOWER: Steady-State Operations, Planning, and Analysis Tools for Power Systems Research and Education*. IEEE Transactions on Power Systems, 26(1):12–19, Feb 2011.

Funciones elípticas de Jacobi y de Weierstrass en EDP

Autor: Luis Andrés Rosso Cerón
 Universidade Federal do Maranhão
 E-mail: luis.rosso@ufma.br

Resumen: Las funciones elípticas de Jacobi, así como las funciones elípticas de Weierstrass, constituyen un conjunto conveniente de soluciones para ecuaciones diferenciales parciales oriundas de la física matemática. Específicamente, las funciones elípticas de Jacobi permiten establecer, de forma analítica, la existencia y estabilidad orbital de soluciones *standing-wave* tipo *peakon* para la ecuación:

$$i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) + Z[\delta_c(x) + \delta_{-c}(x)]u(x, t) = -|u(x, t)|^2 u(x, t),$$

donde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $Z \in \mathbb{R}$ y δ_c es la distribución delta de Dirac actuando sobre $x = c > 0$.

Por otro lado, las funciones elípticas de Weierstrass aparecen naturalmente, via diagrama de fase-curvas algebraicas (cúbicas), en la resolución de la ecuación diferencial no lineal:

$$\left(\frac{d}{d\xi} w\right)^2 = Pw^4(\xi) + Qw^2(\xi) + R, \quad (16)$$

siendo P, Q y R parámetros reales. Ecuaciones diferenciales de este tipo son obtenidas, por ejemplo, a partir de las ecuaciones de Kadomtsev-Petviashvili (KP) o de la Korteweg-de Vries (KdV).

Palabras clave: Funciones elípticas de Jacobi, funciones elípticas de Weierstrass, estabilidad orbital, distribución delta de Dirac.

Introducción

El principal objetivo es estudiar la existencia y estabilidad orbital de soluciones *standing-waves* (ondas estacionarias) asociadas al modelo:

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + \partial_x^2 u(x, t) = -u(x, t)|u(x, t)|^2, & x \neq \pm c, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\partial_x u(\pm c + \varepsilon, t) - \partial_x u(\pm c - \varepsilon, t)] = -Zu(\pm c, t), & t \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con continuidad de $u(x, t)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones elípticas de Jacobi jugarán un papel esencial para establecer existencia de soluciones verificando las condiciones antes mencionadas.

Por otro lado, se deduce la forma como aparecen las funciones elípticas de Weierstrass asociadas a la ecuación no lineal (16), su relación con curvas algebraicas (cúbicas), bien como se estudian las soluciones particulares asociadas a (16), de manera específica a un dado *PVI*, variando continuamente los parámetros P, Q y R .

Referencias

- [1] Saied, E.A., Abd El-Rahman, Reda G., Ghonamy, Marwa. I. (2009). "A generalized Weierstrass elliptic function expansion method for solving some nonlinear partial differential equation". *Computers and Mathematics with Applications* 58 (2009), Elsevier, 1725-1735.

IV Encuentro Matemático del Caribe

- [2] Fukuizumi, R., Ohta, M. and Ozawa, T. (2008). "Nonlinear Schrödinger equation with a point defect". *Ann. I. H. Poincaré- AN* 25, 837-845.
- [3] Fukuizumi, R., Jeanjean, L. (2008). "Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential". *Discrete and Continuous Dynamical System*, 121-136.
- [4] Ivorra Castillo, Carlos. (2005). *Curvas Elípticas. Universitat de València*.
- [5] Weinstein, M.I. (1985). "Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations". *SIAM J. Math. Anal.* 16, 472-491.
- [6] Weinstein, M.I. (1983). "Nonlinear Schrödinger equation and sharp interpolation estimates". *Comm. Math. Phys.*, 87, 567-576.

Efecto del operador fraccionario de Caputo-Fabrizio para la modelación de flujo en medios porosos

Autor: Luis X. Vivas-Cruz
Universidad Autónoma de Guerrero
E-mail: xvivas.cruz@gmail.com

Resumen: Se obtiene la solución exacta de un modelo de flujo de fluidos que se generaliza con la definición del operador fraccionario de Caputo-Fabrizio y nuevas ecuaciones constitutivas. El modelo es de dos ordenes fraccionarios y considera fluidos ligeramente compresibles en una reserva de extensión infinita de porosidad-simple y un pozo que produce a una presión constante. Se muestra mediante el desplazamiento cuadrático medio que el operador tiene propiedades locales, con lo cual se exhibe ausencia de procesos de memoria. La solución exacta del modelo es obtenida mediante técnicas de integración de contorno en el plano complejo. Además, para valores apropiados de los ordenes fraccionarios se incluyen como casos particulares la solución de la ecuación de Helmholtz, difusión, onda y Cattaneo.

Palabras clave: Cálculo fraccionario, flujo de fluidos, desplazamiento cuadrático medio.

Introducción

Hoy en día hay un creciente interés en el uso del cálculo fraccionario (CF) para modelar fenómenos complejos en diferentes áreas de ciencia e ingeniería. Una de las áreas de mayor aplicación ha sido en la modelación de flujo anómalo, del cual se ha observado que mediante expresiones del desplazamiento cuadrático medio se exhiben comportamientos que obedecen leyes de potencia. Dado que los modelos de orden fraccionario conllevan a soluciones que cuentan con una gran adaptabilidad, éstos son capaces de explicar muchas de las heterogeneidades en medios porosos. Sin embargo, para describir heterogeneidades que no exhiben un comportamiento de ley de potencia, se ha propuesto el operador fraccionario de Caputo-Fabrizio cuyo kernel es de tipo exponencial [1]. Desde el punto de vista del CF, se siguen estudiando muchas de las propiedades matemáticas de este operador. En este contexto, destacamos que existen trabajos que indican que este operador no puede considerarse una derivada fraccionaria [2] y que no puede describir memoria dinámica [3, 4]. En este trabajo analizamos el efecto del uso del operador de Caputo-Fabrizio en la modelación de flujo de fluidos en una reserva de porosidad-simple. Se generaliza un modelo que se basa en ecuaciones constitutivas de tipo-Cattaneo. Como resultado de este estudio, se representa la solución exacta y algunos gráficos ilustrativos con el fin de validar las soluciones. También, se muestra el comportamiento del desplazamiento cuadrático medio en el que se concluye que las expresiones resultantes dan lugar a difusión normal y una combinación de difusión normal y balística.

Referencias

- [1] Caputo, Michele, and Mauro Fabrizio. "A new definition of fractional derivative without singular kernel". *Progress in Fractional Differentiation & Applications* 1.2 (2015): 73-85.
- [2] Ortigueira, Manuel D., and J. Tenreiro Machado. "A critical analysis of the Caputo-Fabrizio operator". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 59 (2018): 608-611.
- [3] Tarasov, Vasily E. "No nonlocality. No fractional derivative". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 62 (2018): 157-163.

IV Encuentro Matemático del Caribe

- [4] Tarasov, Vasily E. "Caputo-Fabrizio operator in terms of integer derivatives: memory or distributed lag?". *Computational and Applied Mathematics* 38.3 (2019): 1-15.

Aplicaciones modernas del cálculo de variaciones y del control óptimo

Autores: Tovias Enrique Castro Polo
 Universidad del Atlántico
 E-mail: toviascastro@mail.uniatlantico.co

Resumen: En esta charla haremos una introducción a la teoría del cálculo de variaciones y del control óptimo. Abordaremos algunos de los principales resultados de dichas teorías, para luego utilizarlas en la solución de algunos problemas provenientes de otras ramas del conocimiento como la a biología y la economía y la ingeniería.

Palabras clave: cálculo variacional, control óptimo, ecuación de Euler, Modelo SIR, Braquistócrona.

Introducción

Existen muchos problemas de situaciones reales que caen en lo que se conoce como el problema fundamental del cálculo de variaciones, el cual puede resumirse o plantear de la siguiente manera. Dada una función $f = f(x, y, y')$, cómo encontrar funciones $y(x)$ que maximizan o minimizan la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \quad (17)$$

sujeta a las condiciones de fronteras

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2. \end{cases} \quad (18)$$

Con el objeto de determinar las soluciones de dicho problema se demostró que una condición necesaria para que la función $y = y(x)$, sujeta a las condiciones de frontera dadas en (18) sea un extremo del funcional dado en (17) es que es que $y = y(x)$ satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (19)$$

Usaremos esa teoría para estudiar el costo de viajes a corta distancia. También para justificar como un camino curvo puede ser utilizado para que una bici con ruedas cuadradas pueda transitar por el.

Por otra parte sobre la teoría de control óptimo podemos plantear lo siguiente. Dada un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad (20)$$

donde $x(t)$ es el vector de variables estado y los controles $u(\cdot) \in U$ están definidos sobre $[t_0, t_1]$ y las trayectorias asociadas deben verificar que $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, nuestro problema es minimizar el funcional de costo de la forma

$$J = J(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt, \quad (21)$$

Si el control u asociado con el sistema de control dado por la Ecuación (20) es óptimo para (21), entonces existe una aplicación $\lambda(\cdot)$ absolutamente continua en $[t_0, t_1]$, con valores en \mathbb{R}^n , y las siguientes ecuaciones se verifican para casi todo $[t_0, t_1]$:

IV Encuentro Matemático del Caribe

- $\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$,
- $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$,
- $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$,

donde $H(\lambda, x, u, t) = F(x, u, t) + \lambda^t f(x, u, t)$ es el Hamiltoniano.

Usaremos esa teoría para resolver la siguiente situación. Si la dinámica de una enfermedad (transmitida solo por contacto entre individuos infecciosos y susceptibles) en una población biológica, se usa el modelo estandar SIR (ver [1] y [2])

$$S'(t) = mN - mS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t) \quad (22)$$

$$I'(t) = -mI(t) + cS(t)I(t) - dI(t) \quad (23)$$

$$R'(t) = -mR(t) + u(t)S(t) + dI(t). \quad (24)$$

$$(25)$$

Con $t \in (0, L)$, $L > 0$, y condiciones iniciales $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$, $R(0) = R_0 \geq 0$.

Se desea resolver el siguiente problema del control óptimo,

$$\text{mín } J(u) = \text{mín } \int_0^L (I(t) + au^2(t))dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} X' = F(t, u, X) & X = (S, I, R) \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Referencias

- [1] Capasso, Vincenzo. "Mathematical structures of epidemic systems." *Lecture Notes in Biomathematics* 97 (1993).
- [2] Anița, Sebastian, et al. *An introduction to optimal control problems in life sciences and economics: From mathematical models to numerical simulation with MATLAB®*. Vol. 2. No. 11. Basel: Birkhäuser, 2011.
- [3] ROUSSEAU, Christiane, and Yvan SAINT-AUBIN. "Matemática e atualidade." *Rio de Janeiro: SBM* 2015 (2015).
- [4] Fleming, Wendell H., and Raymond W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control. Vol. 1*. Springer Science & Business Media, 2012.

Minicursos

Una breve introducción a los modelos de ondas de choque

Autores: Marlon Michael López Flores, Edson Landim de Almeida
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
E-mail: mmlf@impa.br, edsonlan@impa.br

Resumen: Una onda de choque es una onda que se caracteriza por ser una perturbación que se propaga de manera abrupta y casi discontinua. Podemos encontrar ondas de choque, tanto en la naturaleza (erupciones volcánicas), como en ciertas actividades de humanas (extracción de minerales, tratamientos de materiales, etc.). La importancia de entender y modelar este tipo de ondas se hace evidente, ya que nos puede ayudar a la prevención de accidentes (explosiones), así como ayudarnos a mejorar ciertas aplicaciones industriales (láser de alta intensidad, soldadura en base a explosión). Los modelos matemáticos que representan este tipo de problemas se desprenden de leyes de la física y pueden llegar a ser muy complejos. Para entenderlos mejor, se utilizan algunos métodos numéricos apropiados que nos ayudan a realizar simulaciones computacionales, que a su vez, nos ayudan a entender como funciona dicho fenómeno físico. En esta ponencia, serán presentados algunos ejemplos físicos dónde se forman este tipo de ondas. Algunas aplicaciones industriales de las mismas. También algunas formas de modelar y simular estos fenómenos. Esta ponencia está diseñada para motivar a estudiantes de pregrado y maestría así como cualquier persona con inclinación científica.

Palabras clave: Leyes de conservación, problemas hiperbólicos, métodos numéricos, aplicaciones industriales.

Algoritmo de descenso de gradiente: una inmersión profunda

Autor: David Sierra Porta
Universidad Tecnológica de Bolívar
E-mail: dporta@utb.edu.co

Resumen: El método de descenso de gradiente sienta las bases del aprendizaje automático y las técnicas de aprendizaje profundo. Exploremos cómo funciona, cuándo utilizarlo y cómo se comporta para varias funciones. El descenso de gradiente (GD) es un algoritmo iterativo de optimización de primer orden utilizado para encontrar un mínimo/máximo local de una función dada. Este método se utiliza habitualmente en el aprendizaje automático (ML) y el aprendizaje profundo (DL) para minimizar una función de coste/pérdida (por ejemplo, en una regresión lineal). Debido a su importancia y facilidad de implementación, este algoritmo suele enseñarse al principio de casi todos los cursos de aprendizaje automático.

A bayesian statistical analysis of the demographics of Puerto Rico: what we can expect in the next years?

Autor: Angélica M. Rosario Santos
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
E-mail: angelica.rosario2@upr.edu

Abstract: The Problem of Population Dynamics is arguably the most important problem of Puerto Rico. According to the most recent United States Census Bureau Projection, Puerto Rico's population will decline from 3.8 millions persons in 2000 to slightly above 2 million by 2050, a dramatic 47% population decline in 50 years. In this project, we study the probabilistic Total Fertility Rate (TFR) Bayesian Model and the Life Expectancy Bayesian Model developed by Adrian Raftery [1, 2] that are now used by the United Nations Population Division. We produce new population projections for Puerto Rico based on reliable data and other important considerations such as a low-fertility hierarchical model for the projection of Total Fertility Rate for countries with TFR less than 1.5.

Keywords: Total Fertility Rate, Life Expectancy, Bayesian Hierarchical Probabilistic Models.

Introduction

One of the most important problems facing Puerto Rico is its population dynamics. The declining trends in fertility, external migration, and population aging are not sustainable and population projections should play a very important role for the development, discussion and implementation of public policies that could alleviate this population collapse. Until recently population projections using the Cohort Component Method have been deterministic. There is now agreement that it is best to use a probabilistic approach in order to measure their level of uncertainty. In response to this suggestion, researchers [3, 7] have incorporated Bayesian Probabilistic Theory in order to include the uncertainty in the estimation of the basic demographic indicators of fertility and mortality used in the projections as Life Expectancy and Total Fertility Rate. These models have three major advantages. The first one is the incorporation of a way to include uncertainty in the predictions. Raftery and his colleagues [1, 2, 3] provided a solution to this problem allowing the exchange of information (borrowing strength in a hierarchical model) among countries based on the assumption that the unknown quantities are drawn from a common probability distribution. Other advantage of this modelling is the possibility to estimate the parameters at the same time uncertainty is considered including a heteroscedastic error term $e_{c,t}$ in each model. The third advantage is the estimation of the parameters via the Bayesian Approach instead of fixing them by an expert opinion.

However in terms of fertility, Puerto Rico is one of the countries with low Total fertility Rate (TFR) around the world, and the assumption of a rapid increase around the replacement level 2.1 appears unlikely. A study performed in 2013 called *Future Fertility in low fertility countries* [5] suggests, after doing several surveys to international experts, that any understanding of the factors behind the fertility decline needs to take into account the changes, like economics, in Old Europe, Latin America, and the Middle East.

The main contributions of this research are: 1) Provide an alternative way for projecting population for countries with low TFR as Puerto Rico, and 2) Provide different scenarios for net migration to obtain plausible population projections. We carefully choose the data to be used in order to justify possible scenarios for the population of Puerto Rico using recent information about different countries from the World Population Prospects 2019 and US Census. R packages `bayesLife`, `bayesTfr` and `bayesPop` [8, 9, 10] were used to obtain

the corresponding projections and to verify the convergence of the MCMC simulations to get the posterior distributions of the parameters. According to this study, the population of Puerto Rico will decline to 1880.9 million by 2050 bounded by the 95 % probabilistic interval (1678.5, 2070.2).

References

- [1] Raftery, Adrian E., et al. "Bayesian probabilistic population projections for all countries." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 109.35 (2012): 13915-13921.
- [2] Raftery, Adrian E., Leontine Alkema, and Patrick Gerland. "Bayesian population projections for the United Nations." *Statistical science: a review journal of the Institute of Mathematical Statistics* 29.1 (2014): 58.
- [3] Raftery, Adrian E., Nevena Lalic, and Patrick Gerland. "Joint probabilistic projection of female and male life expectancy." *Demographic research* 30 (2014): 795.
- [4] Congdon, Peter D. *Bayesian hierarchical models: with applications using R*. Chapman and Hall/CRC, 2019.
- [5] Basten, Stuart, et al. "Future fertility in low fertility countries." (2014): 39-146.
- [6] US Census Bureau. "International data base: population estimates and projections methodology." (2013).
- [7] Alkema, Leontine, et al. "Probabilistic projections of the total fertility rate for all countries." *Demography* 48.3 (2011): 815-839.
- [8] Sevcikova, Hana, et al. "Package 'bayesLife'." (2021).
- [9] Sevcikova, Hana, et al. "Package 'bayesTFR'." (2021).
- [10] Sevcikova, Hana, et al. "Package 'bayesPop'." (2021).



**EDICIONES
UTB**



Universidad
Tecnológica
de Bolívar
CARTAGENA DE INDIAS