



ENCUENTRO  
**MATEMÁTICO**  
DEL CARIBE



MEMORIAS  
**2020**



Universidad  
Tecnológica  
de Bolívar

CARTAGENA DE INDIAS





II ENCUENTRO  
**MATEMÁTICO**  
DEL CARIBE



MEMORIAS  
**2020**



Universidad  
Tecnológica  
de Bolívar

CARTAGENA DE INDIAS

## COMITÉ ORGANIZADOR

**Jorge Luis Muñiz Olite** - Universidad Tecnológica de Bolívar  
**Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo** - Universidad Tecnológica de Bolívar  
**Carlos Rafael Payares Guevara** - Universidad Tecnológica de Bolívar  
**Andrea Estefanía Cabarcas Sánchez** - Universidad Tecnológica de Bolívar  
**Eber Javier Lenes Puello** - Universidad del Sinú Seccional Cartagena  
**Luis Ramón Fuentes Castilla** - Universidad del Sinú Seccional Cartagena

## AGRADECIMIENTOS

**Facultad de Ciencias Básicas** - Universidad Tecnológica de Bolívar  
**Equipo de Audiovisuales** - Universidad Tecnológica de Bolívar  
**Equipo de TICs** - Universidad Tecnológica de Bolívar

## RECTOR

**Alberto Roa Varelo**

## VICERRECTOR ACADÉMICO

**Daniel Toro González**

## VICERRECTORA ADMINISTRATIVA

**María del Rosario Gutiérrez de Piñeres Perdomo**

## SECRETARIA GENERAL

**Ana María Horrillo Caraballo**

## DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y EMPRENDIMIENTO

**Jairo Useche Vivero**

Diagramación

**Ediciones UTB**

ISSN: 2744-8835

Cartagena de Indias, D. T. y C., - Colombia  
[www.utb.edu.co](http://www.utb.edu.co)

2020

**EDICIONES  
UTB**



# Prefacio

El Encuentro Matemático del Caribe tiene como finalidad reflexionar sobre el quehacer matemático y la enseñanza de las matemáticas en el Caribe colombiano. Así mismo, extender las redes académicas con investigadores asistentes locales, nacionales e internacionales en las Ciencias Matemáticas.

A través del encuentro se busca motivar a la comunidad de nuestra región a participar activamente en eventos matemáticos para conocer de primera mano la evolución y el amplio alcance que posee esta ciencia a nivel mundial por cuenta de los expositores. Además de esto, el evento es una invitación directa a los investigadores locales a continuar investigando, escribiendo y presentando los resultados de sus investigaciones, de esta forma se espera que en un futuro no muy lejano la Región Caribe colombiana sea foco de resultados y publicaciones de gran impacto internacional.

La segunda versión del Encuentro Matemático del Caribe se realizó de forma remota del 9 al 12 de septiembre de 2020. En el mismo, se presentaron 44 conferencias y siete minicursos abarcando todas las áreas de las Matemáticas, como lo son Álgebra, Análisis, Geometría, Sistemas Dinámicos, Ecuaciones Diferenciales, Estadística, Probabilidad, Teoría de Códigos, de Grafos y de Números, Educación Matemática, y sus aplicaciones en la Física, Epidemiología, Astronomía, Logística, Medicina, entre otras aplicaciones. Adicionalmente, se realizaron las siguientes mesas redondas:

- **Un recorrido por la Educación Matemática, Matemática Pura y Matemática Aplicada:** esta mesa redonda fue enfocada en analizar cómo hacer confluir la Matemática Pura, Matemática Aplicada y Educación Matemática con el propósito de fortalecer el sistema educativo. Para este fin, se contó con la participación de los profesores Juan Carlos Galvis Arrieta, Blanca Margarita Parra Mosqueda y Luis Ramón Fuentes Castilla, quienes nos compartieron su experiencia en cada uno de estos campos.
- **Olimpiadas en Matemáticas:** En esta mesa redonda se conversó sobre el impacto y la importancia de las Olimpiadas en Matemáticas en el desarrollo eficiente de la intuición, el ingenio y la creatividad de los jóvenes participantes. Contamos con la participación de los profesores Luis Fernando Cáceres Duque, Catalina María Rúa Álvarez, Alexander Holguín Villa, Gabriel Darío Uribe Guerra y Yamid Bermúdez Tobón, quienes poseen una alta experiencia en la organización de Olimpiadas en Matemáticas y en la preparación de jóvenes participantes desde sus localidades.

En estas memorias presentaremos los resúmenes de las conferencias y minicursos que se impartieron durante el II Encuentro Matemático del Caribe. Todas las actividades realizadas fueron grabadas y pueden ser encontradas en el siguiente link: [Videos del II Encuentro Matemático del Caribe](#)

El comité organizador reitera su agradecimiento a los conferencistas del evento, quienes provinieron de Universidades de Colombia, Brasil, Chile, Estados Unidos, México, Perú, Portugal y Puerto Rico, al público asistente de Colombia, Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Cuba, Ecuador, El Salvador, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Noruega, Panamá, Paraguay, Perú, República Dominicana, Uruguay, Venezuela, Costa Rica Y Estados Unidos y al personal de TICs, Audiovisuales, Investigaciones, Comunicaciones por su arduo trabajo para que este evento se llevara a cabo.

Autor: **Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo**

# Índice

## Ponencias

Una Introducción a la Aproximación Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales Usando el Método de Elementos Finitos – Juan Carlos Galvis Arrieta	11
Necesidades de Investigación en Logística de Respuesta a Desastres – Trilce Marie Encarnación Rivera	12
Variedades Riemannianas con Flujo Geodésico Anosov no Tienen Puntos Conjugados – Sergio Augusto Romaña Ibarra	13
Matrices Bottleneck e Valores de Perron Combinatórios para Árvores – Enide Cascais Silva Andrade	15
Adaptive $\alpha$ Significance Level for Linear Models – Daiver de Jesús Vélez Ramos, Luis Pericchi, María Pérez	16
Besov Maximal Regularity for a Class of Degenerate Integro-Differential Equations with Infinite Delay in Banach Spaces – Rafael Antonio Aparicio Cuello, Valentin Keyantuo	18
New Trapdoor Functions for Public Key Cryptohraphy – Moises Ricardo Delgado Olartegui	20
Subálgebras y Variedades de Gelfand-Tsetlin – Germán Alonso Benitez Monsalve	21
Nil Álgebras Conmutativas de Potencias Asociativas – Elkin Oveimar Quintero Vanegas	22
Computando Campos Lineales en Grupos de Lie – Max Ferreira	23
Triángulos Pitagóricos y dos Ecuaciones Diofantinas – Raibel de Jesus Arias Cantillo	24
Resolución de Problema: Calcular Algunos Puntos de la Función de Cantor – Luis Andrés Rosso Cerón	25

Numerical Study of Post-Blowup Dynamics in the Nonlinear Schrödinger Equation – José Manuel Escorcía Tafur	27
Estimativas de Error para Discretizaciones del Laplaciano por Métodos de Volúmenes Finitos en Mallas Esféricas Geodésicas Icosaédricas – Leonardo Andrés Poveda Cuevas, Pedro Peixoto, Saulo R. M. de Barros	28
Circuitos de Aprendizaje Para la Articulación entre la Educación Matemática y Ciudadanía en el Aula Hospitalaria – Guillermo Andrés Guevara Bermúdez, Paula Otaiza Rivera	30
A Lower Bound for the Energy of Hypoenergetic and Non Hypoenergetic Graphs – María Rosario Robbiano Bustamante	33
A Bilinear Optimal Control Problem Related to a 3D Chemo-Repulsion System – Exequiel Enrique Mallea Zepeda	34
Regiones Realizables – Elvis Ronald Valero Kari	36
Propuesta Metodológica para Estudiante Ciego en Matemática Superior – Fabian Patricio Santiago Muñoz	37
Bounds for Different Spreads of Line and Total Graphs – Jonnathan Alexander Rodríguez Zambrano, Enide Andrade, Eber lenes, Exequiel Mallea-Zepeda, Maria Robbiano	39
Teoremas de Factorización de Kronecker para la Álgebra de Malcev no de Lie de Dimensión Siete – Victor Hugo López Solís	40
Técnicas de Bifurcación Aplicadas a la Geometría Riemanniana – Elkin Darío Cárdenas Díaz, Willy Sierra	42
Un Método Iterativo de Punto Medio – Willy Will Sierra Arroyo	43
Representación Matricial Adaptativa del Método de Uzawa – Catalina María Rúa Álvarez, Alexandre M. Roma	45
Regularidad de las Variedades de <i>Mishchenko-Fomenko</i> en $gl_n$ – Wilson Fernando Mutis Cantero	47

Decodificación Mediante el Uso de Líderes de Clase en Códigos Lineales Binarios – Jhon Hermes Castillo Gómez, Lisbeth Delgado	48
Topological and Differential Invariants of Singularities of Contact Structure on a Three-Dimensional Manifold – Fabián Antonio Arias Amaya, Mikhail Malakhaltsev	50
Medidas Expansoras Tienen la Propiedad de Especificación no-Uniforme sobre Sistemas Dinámicos Aleatorios – Rafael José Álvarez Bilbao	51
Sobre la categoría de los Módulos – Héctor Edonis Pinedo Tapia	52
Números de Stirling y el Operador $z^\alpha \frac{d}{dz}$ – Michael Alexander Rincón Villamizar	53
Álgebras de Grupo Normales & un Teorema de Amitsur – Alexander Holguín Villa	55
Modelos de Regresión Lineales Basados en la Clase de Distribuciones Box-Cox Elípticas – Raúl Alejandro Morán Vásquez	56
Adaptive Significance Levels in Linear Regression Models with Unknown-Variance – Alejandra Estefanía Patiño Hoyos, Victor Fossaluzza	57
Descomposición de Códigos MRD – Francisco de Jesús Arias Dominguez, Javier de la Cruz, Wolfgang Willems	59
Procesos Metacognitivos y de Autorregulación en la Resolución de Problemas, en el Contexto de la Matemática Escolar – Alberto Jesús Iriarte Pupo	60
Existencia y Unicidad de Soluciones para un Problema Tipo $p(x)$ -Laplaciano – Johnny Cuadro Molina	62
Acerca de los Potenciales Gravitacionales de la Mecánica Celeste sobre Espacios Curvados – Pedro Pablo Ortega Palencia	63



Ecuación del Calor no Homogénea Fraccionaria con Respecto al Tiempo en el Sentido de Caputo – Rubén Darío Ortiz Ortiz, Wilson Jerez Balanguera, Ana M. Marin	65
Extremal Graphs for Estrada Indices – Eber Javier Lenes Puello	66
Teoría de Matrices Aleatorias en Datos de Series Temporales – Andy Rafael Domínguez Monterroza	67
La Importancia de las Matemáticas en la Ingeniería – Julio Alberto castro Garcés, Sandra Castro Llanos	68
Condiciones de Borde Sobre Campos Cuánticos: el Efecto Casimir – Alberto León Giraldo Zuluaga	69
Entropía de Permutación sobre Señales Electroencefalográficas (EEG) de Procesos Cognitivos – Fabián Elías Tafur Raad	71
Expansiveness, Shadowing and Markov Partition for Anosov Families – Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo, Raquel Ribeiro	74
<b>Minicursos</b>	
R como Generador de Gráficos Estadísticos y Matemáticos – Jorge Luis Villalba Acevedo	77
La Resolución de Problemas y la Actividad Matemática – Blanca Margarita Parra Mosqueda	78
Resolución de Problemas de Olimpiadas en Matemáticas – Luis Fernando Cáceres Duque	79
Dinámica de Enfermedades Infecciosas: Un Análisis desde las Matemáticas: – Laura Victoria Forero Vega	80
Elementos de Astrofísica Estelar y Supergigantes Rojas – Aura de las Estrellas Ramírez Arévalo	81
Modelos Matemáticos en Epidemiología: Transporte Humano y Efectos Económicos del Distanciamiento Social – César Augusto Nieto Acuña	82
Modelo de Regresión Logística Binario Aplicado al Área de la Salud – Luzneyda Ballesteros Peinado	83

# Ponencias

## Una Introducción a la Aproximación Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales Usando el Método de Elementos Finitos

Autor: Juan Carlos Galvis Arrieta  
Universidad Nacional de Colombia  
E-mail: [jcgalvisa@unal.edu.co](mailto:jcgalvisa@unal.edu.co)

**Resumen:** En esta charla presentaremos una introducción corta a la aproximación numérica de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas. En particular, revisaremos algunos aspectos importantes del método de los elementos finitos. Presentaremos algunos avances obtenidos en nuestro grupo de investigación con relación a métodos de elementos finitos para problemas de difusión con contraste alto y múltiples escalas.

## Necesidades de Investigación en Logística de Respuesta a Desastres

Autor: Trilce Marie Encarnación Rivera  
University of Missouri-St. Louis  
E-mail: [tencarnacion@umsl.edu](mailto:tencarnacion@umsl.edu)

**Resumen:** La actividad logística se puede considerar como un proceso socio-técnico mediante el cual una red social de individuos orquesta una serie de actividades técnicas utilizando sistemas de apoyo como el transporte y las comunicaciones. Las operaciones logísticas de respuesta a desastres a corto plazo se desenvuelven en un entorno operativo complejo, donde las necesidades urgentes, las decisiones de vida o muerte y los recursos escasos son la norma.

Esta ponencia define el campo de la logística de respuesta ante desastres y proporciona una descripción general de la amplia gama de funciones de emergencia que se realizan como parte de este campo. Se presentan las diferencias entre las funciones que se enfocan en la recuperación a largo plazo, donde la eficiencia operativa, similar a la logística comercial, es una consideración primordial, y la asistencia humanitaria a corto plazo, en la que el principal objetivo es preservar vidas humanas. Se discuten las características de los procesos socio-técnicos que deben ser consideradas en los modelos matemáticos diseñados para soportar la toma de decisiones operativas en este entorno.

Finalmente, se presenta un conjunto de necesidades de investigación que proporciona orientación a los nuevos participantes en la logística de respuesta a desastres, y a las personas interesadas en explorar temas poco estudiados en esta área.

**Palabras claves:** Logística Humanitaria, Logística de Respuesta a Desastres.

# Variedades Riemannianas con Flujo Geodésico Anosov no Tienen Puntos Conjugados

Autor: Sergio Augusto Romaña Ibarra  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
E-mail: [sergiori@im.ufrj.br](mailto:sergiori@im.ufrj.br)

**Resumen:** Demostramos que cualquier variedad Riemanniana completa no compacta con curvatura limitada por debajo y flujo geodésico de tipo Anosov no tiene puntos conjugados. En particular, respondemos a un problema abierto mencionado en [5] que está relacionado con los enunciados de Mañé en [7] sobre una generalización del teorema de Klingenberg a variedades no compactas. Este es un trabajo en conjunto con Italo Melo.

**Palabras clave:** Puntos conjugados, flujo geodésico, flujos Anosov, curvatura.

## Introducción

En [8], Anosov demostró que los flujos geodésicos de variedades compactas de curvatura negativa inducen sistemas dinámicos caóticos. Estos flujos geodésicos se denominan *sistemas uniformemente hiperbólicos* o simplemente *sistemas Anosov*. Cuando la variedad no es compacta, pero su curvatura está "pinched" negativamente (limitada entre dos constantes negativas), el mismo argumento de Anosov mostró que el flujo geodésico también es Anosov (cf. [5]). En [6], Klingenberg mostró que las variedades compactas con flujo geodésico Anosov comparten varias propiedades con variedades cuya curvatura es negativa. Entre ellos, no tienen puntos conjugados, el flujo geodésico es ergódico, las órbitas periódicas son densas, el grupo fundamental tiene un crecimiento exponencial y cada geodésica cerrada tiene índice 0. Para variedades no compactas algunos de estos resultados no son válidos. Sin embargo, cuando el volumen es finito, en el artículo destacado [7], Mañé demostró, utilizando un índice de Maslov, que si el flujo geodésico admite un subfibrado lagrangiano invariante continuo, entonces no hay puntos conjugados. En particular, dado que los paquetes estables e inestables son continuos, los flujos de Anosov geodésicos invariantes y lagrangianos en variedades de volumen finito no también tienen puntos conjugados. En el mismo artículo, Mañé afirmó que las variedades no compactas, completas, con curvatura limitada por debajo, no tienen puntos conjugados, siempre que el flujo geodésico sea Anosov. Sin embargo, como se menciona en [[5], págs. 475-476], la prueba de Mañé contiene un error en el Proposición II.2 (ver también [4]). Desde entonces, se planteó la siguiente conjetura:

**Conjetura 1.** *Si  $M$  es una variedad Riemanniana completa no compacta con curvatura limitada por debajo y cuyo flujo geodésico es Anosov, entonces  $M$  no tiene puntos conjugados.*

Este problema se ha estudiado recientemente. El trabajo más reciente para solucionar este problema se debe a G. Knieper (cf. [4]), quien resolvió el problema asumiendo tres condiciones geométricas adicionales, que son, sin recurrencia fuerte, la existencia de un conjunto compacto donde todos los puntos conjugados posibles sólo aparecen en este conjunto compacto y la existencia de una geodésica sin puntos conjugados. El objetivo principal de este trabajo es probar esta conjetura sin asumir ninguna condiciones geométricas en la variedad. Más específicamente, probamos el siguiente teorema:

**Teorema 2.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana completa no compacta con curvatura limitada por debajo. Si el flujo geodésico de  $M$  es Anosov, entonces  $M$  no tiene puntos conjugados.*

De esta manera, la afirmación original de Mañé en [7] es cierta.

## Referencias

- [1] Melo, Í., & Romaña, S. (2020). Riemannian manifolds with Anosov geodesic flow do not have conjugate points. *arXiv preprint arXiv:2008.12898*.
- [2] Melo, Í., & Romaña, S. (2020). Contributions to the study of Anosov geodesic flows in non-compact manifolds. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 40(9), 5149.
- [3] Dowell, Í., & Romaña, S. (2017). A rigidity theorem for Anosov geodesic flows. *arXiv preprint arXiv:1709.09524*.
- [4] Knieper, G. (2018). A note on Anosov flows of non-compact Riemannian manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(9), 3955-3959.
- [5] G. Knieper. Chapter 6, hyperbolic dynamics and riemannian geometry. volume 1 of Handbook of Dynamical Systems, pages 453–545. Elsevier Science, 2002.
- [6] Klingenberg, W. (1974). Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type. *Annals of Mathematics*, 1-13.
- [7] Mañé, R. (1987). On a theorem of Klingenberg. *Dynamical systems and bifurcation theory (Rio de Janeiro, 1985)*, 319-345.
- [8] Anosov, D. V. (1969). Geodesic flow on compact manifolds of negative curvature. In *Proc. Steklov Math. Inst. AMS Translations* (Vol. 1969).

## Matrizes Bottleneck e Valores de Perron Combinatórios para Árvores

Autor: Enide Cascais Silva Andrade  
Universidade de Aveiro, Portugal  
E-mail: [enide@ua.pt](mailto:enide@ua.pt)

**Resumo:** A noção de valor de Perron combinatório foi introduzida em [1]. Os autores continuaram o estudo desse parâmetro e introduziram em [2] um novo parâmetro  $\pi_e(M)$  que nos dá um novo minorante para o raio espectral da matriz Bottleneck  $M$  de uma árvore com raiz. Foram provadas várias propriedades para estes parâmetros. Estas ideias foram motivadas pelo conceito de conexidade algébrica. Uma propriedade de extensão para o valor de Perron combinatório é apresentada o que permite definir um novo conceito de centro para grafos caterpillar. Compara-se computacionalmente este novo centro com o chamado - conjunto característico, ou seja, o centro obtido pela conexidade algébrica.

*Trabalho conjunto com Lorenzo Ciardo e Geir Dahl.*

**Palavras chave:** valor de Perron; matriz bottleneck; árvore; Matriz Laplaciana

### Referências

- [1] Andrade, E., & Dahl, G. (2017). Combinatorial Perron values of trees and bottleneck matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 65(12), 2387-2405.
- [2] Andrade, E., Ciardo, L., & Dahl, G. (2019). Combinatorial Perron parameters for trees. *Linear Algebra and its Applications*, 566, 138-166.

# Adaptive $\alpha$ Significance Level for Linear Models

Authors: Daiver de Jesús Vélez Ramos, Luis Pericchi, María Pérez  
 Universidad de Puerto Rico, Río Piedras  
 E-mail: [daiver.velez@up.edu](mailto:daiver.velez@up.edu)

**Abstract:** We put forward an adaptive alpha that decreases as the information grows, for hypothesis tests in which nested linear models are compared. A less elaborate adaptation was already presented in Pérez and Pericchi (2014) for comparing general i.i.d. models. In this article we present refined versions to compare nested linear models. This calibration may be interpreted as a Bayes-non-Bayes compromise, and leads to statistical consistency, and most importantly, it is a step forward towards statistics that leads to reproducible scientific findings.

**Keywords:** p-value calibration; Bayes factor; linear model; likelihood ratio; adaptive alpha; PBIC.

## Introduction

The  $p$ -value associated with hypothesis testing is defined as the minimum significance level with which the null hypothesis would be rejected in favor of the alternative or a correct interpretation of the  $p$ -values is to visualize them as the probability of obtaining results as or more extreme as the observed result when the null hypothesis is true. In general, a significance level  $\alpha=0.05$  is considered, and then the decision rule would be: reject the null hypothesis in favor of the alternative hypothesis if the  $p$ -value is less than 0.05, or not to reject the null hypothesis in favor of the alternative hypothesis if the  $p$ -value is greater than 0.05.

When the null hypothesis is rejected, the results are said to be statistically significant. But the  $p$ -values say nothing about the magnitudes of the effects. A non-significant  $p$ -value does not imply that the null hypothesis is true. If large enough samples are used, it is highly likely to reject a false null hypothesis. In this case, a non-significant  $p$ -value provides evidence in favor of the null hypothesis. But if large samples are not used, there is little likelihood of rejecting a false null hypothesis. In this case, a non-significant  $p$ -value does not provide evidence in favor of the null hypothesis. When the samples are not large enough, we have no way of knowing whether the non-significant  $p$ -values are due to a certain null hypothesis or to the unlikely probability of rejecting a false null hypothesis due to the unsuitable sample size (Sellke et al.).

Bayesian literature have been criticizing for several decades the implementation of hypothesis testing with fixed significance levels, and in particular the use of the scale  $p$ -value $<0.05$ . That discussion was mostly regarded as a philosophical issue about the wrong interpretation of  $p$ -values as probabilities of the null hypothesis. However, the crisis of Fisher's scale of evidence exploded when scientific researchers, largely outside departments of Mathematics and Statistics, began reporting very low rates of reproducible scientific presumed findings. Many papers and opinions have been written on this subject, and we will mention just a few of them as in (Pericchi and Pérez).

- In 2005, John Ioannidis publish a paper in PLOS Medicine entitled "Why Most Published Research Findings Are False".
- Sir David Cox: "Statistics is also about science and  $p < 0.05$  is seen as the passport for publication, and most if not all statisticians would take a rather disapproving view of it to put it mildly".
- In 2015, the Basic and Applied Social Psychology Journal banned the use of significance testing, so  $p < 0.05$  will not any more be a "passport for publication".



## II Encuentro Matemático del Caribe

- In March 2016, the American Statistical Association publishes a Statement on Statistical Significance and  $p$ -Values, establishing some general principles for the use and interpretation of  $p$ -values, principles on which all Statisticians could agree.
- In September 2017, a group of more than 70 researchers in Statistics published a paper asking for “re-defining statistical significance”. They propose to change the default  $p$ -value threshold for statistical significance from 0.05 to 0.005 for claims of new discoveries.
- In March 2019, Valentin Amrhein, Sander Greenland and Blake McShane publish a paper in Nature 567, 305-307, about: “Scientists rise up against statistical significance”.

It is then clear that obtaining a  $p$ -value lower than 0.05 does not open the doors for publication as before, and we Statisticians must provide alternatives to Scientists.

## References

- [1] Pérez, M. E., & Pericchi, L. R. (2014). Changing statistical significance with the amount of information: The adaptive  $\alpha$  significance level. *Statistics & probability letters*, 85, 20-24.
- [2] Sellke, T., Bayarri, M. J., & Berger, J. O. (2001). Calibration of  $p$  values for testing precise null hypotheses. *The American Statistician*, 55(1), 62-71.

# Besov Maximal Regularity for a Class of Degenerate Integro-Differential Equations with Infinite Delay in Banach Spaces

Autores: Rafael Antonio Aparicio Cuello, Valentin Keyantuo  
 Universidad de Puerto Rico  
 E-mail: rafael.aparicio@upr.edu, valentin.keyantuo1@upr.edu

**Abstract:** The theory of operator-valued Fourier multipliers is used to obtain characterizations for well-posedness of a large class of degenerate integro-differential equations of second order in time in Banach spaces. Specifically, we treat the case of vector-valued Besov spaces on the real line. It is important to note that in particular, the results are applicable to the more familiar scale of vector-valued Hölder spaces. The equations under consideration are important in several applied problems in physics and material science, in particular for phenomena where memory effects are important. Several models in the area of viscoelasticity, including heat conduction and wave propagation correspond to the general class of integro-differential equations considered here. The importance of the results is that they can be used to treat nonlinear equations.

**Abstract:** Well-posedness, maximal regularity, operator-valued Fourier multiplier, Besov spaces, Hölder spaces, material with memory.

## Introduction

We establish well-posedness results for the following general problem which consists in a degenerate second order non homogeneous integro-differential equation with infinite delay in a Banach space:

$$\begin{aligned} & (Mu')'(t) - \Lambda u'(t) - \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t c(t-s)u(s)ds \\ & = \gamma u(t) + Au(t) + \int_{-\infty}^t b(t-s)Bu(s)ds + f(t), \text{ for a.e. } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Here,  $A, B, \Lambda$  and  $M$  are closed linear operators in a Banach space  $X$  satisfying the assumption  $D(A) \cap D(B) \subset D(\Lambda) \cap D(M)$ ,  $b, c \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $f$  is an  $X$ -valued function defined on  $\mathbb{R}$ , and  $\gamma$  is a constant. If  $M \equiv 0$ , the above reduce to degenerate first order integro-differential equation. Equations of first and second order in time are of interest. Equations of the form (1) appear in a variety of applied problems such as viscoelasticity and thermoelasticity, when memory effects are present.

Our main tool is the theory of operator-valued Fourier multipliers in the vector-valued Besov spaces  $B_{pq}^s(\mathbb{R}, X)$ ,  $s > 0$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Operator-valued Fourier multipliers have been used to study maximal regularity in Besov spaces of evolutionary differential equations in Banach spaces was done starting with [1, 2] by H. Amman and [5] by Girardi-Weis for the evolutionary problem and by Arendt-Bu [4] for periodic boundary conditions. In [3] by Arendt-Batty-Bu was used operator-valued Fourier multipliers to study maximal regularity of evolutionary differential equations in Banach spaces in the scale of vector valued Hölder spaces in both evolutionary problem and periodic boundary conditions. The theory of operator-valued Fourier multipliers allows us to work without the restriction to Hilbert space imposed by the use of Plancherel's theorem. Also, we do not need to assume that the operators involved are semigroup or cosine function generators.

The well-posedness or maximal regularity results are important in that they allow for the treatment of nonlinear problems. In fact both semilinear and quasilinear equations can be handled with this method.

## References

- [1] Amann, H. (1997). Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications. *Mathematische Nachrichten*, 186(1), 5-56.
- [2] Amann, H. (2019). Function Spaces. In *Linear and Quasilinear Parabolic Problems* (pp. 75-280). Birkhäuser, Cham.
- [3] Arendt, W., Batty, C., & Bu, S. (2004). Fourier multipliers for Hölder continuous functions and maximal regularity. *Studia Mathematica*, 160, 23-51.
- [4] Arendt, W., & Bu, S. (2004). Operator-valued Fourier multipliers on periodic Besov spaces and applications. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 47(1), 15-33.
- [5] Girardi, M., & Weis, L. (2003). Operator-valued Fourier multiplier theorems on Besov spaces. *Mathematische Nachrichten*, 251(1), 34-51.

# New Trapdoor Functions for Public Key Cryptohraphy

Author: Moises Ricardo Delgado Olartegui  
Universidad de Puerto Rico en Cayey  
E-mail: [moises.delgado@upr.edu](mailto:moises.delgado@upr.edu)

**Abstract:** Trapdoor functions over finite fields are the security components of multivariate cryptographic systems for public key cryptography (PKC). PKC systems use two keys, a public key and a private key. A public key used for encryption while the private key is used for decryption. It is almost impossible the decryption without knowing the private key. Public key systems are fundamental security ingredients in modern electronic communications and data storage. Current PKC systems, based on number theory principles, could be obsolete provided the emergence of quantum computers and quantum attacks. In this talk we propose new candidates for trapdoor functions of high degree for PKC. This high degree promises high resistance against algebraic attacks because of the difficulty for solving a system of multivariate polynomial equations.

**Keywords:** Trapdoor function, public key cryptography, quantum cryptography, algebraic attacks, Matsumoto-Imai system, Hidden Field Equation system.

## Introduction

Current cryptographic algorithms for information security are becoming unsafe the last years because of the growing computer technology, the increasing number of hackers, and the multiple types of attacks. Trapdoor functions over Finite Fields are functions that are easy to evaluate but very hard to invert, then promises multiple applications digital communications systems, in particular in public key cryptography (PKC). The most principal cryptographic algorithm in PKC is the well-known RSA algorithm. As it is well known, RSA security is based on the difficulty of factoring very large prime numbers and some results of number theory. This algorithm will be probably obsolete with the new coming age of quantum computing as showed by Peter Shor. So, it is extremely important to start testing new designs and new algorithms for safer cryptographic systems. In this talk, by using almost permutations, we will design new high degree trapdoor functions over finite fields of characteristic two with high resistance against algebraic attacks. Current systems are based in classical Matsumoto-Imai and Hidden Field Equation systems which use quadratic degrees trapdoor functions, so they are sensitive to these attacks.

## References

- [1] Ding, J., Gower, J. E., & Schmidt, D. S. (2006). *Multivariate public key cryptosystems* (Vol. 25). Springer Science & Business Media.
- [2] Ding, J., & Yang, B. Y. (2009). Multivariate public key cryptography. In *Post-quantum cryptography* (pp. 193-241). Springer, Berlin, Heidelberg.

## Subálgebras y Variedades de Gelfand-Tsetlin

Autor: Germán Alonso Benitez Monsalve  
Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Instituto de Matemática e Estatística,  
Universidade de São Paulo  
E-mail: [gabm@ufam.edu.br](mailto:gabm@ufam.edu.br)

**Resumen:** Sergei Ovsienko probó en [1] que la variedad asociada a la subálgebra de Gelfand–Tsetlin para  $\mathfrak{gl}_n$  es equidimensional y que todas sus componentes irreducibles tienen dimensión  $n(n-1)/2$ . En esta charla veremos como el concepto de variedad de Gelfand-Tsetlin puede ser extendido a otros tipos de álgebras, como por ejemplo, álgebras current, Yangians restrictas.

**Palabras claves:** Variedades algebraicas, Gelfand-Tsetlin, Equidimensionalidad.

### Referencias

- [1] Ovsienko, S. (2003). Strongly nilpotent matrices and Gelfand–Zetlin modules. *Linear algebra and its applications*, 365, 349-367.

# Nil Álgebras Conmutativas de Potencias Asociativas

Autor: Elkin Oveimar Quintero Vanegas  
Universidade Federal do Amazonas  
E-mail: [eoquinterov@ufam.edu.br](mailto:eoquinterov@ufam.edu.br)

**Resumen:** En esta charla sera presentada la clase de álgebras conmutativas de potencias asociativas. Daremos algunos ejemplos clásicos y las relacionaremos con las álgebras asociativas. Después de esa parte introductoria, veremos cuando una álgebra es llamada nil y presentaremos un grande problema de clasificación, conocido como el Problema de Albert.

**Palabras claves:** álgebras conmutativas de potencias asociativas, nil álgebras, Problema de Albert.

## Introducción

En 1948, Adrian Albert [1] estudió la clase de álgebras que satisface la siguiente condición: Sea  $A$  una álgebra tal que para cada elemento  $x \in A$ , la subálgebra generada por  $x$  es asociativa. Esta condición debilitada de asociatividad, es conocida como asociatividad en las potencias. Álgebras de potencias asociativas son una generalización de las álgebras asociativas. Si es adicionado el axioma de conmutatividad, entonces el álgebra es llamada conmutativa de potencias asociativas. Ejemplos de esta clase de álgebras son: las álgebras asociativas, las álgebras alternativas, las álgebras de Lie, las álgebras de Jordan, entre otras clases de álgebras. La clasificación de las álgebras simples en cada clase es muy importante. Sin embargo, esta clasificación en las álgebras conmutativas de potencias asociativas aún está incompleta. El principal desafío es describir las nil álgebras en esta clase. Existen nil álgebras conmutativas de potencias asociativas que no son nilpotentes. El problema de Albert, pregunta si cada nil álgebra conmutativa de potencias asociativas de dimensión finita es soluble. De esta forma, la ponencia pretende introducir todas las herramientas necesarias para entender el problema de Albert y ver hasta donde este estudio se ha desarrollado [2].

## Referencias

- [1] Albert, A. A. (1948). Power-associative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 64(3), 552-593.
- [2] Vanegas, E. Q., & Fernandez, J. C. G. (2017). Nilpotent linear spaces and Albert's Problem. *Linear Algebra and its Applications*, 518, 57-78.

## Computando Campos Lineales en Grupos de Lie

Autor: Max Ferreira  
Universidade Federal de Roraima, Brasil  
E-mail: [max.ferreiram@ufr.br](mailto:max.ferreiram@ufr.br)

**Resumen:** Campos lineales, en el contexto de la teoría del control en grupos de Lie, fueron considerados por primera vez, en el [2], por Markus en grupos de Lie de matrices. Posteriormente en un contexto más general por Ayala, en [1]. A los campos lineales están asociados los sistemas lineales y afines. Su importancia se debe al hecho que sistemas lineales en grupos de Lie son una generalización tanto de sistemas lineales en  $\mathbb{R}^n$  como de sistemas invariantes en grupos de Lie. Debido al Teorema de Equivalencia obtenido por P. Jouan en [3], sistemas lineales en grupos de Lie pueden ser generalizados a espacios homogéneos y son equivalentes a determinadas clases de sistemas de control en una variedad diferenciable  $M$ . En esta ponencia vamos a mostrar como computar campos lineales en grupos de Lie. Esto es muy importante para generar ejemplos y entender la teoría. Además, daremos un ejemplo del único campo lineal no polinomial conocido.

**Palabras claves:** Campo Afin, Campo invariante, Campo lineal, Derivación, Grupo de Lie.

### Referencias

- [1] Ayala, V., & Tirao, J. (1999). Linear control systems on Lie groups and controllability. In *Proceedings of symposia in pure mathematics* (Vol. 64, pp. 47-64). American Mathematical Society.
- [2] Jouan, P. (2011). Controllability of linear systems on Lie groups. *Journal of Dynamical and control systems*, 17(4), 591-616.
- [3] Jouan, P. (2010). Equivalence of control systems with linear systems on Lie groups and homogeneous spaces. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 16(4), 956-973.

# Triángulos Pitagóricos y dos Ecuaciones Diofantinas

Autor: Raibel de Jesus Arias Cantillo  
Universidad Federal de Maranhão  
E-mail: [raibel.jac@ufma.br](mailto:raibel.jac@ufma.br)

**Resumen:** En este webinar daremos una *receta* para construir triángulos rectángulos con medidas en  $\mathbb{Z}$  y estudiamos cómo estas construcciones tienen relación con dos ecuaciones diofantinas, a saber: la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$  y la **ecuación de Pell**  $x^2 - 2y^2 = 1$ .

**Palabras claves:** triángulos pitagóricos, ecuaciones diofantinas.



## Resolución de Problema: Calcular Algunos Puntos de la Función de Cantor

Autor: Luis Andrés Rosso Cerón  
 Universidade Federal do Maranhão  
 E-mail: [luis.rosso@ufma.br](mailto:luis.rosso@ufma.br)

**Resumen:** Se resuelve el siguiente problema propuesto en la *Revista do Professor de Matemática, RPM-SBM No. 97, quadrimestre setembro-dezembro de 2018* (<http://www.rpm.org.br/>).

Sea  $f$  una función definida en el intervalo  $[0, 1]$ , no decreciente en ese intervalo y tal que, para todo  $x$  en  $[0, 1]$ , se tiene:

1.  $f(0) = 0$ ;
2.  $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{2}$ ;
3.  $f(x) + f(1-x) = 1$ .

Calcule:  $f\left(\frac{18}{2018}\right)$ ,  $f\left(\frac{4}{9828}\right)$ ,  $f\left(\frac{1}{7381}\right)$  y  $f\left(\frac{e}{\pi}\right)$ .

**Palabras claves:** Función de Cantor, Resolución de Problemas.

### Introducción

El propósito inicial fue intentar calcular  $f\left(\frac{18}{2018}\right)$ . Esto condujo a encontrar algunas sucesiones de números en el intervalo  $[0, 1]$  que permitieron determinar, curiosamente, los valores de  $f\left(\frac{4}{9828}\right)$  y  $f\left(\frac{1}{7381}\right)$ . Estos dos últimos números se *calcularon*<sup>1</sup> a partir de la *estructura* de  $\frac{4}{9828}$  y  $\frac{1}{7381}$ , i.e., de una manera conveniente de escribirlos.

Infelizmente el propósito inicial no fue alcanzado a través de las sucesiones que él mismo suscitó. Por tanto, a la pregunta de que si ¿el número  $\frac{18}{2018}$ , o como veremos de forma equivalente  $\frac{1}{1009}$ , tiene alguna peculiaridad que lo haga “distinto”, en el sentido del cálculo de  $f\left(\frac{18}{2018}\right)$ , comparado con los números  $\frac{4}{9828}$ , y  $\frac{1}{7381}$ ?, no cabe otra respuesta: sí.

Resaltar dicha peculiaridad, mostrar cómo surgen tales sucesiones y entonces *deducir*<sup>2</sup> cuánto vale  $f\left(\frac{18}{2018}\right)$ , así como proporcionar otros valores de  $f$  en  $[0, 1]$ , serán los objetivos de esta ponencia.

<sup>1</sup>Se entenderá por *calcular* el valor de  $f(x)$  cuando exista una fórmula explícita, *dependiendo exclusivamente* de  $x$ , que permita conocer su valor. Tal como sucede, por ejemplo, con la función  $f(x) = x - 1$ .

<sup>2</sup>*Deducir*  $f(x)$  significa la imposibilidad de *calcularlo directamente*, pero la posibilidad de conocer su valor a través de otros. Concretamente, cuando existan  $a, b \in [0, 1]$ , con  $a < b$ ,  $x \in [a, b]$  y  $f(a) = f(b)$ , tales que  $f(a)$  y  $f(b)$  o son calculados directamente o se conocen a partir de alguna propiedad de  $f$ .

## Referencias

- [1] Chalice, D. R. (1991). A characterization of the Cantor function. *The American Mathematical Monthly*, 98(3), 255-258.

# Numerical Study of Post-Blowup Dynamics in the Nonlinear Schrödinger Equation

Author: José Manuel Escorcia Tafur  
Institute for Pure and Applied Mathematics (IMPA)  
E-mail: [jmanuel9@impa.br](mailto:jmanuel9@impa.br)

**Abstract:** The Nonlinear Schrödinger equation (NLS) arises in different physical models as Bose-Einstein condensation, fluid dynamics and nonlinear optics. In the critical case, some NLS solutions undergoes a singularity in finite time indicating that some of the small terms neglected in the derivation of the NLS become important near the singularity.

In the literature, there are several possible ways to continue the singular solutions after the critical time: Nonlinear damping, nonlinear saturation, nonparaxiality and normal dispersion. In this talk, we are interested in introduce and study the non-conservative perturbation with nonlinear damping.

Since small damping will cause a slow change of the solution, the quantum adiabatic theorem is considered in the literature. However, applying this adiabatic approximation is not straightforward due to the nonlinearity of the equation.

In this study, we use numerical simulations in order to observe details of the post-blowup dynamics, including the detailed study of adiabatic term and non-adiabatic transitions.

*This is a joint work with Alexei A. Mailybaev.*

**Keywords:** Nonlinear Schrödinger equation, singular solutions, non-linear damping, adiabatic theorem.

## References

- [1] Fibich, G. (2015). *The nonlinear Schrödinger equation*. Berlin: Springer.

# Estimativas de Error para Discretizaciones del Laplaciano por Métodos de Volúmenes Finitos en Mallas Esféricas Geodésicas Icosaédricas

Autores: Leonardo Andrés Poveda Cuevas, Pedro Peixoto, Saulo R. M. de Barros  
 Universidade de São Paulo  
 E-mail: [lpovedac@ime.usp.br](mailto:lpovedac@ime.usp.br)

**Resumen:** En este trabajo estudiamos estimativas *a priori* de las soluciones numéricas de una discretización del Laplaciano por métodos de volúmenes finitos en la esfera unitaria. Inicialmente y conforme a la literatura, consideramos las mallas esféricas icosaédricas y sus propiedades geométricas. Por otro lado, definimos un esquema de Volúmenes Finitos usuales para el Laplaciano en la esfera unitaria. Analizamos el comportamiento de inconsistencia del operador discreto, relacionado con ciertas características geométricas de la malla. Mostramos que el esquema de Volúmenes Finitos conservativo satisface una condición de consistencia débil y obtenemos estimativas de orden lineal en las normas discretas usuales. Por último, nos enfocamos en las estimativas de convergencia de las soluciones de Volúmenes Finitos usando el análisis de convergencia de los Elementos Finitos Lineales. En particular, mostramos estimativas clásicas *a priori* de orden lineal en las normas  $H^1$  y  $L^2$ . Además, establecemos estimativas casi-óptimas para las normas  $W^{1,\infty}$  y  $L^\infty$  de orden sublineal en relación al tamaño de malla. Por último, algunos experimentos numéricos validan adecuadamente las estimativas.

**Palabras claves:** Laplaciano, malla esférica icosaédrica, volúmenes finitos, consistencia débil, estimativas de error *a priori*, estimativas puntuales.

## Introducción

En los últimos años el análisis de convergencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales en la esfera ha sido de gran interés en la comunidad científica [2, 3, 1]. En particular, la relevancia se concentra en un amplio número de aplicaciones como: la dinámica de fluidos geofísicos y la previsión numérica del tiempo. Usualmente, una forma de entender estos fenómenos es a través de modelos matemáticos que caracterizan sus propiedades fundamentales. En este trabajo consideramos la ecuación de Laplace

$$\Delta_s u(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{S}^2.$$

Para un mejor entendimiento de dichas propiedades es necesario utilizar la información cualitativa de las soluciones, lo cual es posible a través de aproximaciones o discretizaciones del modelo continuo, es decir, un modelo numérico. Dada la naturaleza del problema, es necesario establecer una arquitectura en la geometría esférica. Así, existen varias maneras de discretizar la esfera, en particular, nos enfocamos en las mallas geodésicas esféricas icosaédricas y sus propiedades en la discretización del Laplaciano [6, 7]. Un primer objetivo es estudiar características del problema discreto definido en dicha malla. Estudiamos la inconsistencia del esquema de Volúmenes Finitos usual [4, 5] en el contexto de la geometría esférica y determinamos estimativas débiles en las normas naturales.

Posteriormente, consideramos una modificación adecuada del esquema discreto en términos de una forma variacional e incorporamos una relación con los Métodos de Elementos Finitos, asumiendo que la solución de Volúmenes Finitos como una perturbación de la solución de Elementos Finitos [8]. Como consecuencia, establecemos estimativas de estabilidad en las soluciones discretas y enseguida determinamos

estimativas de error *a priori* en las normas  $H^1$ ,  $L^2$  y del max. Los ordenes de convergencia son encaminados de forma tradicional, definidos principalmente por la diferencia entre las formas variacionales de los MVF y los MEFL y usando las propiedades geométricas de las mallas geodésicas icosaédricas junto con algunas optimizaciones usuales de la literatura.

## Referencias

- [1] Demlow, A. (2009). Higher-order finite element methods and pointwise error estimates for elliptic problems on surfaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2), 805-827.
- [2] Du, Q., Gunzburger, M. D., & Ju, L. (2003). Voronoi-based finite volume methods, optimal Voronoi meshes, and PDEs on the sphere. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(35-36), 3933-3957.
- [3] Du, Q., & Ju, L. (2005). Finite volume methods on spheres and spherical centroidal Voronoi meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(4), 1673-1692.
- [4] Faille, I. (1992). A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 100(2), 275-290.
- [5] Herbin, R. (1995). An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion-convection problem on a triangular mesh. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 11(2), 165-173.
- [6] Miura, H., & Kimoto, M. (2005). A comparison of grid quality of optimized spherical hexagonal-pentagonal geodesic grids. *Monthly weather review*, 133(10), 2817-2833.
- [7] Ringler, T. D. (2003). *Comparing Truncation Error to Partial Differential Equation Solution Error on Spherical Voronoi Tessellations*. Tech report, Department of Atmospheric Science, Colorado State University.
- [8] Zhang, T. (2014). Superconvergence of finite volume element method for elliptic problems. *Advances in Computational Mathematics*, 40(2), 399-413.

# Circuitos de Aprendizaje Para la Articulación entre la Educación Matemática y Ciudadanía en el Aula Hospitalaria

Autores: Guillermo Andrés Guevara Bermúdez, Paula Otaiza Rivera  
Universidad Católica del Norte, Aula Hospitalaria San Antonio  
E-mail: [gguevara@ucn.cl](mailto:gguevara@ucn.cl), [p.otaizarivera@gmail.com](mailto:p.otaizarivera@gmail.com)

**Resumen:** Los Circuitos de Aprendizaje Para la Articulación entre la Matemática y Ciudadanía se presentan como una oportunidad para establecer espacios de investigación y vinculación bidireccionales entre la Universidad Católica del Norte y el Sistema Escolar, a través del trabajo conjunto entre académicos, estudiantes, profesores y equipos técnicos, en torno al desarrollo e implementación de propuestas académicas que articulan la educación matemática y la educación ciudadana por medio de estaciones de aprendizaje. El proyecto a presentar en esta ponencia se desarrolló en el contexto de pedagogía hospitalaria, concretamente en el Aula Hospitalaria San Antonio en la ciudad de Antofagasta (Chile).

**Palabras claves:** Educación Matemática y Ciudadanía, Pedagogía Hospitalaria, Circuitos de Aprendizaje.

## Introducción

En Chile, gracias a la promulgación de la ley 20.911 de 2016 en donde se establece incluir en todas las instituciones educativas un plan de Formación Ciudadana que integre y complemente las definiciones curriculares nacionales en esta materia, se da un paso importante hacia entender el proceso formativo, primario y secundario, como una respuesta a los cambios sociales, culturales, políticos y económicos que el actual mundo globalizado requiere y exige. Así mismo, establece un gran compromiso al profesorado por desarrollar adaptaciones curriculares que aborden estos temas de manera transversal en cada una de las disciplinas vinculadas con la formación escolar. En este sentido, la matemática aporta a la formación ciudadana con habilidades fundamentales las cuales son: aclarar conceptos, tomar decisiones, comparar modelos, planificar a largo plazo, interpretar información, dialogar inteligentemente, resolver problemas, defender principios, desarrollar la creatividad, razonar, argumentar, entender alternativas (Alsina, 2010). El proyecto “Circuitos de Aprendizaje Para la Articulación entre la Matemática y Ciudadanía” tiene como principal objetivo fomentar los procesos de formación ciudadana en instituciones educativas de la región de Antofagasta a través de la implementación de circuitos de aprendizaje focalizados en ejes temáticos de la educación matemática escolar en los niveles de educación básica y media. Para ello se desarrollaron actividades formativas para articular la educación matemática y la ciudadanía en tres instituciones educativas diferentes desde su dependencia y contexto, vinculando a estudiantes, egresados, académicos de la Universidad Católica del Norte y profesores y equipos técnicos de dichas instituciones educativas en escenarios de reflexión formativa sobre elementos y competencias ciudadanas y su relación con la educación matemática. En esta conferencia se describirá el desarrollo del proyecto en el Aula Hospitalaria San Antonio, ubicada en el Hospital Regional de la ciudad de Antofagasta (Chile). La Pedagogía hospitalaria cobra un papel muy importante en el desarrollo formativo de niños y niñas que conviven en ambientes clínicos complejos. Los niños y niñas enfermos no solo requieren un apoyo en su salud, paralelamente deben contar con un apoyo educativo y psicológico que les permitan evitar la discontinuidad en la vida para lograr un desarrollo íntegro y mantener al estudiante conectado en diversos ámbitos sociales. Esta innovación educativa está configurada desde una visión crítica y sociopolítica de la educación matemática, donde se entiende que todo individuo es un ser social y que el aula de clase es un micro contexto social donde interactúan alumnos y profesores (Abreu, 2000), aporta a las necesidades que actualmente existen en vincular la educación ciudadana y la educación matemática para la formación de ciudadanos reflexivos, críticos, creativos y con

## II Encuentro Matemático del Caribe

herramientas para la correcta toma de decisiones, así mismo, busca avanzar en la generación de recursos para la implementación curricular de los planes de formación ciudadana de cada una de las instituciones participantes. La metodología utilizada para el diseño de las actividades fue el Aprendizaje Por Estaciones. Esta metodología es una propuesta activa que fomenta la atención personalizada, pues los espacios formativos que se establecen permiten adaptarse a los niveles, estilos y ritmos de aprendizaje de los y las participantes. Relacionar educación ciudadana y educación matemática para muchos investigadores está asociado al uso de tareas como elemento fuerte donde se puede desarrollar un entorno que promueva las competencias ciudadanas. Y, en ese sentido, establecer tareas que promuevan la contextualización y que supere el paradigma metafísico del ejercicio (Valero 2012). Bajo la metodología de las estaciones de aprendizaje (que en conjunto se denominan Circuito de Aprendizaje) el profesor se convierte en un guía que establece objetivos, también puede ser un observador dispuesto a ayudar, estimula a los estudiantes, favorece el ambiente para el autoaprendizaje y evalúa y redirige el proceso constantemente. A su vez, el estudiante participante de cada estación se hace responsable de su aprendizaje, desarrollando autonomía y confianza para romper la rigidez del espacio de trabajo; cada uno trabaja a su propio ritmo y se expresa de la forma que mejor decida hacerlo; pueden trabajar de manera individual, en parejas o grupal, con el fin de alcanzar un objetivo de aprendizaje.

## Algunas Conclusiones

En términos generales el proyecto permitió enriquecer y fortalecer la labor formativa y profesional de cada uno de los actores participantes. Institucionalmente permitió abrir las puertas de un contexto poco abordado como el del Aula Hospitalaria, además permitió articular el proceso formativo de pregrado con instancias de vinculación con el medio, integrando la Universidad, Instituciones Educativas, Profesionales, Académicos, Estudiantes y Egresados. Las instituciones educativas donde se desarrolló tuvieron un crecimiento en cuanto al abordaje de escenarios multidisciplinares que integraran la matemática y la educación ciudadana, importante no solo para el cumplimiento de la ley 20.911 sino para la formación integral de sus estudiantes. En este sentido la Universidad Católica del Norte sigue posicionándose como el referente regional en cuanto a temas de educación ciudadana se refiere. El proyecto permitió reflexionar, diseñar, implementar y evaluar implementaciones curriculares que favorecen la formación ciudadana, generando insumos para avanzar en ámbitos de investigación involucrando estudiantes de pregrado, egresados y profesionales de las instituciones vinculadas. A través de estas relaciones se logró enviar una ponencia a un congreso internacional. Los desafíos a corto plazo respecto de los elementos principales del proyecto recaen en implementar las actividades en las instituciones que por problemas de orden público no se pudieron desarrollar. A largo plazo sería importante integrar otras áreas formativas a la articulación con ciudadanía y todas las dimensiones que este concepto involucra. Durante el desarrollo del proyecto hubo un directo interés por parte de otras instituciones educativas por participar en este tipo de iniciativas, en este sentido sería importante fomentar futuras instancias similares con los recursos adecuados que permitan integrar más agentes a los objetivos planteados.

## Referencias

- [1] De Abreu, G. (2000). Relationships between macro and micro socio-cultural contexts: Implications for the study of interactions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 1-29.
- [2] Català, C. A. (2010). Matemáticas para la ciudadanía. *Educ. matemática y Ciudad*. Barcelona GRAÓ, 89-101.
- [3] Vázquez, P. G. (2009). Educación ciudadana y convivencia democrática. *Pedagogía Social. Revista Interuniversitaria*, (16), 119-133.
- [4] Denzin, N. K. (2005). The discipline and practice of qualitative research. In. NK Denzin & YS Lincoln. *Handbook of qualitative research*, 1-42.

- [5] Inés, M. (2010). Matemáticas: mente disciplinar, mente creativa, mente ética. Una propuesta de educación ciudadana. *Educación matemática y ciudadanía*, 282, 59.
- [6] Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC). Unidad de Currículum y Evaluación. (2016). Orientaciones Curriculares para el desarrollo del Plan de Formación Ciudadana. Recuperado de <https://www.mineduc.cl/2016/11/25/orientaciones-curriculares-desarrollo-del-plan-formacion-ciudadana/>
- [7] Garuz, M. C. M., Vallejos, T. M. A., & Blanco, J. D. P. G. (2020). *Buenas prácticas e innovación en pedagogía hospitalaria: La atención educativa hospitalaria y domiciliaria*. Ediciones Octaedro.
- [8] Muñoz Labraña, C., & Torres Durán, B. (2014). La formación ciudadana en la escuela: Problemas y desafíos. *Revista Electrónica Educare*, 18(2), 233-245.
- [9] Pagès, J., & Santisteban, A. (2008). La educación para la ciudadanía hoy. Pagès, J., & Santisteban, A (Coords.). *Educación para la ciudadanía. Guías para Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Wolters Kluwer. Recuperado de <http://www.guiasenseñanzasmedias.es/temaESO.asp>.
- [10] Valero, P. (2012). La educación matemática como una red de prácticas sociales. <http://funes.uniandes.edu.co/2011/>



# A Lower Bound for the Energy of Hypoenergetic and Non Hypoenergetic Graphs

Author: María Rosario Robbiano Bustamante  
Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile  
E-mail: [mrobbiano@ucn.cl](mailto:mrobbiano@ucn.cl)

**Abstract:** Let  $G$  be a simple undirected graph with  $n$  vertices and  $m$  edges. The energy of  $G$ ,  $\mathcal{E}(G)$  corresponds to the sum of its singular values. This work obtains lower bounds for  $\mathcal{E}(G)$  where one of them generalizes a lower bound obtained by Mc Clelland in 1971 to the case of graphs with given nullity. An extension to the bipartite case is given and, in this case, it is shown that the lower bound  $2\sqrt{m}$  is improved. The equality cases are characterized. Moreover, a simple lower bound that considers the number of edges and the diameter of  $G$  is derived. A simple lower bound, which improves the lower bound  $2\sqrt{n-1}$ , for the energy of trees with  $n$  vertices and diameter  $d$  is also obtained.

*Trabajo en conjunto con Enide Andrade, Juan R. Carmona, Geraldine Infante.*

**Keywords:** Energy, diameter.

## References

- [1] Andrade, E., Carmona, J. R., Infante, G., & Robbiano, M. (2020). A lower bound for the energy of hypoenergetic and non hypoenergetic graphs. *MATCH-COMMUNICATIONS IN MATHEMATICAL AND IN COMPUTER CHEMISTRY*, 83(3), 579-592.

# A Bilinear Optimal Control Problem Related to a 3D Chemo-Repulsion System

Author: Exequiel Enrique Mallea Zepeda  
 Universidad de Tarapacá, Arica, Chile  
 E-mail: [emallea@uta.cl](mailto:emallea@uta.cl)

**Abstract:** We will study a bilinear optimal control problem associated to a 3D chemo-repulsion model with linear production. We prove the existence of weak solutions, and establish a regularity criterion to get global-in-time strong solutions. As a consequence, we deduce the existence of a global optimal solution with bilinear control, and using a Lagrange multiplier theorem in Banach spaces, we derive first-order necessary optimality conditions.

**Keywords:** chemo-repulsion model, strong solutions, bilinear optimal control

## Introduction

The chemotaxis phenomenon is understood as the directed movement of living organisms in response to chemical gradients. Keller and Segel [1] proposed a mathematical model that describes the chemotactic aggregation of cellular slime molds. These molds move preferentially towards relatively high concentrations of a chemical substance secreted by the amoebae themselves. Such mechanism is called *chemo-attraction* with production. Conversely, when the regions of high chemical concentration generate a repulsive effect on the organisms, the phenomenon is called *chemo-repulsion*.

Bilinear control problems are a special class of nonlinear control problems, in which a nonlinear term is constructed by multiplication of the control and state variables. In fact, the control acts as the coefficient of a reaction term depending linearly on the state. In this work we study an optimal control problem subject to a chemo-repulsion system with linear production term, and in which a bilinear control acts injecting or extracting chemical substance on a subdomain of control  $\Omega_c \subset \Omega$ . Specifically, let  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  be a bounded domain with boundary  $\partial\Omega$  of class  $C^{2,1}$  and  $(0, T)$  a time interval, with  $0 < T < +\infty$ . Then, a control problem is studied, which is related to the following system in the time-space domain  $Q := (0, T) \times \Omega$ :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= \nabla \cdot (u \nabla v), \\ \partial_t v - \Delta v + v &= u + f v 1_{\Omega_c}, \end{cases} \quad (2)$$

with initial conditions

$$u(0, \cdot) = u_0 \geq 0, \quad v(0, \cdot) = v_0 \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3)$$

and non-flux boundary conditions

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4)$$

where  $\mathbf{n}$  denotes the outward unit normal vector to  $\partial\Omega$ . In (2), the unknowns are the cell density  $u(t, x) \geq 0$  and chemical concentration  $v(t, x) \geq 0$ . The function  $f = f(t, x)$  denotes a bilinear control acting in the chemical equation. It is observed that, in the subdomains of  $\Omega_c$  where  $f \geq 0$ , such a control acts as a proliferation coefficient of the chemical substance, and conversely where  $f \leq 0$ , the control acts as a degradation coefficient of the chemical substance. In particular, with this choice of the bilinear control, the solution  $(u, v)$  of system (2)-(4) always remains nonnegative. By considering a distributed control with a negative sign, the positivity of  $v$  could not be guaranteed.

## References

- [1] Keller, E. F., & Segel, L. A. (1970). Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *Journal of theoretical biology*, 26(3), 399-415.
- [2] Guillén-González, F., Mallea-Zepeda, E., & Rodríguez-Bellido, M. Á. (2020). Optimal bilinear control problem related to a chemo-repulsion system in 2D domains. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 26, 29.
- [3] Guillen-Gonzalez, F., Mallea-Zepeda, E., & Rodriguez-Bellido, M. A. (2020). A regularity criterion for a 3D chemo-repulsion system and its application to a bilinear optimal control problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 58(3), 1457-1490.

## Regiones Realizables

Autor: Elvis Ronald Valero Kari  
Universidad de Tarapacá, Chile  
E-mail: [evalero@academicos.uta.cl](mailto:evalero@academicos.uta.cl)

**Resumen:** En este trabajo estudiaremos el problema inverso de autovalores para matrices simétricas desde un punto de vista geométrico. Identificaremos regiones donde listas  $\Lambda$  son simétricamente realizables. Estableceremos nuevas condiciones suficientes para el SNIEP. Estableceremos avances respecto a la pregunta de Guo.

**Palabras claves:** Matrices simétricas, Problemas inversos, Autovalores.

## Referencias

- [1] Fiedler, M. (1974). Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 9, 119-142.
- [2] Wuwen, G. (1997). Eigenvalues of nonnegative matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 266, 261-270.
- [3] Wuwen, G. (1996). An inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 249, 67-78.
- [4] Johnson, C. R., & Paparella, P. (2017). Row cones, Perron similarities, and nonnegative spectra. *Linear and Multilinear Algebra*, 65(10), 2124-2130.
- [5] Soto, R. L. (2003). Existence and construction of nonnegative matrices with prescribed spectrum. *Linear algebra and its applications*, 369, 169-184.

# Propuesta Metodológica para Estudiante Ciego en Matemática Superior

Autor: Fabian Patricio Santiago Muñoz  
Universidad de Tarapacá  
E-mail: [fsantiago@academicos.uta.cl](mailto:fsantiago@academicos.uta.cl)

**Resumen:** Este artículo muestra la experiencia pedagógica aplicada a un estudiante con ceguera severa, en la asignatura de Cálculo en Varias variables, en el contenido de derivadas Parciales, en el cual se utilizan conceptos espaciales como gráficas e interpretación de vectores, funciones y límites. El estudiante aprobó las asignaturas de cálculo diferencial, integral y algebra lineal en una primera oportunidad, ahora se busca que tenga éxito en esta asignatura que exige reconociendo de elementos en una gráfica en el espacio tridimensional, desafío importante considerando los pocos recursos metodológicos del profesor para enfrentar a un estudiante con estas características. La importancia de las experiencias vividas por el estudiante, con respecto a las características de su aprendizaje, dan un punto de inicio para generar una metodología que le permita enfrentar con éxito la asignatura. Los resultados más relevantes de este estudio de caso son las características de la metodología, sus procesos y los conocimientos adquiridos por el docente para enfrentar situaciones similares en el futuro en relación con la educación inclusiva universitaria.

**Palabras claves:** Ciego, Matemática, Universidad.

## Introducción

Uno de los objetivos de aprender matemáticas significa obtener herramientas que permiten la comunicación en el lenguaje científico. Las matemáticas avanzadas, como es el caso de la asignatura de Cálculo, requieren del uso de este lenguaje científico, puesto que exige conductas propias de las matemáticas basadas en conceptos, procesos y aplicación de por ejemplo - derivadas e integrales, siempre en un contexto geométrico.

Ahora bien, las herramientas tecnológicas son un elemento importante en el desarrollo de este aprendizaje, pues es un facilitador visual para cualquier persona que se sumerge en estos contenidos. Sin embargo, este tipo de aprendizaje no se ajusta a todos los contextos y grupos de estudiantes, ya que no se ajusta a un método de aprendizaje para personas con ceguera severa, por lo que, en esta investigación nos preguntamos ¿es posible adaptar las metodologías existentes para la enseñanza de la matemática avanzada a una persona con discapacidad visual o diseñar una metodología específica para la enseñanza de las matemáticas en grupos diversos? ¿Será posible que la metodología que se diseñe permita al estudiante ciego asimilar los contenidos matemáticos utilizando diversas herramientas de aprendizaje?

Este trabajo se concentrará, en hacer el relato de una experiencia metodológica para un alumno ciego, y pueda ser utilizada por él, en sus futuras asignaturas, o para tener las consideraciones necesarias para un estudiante con características similares ingrese a la carrera de Ingeniería Civil Informática. No es objetivo analizar la influencia del contenido en la especialidad que estudia, pero si dejar la inquietud, para un futuro trabajo en el cual se puedan hacer adaptaciones al plan de estudio de carreras para estudiantes ciegos [1].

Para responder a las preguntas, se presenta el desarrollo de un proceso experiencial que busca diseñar una metodología de enseñanza de matemática avanzada para Danny, alumno de 20 años, que estudia Ingeniería Civil Informática y Computación, en la Universidad de Tarapacá, Sede Esmeralda en la ciudad de Iquique, que padece de ceguera severa.

Tanto para los profesores y Universidad, no tiene precedentes con estudiantes ciegos en asignaturas de matemáticas, los primeros cursos de matemática el alumno los enfrento en base a voluntad del profesor encargado de la asignatura, adaptando situaciones que no fueron documentadas, como por ejemplo uso de Microsoft Excel y softwares que solo el alumno conocía ( $\lambda$ ). En base a la entrevista con el alumno se ideó una metodología participativa, la cual se fue adaptando a medida que transcurría el curso.

El objetivo de esta metodología es que el estudiante logre visualizar e imaginar los conceptos claves que le permitirá cursar la asignatura de Cálculo en Varias Variables, con total normalidad y en absoluta igualdad, permitiendo la inclusión en el espacio educativo, esto implica la incorporación en equipos de trabajo, aplicación de evaluaciones en simetría con sus compañeros, así también se espera que adquiera herramientas de trabajo necesarias que le permitirán enfrentar la cátedra actual y futura, a fin de que pueda desenvolverse de manera autónoma en la vida estudiantil y, en el corto plazo, con autonomía laboral.

La experiencia parte desde la realización de un diagnóstico que le permita al profesor de matemática comprender el nivel de conocimiento previo, la comprensión y las habilidades en la materia, a su vez, se realiza un diagnóstico sobre el grado de conocimiento y manejo de las herramientas tecnológicas que existen en el mercado (software especializados), como también evaluar las conductas de entrada en tecnología y contenidos matemáticos. Para luego avanzar hacia la evaluación individual y la incorporación al grupo de estudiantes que cursan la asignatura, asegurando una adecuada inclusión y manejo de elementos claves para enfrentar los desafíos académicos del curso.

El diseño de la metodología, como se presenta anteriormente requiere de un trabajo previo que sea personalizado, ya que la enseñanza de las matemáticas avanzadas en un estudiante que nace con ceguera severa y que nunca ha estudiado conceptos que exijan elementos de interpretación gráfica, como vectores, funciones y límites en dos variables, entre otros, significa un gran desafío para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sobre todo, cuando, por un lado, se encuentra el estudiante tomando el desafío académico de estudiar una carrera ingenieril y, por otro, a profesores sin preparación, sin hábitos técnicos y metodológicos para enfrentar a grupos con discapacidad. De aquí la necesidad de desarrollar una metodología de enseñanza y aprendizaje que servirá de apoyo a nuevos casos, así también para la docencia universitaria, en cuando a la enseñanza dinámica, didáctica y creativa de la matemática y el aprendizaje basado en el uso de todas las herramientas disponibles, incluyendo otros sentidos del estudiante.

## Referencias

- [1] Minkara, M. S., Weaver, M. N., Gorske, J., Bowers, C. R., & Merz Jr, K. M. (2015). Implementation of protocols to enable doctoral training in physical and computational chemistry of a blind graduate student. *Journal of chemical education*, 92(8), 1280-1283.

## Bounds for Different Spreads of Line and Total Graphs

Authors: Jonnathan Alexander Rodríguez Zambrano, Enide Andrade, Eber Lenes, Exequiel Mallea-Zepeda, Maria Robbiano  
Universidad de Antofagasta - Chile, Universidad de Aveiro - Portugal, Universidad del Sinú - Colombia, Universidad de Tarapacá - Chile, Universidad Católica del Norte - Chile.  
E-mail: [jonnathan.rodriguez@uantof.cl](mailto:jonnathan.rodriguez@uantof.cl), [enide@ua.pt](mailto:enide@ua.pt), [elenes@unisinucartagena.edu.co](mailto:elenes@unisinucartagena.edu.co), [emallea@uta.cl](mailto:emallea@uta.cl), [mrobbiano@ucn.cl](mailto:mrobbiano@ucn.cl)

**Abstract:** In this paper we explore some results concerning the spread of the line and the total graph of a given graph. A sufficient condition for the spread of a unicyclic graph with an odd girth to be at most the spread of its line graph is presented. Additionally, we derive an upper bound for the spread of the line graph of graphs on  $n$  vertices having a vertex (edge) connectivity at most a positive integer  $k$ . Combining techniques of interlacing of eigenvalues, we derive lower bounds for the Laplacian and signless Laplacian spread of the total graph of a connected graph. Moreover, for a regular graph, an upper and lower bound for the spread of its total graph is given.

**Keywords:** Matrix spread, Graph spread, Q-spread, Total graph, Line graph, Connectivity.

## References

- [1] Andrade, E., Lenes, E., Mallea-Zepeda, E., Robbiano, M., & Rodríguez, J. (2019). Bounds for different spreads of line and total graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 579, 365-381.

# Teoremas de Factorización de Kronecker para la Álgebra de Malcev no de Lie de Dimensión Siete

Autor: Victor Hugo López Solís  
 Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo  
 E-mail: [vlopezs@unasam.edu.pe](mailto:vlopezs@unasam.edu.pe)

**Resumen:** Probamos algunos análogos del teorema de factorización de Kronecker para la álgebra de Malcev no de Lie de dimensión 7.

**Palabras claves:** (Super)álgebras de Malcev, álgebra de Malcev no de Lie, teorema de factorización de Kronecker.

## Introducción

En las teorías de las álgebras asociativas, alternativas y de Jordan, los llamados *teoremas de coordinatización* desempeñan un papel importante. Un teorema clásico de este tipo es el Teorema de Coordinatización de Wedderburn para las álgebras asociativas, el cual afirma que si una álgebra asociativa  $\mathcal{A}$  contiene  $M_n(F)$  (álgebra de matrices de orden  $n \times n$ ) con el mismo elemento identidad, entonces  $\mathcal{A}$  es isomorfa como álgebra a  $M_n(\mathcal{B})$  para alguna explícita subálgebra  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ . Kaplansky extendió los resultados de Wedderburn para las álgebras alternativas. Él mostró que si  $\mathcal{A}$  es una álgebra alternativa con elemento identidad 1 que contiene una subálgebra  $\mathcal{B}$  isomorfa a una álgebra de Cayley y si 1 está contenido en  $\mathcal{B}$ , entonces  $\mathcal{A}$  es isomorfa a un producto de Kronecker  $\mathcal{B} \otimes Z$ , donde  $Z$  es el centro de  $\mathcal{A}$ . En [1], Nathan Jacobson dio una nueva demostración del resultado de Kaplansky, además, usando su clasificación sobre la reducibilidad completa de los bimódulos alternativos, probó un análogo del resultado de Kaplansky para las álgebras de Jordan, donde la álgebra de Cayley es substituida por la álgebra de Jordan simple excepcional de dimensión 27 de Albert. Estos resultados tienen aplicaciones importantes en la teoría de representaciones de las álgebras alternativas y de Jordan.

El resultado de Wedderburn en el caso  $n \geq 3$  admite una generalización para las álgebras alternativas, pues cada álgebra alternativa  $\mathcal{A}$  que contiene una subálgebra isomorfa a  $M_n(F)$  ( $n \geq 3$ ) con el mismo elemento identidad es asociativa y, por lo tanto, podemos usar el resultado de Wedderburn. El problema de la descripción de las álgebras alternativas que contienen la generalizada álgebra de los cuaterniones  $\mathbb{H}$  con el mismo elemento identidad fue anunciado por Jacobson en [1]. En [4], Victor López-Solís y I. Shestakov resolvieron este problema cuando  $\mathbb{H}$  es isomorfa a  $M_2(F)$  sin ninguna restricción sobre la dimensión y característica del cuerpo base  $F$ . Además, en [3] Victor López-Solís resolvió un análogo del problema de Nathan Jacobson para las superálgebras alternativas.

## Referencias

- [1] Jacobson, N. (1954). A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra. *American Journal of Mathematics*, 76(2), 447-452.
- [2] Martínez, C., & Zelmanov, E. (2003). A Kronecker factorization theorem for the exceptional Jordan superalgebra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 177(1), 71-78.
- [3] Solís, V. H. L. (2019). Kronecker factorization theorems for alternative superalgebras. *Journal of Algebra*, 528, 311-338.



## II Encuentro Matemático del Caribe

- [4] Solís, V. H. L., & Shestakov, I. P. (2020). On a problem by Nathan Jacobson. *arXiv preprint arXiv:2007.09313*.

# Técnicas de Bifurcación Aplicadas a la Geometría Riemanniana

Autores: Elkin Darío Cárdenas Díaz, Willy Sierra  
Universidad del Cauca  
E-mail: [ecardenas@unicauca.edu.co](mailto:ecardenas@unicauca.edu.co)

**Resumen:** En esta charla haremos uso de técnicas de bifurcación para generar una nueva familia de métricas Riemannianas con curvatura escalar cero y curvatura media constante sobre variedades compactas con frontera.

**Palabras claves:** Variedades compactas, Variedades con frontera, Métricas Riemannianas, Curvatura Escalar, Curvatura Media, Bifurcación, Variedades Producto

## Introducción

Escobar en [3], introdujo el siguiente problema:

¿Dada una variedad Riemanniana compacta con frontera  $(M, g)$  de dimensión  $m \geq 3$ , existe una métrica conforme a  $g$  de curvatura escalar nula y curvatura media constante sobre la frontera?. El problema anterior es equivalente a hallar una solución positiva de la ecuación no lineal

$$\begin{cases} \Delta_g \varphi + \frac{4(m-1)}{(m-2)} R_g \varphi = 0, & \text{sobre } M; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta^g} + \frac{(m-1)}{2(m-2)} H_g \varphi = \lambda \varphi^{\frac{m}{m-2}}, & \text{en } \partial M. \end{cases}$$

La existencia de soluciones y otros aspectos relacionados con la ecuación anterior ha sido estudiados por diferentes autores, ver por ejemplo [3, 1, 5, 2, 4]. En esta charla apoyados en la formulación variacional de la ecuación diferencial citada arriba haremos uso de técnicas de bifurcación para probar un resultado de multiplicidad de soluciones para dicho problema sobre variedades producto con frontera.

## Referencias

- [1] Almaraz, S. (2010). An existence theorem of conformal scalar-flat metrics on manifolds with boundary. *Pacific journal of mathematics*, 248(1), 1-22.
- [2] Cárdenas, E., & Sierra, W. (2019). Uniqueness of solutions of the Yamabe problem on manifolds with boundary. *Nonlinear Analysis*, 187, 125-133.
- [3] Escobar, J. F. (1992). Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary. *Annals of Mathematics*, 136(1), 1-50.
- [4] De Lima, L. L., Piccione, P., & Zedda, M. (2012, March). On bifurcation of solutions of the Yamabe problem in product manifolds. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* (Vol. 29, No. 2, pp. 261-277). Elsevier Masson.
- [5] Marques, F. C. (2007). Conformal deformations to scalar-flat metrics with constant mean curvature on the boundary. *Communications in Analysis and Geometry*, 15(2), 381-405.

# Un Método Iterativo de Punto Medio Tipo Newton en Espacios de Banach

Autor: Willy Will Sierra Arroyo  
 Universidad del Cauca, Colombia  
 E-mail: [wsierra@unicauca.edu.co](mailto:wsierra@unicauca.edu.co)

**Resumen:** En esta charla haremos un breve resumen de algunos métodos iterativos que se han propuesto en el contexto de espacios de Banach, haciendo énfasis en un método de punto medio.

**Palabras claves:** Métodos iterativos, espacios de Banach, métodos tipo Newton.

## Introducción

Uno de los problemas más estudiados en análisis numérico es la aproximación de soluciones de ecuaciones no lineales de la forma

$$F(x) = 0,$$

donde  $F : \Omega \subseteq X \rightarrow Y$  es un operador no lineal de un subconjunto abierto y convexo de un espacio de Banach  $X$  en un espacio de Banach  $Y$ : En este campo los métodos iterativos se han convertido en una de las herramientas más útiles, el primero de estos métodos iterativos, el cual es una extensión del método de Newton a espacios de Banach y hoy es conocido como el método de Newton Kantorovich (NK), fue propuesto por L. V. Kantorovich en 1948, ver [1]. El método NK es definido por  $x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n)$  with  $x_0 \in \Omega$  dado. Desde el trabajo de Kantorovich son varios los métodos iterativos que han sido propuestos en espacios de Banach, incluyendo entre ellos una versión del método de la secante, método de Halley, método de punto medio, entre otros. De especial interés es el método de punto medio propuesto en [2], el cual es definido como sigue:

$$\begin{cases} y_n = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\ x_{n+1} = x_n - F'(\frac{x_n+y_n}{2})^{-1}F(x_n) \quad n \geq 0, \end{cases}$$

donde  $x_0 \in \Omega \subseteq X$  es un punto dado. Siguiendo las ideas desarrolladas en [2] y otros trabajos similares, hacemos un análisis de convergencia semilocal para el método

$$\begin{cases} y_n = x_n - F'(\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2})^{-1}F(x_n) \\ x_{n+1} = x_n - F'(\frac{x_n+y_n}{2})^{-1}F(x_n) \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

donde  $x_0 \in \Omega \subseteq X$  es un punto dado y  $y_0 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0)$ , [3]. Probamos además que el método tiene orden de convergencia  $1 + \sqrt{2}$ .

En la charla haremos un recorrido por los diferentes métodos iterativos que han sido propuestos en el contexto de espacios de Banach, centrándonos en el método (5).

## Referencias

- [1] Kantorovich, L. V. (1948, January). On Newton's method for functional equations. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (Vol. 59, No. 7, pp. 1237-1240).

- [2] Chen, D., & Argyros, I. K. (1992). The midpoint method for solving nonlinear operator equations in Banach space. *Applied mathematics letters*, 5(4), 7-9.
- [3] Cárdenas, E., Castro, R., & Sierra, W. (2020). A Newton-type midpoint method with high efficiency index. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 124381.

## Representación Matricial Adaptativa del Método de Uzawa

Autores: Catalina María Rúa Álvarez, Alexandre M. Roma  
Universidad de Nariño, Universidade de São Paulo  
E-mail: [catalina.rua@udenar.edu.co](mailto:catalina.rua@udenar.edu.co), [roma@ime.usp.br](mailto:roma@ime.usp.br)

**Resumen:** Una gran variedad de aplicaciones de la industria, la ingeniería y la medicina, entre otras ciencias, dependen de la simulación computacional de fluidos incompresibles multifísicos. Así los modelos matemáticos, tales como las Ecuaciones de Navier Stokes, usados para obtener simulaciones coherentes con los procesos de la naturaleza o las propiedades físicas de un fluido, deben producir resultados muy precisos, por lo cual es necesario que la metodología numérica usada en estos modelos tengan buena precisión, estabilidad y que sus bases teóricas se encuentren bien fundamentadas. Además, aplicaciones con fluidos son muy sensibles a propiedades físicas propias de cada tipo de fluido, tales como la densidad, viscosidad, presión o su número de Reynolds, esto exige simulaciones eficientes para evitar tanto un alto tiempo computacional en la búsqueda de aproximaciones numéricas como el uso excesivo de memoria.

En esta charla específicamente estamos interesados en el estudio de fluidos incompresibles de bajo Reynolds, dado que la dinámica del sistema puede ser modelada por la Ecuación estacionaria de Stokes. Una versión adaptativa del Método de Uzawa usando para su solución el Método del Gradiente Biconjugado estabilizado y además algunas discretizaciones de diferencia finitas en forma matricial esparza, son usadas para solucionar dicha ecuación en el caso bidimensional en mallas estructuradas por bloques con refinamiento adaptativo y condiciones de frontera de tipo Dirichlet.

**Palabras claves:** Número de Reynolds, Ecuación de Stokes, Método de proyección, Método de Uzawa, Precondicionadores.

## Introducción

La dinámica de fluidos computacional es un área que tiene varias aplicaciones tanto de interés práctico como teórico. Así mismo, en muchas de estas aplicaciones es necesario trabajar con ecuaciones matemáticas que modelen y describan cada aplicación. En esta área para muchos de los modelos matemáticos usados aún no hay en la literatura una solución teórica de las ecuaciones que modelan los diferentes fenómenos, las cuales usualmente están relacionadas con ecuaciones diferenciales parciales, por tal motivo se desea encontrar la solución numérica y la simulación computacional de tales ecuaciones, ver [6] y [7].

Diferencias finitas, volúmenes finitos y elementos finitos son algunos de los métodos numéricos que se usan para resolver EDPs como las que resultan de problemas con aplicaciones en dinámica de fluidos. El método de diferencias finitas es sencillo de implementar teniendo en cuenta una discretización del dominio geométrico en mallas cartesianas o rectangulares, pero tiene la desventaja de que según el caso presenta una estabilidad sensible que exige una elevada demanda computacional por refinamientos restrictivos del dominio. De donde para lograr capturar numéricamente detalles y fenómenos locales de forma precisa, es claro que una discretización numérica usando mallas uniformes será ineficiente y con un alto costo computacional, por lo que el uso de mallas con refinamiento adaptativo localizado (AMR - *Adaptive Mesh Refinement*) es una eficiente y óptima solución con resultados muy precisos para simulaciones numéricas con el método de diferencias finitas.

Este trabajo ha sido motivado por el estudio de fluidos incompresibles de bajo número de Reynolds. Cuando el número de Reynolds tiende a cero, la dinámica del sistema puede ser modelada por la Ecuación de Stokes estacionaria. Una versión adaptativa del Método de Uzawa usando para su solución el Método del Gradiente Biconjugado estabilizado y además, algunas discretizaciones en forma matricial esparza son

usadas para solucionar dicha ecuación en el caso bidimensional en mallas adaptativas estructuradas en bloques con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, como en [3] y [6].

Mallas con refinamiento adaptativo localizado por bloques permiten el uso de esquemas de diferencia finitas y aumentan localmente la resolución de los métodos, mejorando así su exactitud a un bajo costo computacional, la metodología que es usualmente empleada es la propuesta por Berger y Colella en [2]. Por otro lado, el uso de representaciones matriciales posibilita el empleo de preconditionadores y el estudio propiedades numéricas como las que controlan la sensibilidad a perturbaciones en las aproximaciones de sistemas lineales, ver [1] y [5].

Aunque por mucho tiempo con esta técnica estructurada de AMR se emplearon métodos sin el uso de matrices (*free matrix*), actualmente las matrices relacionadas con la discretización en AMR son implementadas debido a que permiten el uso de diferentes métodos de solución de sistemas lineales y preconditionadores para mejorar el número de condicionamiento y con ello las propiedades teóricas para la eficiencia de los métodos, ver [1] y [8]. El uso de matrices se ve potenciado con la aplicación de software libre en el área de álgebra lineal numérica como el PETSc (*Portable Extensible Toolkit for Scientific Computation*, [www.mcs.anl.gov/petsc](http://www.mcs.anl.gov/petsc)), el cual es un conjunto de estructuras de datos y rutinas en serie y paralelas para la solución de modelos científicos a gran escala, en especial para solución de sistemas lineales.

Usando mallas escalonadas también conocidas como “*Staggered Mesh*”, donde las variables vectoriales son definidas en las faces y las escalares en los centros de cada celda, se soluciona numéricamente la ecuación de Stokes por medio de un esquema de diferencias finitas para la discretización de la variable vectorial que define la velocidad del fluido, en conjunto con el Método de Uzawa que controla el acople entre las variables que relacionan la presión y la velocidad, ver [4] y [6]. Para solucionar el conjunto resultante de ecuaciones algebraicas, una representación matricial de la discretización en la malla adaptativa es construida y el sistema lineal resultante se soluciona usando la biblioteca de álgebra lineal numérica PETSc.

Estamos interesados en presentar los resultados numéricos obtenidos cuando se impone un problema específico en el que se conoce su solución exacta, además del estudio realizado con diferentes métodos para resolver sistemas lineales usando como preconditionador la factorización LU incompleta.

## Referencias

- [1] Adams, M. F.; Cornford, S. L.; Martin, D.; McCorquodale, P.; (2019). *Composite matrix construction for structured grid adaptive mesh refinement*. Journal of Computer Physics Communications, 244, 35-39.
- [2] Berger, M. J.; Colella, P. (1989). *Local Adaptive Mesh Refinement for shock hydrodynamics*. Journal of Computational physics 82, 64-84.
- [3] Kim, S. D., (2009). *Uzawa algorithms for coupled Stokes equations from the optimal control problem*. CALCOLO 46, 37-47 .
- [4] Klein, H. D.; Leal, L. G.; Garcia-Cervera, C. J.; Cenicerros H. D., (2005). *Computational studies of the shear flow behaviour of a model for nematic liquid crystalline polymers*. ANZIAM J. 46, C210-C244.
- [5] Pletzer, A.; Jamroz B.; Crockettv R.; Sides, S., (2014). *Compact cell centered discretization stencils at fine-coarse block structured grid interfaces*. Journal of Computational physics 260, 25-36.
- [6] Rua, C., (2013). *Simulação computacional adaptativa de escoamentos bifísicos viscoelásticos*. Universidad de San Paulo, Brasil, tesis doctorado.
- [7] Shonibare, O., (2017). *Numerical Simulation of Viscoelastic Multiphase Flows Using an Improved Two-phase Flow Solver*. Michigan Technological University, USA, dissertation.
- [8] Sousa, F. S.; Lages, C. F.; Ansoni, J. L.; Castelo, A.; Simao, A., (2019). *A finite difference method with meshless interpolation for incompressible flows in non-graded tree-based grids*. Journal of Computational physics 396, 848-866.

# Regularidad de las Variedades de *Mishchenko-Fomenko* en $gl_n$

Autor: Wilson Fernando Mutis Cantero  
Universidad de Nariño  
E-mail: [wilsonmutis@udenar.edu.co](mailto:wilsonmutis@udenar.edu.co)

**Resumen:** Sea  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Para cada  $\xi \in gl_n$  existe una variedad algebraica denominada variedad de *Mishchenko-Fomenko*. Un problema de interés en teoría de representaciones de álgebras de Lie es determinar si los generadores de las variedades de *Mishchenko-Fomenko* en  $gl_n$  forman una secuencia regular en el anillo de polinomios en  $n^2$  variables. El resultado se tiene para  $gl_3$  y en  $gl_4$  el resultado es válido para el caso en que  $\xi$  nilpotente. En esta charla se presentará el método que ha permitido establecer que las variedades de *Mishchenko-Fomenko* en  $gl_3$  forman una secuencia regular en el anillo de polinomios en 9 variables y las dificultades que presenta el método para generalizarlo.

**Palabras claves:** Variedad de *Mishchenko-Fomenko*, elemento nilpotente, secuencia regular.

## Introducción

En teoría de Representaciones de Álgebras de Lie es importante estudiar los pares  $(U(\mathfrak{g}), B)$ , donde  $U(\mathfrak{g})$  es el álgebra envolvente universal de una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $B$  es una subálgebra conmutativa de  $U(\mathfrak{g})$  y  $U(\mathfrak{g})$  es un  $B$ -módulo libre. Con estas condiciones, todo  $B$ -módulo irreducible se puede levantar hasta un  $U(\mathfrak{g})$ -módulo irreducible.

En esta línea de estudio, el famoso teorema de Kostant [1] afirma que el álgebra envolvente universal  $U(\mathfrak{g})$  de una  $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}$  es un módulo libre sobre su centro. Para el caso de la  $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie  $gl_n$  de las matrices de tamaño  $n \times n$ , Ovsienko [2] establece que  $U(gl_n)$  es un módulo libre sobre la subálgebra de Gelfand-Tsetlin. Por el teorema principal de Futorny-Molev [3] se sabe que dado un elemento  $\xi$  del espacio dual  $gl_n^*$  existe una subálgebra conmutativa  $\mathcal{A}_\xi$  de  $U(gl_n)$  tal que  $gr \mathcal{A}_\xi = \overline{\mathcal{A}_\xi}$ , donde  $\overline{\mathcal{A}_\xi}$  es la subálgebra *Mishchenko-Fomenko* asociada al parámetro  $\xi$  construida por el método de cambio de argumento, además, por Futorny-Ovsienko [4] se sabe que  $U(gl_n)$  es un  $\mathcal{A}_\xi$ -módulo libre cuando la subálgebra  $\overline{\mathcal{A}_\xi}$  es generada por una secuencia regular en  $\mathcal{S}(gl_n)$ . Según el trabajo de A. Moreau [5], la subálgebra  $\overline{\mathcal{A}_\xi}$  es generada por una secuencia regular cuando  $\xi$  es un elemento regular nilpotente. En esta charla veremos que en  $gl_4$  este resultado extiende para todos los elementos nilpotentes.

## Referencias

- [1] Kostant, B. (1963). Lie group representations on polynomial rings. *American Journal of Mathematics*, 85(3), 327-404.
- [2] Ovsienko, S. (2003). Strongly nilpotent matrices and Gelfand-Zetlin modules. *Linear algebra and its applications*, 365, 349-367.
- [3] Futorny, V., & Molev, A. (2015). Quantization of the shift of argument subalgebras in type A. *Advances in Mathematics*, 285, 1358-1375.
- [4] Futorny, V., & Ovsienko, S. (2005). Kostant's theorem for special filtered algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 37(2), 187-199.
- [5] Moreau, A. (2018). A remark on Mishchenko-Fomenko algebras and regular sequences. *Selecta Mathematica*, 24(3), 2651-2657.

# Decodificación Mediante el Uso de Líderes de Clase en Códigos Lineales Binarios

Autores: Jhon Hermes Castillo Gómez, Lisbeth Delgado  
 Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia, Universidad del Cauca, Popayán,  
 Colombia  
 E-mail: [jhcastillo@udenar.edu.co](mailto:jhcastillo@udenar.edu.co), [lddelgado@unicauca.edu.co](mailto:lddelgado@unicauca.edu.co)

**Resumen:** Un  $[n, k]$  código lineal binario es  $k$ -subespacio de  $\mathbb{F}_2^n$ . Un elemento de un código lineal se denomina una palabra código. La distancia de Hamming,  $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , entre dos vectores  $\mathbf{x} = (x_1 \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}_2^n$  es el número de entradas en las que difieren, equivalentemente ,

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i : x_i \neq y_i\}|.$$

Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$ , el peso de Hamming de  $\mathbf{x}$  se define como  $w_H(\mathbf{x}) = d_H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ . La distancia mínima  $d(C) = d$  de un código lineal se define como el peso mínimo entre todas las palabras código no nulas, en este caso se denomina un  $[n, k, d]$  código lineal binario. Una matriz generadora para un  $[n, k]$  código  $C$  es una matriz  $G$  de tamaño  $k \times n$ , cuyas filas forman una base para  $C$ . Entonces el código  $C$  puede ser visto como

$$C = \{\mathbf{x}G : \mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^k\}. \quad (6)$$

Para un  $[n, k]$ -código lineal binario, el proceso de decodificación consiste en construir una tabla con  $2^{n-k}$  entradas en lugar de una de  $2^n$  entradas (todas las palabras de  $\mathbb{F}_2^n$ ). Se debe tener en cuenta que con este proceso las distintas clases laterales del código forman una partición de  $\mathbb{F}_2^n$  en  $2^{n-k}$  conjuntos de tamaño  $2^k$ . Para la construcción de esta tabla, se busca una matriz  $H$  de control de paridad del código  $C$ , la cual es una matriz generadora para el código dual de  $C$ . Entonces para un vector  $y \in \mathbb{F}_{2^n}$  su síndrome se define como  $\text{Syn}(y) = Hy^T \in \mathbb{F}_{2^{n-k}}$ . Cuando el síndrome de la palabra es 0 el vector  $y \in C$ , esto proporciona una forma de detectar si una palabra pertenece o no al código. Es más se puede demostrar que existe una correspondencia uno a uno entre las clases laterales de  $C$  y los valores de los síndromes. Sea  $v$  una palabra transmitida y sea  $w$  la palabra recibida, de esto resulta un patrón de error  $e$  tal que  $e = w - v \in w + C$ . Entonces  $w - e = v \in C$ , así el patrón de error  $e$  y la palabra recibida  $w$  están en la misma clase lateral del código  $C$ .

El procedimiento de decodificación por distancia mínima de una palabra en un código lineal  $C$  se realiza de la siguiente manera. Se recibe la palabra  $w$ , se elige una palabra  $e$  de menor peso en la clase lateral  $w + C$  y se concluye que  $v = w - e$  es la palabra transmitida. Para esto es necesario construir la tabla que se mencionó anteriormente, la cual se conoce como arreglo estándar o arreglo Slepiano, y en el que se requiere encontrar los líderes de clases laterales. Se resalta que el único líder de clase que pertenece al código  $C$  es el vector cero. En general, toda clase lateral de peso a lo más  $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$  tiene un único líder.

De esta forma, para llevar a cabo este proceso de decodificación para un código lineal binario dado, es necesario construir algoritmos que permitan el cálculo del conjunto de líderes de clase de forma eficiente. Este problema ya ha sido ampliamente estudiado; recientemente en el artículo "Computing coset leaders and leader codewords of binary codes"[1]. En este artículo los autores presentan una forma de adaptar las ideas presentadas en [4, Section 11.7] para determinar la distribución de pesos del conjunto de líderes de clase, el radio de Newton y el radio de cubrimiento, parámetros considerados entre los más importantes y estudiados para un código lineal, ver [3, Chap. 1, Sec. 5].

En esta ponencia presentamos los conceptos matemáticos necesarios para implementar algoritmos en SageMath [5] para decodificar palabras recibidas en un código lineal mediante el uso del arreglo estándar.

**Palabras claves:** Código lineal, líderes de clase, algoritmo.



## Agradecimiento

Este trabajo es parcialmente financiado por *Vicerrectoría de Investigaciones e Interacción Social* de la Universidad de Nariño.

## Referencias

- [1] Borges-Quintana, M., Borges-Trenard, M. A., Márquez-Corbella, I., & Martínez-Moro, E. (2015). Computing coset leaders and leader codewords of binary codes. *Journal of Algebra and its Applications*, 14(08), 1550128.
- [2] Ling, S., & Xing, C. (2004). *Coding theory: a first course*. Cambridge University Press.
- [3] MacWilliams, F. J., & Sloane, N. J. A. (1977). *The theory of error correcting codes* (Vol. 16). Elsevier.
- [4] Huffman, W. C., & Pless, V. (2010). *Fundamentals of error-correcting codes*. Cambridge university press.
- [5] The Sage Developers. SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.0), 2020, <https://www.sagemath.org>.

# Topological and Differential Invariants of Singularities of Contact structure on a Three-Dimensional Manifold

Authors: Fabián Antonio Arias Amaya, Mikhail Malakhaltsev  
 Universidad Tecnológica de Bolívar, Universidad de los Andes  
 E-mail: [farias@utb.edu.co](mailto:farias@utb.edu.co), [mikarm@uniandes.edu.co](mailto:mikarm@uniandes.edu.co)

**Abstract:** A contact structure on a  $(2n + 1)$ -dimensional manifold  $M$  is a completely non-integrable  $2n$ -dimensional distribution  $\Delta$ . Locally a contact structure is determined by a nonvanishing 1-form  $\omega$  such that  $\Delta = \ker(\omega)$  and  $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$  (the condition of complete non-integrability). If for a  $2n$ -dimensional distribution  $\Delta$  on a  $(2n + 1)$ -dimensional manifold  $M$  the condition of non-integrability does not hold at points of some submanifold  $\Sigma \subset M$ , we say that  $\Delta$  is a contact structure with singularities. The contact structures with singularities were studied in [1] and [2], where the invariants of singularities were found.

In the present talk we will consider the contact structure with singularities as a  $G$ -structure with singularities [3] in case  $n = 1$ , that is  $\dim M = 3$ ,  $\dim \Delta = 2$ , and the submanifold  $\Sigma \subset M$  of singularities of  $\Delta$  is 2-dimensional. We will explain how to find topological and differential invariants of singularities of contact structure and establish their relation to the invariants found in [1] and [2].

**Keywords:** contact structure,  $G$ -structure with singularities.

## References

- [1] Martinet, J. (1970). Sur les singularités des formes différentielles. In *Annales de l'institut Fourier* (Vol. 20, No. 1, pp. 95-178).
- [2] Jakubczyk, B., & Zhitomirskii, M. (2001). Local reduction theorems and invariants for singular contact structures. In *Annales de l'institut Fourier* (Vol. 51, No. 1, pp. 237-295).
- [3] Amaya, F. A., & Malakhaltsev, M. (2018). Topological invariants of principal  $G$ -bundles with singularities. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 39(5), 623-633.

# Medidas Expansoras Tienen la Propiedad de Especificación no-Uniforme sobre Sistemas Dinámicos Aleatórios

Autor: Rafael José Álvarez Bilbao  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
E-mail: [rafael.alvarez@uptc.edu.co](mailto:rafael.alvarez@uptc.edu.co)

**Resumen:** Dado un skew-producto  $F : X \times M \rightarrow X \times M$  definida por  $F(x, y) = (\theta(x), f_x(y))$ , donde  $X$  y  $M$  son espacios compactos conexos;  $\theta : X \rightarrow X$  una función ergódica y  $f_x : M \rightarrow M$  son las funciones generadoras del sistema para  $x \in X$ . Considerando  $f_x$  no uniformemente expansoras, se prueba que para medidas expansoras sobre  $F$ , se tiene que existen infinitos puntos  $(x, y) \in X \times M$  tal que  $F^n(x, y) = (\theta^n(x), f_x^n(y)) = (\theta^n(x), y)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , estos puntos lo llamaremos puntos de retorno en las fibras para el sistema  $F$ . En otras palabras satisface la propiedad de especificación débil. Además, probamos que los puntos de retorno en las fibras, pertenecen al soporte de la medida expansora.

**Palabras claves:** Skew-producto, medidas ergódicas, funciones no-uniformemente expansoras, propiedad de especificación débil, tiempos hiperbólicos.

## Referencias

- [1] Oliveira, K. (2012). Every expanding measure has the nonuniform specification property. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140(4), 1309-1320.
- [2] Bilbao, R. A., & Oliveira, K. (2017). Maximizing entropy measures for random dynamical systems. *Stochastics and Dynamics*, 17(05), 1750032.
- [3] Alves, J. (2003). *Statistical analysis of non-uniformly expanding dynamical systems*. IMPA.
- [4] Pinheiro, V. (2011). Expanding measures. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire* (Vol. 28, No. 6, pp. 889-939).

# Sobre la Categoría de los Módulos Graduados por Grupoides

Autor: Héctor Edonis Pinedo Tapia  
Universidad Industrial de Santander  
E-mail: [hpinedot@uis.edu.co](mailto:hpinedot@uis.edu.co)

**Resumen:** Dado un grupoide  $\mathcal{G}$  y un anillo  $R$  (no necesariamente unitario) y graduado por  $\mathcal{G}$ , introduciremos la categoría  $\mathcal{G}\text{-}R\text{-mod}$  que consiste de los  $R$ -módulos graduados junto con los morfismos graduados. Prestaremos atención al funtor olvido  $U: \mathcal{G}\text{-}R\text{-mod} \rightarrow R\text{-mod}$  y determinaremos algunas propiedades  $\mathcal{P}$  para las cuales las siguientes implicaciones son verdaderas: Para  $M \in \mathcal{G}\text{-}R\text{-mod}$ , (i) si  $M$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ , entonces  $U(M)$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ ; (ii) if  $U(M)$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ , entonces  $\mathcal{P}$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ .

Este es un trabajo en colaboración con Juan Cala y Patrik Nystedt.

**Palabras claves:** grupoide, módulo graduado, objeto unitario.

## Referencias

- [1] Cala, J., Nystedt, P., & Pinedo, H. (2020). Object-unital groupoid graded rings. *arXiv preprint arXiv:2001.05164*.
- [2] Lundström, P. (2004). The category of groupoid graded modules. In *Colloquium Mathematicum* (Vol. 2, No. 100, pp. 195-211).

# Números de Stirling y el operador $z^\alpha \frac{d}{dz}$

Autor: Michael Alexander Rincón Villamizar  
 Universidad Industrial de Santander  
 E-mail: [marinvil@uis.edu.co](mailto:marinvil@uis.edu.co)

**Resumen:** Si  $f$  es una función holomorfa y  $\alpha \in \mathbb{C}$ , se demuestra que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la  $n$ -ésima iteración del operador  $z^\alpha \frac{d}{dz}$  viene dada por

$$\left(z^\alpha \frac{d}{dz}\right)^n (f(z)) = z^{n(\alpha-1)} \sum_{k=0}^n \frac{s(n, k; \alpha)}{k!} z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z),$$

donde  $s(n, k; \alpha)$  es una sucesión de coeficientes que depende de los parámetros  $n, k$  y  $\alpha$ . Mostraremos que los coeficientes  $s(n, k; \alpha)$  pueden calcularse explícitamente a través de los números de Stirling de primera y segunda clase.

**Palabras claves:** Números de Stirling de primera clase, Números de Stirling de segunda clase, operador  $z^\alpha \frac{d}{dz}$ .

## Introducción

Los números de Stirling de segundo orden aparecen en el estudio de las iteraciones del operador  $z \frac{d}{dz}$  conocido como Derivada de Mellin. Es conocido que si  $f$  es una función holomorfa, entonces

$$\left(z \frac{d}{dz}\right)^n (f(z)) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} z^k f^{(k)}(z), \quad (7)$$

donde  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  denota el número de Stirling de segunda clase (véase [1]). El resultado anterior motiva el objetivo de esta charla: estudiar las iteraciones del operador  $z^\alpha \frac{d}{dz}$ , donde  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Probaremos que si  $f$  es una función holomorfa y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\left(z^\alpha \frac{d}{dz}\right)^n (f(z)) = z^{n(\alpha-1)} \sum_{k=0}^n \frac{s(n, k; \alpha)}{k!} z^k \frac{d^k}{dz^k} f(z),$$

donde

$$\frac{s(n, k; \alpha)}{k!} = \sum_{m=k}^n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} (\alpha - 1)^{n-m}. \quad (8)$$

Aquí  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$  es el número de Stirling de primera clase. Note que cuando  $\alpha = 1$ , la fórmula (8) implica (7).

## Referencias

- [1] Boyadzhiev, K. N. (2005). A series transformation formula and related polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005.

# Álgebras de Grupo Normales & un Teorema de Amitsur

Autor: Alexander Holguín Villa

Escuela de Matemáticas - Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia

E-mail: [aholguin@uis.edu.co](mailto:aholguin@uis.edu.co)

**Resumen:** Sea  $\mathbb{F}G$  el álgebra de grupo del grupo  $G$  sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  con  $\text{car}(\mathbb{F}) \neq 2$ . Cualquier involución  $*$  :  $G \rightarrow G$  puede extenderse  $\mathbb{F}$ -linealmente a una involución del álgebra de grupo  $*$  :  $\mathbb{F}G \rightarrow \mathbb{F}G$ . Una involución natural sobre  $G$  es la así llamada involución clásica, la cual es la inducida de la aplicación  $g \mapsto g^{-1}$ , para todo  $g \in G$ . Sea  $\sigma : G \rightarrow \{\pm 1\}$  un homomorfismo no trivial de grupos, denominado orientación. Si  $*$  :  $G \rightarrow G$  es una involución, una involución de grupo orientada  $\otimes$  de  $\mathbb{F}G$  está dada por

$$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \alpha^{\otimes} = \sum_{g \in G} \alpha_g \sigma(g) g^*. \quad (9)$$

Una  $\mathbb{F}$ -álgebra  $R$  con involución  $*$  es llamada normal si  $rr^* = r^*r$ , para todo  $r \in R$ , ver [3]. Los autores en [4] caracterizaron las álgebras de grupo  $\mathbb{F}G$  normales con respecto a la involución de grupo orientada  $\otimes$  dada por (9), más aún se demuestra que tales condiciones coinciden con aquellas tales que el conjunto de elementos simétricos  $(\mathbb{F}G)^+$  es conmutativo, [1, 2].

En esta charla mostraremos que si  $\mathbb{F}G$  es  $\otimes$ -normal, i.e., si satisface la  $\otimes$ -identidad polinomial particular  $\alpha\alpha^{\otimes} = \alpha^{\otimes}\alpha$  para todo  $\alpha \in \mathbb{F}G$ , entonces  $\mathbb{F}G$  satisface el polinomio estándar en 4 variables  $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , de manera directa sin hacer uso de un resultado clásico de Amitsur, [3, Teorema 6.5.1].

**Palabras claves:** Involuciones, álgebras de grupo, anillos normales, identidad polinomial.

## Referencias

- [1] Cristo, O. B. (2006). Commutativity of symmetric elements in group rings. *Journal of Group Theory*, 9(5), 673-683.
- [2] Cristo, O. B., & Milies, C. P. (2006). Symmetric elements under oriented involutions in group rings. *Communications in Algebra*, 34(9), 3347-3356.
- [3] Herstein, I. N., & Herstein, I. N. (1976). *Rings with involution* (Vol. 10, p. 246). Chicago: University of Chicago Press.
- [4] Holguín-Villa, A., & Castillo, J. H. (2020). Normal group algebras. *Communications in Algebra*, 1-12.

## Modelos de Regresión Lineales Basados en la Clase de Distribuciones Box-Cox Elípticas

Autor: Raúl Alejandro Morán Vásquez  
Universidad de Antioquia  
E-mail: [raul.moran@udea.edu.co](mailto:raul.moran@udea.edu.co)

**Resumen:** La clase de distribuciones Box-Cox elípticas proporciona una amplia gama de distribuciones para el modelado de datos positivos multivariados, marginalmente asimétricos y con posible presencia de observaciones atípicas. Esta clase tiene como casos particulares a la clase de distribuciones log-elípticas, y se reduce a la clase de distribuciones Box-Cox simétricas en el caso univariado. Los parámetros son interpretables en términos de cuantiles y de asociación entre parejas de variables. La relación entre parámetros de escala y cuantiles hace que la clase de distribuciones Box-Cox elípticas sean atractivas para el modelado mediante de regresión. En esta charla, proponemos y estudiamos modelos de regresión lineales basados en la clase de distribuciones Box-Cox elípticas.



# Adaptive Significance Levels in Linear Regression Models with Unknown-Variance

Authors: Alejandra Estefanía Patiño Hoyos, Victor Fossaluzza  
Tecnológico de Antioquia, Instituto de Matemática e Estatística (USP)  
E-mail: [alejandra.patino19@tdea.edu.co](mailto:alejandra.patino19@tdea.edu.co), [victorf@ime.usp.br](mailto:victorf@ime.usp.br)

**Abstract:** The Full Bayesian Significance Test (FBST) for precise hypotheses is presented by Pereira and Stern (1999) as a Bayesian alternative to the traditional significance tests based on  $p$ -values. With the FBST the authors introduce the  $e$ -value as an evidence index in favor of the null hypothesis ( $\mathbf{H}$ ). An important practical issue for the implementation of the FBST is to establish how small the evidence against  $\mathbf{H}$  must be in order to decide for its rejection. In the FBST procedure, the  $e$ -value exhibits similar behavior to the  $p$ -value when the sample size increases, i.e., tends to decrease, which suggests that the cut-off point to define the rejection of  $\mathbf{H}$  should be a sample size function. In this work we present a method to find a cutoff value for the evidence in the FBST by minimizing the linear combination of the averaged type-I and type-II error probabilities for a given sample size and also for a given dimensionality of the parameter space. For that purpose, the scenario of linear regression models with unknown-variance under the Bayesian approach is considered.

**Keywords:** Adaptive significance levels, Bayesian test,  $e$ -value, Linear regression, Predictive distribution, Significance test.

## Introduction

The Full Bayesian Significance Test (FBST) for precise hypotheses is presented by [1] as a Bayesian alternative to the traditional significance tests based on  $p$ -values. With the FBST the authors introduce the  $e$ -value as an evidence index in favor of the null hypothesis ( $\mathbf{H}$ ). An important practical issue for the implementation of the FBST is to establish how small the evidence must be to decide to reject  $\mathbf{H}$ . In that sense, [2] present loss functions such that the minimization of their posterior expected value gives “Bayesianity” to the FBST, having a characterization within the Decision Theory approach. This procedure provides a cutoff point for the evidence that depends on the severity of the error for deciding whether to reject or accept  $\mathbf{H}$ .

In the frequentist significance-test context, it is known that the  $p$ -value decreases as sample size increases, so by setting a single significance level, it usually leads to rejection of the null hypothesis. In the FBST procedure, the  $e$ -value exhibits similar behavior to the  $p$ -value when the sample size increases, which suggests that the cutoff point to define the rejection of  $\mathbf{H}$  should be a function of sample size. However, in the proposal of [2], no loss functions that explicitly take into account the sample size are studied.

In order to solve the problem of testing hypotheses in the usual way, in which changing the sample size influences the probability of rejecting or accepting the null hypothesis, [3] motivated by [4], suggests that the level of significance in hypothesis testing should be a function of sample size. Instead of setting a single level of significance, [3] proposes fixing the ratio of severity between type-I and type-II error probabilities based on the incurred losses in each case, and thus, given a sample size, defining the level of significance that minimizes the linear combination of the decision error probabilities. [3] shows that, by increasing the sample size, the probabilities of both kind of errors and their linear combination decrease, when in most cases, setting a single level of significance independent of sample size, only type-II error probability decreases. The tests proposed by [3] takes the same conceptual grounds of the usual tests for simple hypotheses based on the Neyman-Pearson Lemma as presented in [5]. [3] extends the idea to composite and sharp hypotheses, according to the initial work of [4].

Linear models are probably the most used statistical models to establish the influence of a set of covariates on a response variable. In that sense, the proper identification of the relevant variables in the model is an important issue in any scientific investigation, being a more challenging task in the context of Big-Data problems. In addition to high dimensionality, in recent statistical learning problems, it is common to find large datasets with thousands of observations. This fact may cause the hypothesis of nullity of the regression coefficients to be rejected, most of the time, due to the large sample size when the significance level is fixed.

The main goal of our work is to determine how small the Bayesian evidence in the FBST should be in order to reject the null hypothesis. Therefore, taking into account the concepts in [5] and [4] associated with optimal hypothesis tests, as well as the conclusions of [3] about the relationship between the significance levels and the sample size, and finally, considering the ideas developed recently by [6] and [7] related to adaptive significance levels, we present a method to find a cutoff point for the  $e$ -value by minimizing a linear combination of the averaged type-I and type-II error probabilities for a given sample size and also for a given dimensionality of the parameter space. For that purpose, the scenario of linear regression models with unknown-variance under the Bayesian approach is considered. So, by providing an adaptive level for decision making and controlling the probabilities of both kind of errors, we intend to avoid the problems associated with the rejection of the hypotheses on the regression coefficients when the sample size is very large.

## References

- [1] de Bragança Pereira, C. A., & Stern, J. M. (1999). Evidence and credibility: full Bayesian significance test for precise hypotheses. *Entropy*, 1(4), 99-110.
- [2] Madruga, M. R., Esteves, L. G., & Wechsler, S. (2001). On the bayesianity of pereira-stern tests. *Test*, 10(2), 291-299.
- [3] Oliveira, M. C. D. (2014). *Definição do nível de significância em função do tamanho amostral* (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).
- [4] Pereira, C. A. (1985). *Teste de Hipóteses Definida em Espaços de Diferentes Dimensões: Visão Bayesiana e Interpretação Clássica* (Doctoral dissertation, Thesis presented to the Institute of Mathematics and Statistics. Universidade de São Paulo).
- [5] DeGroot, M. H. (1984). *Probability and Statistics* (2e).
- [6] Pereira, C. A. D. B., Nakano, E. Y., Fossaluzza, V., Esteves, L. G., Gannon, M. A., & Polpo, A. (2017). Hypothesis Tests for Bernoulli Experiments: Ordering the Sample Space by Bayes Factors and Using Adaptive Significance Levels for Decisions. *Entropy*, 19(12), 696.
- [7] Gannon, M. A., de Bragança Pereira, C. A., & Polpo, A. (2019). Blending Bayesian and classical tools to define optimal sample-size-dependent significance levels. *The American Statistician*, 73(sup1), 213-222.

## Descomposición de Códigos MRD

Autores: Francisco de Jesús Ariaz Domínguez, Javier de la Cruz, Wolfgang Willems  
Universidad del Norte  
E-mail: [fdarias@uninorte.edu.co](mailto:fdarias@uninorte.edu.co)

**Resumen:** Se trata de investigar la estructura de los códigos MRD lineales en  $\mathbb{F}_q^{m \times n}$ . Analizando la existencia de ciertos códigos MRD a través del estudio de su estructura de descomposición por medio de un adecuado análisis de conceptos como códigos simples, semisimples e indescomponibles MRD. Se prueba que si  $C$  es un código MRD obtenido de un código  $\mathbb{F}_q^m$ -lineal con cierta condición sobre el número de vectores de rango  $n$ , entonces  $C$  tiene una descomposición directa en la cual todas las componentes son códigos simples y que por lo tanto son semisimples.

**Palabras claves:** Códigos MRD simples, reducibles e indescomponibles.

## Referencias

- [1] de la Cruz, J., Kiermaier, M., Wassermann, A., & Willems, W. (2016). Algebraic structures of MRD codes. *Advances in Mathematics of Communications*, 10(3), 499-510.
- [2] Delsarte, P. (1978). Bilinear forms over a finite field, with applications to coding theory. *Journal of combinatorial theory, Series A*, 25(3), 226-241.
- [3] Gabidulin, E. M. (1985). Theory of codes with maximum rank distance. *Problemy Peredachi Informatsii*, 21(1), 3-16.

# Procesos Metacognitivos y de Autorregulación en la Resolución de Problemas, en el Contexto de la Matemática Escolar

Autor: Alberto Jesús Iriarte Pupo  
Universidad de Sucre  
E-mail: [albertoiriarte4@yahoo.es](mailto:albertoiriarte4@yahoo.es)

**Resumen:** La resolución de problemas en la matemática escolar es una de las competencias a desarrollar que tiene una importancia no menor. Desde hace décadas se han venido desarrollando y poniendo en práctica diferentes modelos, formas teóricas y epistémicas de abordar dicha situación. Estas formas, en su mayor parte, se fundamentan en las ciencias cognitivas. Ahora bien, la articulación de estrategias cognitivas con estrategias metacognitivas y de autorregulación, conjuntamente con la contextualización, se convierten en fundamento didáctico expedito para lograr generaciones reflexivas, críticas y transformadoras de realidades. En esta ponencia se darán a conocer elementos de cada uno de los aspectos antes mencionados.

**Palabras claves:** estrategias didácticas; procesos cognitivos; metacognición; autorregulación; resolución de problemas.

## Introducción

La charla versará sobre diversos resultados investigativos donde se ha indagado sobre el impacto de las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo y de autorregulación en el desarrollo de las competencias de matemática, específicamente en la resolución de problemas. Se analizan los diferentes pasos y las operaciones que los estudiantes llevan a cabo durante el proceso de resolución de problemas. Se darán a conocer diversas estrategias tanto cognitivas como metacognitivas que se ponen a prueba a la hora de resolver problemas en el contexto de la matemática escolar. Desde lo cognitivo, se expondrán diversos modelos de resolución de problemas, que a través del tiempo se han venido desarrollando a niveles epistémicos, por ejemplo los establecidos por: Polya (1945); Schoenfeld (1985); Grupo Cero (1985); Mason, Burton y Stacey (1989); de Guzmán (1991); Bransford y Stein (1993); Pifarré y Sanuy (1998); Mayer (2002); entre otros.

Asimismo se darán a conocer diversas estrategias didácticas con enfoque metacognitivo y de autorregulación que permiten que el estudiante tome conciencia de su proceso de aprendizaje (Flavell, 1992). Ahora bien, los resultados de las disímiles investigaciones realizadas, muestran que el uso de estrategias metacognitivas y de autorregulación, caracterizadas por la toma de conciencia de las estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso, son parte fundamental de la resolución de problemas matemáticos.

Ahora bien, en este sentido, se afirma que el conocimiento y uso adecuado de estrategias de solución de problemas, a través de la aplicación de modelos que articulen estrategias cognitivas y metacognitivas y el contexto, permite que el estudiante desarrolle la competencia de resolver problemas desde la matematización de sus realidades; los aportes de Freudenthal (1968) sobre la contextualización de los problemas son elementos significativos para el desarrollo de la competencia en resolución de problemas. A su vez se corrobora que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles, donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante (Iriarte, 2011). Ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico, denominado reinención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva. La aplicación sistemática de un modelo didáctico, inspirado en la filosofía de la transferencia gradual del control del aprendizaje (Pozo y del Puig; 2009), operacionalizado mediante las fases de: instrucción directa, modelado metacognitivo, práctica guiada y aprendizaje cooperativo, influye de manera positiva en el desarrollo de la competencia resolución de problemas matemáticos de los estudiantes de diversos niveles educativos.

## Referencias

- [1] Bransford, J., & Stein, B. (1988). *Solución ideal de problemas: guía para mejor pensar, aprender y crear*. Labor.
- [2] Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American psychologist*, 34(10), 906. Metacognition. Core readings. Boston: Allyn and Bacon.
- [3] Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics*, 1(1-2), 3-8.
- [4] Grupo, C. E. R. O. (1987). De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas.
- [5] De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.
- [6] Iriarte Pupo, A. J. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo [En línea]. *Zona Próxima. Colombia: Redalyc, Julio-Diciembre del*.
- [7] Perez, M. M., Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Editorial Labor.
- [8] Mayer, R. E. (1999). *Psicología de la educación: el aprendizaje en las áreas de conocimiento (Vol. 1)*. Pearson Educación.
- [9] Pifarré, M., & Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 297-308.
- [10] Polya, G. (1945). *Howto Solve It*.
- [11] Pozo, J. I. (2009). *Psicología del aprendizaje universitario*. Ediciones Morata.
- [12] Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.

# Existencia y Unicidad de Soluciones para un Problema Tipo $p(x)$ -Laplaciano

Autor: Johnny Cuadro Molina  
Universidad Simón Bolívar

E-mail: [Johnny.cuadro@unisimonbolivar.edu.co](mailto:Johnny.cuadro@unisimonbolivar.edu.co)

**Resumen:** Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ , se mostrará que bajo ciertas condiciones sobre el exponente  $p(x)$ , la existencia y unicidad de soluciones débiles de un problema tipo  $p(x)$ -Laplaciano,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x, u), & x \text{ en } \Omega \\ u = 0, & x \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este resultado es consecuencia del teorema clásico de Browder.

**Palabras claves:** Espacios de Orlick, soluciones débiles, métodos variacionales,  $p(x)$ -Laplaciano.

## Introducción

Los espacios con exponentes variables son una generalización natural de los espacios clásicos de Lebesgue y pertenecen a la clase general de espacios modulares. Aparecen por primera vez en la literatura matemática a principios de los años 30 en los artículos de Orlicz y Nakano. En las últimas dos décadas, ha habido un gran interés renovado en el campo, motivado por sus aplicaciones al Análisis Armónico, Mecánica de Fluidos y aplicaciones a dos problemas concretos: el modelado matemático de los fluidos electrorreológicos y el procesamiento de imágenes.

Los fluidos electrorreológicos son fluidos que cambian drásticamente sus propiedades mecánicas ante la presencia de un campo magnético. Luego de ciertas simplificaciones, el problema puede reducirse al estudio de las soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x), & x \text{ en } \Omega \\ u = 0, & x \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se puede probar que las soluciones de esta ecuación se obtienen como mínimos del funcional

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx - \int_{\Omega} f(x)u dx.$$

## Referencias

- [1] Afrouzi, G. A., Mahdavi, S., & Naghizadeh, Z. (2009). Existence and uniqueness of solution for  $p$ -Laplacian Dirichlet problem. *International Journal of Nonlinear Science*, 8(3), 274-278.
- [2] El Amrouss, A., Moradi, F., & Ourraoui, A. (2014). Neumann problem in divergence form modeled on the  $p(x)$ -Laplace equation. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 32(2), 109-117.
- [3] Fan, X., Shen, J., & Zhao, D. (2001). Sobolev embedding theorems for spaces  $W^{k,p(x)}(\Omega)$ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 262(2), 749-760.

# Acerca de los potenciales gravitacionales de la Mecánica Celeste sobre espacios curvados

Autor: Pedro Pablo Ortega Palencia  
Universidad de Cartagena  
E-mail: [portegap@unicartagena.edu.co](mailto:portegap@unicartagena.edu.co)

**Resumen:** En esta charla se aborda el problema de extender el potencial gravitacional newtoniano más allá de los espacios euclídeos, y presentaremos dos variantes mejoradas de los potenciales que se han venido usando desde 1835 con los trabajos de Bolyai y Lobachevsky. Se muestra que las variantes aquí propuestas, conducen a una mayor riqueza en la dinámica del problema de los  $n$ -cuerpos, puesto que se simplifican considerablemente las ecuaciones de movimiento, y se hacen admisibles algunos tipos de configuraciones que no habían sido consideradas en la literatura existente.

**Palabras claves:** Mecánica Celeste, Potencial Newtoniano, Potencial Cotangente, Curvatura Gaussiana.

## Introducción

Con la publicación de los Principios Matemáticos de la Filosofía Natural en 1687 por Isaac Newton, cambió por completo nuestra concepción del Universo. Unificar en unas pocas leyes y conceptos básicos una explicación analítica de los fenómenos que ocurren tanto en el cielo como en la Tierra, significó un salto enorme en la comprensión del mundo, y trajo consigo muchos avances científicos y tecnológicos que llegan hasta nuestros días. La mecánica newtoniana postula que el espacio en el que interactúan gravitacionalmente los cuerpos es absoluto y euclídeo (curvatura gaussiana cero). La mecánica celeste sobre espacios con curvatura gaussiana constante y no nula, es un área de la mecánica clásica, que se originó en los trabajos que realizaron de manera independiente y casi simultánea, Janos Bolyai y Nicolas Lobachevsky a mediados de 1835 [3], en un intento de extender las leyes del movimiento de Newton más allá de  $\mathbb{R}^3$ , a los contextos determinados por la geometría hiperbólica (no euclídea), que había sido recientemente descubierta por ellos mismos en 1823 y 1826 respectivamente [1]. En esa búsqueda de analogías con el caso newtoniano, plantearon un problema de 2-cuerpos sobre la seudoesfera bidimensional inmersa en un espacio hiperbólico tridimensional, siguiendo la idea de la gravitación newtoniana, según la cual, la fuerza de atracción entre dos partículas actúa a través de la geodésica (segmento de resta) que las une y de una magnitud que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al área de la esfera de radio igual a la distancia euclidiana entre los cuerpos. Esta sutil idea, establece una extraordinaria relación entre la física y la geometría, la cual ha resultado ser muy fructífera desde entonces. A pesar de la simplicidad para formular el problema curvado de los 2-cuerpos, una tarea sumamente difícil fue la de encontrar una forma analítica para el potencial, que extendiera de manera natural el potencial newtoniano, y de esta manera poder determinar las fuerzas actuantes entre los pares de partículas. En 1860, Paul Joseph Serret extendió la fuerza gravitacional a la esfera  $\mathbb{S}^2$  y resolvió el correspondiente problema de Kepler [5]. Solo fue hacia 1870 cuando Erns Schering a partir de los trabajos de Bolyai y Lobachevsky, obtuvo una expresión analítica para el potencial cotangente [4]. Recientemente, ha renacido un interés creciente en el estudio del problema de los  $n$ -cuerpos sobre estos espacios. Para más detalles históricos y analíticos de los fundamentos de la mecánica celeste sobre espacios curvados puede consultarse [2].

## Referencias

- [1] Bolyai, F., & Bolyai, W. (1913). *Geometrische untersuchungen: Leben und schriften der beiden bolyai* (Vol. 1). Teubner.

- [2] Diacu, F. (2012). *Relative equilibria of the curved N-body problem* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
- [3] Lobachevsky, N. I. (1949). The new foundations of geometry with full theory of parallels [in Russian], 1835-1838. *Collected Works*, 2, 159.
- [4] Schering, E. (1870). Die Schwerkraft im Gaussischen Raume. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 1870, 311-321.
- [5] Serret, P. (1860). *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure*. Mallet-Bachelier.



# Ecuación del calor no homogénea fraccionaria con respecto al tiempo en el sentido de Caputo

Autores: Rubén Darío Ortiz Ortiz, Wilson Jerez Balaguera, Ana Magnolia Marin  
Universidad de Cartagena  
E-mail: [rortizo@unicartagena.edu.co](mailto:rortizo@unicartagena.edu.co)

**Resumen:** Encontrar la solución de la ecuación de subdifusión del calor no homogénea con pérdida de radiación de calor y condiciones inicial y de frontera de Neumann.

**Palabras claves:** Derivada de Caputo, Ecuación en derivadas parciales fraccionarias, Modelación, Series de Fourier.

## Introducción

Para tal fin consideramos la derivada fraccionaria de orden  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  en el sentido de Caputo, en la ecuación del calor no homogénea, donde la solución es una función dada que se puede expandir en la forma de series de Fourier basado en un sistema ortonormal completo, dicha ecuación la resolveremos haciendo uso de los métodos y técnicas del cálculo fraccionario. Para el análisis se reduce el problema inicial a una ecuación integral de tipo Volterra por medio del método de separación de variables, luego se hace uso del teorema de Djrbashyan para resolver la ecuación integral y así encontrar la solución del problema en términos de las funciones de tipo Mittag Leffler.[1], [2]

## Referencias

- [1] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). elsevier.
- [2] MM, D. (1966). jrbashian, *Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Plane*.

## Extremal graphs for Estrada Indices

Author: Eber Javier Lenés Puello  
Universidad del Sinú, Cartagena, Colombia  
E-mail: [eber.lenes@unisinu.edu.co](mailto:eber.lenes@unisinu.edu.co)

**Abstract:** Let  $G$  be a simple undirected connected graph. The signless Laplacian Estrada, Laplacian Estrada and Estrada indices of a graph  $G$  is the sum of the exponentials of the signless Laplacian eigenvalues, Laplacian eigenvalues and eigenvalues of  $G$ , respectively. The present work derives an upper bound for the Estrada index of a graph as a function of its chromatic number, in the family of graphs whose color classes have order not less than a fixed positive integer. The graphs for which the upper bound is tight is obtained. Additionally, an upper bound for the Estrada Index of the complement of a graph in the previous family of graphs with two color classes is given. A Nordhaus-Gaddum type inequality for the Laplacian Estrada index when  $G$  is a bipartite graph with color classes of order not less than 2, is presented. Moreover, a sharp upper bound for the Estrada index of the line graph and for the signless Laplacian index of a graph in terms of connectivity is obtained.

*Trabajo en conjunto con Enide Andrade, Exequiel Mallea-Zepeda, Jonnathan Rodríguez, María Robbiano.*

**Keywords:** Estrada index; Signless Laplacian Estrada index; Laplacian Estrada index; Chromatic number; Vertex connectivity; Edge connectivity; Line graph.

## References

- [1] Andrade, E., Lenés, E., Mallea-Zepeda, E., Robbiano, M., & Rodríguez, J. (2020). Extremal graphs for Estrada indices. *Linear Algebra and its Applications*, 588, 54-73.

# Teoría de Matrices Aleatorias en Datos de Series Temporales

Autor: Andy Rafael Domínguez Monterroza  
Universidad Tecnológica de Bolívar  
E-mail: [adominguez@utb.edu.co](mailto:adominguez@utb.edu.co)

**Resumen:** La Teoría de Matrices Aleatorias (TMA) tiene sus orígenes y desarrollo en el contexto de la física teórica a partir de los trabajos de Wigner, Dyson y Mehta [1-4]. Recientemente, la TMA ha suscitado interés en diversas aplicaciones inter disciplinarias que involucran grandes volúmenes de datos registrados en formato de series temporales. En esta charla se muestran los principios de la TMA sobre series de tiempo y algunas aplicaciones de una investigación en curso con datos de series empíricas en el contexto financiero y en el procesamiento de señales electroencefalográficas (EEG) de procesos cognitivos.

**Palabras claves:** Random Matrix Theory, RMT, time series.

## Referencias

- [1] Wigner, E. P. (1993). Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions i. In *The Collected Works of Eugene Paul Wigner* (pp. 524-540). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [2] Wigner, E. P. (1967). Random matrices in physics. *SIAM review*, 9(1), 1-23.
- [3] Dyson, F. J. (1962). Statistical theory of the energy levels of complex systems. III. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1), 166-175.
- [4] Mehta, M. L., & Dyson, F. J. (1963). Statistical theory of the energy levels of complex systems. V. *Journal of Mathematical Physics*, 4(5), 713-719.
- [5] Mehta, M. L. (1991). *Random matrices*, Second. Boston, MA: Academic Press Inc, 18, 562.

## La importancia de las Matemáticas en la Ingeniería

Autores: Julio Alberto Castro Garcés, Sandra Castro Llanos  
Universidad Tecnológica de Bolívar  
E-mail: [jcastro\\_09082005@yahoo.es](mailto:jcastro_09082005@yahoo.es)

**Resumen:** Esta es una charla donde podrás entender que tan importante son las Matemáticas en la Ingeniería, como el uso frecuente y exigente de ellas durante nuestros estudios, nos convierte en personas donde nuestros cálculos son cada vez más precisos alejándonos cada vez mas de cometer errores.

Analizaremos como esta ciencia de las Matemáticas puede influir en el comportamiento del ser humano, convirtiéndonos en personas más reflexivas, analíticas y sobre todo personas con una alta capacidad para afrontar con tranquilidad los problemas que se nos presenten, durante el desarrollo de nuestra profesión como ingenieros

**Palabras claves:** importancia de las matemáticas, ingeniería, comportamiento humano.

## Condiciones de Borde Sobre Campos Cuánticos: el Efecto Casimir

Autor: Alberto León Giraldo Zuluaga  
Universidad Tecnológica de Bolívar  
E-mail: [agiraldo@utb.edu.co](mailto:agiraldo@utb.edu.co)

**Resumen:** La imposición de condiciones de borde sobre campos cuánticos puede dar lugar a la aparición de fuerzas entre las superficies que imponen dichas condiciones. Este fenómeno se conoce como *efecto Casimir*, y está asociado exclusivamente a las fluctuaciones del estado fundamental de energía de dichos campos. En esta charla se discutirán diferentes condiciones de borde incluidas como potenciales dentro del formalismo de la integral funcional. Estos potenciales representan el acople o interacción entre el campo cuántico y las condiciones de borde impuestas.

**Palabras claves:** Efecto Casimir, energía del vacío, integral funcional.

### Introducción

La analogía entre los campos cuánticos y un número infinito de osciladores armónicos permite concluir que la energía más baja -asociada al vacío- no toma un valor nulo, sino que por el contrario esta sea divergente. Esta energía, conocida como *energía de punto cero*, no es observable y por lo tanto no tiene ninguna implicación física. Para tener alguna manifestación de esta se deben considerar situaciones diferentes al vacío libre, mediante objetos que impongan condiciones de borde sobre los campos. En tales sistemas, interesa conocer la respuesta ante variaciones de tales condiciones.

En 1948 H. B. G. Casimir consideró un ejemplo en el que esta modificación del vacío puede ser implementada a través de dos placas paralelas enfrentadas, separadas por una distancia. Si las placas se consideran como conductoras perfectas, esto impone una condición sobre los posibles modos del campo que se pueden propagar, dado que la componente tangencial del campo eléctrico y la normal del campo magnético se anulan en la superficie de un conductor perfecto en reposo. La idea de Casimir consideró, tal como ocurre en mecánica clásica, que solo las diferencias de energía tienen un significado físico. Por lo tanto, al estudiar como variaba la energía de vacío del campo electromagnético al cambiar la separación, encontró que aparece una fuerza atractiva entre las placas. Debido que en la electrodinámica clásica la fuerza entre dos placas neutras es cero, este efecto tiene un carácter netamente cuántico, conocido con el nombre de *Efecto Casimir*, y su estudio teórico ha tomado un especial protagonismo durante los últimos 40 años, surgiendo extensiones naturales del problema.

Una de ellas es considerar que las placas no son estáticas, sino que tienen algún tipo de fluctuación, por ejemplo se trata de un espejo oscilando. En este caso las condiciones de borde pasan a ser dependientes del tiempo y ocurre un fenómeno análogo a la producción de pares en el vacío debido a la acción de un campo externo. En este caso la acción del campo está representada por la frontera que oscila, y por lo tanto realiza trabajo mecánico sobre el vacío, transfiriendo, en las condiciones apropiadas, la energía necesaria para que se creen partículas reales. Dado que en este caso las condiciones de borde son no estacionarias, a este fenómeno se le denomina *Efecto Casimir dinámico*.

Adicional a este fenómeno, también el movimiento de las condiciones de borde puede generar efectos disipativos que no sean debidos a la excitación de partículas del campo de vacío. Por ejemplo, si ahora consideramos dos placas en movimiento relativo con velocidad constante en una dirección paralela a su superficie, se producirá una excitación en los grados de libertad microscópicos de las placas. Lo anterior

puede entenderse como una consecuencia del intercambio de fotones virtuales entre las dos superficies, generando una fricción de no contacto, ocurriendo un fenómeno que se conoce con el nombre de *fricción cuántica o fricción de Casimir*.

## Referencias

- [1] Schwartz, M. D. (2014). *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press.
- [2] Fosco, C. D., Giraldo, A., & Mazzitelli, F. D. (2017). Dynamical Casimir effect for semitransparent mirrors. *Physical Review D*, 96(4), 045004.
- [3] Farías, M. B., Fosco, C. D., Lombardo, F. C., Mazzitelli, F. D., & López, A. E. R. (2015). Functional approach to quantum friction: Effective action and dissipative force. *Physical Review D*, 91(10), 105020.

# Entropía de Permutación sobre Señales Electroencefalográficas (EEG) de Procesos Cognitivos

Autor: Fabián Elías Tafur Raad  
Universidad Tecnológica de Bolívar  
E-mail: [fabiantafur27@gmail.com](mailto:fabiantafur27@gmail.com)

**Resumen:** En la experticia clínica, la comparación y la lectura de un electroencefalograma EEG (electrocardiograma) muchas veces es insuficiente y demoran mucho tiempo. Las técnicas de la entropía y de la complejidad de los sistemas no lineales, se han presentado como herramientas para disminuir y precisar el tiempo y la lectura de los EEG, por su modelaje matemático, lo que permite tener mejor evidencia de sus complejidades. En este proyecto, presentamos la comparación entre la entropía de permutación PE y la entropía de permutación ponderada WPE aplicadas a los registros EEG de 36 estudiantes universitarios los cuales estaban fisiológicamente sanos y sin incapacidades para pertenecer a la muestra, teniendo en cuenta el comportamiento de los EEG antes de la actividad cognitiva y durante esta, con el fin de detectar la variabilidad que no es evidente con los métodos tradicionales clínicos. Estos métodos permiten comparar dichos estados que apoyándonos en el análisis estadístico podemos inferir cual método con sus parámetros adecuados se puede apreciar mejor dicha complejidad.

**Palabras claves:** electroencefalogram, permutation entropy, weighted permutation entropy.

## Introducción

El cerebro humano se estudia con gran interés debido a su complejidad y su capacidad de adaptación a los estímulos externos. En los últimos años ha sido notorio el avance significativo, dado que se han generado nuevas teorías y herramientas tecnológicas que se utilizan para tal fin.

Algunos recientes descubrimientos procedentes del campo de las neurociencias están arrojando luz sobre el complejo problema de cómo comprendemos y ejecutamos mentalmente tareas matemáticas [1].

Por otro lado, una pregunta que ha rondado por la mente de filósofos y psicólogos durante algunos años ha sido la de cuál es el origen de nuestra capacidad para pensar sobre el mundo en términos numéricos. El psicólogo suizo Jean Piaget [2] en uno de sus estallidos de pensamiento creía que esta capacidad aparecía alrededor de los 5 años de edad y necesitaba la presencia previa de algunas habilidades de razonamiento lógico, tales como la capacidad de razonar utilizando la propiedad transitiva y la llamada ‘conservación del número’, es decir, la capacidad de establecer correspondencias biunívocas entre dos conjuntos. Sin embargo, hoy se cuenta con gran cantidad de resultados que apoyan la hipótesis de que los niños, ya en el primer año de vida, cuentan con un conocimiento numérico rudimentario e independiente del lenguaje [3, 4].

Starkey y Cooper [3] fueron los primeros en demostrar que los niños de 6-7 meses de edad podían detectar cambios en el número de objetos presentados visualmente. Posteriormente, estos hallazgos se han replicado y ampliado.

En este sentido, se desglosa el paso a paso que conllevó a los autores de esta técnica de la entropía a su formulación e inmersión en el universo como una evidencia medible y comprobable en los sistemas dinámicos, como método de corroboración de complejidad en dichos sistemas.

$$H(m, \tau) = - \sum_{i=1}^N p(\pi_i) \log p(\pi_i) \quad (10)$$

La PE se puede utilizar para analizar datos arbitrarios del mundo real y es adecuado para capturar dinámicas complejas y abundante estructura temporal incrustada en sistemas biológicos, además por su ausencia de modelo y robusto al ruido y los artefactos, se puede aplicar para analizar datos biológicos. Y se ha aplicado con éxito al análisis EEG [23].

Por otro lado, comparamos la PE con WPE que viene dada como:

$$H_w(m, \tau) = - \sum_{i=1}^N p_w(\pi_i) \log p_w(\pi_i). \quad (11)$$

Se ha sugerido como una variante de entropía que utiliza un experimento probabilístico cuyos eventos primarios se caracterizan por sus pesos  $w_k$  [11].

Luego, puntualizar en la metodología de la investigación donde se describe la población y la selección de la muestra a la que se les aplicará las técnicas de entropía, como fueron seleccionadas las variables y la explicación del tratamiento de los datos.

Finalmente, detallaremos los resultados evidenciando la técnica adecuada para determinar y responder a nuestros objetivos planteando y justificar estadísticamente las diferentes discusiones presentadas y conclusiones.

## Referencias

- [1] Alonso, D., & Fuentes, L. J. (2001). Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático. *Revista de neurología*, 33(6), 568-576.
- [2] Piaget, J., & Szeminska, S. C. (1952). 1941. *The Child's Conception of Number*.
- [3] Starkey, P., & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210(4473), 1033-1035.
- [4] Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358(6389), 749-750.
- [5] Goñi, J. M<sup>a</sup>. (2008). 32-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática.
- [6] Pastells, Á. A. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años: Elementos para empezar bien* (Vol. 78). Narcea Ediciones.
- [7] Hidalgo Alonso, S., Maroto Sáez, A., & Palacios Picos, A. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación matemática*, 27(1), 65-90.
- [8] Bandt, C., & Pompe, B. (2002). Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. *Physical review letters*, 88(17), 174102.
- [9] Fadlallah, B., Chen, B., Keil, A., & Príncipe, J. (2013). Weighted-permutation entropy: A complexity measure for time series incorporating amplitude information. *Physical Review E*, 87(2), 022911.
- [10] Fernández-Carreira, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria* (Bachelor's thesis).
- [11] Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., ... & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116(1), 33-41.
- [12] Ashkenazi, S., & Henik, A. (2010). A disassociation between physical and mental number bisection in developmental dyscalculia. *Neuropsychologia*, 48(10), 2861-2868.
- [13] Olofsen, E., Sleight, J. W., & Dahan, A. (2008). Permutation entropy of the electroencephalogram: a measure of anaesthetic drug effect. *British journal of anaesthesia*, 101(6), 810-821.



## II Encuentro Matemático del Caribe

- [14] Deng, B., Cai, L., Li, S., Wang, R., Yu, H., Chen, Y., & Wang, J. (2017). Multivariate multi-scale weighted permutation entropy analysis of EEG complexity for Alzheimer's disease. *Cognitive Neurodynamics*, 11(3), 217-231.
- [15] Hussain, L., Aziz, W., Saeed, S., Shah, S. A., Nadeem, M. S. A., Awan, I. A., ... & Kazmi, S. Z. H. (2017). Complexity analysis of EEG motor movement with eye open and close subjects using multiscale permutation entropy (MPE) technique.
- [16] Tylová, L., Kukul, J., Hubata-Vacek, V., & Vyšata, O. (2018). Unbiased estimation of permutation entropy in EEG analysis for Alzheimer's disease classification. *Biomedical Signal Processing and Control*, 39, 424-430.
- [17] Arunkumar, N., Ram Kumar, K., & Venkataraman, V. (2016). Automatic detection of epileptic seizures using permutation entropy, Tsallis entropy and Kolmogorov complexity. *Journal of Medical Imaging and Health Informatics*, 6(2), 526-531.
- [18] Diaz, J. M., Mateos, D. M., & Boyallian, C. (2017). Complexity-Entropy maps as a tool for the characterization of the clinical electrophysiological evolution of patients under pharmacological treatment with psychotropic drugs. *Entropy*, 19(10), 540.
- [19] Braidot, N. (2013). Cómo funciona tu cerebro para Dummies. *Bogotá: Planeta*.
- [20] Mateos, D. M. (2016). Medidas de complejidad y información como herramientas para el análisis de series de temporales.
- [21] Bermúdez, A. N., Spinelli, E. M., & Muravchik, C. M. (2011). Detección de eventos en señales de EEG mediante Entropía Espectral. In *XVIII Congreso Argentino de Bioingeniería SABI*.
- [22] Murillo, J., Trejos, A., & OLAYA, P. C. (2003). Estudio del pronóstico de la demanda de energía eléctrica, utilizando modelos de series de tiempo. *Scientia et Technica*, 3(23).
- [23] Cao, Y., Tung, W. W., Gao, J. B., Protopopescu, V. A., & Hively, L. M. (2004). Detecting dynamical changes in time series using the permutation entropy. *Physical review E*, 70(4), 046217.
- [24] Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27(3), 379-423.
- [25] Shannon, C. E. (2001). A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE mobile computing and communications review*, 5(1), 3-55.
- [26] Traversaro Varela, F. (2018). Propiedades del estimador de la entropía de permutación y su aplicación en problemas de ingeniería.
- [27] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, 106(4), 620.
- [28] Frieden, B. R. (1990). Fisher information, disorder, and the equilibrium distributions of physics. *Physical Review A*, 41(8), 4265.
- [29] Kolmogorov, A. N. (1958). A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. In *Doklady Akademii Nauk* (Vol. 119, No. 5, pp. 861-864). Russian Academy of Sciences.
- [30] Sinai, I. (1959). On the concept of entropy for a dynamic system. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 124(4), 768-771.
- [31] Traversaro Varela, F. (2018). Propiedades del estimador de la entropía de permutación y su aplicación en problemas de ingeniería.
- [32] Zyma, I., Tukaev, S., Seleznov, I., Kiyono, K., Popov, A., Chernykh, M., & Shpenkov, O. (2019). Electroencephalograms during mental arithmetic task performance. *Data*, 4(1), 14.
- [33] Castro-Kuriss, C. (2019). Taller de Modelos Estadísticos con R. Obtenido de [https://www.researchgate.net/publication/331503559\\_Taller\\_de\\_Modelos\\_Estadisticos\\_con\\_R](https://www.researchgate.net/publication/331503559_Taller_de_Modelos_Estadisticos_con_R).

# Expansiveness, Shadowing and Markov Partition for Anosov Families

Authors: Jeovanny de Jesus Muentes Acevedo, Raquel Ribeiro  
 Universidad Tecnológica de Bolívar  
 E-mail: [jmuentes@utb.edu.co](mailto:jmuentes@utb.edu.co)

**Abstract:** We study Anosov families which are sequences of diffeomorphisms along compact Riemannian manifolds such that the tangent bundle split into expanding and contracting subspaces. In this paper we prove that a certain class of Anosov families: admit canonical coordinates, are expansive, satisfy the shadowing property, and exhibit a Markov partition.

**Keywords:** Anosov families, Anosov diffeomorphisms, Markov partitions, uniform hyperbolicity, non-autonomous dynamical systems.

## Introduction

An *Anosov family* is a (biinfinite) sequence of diffeomorphisms along a sequence of compact Riemannian manifolds, with an invariant sequence of splittings of the tangent bundle into expanding and contracting subspaces, and with a uniform upper bound for the contraction and lower bound for the expansion.

Anosov families were introduced by P. Arnoux and A. Fisher in [11], motivated by generalizing the notion of Anosov diffeomorphisms. The authors concentrated their studies on linear Anosov families on the two-torus. The first goal was to get a natural notion of completion for the collection of the set of all orientation-preserving linear Anosov diffeomorphisms on the two-torus (see [10, 11]). Authors have been study Anosov families. Young [15] proved that families consisting of  $C^{1+1}$  perturbations of an Anosov diffeomorphism of class  $C^2$  are Anosov families. Recently, Muentes, studied in his doctoral thesis, [2, 3, 4, 5], the Stable and Unstable Manifold Theorem for Anosov family and the stability structural of Anosov families on compact Riemannian manifolds. Ribeiro et al. in [6, 7, 8, 9] studied several types of shadowing.

In [1] we will study some properties related to hyperbolicity in the Anosov families: *expansiveness, Shadowing and Markov Partition* (see [12, 13, 14]).

## References

- [1] Muentes, J., & Ribeiro, R. (2020). Expansiveness, Shadowing and Markov Partition for Anosov Families. *arXiv preprint arXiv:2007.07424*.
- [2] Acevedo, J. J. M. (2017). *Famílias Anosov: estabilidade estrutural, variedades invariantes, e entropia para sistemas dinâmicos não-estacionários*. Doctoral Thesis, Instituto de Matemática e Estatística, University of São Paulo, São Paulo. doi:10.11606/T.45.2017.tde-06122017-113522. Retrieved 2020-09-08, from [www.teses.usp.br](http://www.teses.usp.br).
- [3] Acevedo, J. D. J. M. (2018). Openness of Anosov families. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 55(3), 575-591.
- [4] Acevedo, J. D. J. M. (2019). Local stable and unstable manifolds for Anosov families. *Hokkaido Mathematical Journal*, 48(3), 513-535.
- [5] Muentes Acevedo, J. D. J. (2019). Structural stability and a characterization of Anosov families. *Dynamical Systems*, 34(3), 399-421.


## II Encuentro Matemático del Caribe

- [6] Ribeiro, R. (2014). Hyperbolicity and types of shadowing for  $C^1$  generic vector fields. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 34(7), 2963.
- [7] Arbieto, A., Reis, J. E., & Ribeiro, R. (2015). On various types of shadowing for geometric Lorenz flows. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 45(4), 1067-1090.
- [8] Arbieto, A., & Ribeiro, R. (2011). Flows with the (asymptotic) average shadowing property on three-dimensional closed manifolds. *Dynamical Systems*, 26(4), 425-432.
- [9] Bessa, M., & Ribeiro, R. (2015). Conservative flows with various types of shadowing. *Chaos, Solitons & Fractals*, 75, 243-252.
- [10] Arnoux, P., & Fisher, A. M. (2002). Anosov families, random dynamics and the scenery flow. *preprint*.
- [11] Arnoux, P., & Fisher, A. M. (2005). Anosov families, renormalization and non-stationary subshifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(3), 661-710.
- [12] Bowen, R. *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971) 377- 397.
- [13] Bowen, R. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470 (Springer-Verlag, New York, 1975).
- [14] Fathi, A. *Expansiveness, hyperbolicity and Hausdorff dimension*. Comm. Math. Phys. 126 (1989), no. 2, 249 - 262.
- [15] Young L. S., *Stochastic stability of hyperbolic attractors*, Ergodic Theory Dynam. Systems 6 (1986), no. 311-319.

# Minicursos

# R como Generador de Gráficos Estadísticos y Matemáticos

Autor: Jorge Luis Villalba Acevedo  
Universidad Tecnológica de Bolívar  
E-mail: [jvillalba@utb.edu.co](mailto:jvillalba@utb.edu.co)

**Resumen:** En el desarrollo de este minicurso abordaremos aspectos básicos para crear gráficos estadísticos y matemáticos de alta calidad en , estos a su vez serán integrados en un documento pdf por medio del lenguaje [R Markdown](#) el cual nos permite crear documentos tales como libros, artículos y presentaciones beamer en  $\text{\LaTeX}$ , empezaremos nuestro interesante recorrido iniciando nuestra primera sesión en [R Studio cloud](#), en caso de que quiera trabajar desde su pc debe [descargar e instalar](#)  $\text{\LaTeX}$  Distributions: MiKTeX y  $\text{\LaTeX}$  Editor: Texmaker, paso seguido trabajaremos en la creación de tu primer documento acompañado de gráficas estadísticas y matemáticas para profesores y estudiantes.

**Palabras claves:** , , artículo, informes académicos, beamer.

## Referencias

- [1] Figuro, C. G. R. (2017). *El programa R, herramienta clave en investigación* (Vol. 23). Ed. Universidad de Cantabria.
- [2] Villalba, J. [Curso de R y LaTeX]. R Markdown and R Sweave [Archivo de video]. Recuperado de url: [https://www.youtube.com/channel/UCu2XC7GPSnlszkGyMmQeGw?sub\\_confirmation=1](https://www.youtube.com/channel/UCu2XC7GPSnlszkGyMmQeGw?sub_confirmation=1),(2016).

## La Resolución de Problemas y la Actividad Matemática

Autor: Blanca Margarita Parra Mosqueda

ENES-León UNAM

E-mail: [bparramosqueda@gmail.com](mailto:bparramosqueda@gmail.com)

**Resumen:** El aprendizaje de las matemáticas, en cualquier nivel educativo, tiene un propósito formativo tanto para la vida de todos los días como para el desempeño profesional futuro, en la vida adulta. El aprendizaje es gradual y parte de las situaciones más simples que aparecen en la vida diaria para ir incorporando conceptos y estrategias que dependen, siempre, del dominio alcanzado en las etapas previas. El docente que puede disponer del tiempo para la tarea de generar un repositorio de recursos para apoyar el desarrollo de sus estudiantes, ponerlos a disposición de los alumnos y otros docentes, animarlos a utilizarlos y a generar respuestas a problemas cotidianos (dependiendo del entorno de cada uno) está abriéndoles las puertas para el desarrollo de habilidades y estrategias útiles en la vida futura. Por otro lado, es de importancia capital desarrollar en los alumnos la capacidad de observación, la creatividad, el pensamiento crítico e independiente que les permita enfrentar cada reto haciendo uso de esas habilidades, de sus saberes y de los recursos materiales y tecnológicos que encuentren disponibles, cualquiera que sea el lugar y las circunstancias.

**Palabras claves:** enseñanza, matemáticas, resolución de problemas, docencia, habilidades.

## Resolución de Problemas de Olimpiadas en Matemáticas

Autor: Luis Fernando Cáceres Duque  
Universidad de Puerto Rico, Mayaguez  
E-mail: [luis.caceres1@upr.edu](mailto:luis.caceres1@upr.edu)

**Resumen:** En este minicurso se estudiarán problemas de olimpiadas matemáticas para todos los niveles, desde la escuela primaria hasta la escuela superior. Se trabajarán problemas principalmente de álgebra, geometría, teoría de números, combinatoria y juegos y estrategias. Estas son las áreas principales que se incluyen en la mayoría de olimpiadas internacionales de matemáticas.

### Referencias

- [1] Association Kangourou sans Frontières. <http://www.aksf.org>
- [2] Cáceres-Duque, L. F., Said, J. N., & Lamonedá, R. S. (2017). Combinatorial Problems in the Mathematical Olympiad of Central America and the Caribbean. In *Competitions for Young Mathematicians* (pp. 123-142). Springer, Cham.
- [3] Rúa Álvarez, C. M., Cáceres Duque, L. F., Castillo Narvaez, D. Y., & Paz Mora, K. N. (2019). Los Cuadriláteros Cíclicos Como Herramienta en la Resolución de Problemas.

# Dinámica de Enfermedades Infecciosas: Un Análisis desde las Matemáticas

Autor: Laura Victoria Forero Vega  
Magíster de la Universidade de São Paulo  
E-mail: [lau\\_forero85@hotmail.com](mailto:lau_forero85@hotmail.com)

**Resumen:** Un modelo matemático es una representación a través de ecuaciones, funciones o fórmulas matemáticas de un fenómeno, dependiendo del objetivo buscado y del diseño del mismo modelo puede servir para predecir el valor de las variables en el futuro, hacer hipótesis, evaluar los efectos de una determinada política o actividad, entre otros objetivos a partir del razonamiento lógico.

La dinámica de la propagación de una enfermedad infecciosa es una situación que ya estuvo presente a través de la historia, particularmente este año con el COVID-19, causando además de muertes también cambios socio-económicos a nivel global, lo cual resulta de interés para la modelación matemática con el fin de la detección, prevención, terapia y control de este fenómeno.

Este curso está diseñado como una introducción a la modelación de enfermedades infecciosas: La primera sesión consiste en una recopilación de conceptos, reseña histórica y presentación de los modelos matemáticos más sencillos. La segunda sesión se ocupa de mostrar diferentes modelos de propagación en redes, particularmente el modelo de Dirk Brockmann y Dirk Helbing expuesto en el artículo The Hidden Geometry of Complex, Network-Driven Contagion Phenomena [1].

**Palabras claves:** Modelos matemáticos, enfermedades infecciosas, epidemia, redes, propagación.

## Referencias

- [1] Brockmann, D., & Helbing, D. (2013). The hidden geometry of complex, network-driven contagion phenomena. *science*, 342(6164), 1337-1342.
- [2] Anderson, R. M., Anderson, B., & May, R. M. (1992). *Infectious diseases of humans: dynamics and control*. Oxford university press.
- [3] Bailey, N. T. (1975). *The mathematical theory of infectious diseases and its applications*. Charles Griffin & Company Ltd, 5a Crendon Street, High Wycombe, Bucks HP13 6LE.



## Elementos de Astrofísica Estelar y Supergigantes Rojas

Autor: Aura de las Estrellas Ramírez Arévalo  
Fundación Universitaria San Mateo  
E-mail: [aura.rama@gmail.com](mailto:aura.rama@gmail.com)

**Resumen:** En este minicurso se expondrán conceptos básicos de la astrofísica estelar tales como: el brillo y la luminosidad de una estrella, la temperatura efectiva, el flujo y la magnitud, y cómo estos conceptos los podemos ver relacionados en el diagrama de Hertzsprung-Russell. Se explicará qué es el espectro de una estrella y cómo se emplea para clasificarla. También se hablará brevemente sobre la evolución estelar, en particular de las estrellas masivas. Se dará una introducción a las propiedades físicas de las estrellas supergigantes rojas y veremos cómo los conceptos vistos anteriormente se pueden aplicar a la caracterización de las cuatro supergigantes rojas del cúmulo estelar *Westerlund 1*, y en últimas, cómo ellos nos permiten estimar la masa y la edad de estas estrellas.

**Palabras claves:** luminosidad, temperatura efectiva, magnitud, clasificación espectral, supergigantes rojas.

### Referencias

- [1] LeBlanc, F. (2011). *An introduction to stellar astrophysics*. John Wiley & Sons.
- [2] Arévalo, A. L. E. R. (2018). *The Red Supergiants in the Supermassive Stellar Cluster Westerlund 1*. Master's Dissertation, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, University of São Paulo, São Paulo. doi:10.11606/D.14.2019.tde-12092018-161841. Retrieved 2020-09-08, from [www.teses.usp.br](http://www.teses.usp.br).

# Modelos Matemáticos en Epidemiología: Transporte Humano y Efectos Económicos del Distanciamiento Social

Autor: César Augusto Nieto Acuña  
Universidad de los Andes  
E-mail: [ca.nieto13@uniandes.edu.co](mailto:ca.nieto13@uniandes.edu.co)

**Resumen:** La propagación de una enfermedad posee serias consecuencias desde varios puntos de vista. En este curso exploraremos los métodos cuantitativos para estimar la dinámica temporal de la propagación de una epidemia y algunas de sus consecuencias económicas. Primero, exploraremos los modelos matemáticos de compartimentos utilizados para modelar la propagación de la enfermedad, posteriormente una introducción a los métodos de movilidad basados en matriz de transporte y cómo acoplarlos al modelo de propagación. Finalmente acoplaremos nuestras ecuaciones un modelo macroeconómico cuantificando cómo cambia el consumo en la sociedad. Al unir estos modelos, podremos estimar cómo las medidas de distanciamiento pueden detener la propagación de la infección afectando, sin embargo, el consumo y por tanto la economía en una sociedad.

## Referencias

- [1] Dalziel, B. D., Pourbohloul, B., & Ellner, S. P. (2013). Human mobility patterns predict divergent epidemic dynamics among cities. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 280(1766), 20130763.
- [2] Eichenbaum, M. S., Rebelo, S., & Trabandt, M. (2020). *The macroeconomics of epidemics* (No. w26882). National Bureau of Economic Research.

# Modelo de Regresión Logística Binario Aplicado al Área de la Salud

Autor: Luzneyda Ballesteros Peinado  
M&B Resultores Data Analysis  
E-mail: [mbconsultorias1@gmail.com](mailto:mbconsultorias1@gmail.com)  
URL: [M&B Resultores Data Analysis](#)

**Resumen:** Los modelos logísticos tienen mucha utilidad en diferentes campos (salud, economía, ingeniería, etc), ya que permiten validar o rechazar hipótesis de investigación. Con este trabajo se busca desarrollar la rigurosidad matemática necesaria para dichos modelos lo cual será de gran contribución para futuras investigaciones en especial en el área de la salud. En este cursillo se describe teóricamente los modelos de regresión logística, cuya variable de interés asume uno de los 2 niveles. Se sigue el siguiente esquema: se presenta la función de verosimilitud, las probabilidades puntuales de la variable aleatoria de interés, el vector score, la matriz de información, sus propiedades, ejemplo aplicado en el área de la salud y futuras investigaciones haciendo uso de dicho modelo.

**Palabras claves:** Regresión Logística, Likelihood ratio test, vector score, matriz de información.

## Introducción

Son muchas las situaciones y distintos campos de las ciencias (salud, economía, ingeniería, etc) en lo que es probable establecer relación de dependencia entre las variables. Este comportamiento, por lo general se describe mediante un modelo estadístico, donde los más usados son los modelos lineales pero estos tienen restricciones ya que la variable dependiente e independientes deben ser numéricas y en muchos instrumentos de investigación encontramos variables categóricas tales (presencia o ausencia de cierta enfermedad), ante esto se han desarrollado muchas técnicas para analizar datos donde la variable dependiente es categórica, tales modelos son los de regresión no lineal, como en el caso de los modelos de regresión logística (binaria, multinomiales y el ordinal). Según Llinás [3], los modelos logísticos son adecuados para situaciones donde se quiere explicar la probabilidad  $p$  de ocurrencia de un evento de interés por medio de los valores de ciertas variables explicativas. Si se asocia al evento de interés una variable dicotómica, entonces, esta es una variable de Bernoulli con esperanza condicional  $p$ . Es importante también recalcar que la variable respuesta puede asumir uno de los dos niveles (por ejemplo: enfermo, sano). Este tipo de modelo y el que describe Agresti [1] y Hosmer [2] son casos particulares de los modelos lineales generalizados, abreviados por GLM.

## Referencias

- [1] Agresti, A. (2018). *An introduction to categorical data analysis*. John Wiley & Sons.
- [2] Hosmer Jr, D. W., Lemeshow, S., & Sturdivant, R. X. (2013). *Applied logistic regression* (Vol. 398). John Wiley & Sons.
- [3] Llinás, H. (1998). *Modelos Logísticos: Estimaciones, Pruebas de Hipótesis y Selección de Modelos* (Doctoral dissertation, Tesis de Maestría, Universidad del Valle, Cali, Colombia).

EDICIONES  
**UTB**



Universidad  
Tecnológica  
de Bolívar  
CARRANZA DE BÓLIVAR