

# LA DEMANDA DE TRANSPORTE PÚBLICO EN COLOMBIA, 2000 – 2010

DANIEL TORO GONZÁLEZ  
VÍCTOR MANUEL CANTILLO MAZA  
AARÓN ESPINOSA ESPINOSA\*

## RESUMEN

El conocimiento detallado de la demanda de transporte público es indispensable en la planeación urbana. Este estudio presenta una estimación de la demanda por transporte público en Colombia para el periodo 2000 – 2010. El modelo de demanda se estima usando información agregada por ciudad, tipo de vehículo y nivel de servicio. A partir de un modelo de utilidad individual que permite observar las preferencias reveladas, se identifican los parámetros agregados de demanda y se calcula la elasticidad de la demanda respecto a determinantes como el costo del servicio, el nivel de ingreso, la frecuencia y la velocidad. Los resultados señalan que la demanda por transporte público en Colombia es inelástica al costo y responde positivamente a cambios en la velocidad promedio y en la frecuencia de la ruta. Los resultados del trabajo permiten caracterizar el transporte público en Colombia como un bien inferior.

**Palabras clave:** Colombia, estimación de demanda, transporte público.

**Clasificaciones JEL:** L11, L91, R41.

---

\* Daniel Toro González es Vicerrector Académico y Profesor Titular de la Universidad Tecnológica de Bolívar (UTB), en Cartagena; Víctor Cantillo Maza es Profesor Titular de la Universidad del Norte, Barranquilla; y Aarón Espinosa Espinosa es Profesor Asociado en la UTB. Correos electrónicos: dtoro@utb.edu.co; vcantillo@uninorte.edu.co y aespinosa@utb.edu.co. Los autores agradecen el apoyo y los comentarios de Diego Silva Ardila, Andrey Zaikin, Gerson Javier Pérez, Fabio Rueda y Vidhura Tennekoon. Recibido: septiembre 2 de 2018; aceptado: noviembre 19 de 2018.

## ABSTRACT

### *Demand for Public Transportation in Colombia, 2000 – 2010*

Detailed knowledge of the demand for public transportation is indispensable for urban planning. In this study we estimate demand for public transportation in Colombia in the period 2000 – 2010. The demand model is estimated using aggregate information for each city, type of vehicle and service level. Using an individual utility model, we identify the revealed preferences of consumers. We then estimate the aggregate parameters of demand and the elasticities with respect to variables such as the cost of transportation, income, speed and frequency. The results show that the demand for public transportation in Colombia is inelastic to costs and elastic to changes in the average speed and in the frequency of routes. The results also show that public transportation in Colombia is an inferior good.

**Key words:** Colombia, public transportation, demand estimation.

**JEL Classifications:** L11, L91, R41.

## I. INTRODUCCIÓN

El transporte público es un servicio indispensable para la calidad de vida en las ciudades modernas. No es posible potenciar el bienestar de los habitantes de las urbes actuales sin tener resueltos sus problemas de movilidad. Hoy, la mayoría de la gente que trabaja y estudia en las ciudades colombianas usa diferentes sistemas de transporte público: taxis, buses, busetas y microbuses, servicios que funcionan dentro de la legalidad. La eficiencia y cobertura del sistema de transporte afectan la productividad urbana, la generación de riqueza e, incluso, la distribución de los ingresos. Además, un sistema de transporte organizado y eficiente puede generar notorias externalidades positivas mediante la organización del espacio público y el amueblamiento urbano, entre otros (Bocarejo, *et al.*, 2009; de Rus, *et al.*, 2003; Small y Winston, 1999; Small y Verhoef, 2007; Peñaloza, 2005; Glaeser, 2011; Graham, 2007; y Venables, 2007).

A pesar de los múltiples beneficios de contar con un eficiente sistema público de transporte de pasajeros, las ciudades colombianas han sufrido durante años los

problemas generados por esquemas que favorecen la sobreoferta de vehículos con bajas velocidades de desplazamiento, mala calidad del servicio y el caos vehicular (Estache y Gómez-Lobo, 2005; Serebrisky *et al.*, 2009). Por una parte, el esquema de remuneración utilizado tradicionalmente —en el cual los pagos de los conductores dependen del número de pasajeros que recogen— llevaron a la llamada “guerra del centavo”. Por otra, los esquemas de funcionamiento de las empresas de transporte urbano incentivan el exceso de oferta de vehículos en operación, lo que reduce la rentabilidad por vehículo y genera bajos niveles de mantenimiento, escasa reposición de vehículos y, por ende, envejecimiento de la flota.

Los citados problemas estuvieron presentes en los sistemas de transporte urbano colombianos durante casi todo el siglo xx. En algunas ciudades no pocos han sido superados, pero en otras el panorama ha empeorado por la aparición de modos de transporte informales que generan considerables externalidades negativas. La aparición de sistemas de transporte de buses con carriles exclusivos, fórmula implementada inicialmente en Bogotá, ha marcado una nueva etapa en el transporte urbano de pasajeros en el país. Este tipo de sistemas, los llamados *Bus Rapid Transit* (BRT), es ampliamente conocido en el mundo. Ante la exitosa experiencia de la capital colombiana con el sistema de transporte Transmilenio, el Gobierno Nacional decidió implementar este sistema en otras ciudades del país. Hacia mediados de 2013 ya estaban en operación total o parcial seis de los siete sistemas propuestos para los principales centros urbanos colombianos y al año 2018 ya todos están en funcionamiento, en diferentes etapas de implementación.

Entre los años noventa y 2018 se pusieron en marcha en Colombia los Sistemas Integrados de Transporte Masivo (SITM): Transmilenio en Bogotá; Megabús en Pereira; Metrocali en la capital del Valle del Cauca; Metroplus en Medellín; Transmetro en Barranquilla; Metrolínea en Bucaramanga, y, el de más reciente funcionamiento, Transcaribe en Cartagena.

Aunque es fácil identificar el beneficio obtenido en las ciudades donde se han puesto en marcha los SITM, la mayor parte de las capitales colombianas aún reclaman soluciones a los problemas de movilidad. El presente trabajo tiene por objeto identificar los parámetros que gobiernan la demanda de transporte público en Colombia. Como resultado de este ejercicio se podrán calcular las elasticidades para conocer de qué manera y en qué magnitud reacciona la demanda a determinantes como los costos del servicio, los ingresos y la velocidad. De esta forma, se podrá analizar cómo cambia el consumo de distintos tipos y niveles de transporte público formal ante cambios en las variables descritas. Para ello, se usa la Encues-

ta de Transporte Urbano de Pasajeros (ETUP) del Departamento Administrativo Nacional de Estadística, que hasta ahora no ha sido aplicada a ejercicios de modelación de demanda.

## II. REVISIÓN DE LA LITERATURA

A escala internacional existen diversos trabajos sobre sistemas de transporte público urbano de pasajeros. La mayoría emplea técnicas microeconómicas, destacándose los aportes del economista Daniel McFadden. En general, estas investigaciones sobre transporte público hacen estimaciones de demanda para calcular la elasticidad en el consumo del servicio. Entre ellos se destacan Baum (1973); Johnson (1976); Frankena (1978); de Rus (1990); de Jong y Gunn (2001); y Bento, *et al.* (2005).

Con base en la estimación de la demanda de transporte público, Baum (1973) propone la implementación de un sistema de transporte público gratuito en Alemania. Por su parte, Dajani, *et al.* (1975) examinan de manera muy detallada la relación costo-beneficio de un sistema de transporte masivo en Atlanta, y la posibilidad de implementar un sistema de transporte masivo subsidiado con efectos redistributivos para favorecer a los grupos más pobres de la población. Williams (1979) presenta un modelo de producción en el cual se validan empíricamente los problemas relacionados con la provisión de transporte público en Estados Unidos; en especial, analiza los déficits operativos de las empresas de transporte público. Finalmente, Bento, *et al.* (2005) desarrollan un análisis del impacto de la estructura urbana sobre la propiedad vehicular y la distancia recorrida por los vehículos de transporte público.

A su vez, Oum, *et al.* (1992) revisan evidencia empírica de estimación de demanda de transporte tanto de pasajeros como de carga durante la década de 1980, usando los dos enfoques de evaluación de demanda estimables: marshalliana (no compensada) y hicksiana (compensada). Los autores resaltan la imposibilidad del cálculo de la demanda compensada en el caso del transporte de pasajeros, ya que depende del nivel de utilidad de los consumidores, una característica no observable. Los autores señalan diferencias frente al transporte de carga que sí es observable, puesto que representa un problema de producción. Para Oum, *et al.* (1992), los estudios no suelen identificar si las elasticidades calculadas corresponden a la elasticidad ordinaria, derivada de las marshallianas, o a la elasticidad compensada

que se obtiene de la demanda hicksiana. El análisis del presente trabajo se basa en la utilidad de los consumidores. En consecuencia, se calcularán las elasticidades derivadas de la estimación de la demanda marshalliana.

Ante la falta de fuentes de datos que permitan estimaciones microeconómicas, en Colombia se han realizado estudios orientados a analizar la demanda de transporte público con un enfoque principalmente macroeconómico. En la década de los sesenta, Paul Roberts y David Kresge (1968) llevaron a cabo un ejercicio de simulación de la demanda de transporte colombiana con base en un modelo macroeconómico. Su trabajo exploraba la relación existente entre una economía subdesarrollada y su sistema de transporte, y resaltaba la importancia de las inversiones en este sector sobre el crecimiento del PIB (Roberts and Kresge, 1968).

En la misma línea, Tobón y Galvis (2009) presentan un análisis descriptivo del sector transporte en Colombia. Los autores muestran el comportamiento procíclico entre el PIB nacional y el consumo privado de transporte, y también la inexistencia de complementariedad entre el transporte público tradicional y los sistemas de transporte masivo. Ese mismo año Bocarejo, *et al.* (2009) prospectan al año 2040 el grado de desarrollo del sector, en especial, del transporte público urbano de pasajeros, y resaltan las estrategias de largo plazo que favorecen el crecimiento económico del país. En general, ambos trabajos ofrecen una perspectiva macroeconómica del sector y su desempeño pasado, presente y futuro. Este enfoque contrasta notablemente con el análisis microeconómico que predomina en los estudios internacionales de la demanda de transporte.

Otros estudios en Colombia se han orientado al análisis de regiones y ciudades. En particular, los estudios regionales reflejan la preocupación por el incremento del uso de modos de transporte informales. Uno de estos, Escobar (2008), señala que “el transporte colectivo urbano [...] ha sufrido un doble fenómeno: incremento de las flotas, con clara disminución de la ocupación media de los autobuses, y de [...] vehículos tipo buseta y microbús”, fenómeno que parece ser el común denominador en no pocas ciudades intermedias colombianas.

En los análisis de ciudades, Posada y González (2010) presentan una metodología de estudio para identificar la demanda de transporte público de pasajeros en rutas de transporte rurales en el municipio antioqueño de Guarne. Los autores señalan que, para el caso estudiado “existe un déficit en las frecuencias de servicio del transporte formal haciendo que los usuarios usen el informal, siendo esta demanda insatisfecha aproximadamente el 15% de la demanda total (*Ibid.*, p. 106)”. En el caso de Cartagena, Toro-González, *et al.* (2005) analizaron las preferencias

por transporte público en la ciudad e identifican la disponibilidad, velocidad y costo del servicio como los factores más relevantes en la selección del modo de transporte.

Los estudios sobre transporte público urbano de pasajeros en las principales ciudades del país han surgido a la par de la iniciativa del Gobierno Nacional de construir SITM similares al Transmilenio bogotano. La implementación de los sistemas de transporte masivo requirió de estudios de tráfico y de flujo de pasajeros realizados en su mayoría por el Departamento Nacional de Planeación (DNP) y publicados como documentos Conpes. Para una revisión de esta literatura, consúltese el citado trabajo de Toro-González, *et. al.* (2005).

Además, cabe resaltar la existencia de otros estudios orientados a estudiar facetas críticas del transporte público, en particular, de modos de transporte informales como el mototaxismo (Sánchez, 2011). Sin embargo, no hay estudios de la demanda nacional de transporte público formal urbano en Colombia.

Para el presente estudio, la aproximación metodológica corresponde a un enfoque microeconómico, que ofrece una ventana al comportamiento del consumidor y sus decisiones, pero en un marco de información pública agregada. Este enfoque se debe a que en Colombia no hay series de datos individuales de consumo y a que el DANE publica datos agregados. La metodología usada en este trabajo es muy apropiada para el análisis de demanda en condiciones de información incompleta.

### III. MODELOS DE ESTIMACIÓN DE DEMANDA

Existen varios tipos de modelo para analizar la demanda de transporte. Wardman (1998) presenta una revisión del desarrollo algunos y detalla los resultados obtenidos de los estudios respecto al valor del tiempo.

Barff, *et al.* (1982), por su parte, plantean que el análisis del comportamiento de los consumidores de modos de transporte obedece al alto costo de los sistemas de transporte basados en automóviles. Lo autos tienen alto consumo de combustible, generan daños ecológicos y pérdidas de tiempo debido a la congestión. El estudio de Barff, *et al.* (1982) revisa los modelos de comportamiento en la elección del tipo de transporte urbano y diferencia entre modelos agregados y desagregados. Este rasgo es pertinente para Colombia, donde según datos de encuestas del DANE, la probabilidad de poseer un vehículo de las personas de mayores ingresos

(aquellas en el decil más alto) son hasta 17 veces más altas que las personas en el decil más bajo (DANE, 2016 y 2017). Es evidente la diferencia de ingresos entre usuarios del sistema público de transporte y propietarios de autos particulares.

Otro enfoque para analizar el comportamiento del consumidor, en especial cuando se habla de demanda de transporte público, es el uso de modelos de elección discreta, tipo *logit*, que permiten estimar parámetros de sustitución entre bienes o servicios (Steckel y Vanhonacker, 1988; Ashiabor, *et al.*, 2002). Estos últimos estudian la demanda de transporte entre ciudades de Estados Unidos, y emplean modelos anidados y mixtos para predecir las participaciones de mercado de automóviles y transporte aéreo.

El uso de los modelos de elección discreta es amplio. Viton (1982) los usa para determinar el ingreso o aparición de nuevas empresas de transporte en sistemas urbanos. El modelo de Viton representa una ciudad circular con un área residencial y otra comercial, y simula la demanda con transportadores que maximizan beneficios. Por su parte, Wardman (1994) busca identificar el método preferido de predicción del impacto de cambios en calidad en la demanda por viajes férreos entre ciudades.

Para el presente estudio se ha optado por modelos de elección discreta agregados a fin de explicar la participación de mercado y hechos relacionados. La estimación de demanda se realiza en presencia de variables no observables, metodología desarrollada inicialmente por Berry (1994) y aplicada con éxito en el análisis de participaciones de empresas en el mercado. Es el caso del análisis del mercado de automóviles (Berry, 1994) y de cereales (Nevo, 2001). Estas metodologías han sido abordadas de manera muy clara por Nevo (2000), Train (2002), y Rasmusen (2007), lo cual facilita su aplicación en el presente caso.

## **A. Un modelo para Colombia**

Esta sección se basa en esencia en los aportes de Berry (1994), quien propuso una estrategia de identificación de parámetros de la demanda en presencia de variables no observables, que puede usarse en contextos como el colombiano, donde se presenta con mayor facilidad la condición de exogeneidad de las tarifas (costo del servicio), que son fijadas por el Estado. Esta metodología no ha sido utilizada en el análisis de modelos de transporte en Colombia a pesar de su fácil aplicación, amplia utilidad y buen ajuste conceptual al problema de estimación.

No obstante, como se mostrará más adelante, se incluyó el uso de variables instrumentales con el fin de controlar por la posible endogeneidad del precio.

Supóngase que la utilidad del consumidor  $i$  derivada de la opción de transporte  $j$  depende tanto de las características del servicio como de las del consumidor (Ecuación 1).<sup>1</sup>

$$U = f(x_j, \xi_j, p_j, v_i, \theta_i) \quad (1)$$

Donde,

$x_j$  representa las características observables de los distintos modos de transporte,

$\xi_j$  representa otras características del modo de transporte seleccionado no observables por el investigador,

$p_j$  son los precios o tarifa de cada modo de transporte, determinados de manera exógena por los gobiernos locales, y

$\theta$  representa los parámetros de la demanda.

El término  $v_i$  captura elementos específicos de cada consumidor que no son observables para el investigador. El método usado en la estimación requiere supuestos paramétricos sobre las preferencias específicas de los consumidores.

Nos enfocaremos en una especificación simple de la función de utilidad con coeficientes constantes. En esta especificación, la función de utilidad indirecta del consumidor  $i$  por el modo  $j$  esta dada por la Ecuación 2.

$$u_{ij} = x_j\beta - \alpha p_j + \xi_j + \epsilon_{ij} \quad (2)$$

Nótese que los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  están representados como constantes entre consumidores. El término  $\xi_j$  puede ser interpretado como el promedio de la valoración de los consumidores por las características no observables del modo de transporte tales como la calidad, mientras que  $\epsilon_{ij}$  representa la distribución de las preferencias o gustos de los consumidores respecto a la media.

Denotamos el nivel de utilidad media del modo de transporte  $j$  como lo indica la Ecuación 3.

---

<sup>1</sup> Las "opciones de transporte" indican cada opción de movilización en transporte público que resulta de la combinación entre tipos y niveles de transporte que son específicos para cada área metropolitana o ciudad y año.



$$\delta_j = x_j\beta - \alpha p_j + \xi_j \quad (3)$$

Es común en los modelos *logit* y *probit* tradicionales suponer que la variación en los gustos de los consumidores sea incluida sólo mediante el término aditivo  $\epsilon_{ij}$ , que es considerado como idéntico e independientemente distribuido (*iid*) entre consumidores y opciones, en este caso, modos de transporte.

## B. El tamaño del mercado y el bien externo

La medida del número de consumidores en un mercado es representada por  $M$ . En el presente ejercicio este parámetro se determina respecto al tamaño de la población. Entonces, la demanda potencial de transporte público está dada por la Ecuación 4.

$$q_j = M \psi_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) \quad (4)$$

Donde cada consumidor realiza un viaje en el modo de transporte que le genera la máxima utilidad. Esto significa que, condicionando la participación en el mercado ( $\psi$ ) en las características ( $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$ ) y los precios  $\mathbf{p}$ , el consumidor  $i$  decide cuál modo de transporte  $j$  usa.

Además de los modos de transporte en competencia  $j = 1, \dots, N$ , se supone la existencia de un modo externo  $j = 0$  que recoge todas las otras opciones de transporte diferentes a las categorías formales de transporte público urbano de pasajeros incluidas en el análisis. Los consumidores pueden escoger entre viajar en el modo externo como alternativa a la elección de un modo de transporte “interno”.

La diferencia consiste en que el precio del modo externo no responde a los precios de los modos internos. En ausencia de un modo externo, los consumidores se verían forzados a escoger uno de los modos internos, por lo que la demanda dependería sólo de las diferencias en precios. Por modos internos entenderemos en el presente ejercicio todas las opciones formales de transporte público de pasajeros. El modo externo, por su parte, se define como un modo compuesto por una variedad de opciones, formales e informales, de las cuales no se tiene información en la base de datos, como por ejemplo moto-taxis, colectivos y automóviles particulares, entre otros.

La presencia de un bien externo con una participación de mercado  $s_0$  significa que las observaciones relacionadas con la oferta de viajes de las  $N$  rutas

$(q_1, \dots, q_N)$  no son suficientes para calcular la participación de mercado ( $s_j$ ) de las  $N + 1$  alternativas. Sin embargo, si el tamaño total del mercado es observable, entonces  $s_j$  puede ser calculado de manera sencilla como  $s_j = q_j/M$ .

Por ejemplo, en el caso del mercado de automóviles Berry, *et al.* (1995) determinan el tamaño de mercado por el número de hogares en la economía, mientras que Nevo (2001) usa la población total para el caso del mercado de cereales. Cuando existe información para diferentes mercados, como en el presente caso,  $M$  puede ser determinado como dependiente de datos agregados (como la población) que varía entre mercados y que afecta el nivel agregado de producción. Para el presente trabajo supondremos que  $M$  es observado y representa una demanda potencial equivalente a toda la población de cada ciudad y área metropolitana que realiza dos viajes al día.

### C. Estimación del nivel de utilidad media

El modelo de elección discreta usado en el presente trabajo es completamente tradicional. Se diferencia del desarrollado por Berry (1994) en que la presencia de  $\xi_j$  implica normalmente resolver un difícil problema de endogeneidad, dado que las características no observables de los productos se relacionan con el precio del bien. Sin embargo, este no es el caso del presente análisis. Dado que los precios son determinados de manera exógena por los gobiernos locales, no hay relación entre los precios y las características no observables de cada modo de transporte.

Siguiendo el planteamiento de Berry (1994), se pueden representar las participaciones de mercado como funciones solo de los niveles de utilidad media (Ecuación 5).

$$S_j = \psi_j(\delta) \quad (j = 1, \dots, N) \quad (5)$$

En el valor verdadero de  $\delta$  y de las participaciones de mercado  $s$ , estas ecuaciones deben satisfacerse exactamente. La diferencia entre las participaciones de mercado observadas  $s_j$  y la función de participación de mercado  $\psi_j(\delta)$  es pertinente. El punto en cuestión es que los niveles de utilidad media  $\delta_i$  contienen el error agregado  $\xi_j$ . Por lo tanto, como está condicionado en los valores reales de  $\delta$  (y dada una densidad,  $f$ ), el modelo debe ajustarse a los datos de manera exacta. Mientras las características no observables  $\xi_j$  sean ortogonales a los factores que

afectan  $\delta$ , el procedimiento de estimación será un modelo sencillo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO). En los casos en que  $\xi_j$  no es ortogonal (por ejemplo, a los precios) es necesario el uso de variables instrumentales.<sup>2</sup>

El ajuste correcto del modelo condicionado en los niveles de utilidad media  $\delta$  se explota a través de un sencillo procedimiento de estimación de MCO. Si el vector  $s = \psi(\delta)$  es invertido para producir el vector  $\delta = \psi^{-1}(s)$ , entonces las participaciones de mercado observadas (además del supuesto de distribución de  $\psi$ ) determinan de manera única la utilidad promedio del consumidor para cada bien.

Bajo algunas condiciones de regularidad no muy estrictas de la función de densidad de las variables no observables, se establece la existencia de un vector  $\delta^*(s)$  único, que satisface  $s = \psi(\delta^*(s))$ . Berry muestra que al condicionar la utilidad del bien externo,  $\delta_j$ , haciéndola igual a cero, la función de participación de mercado es recíproca (uno-a-uno).

También se establece que para cada posible vector observado de participaciones de mercado  $s$ , existe un vector de utilidad media  $\delta \in \mathbb{R}^{N-1}$  que creará el vector observado mediante la relación  $s = \psi(\delta)$ . Por lo tanto, todo vector observado de participaciones de mercado puede ser explicado por sólo un vector de utilidad media. Es así como para cualquier función de densidad  $f(\cdot, x)$  es posible calcular el vector  $\delta$  sólo con información de las participaciones de mercado. Cuando la densidad de es conocida exactamente (por ejemplo, *logit* en el presente caso), de tal manera que la función de participación no depende de parámetros desconocidos diferentes al vector  $\delta$ , entonces los niveles de utilidad media estimados pueden ser tratados como conocidas transformaciones no lineales de las participaciones de mercado,  $s$ . De la Ecuación 5 para los valores reales de  $(\alpha, \beta)$ :

$$\delta_j(s) = x_j\beta - \alpha p_j + \xi_j \quad (6)$$

Para estimar  $(\beta, \alpha)$  se puede tratar la Ecuación 6 como una de estimación de regresión de  $\delta_j(s)$  respecto a  $(x_j, p_j)$  tratando  $\xi_j$  como un error no observable. El hecho de que  $\delta_j(s)$  sea una transformación de los datos originales de participaciones de mercado no es tan relevante.

<sup>2</sup> La ventaja del método planteado por Berry (1994) es que al integrar sobre los consumidores suponiendo una distribución dada, el modelo puede ser transformado a una ecuación lineal sobre la cual pueden aplicarse los métodos tradicionales de variables instrumentales en caso de existir endogeneidad.

En el modelo de productos diferenciados existe una ecuación de demanda de la forma presentada en la Ecuación 6 para cada modo de transporte en cada mercado. Dado que contamos con una muestra suficientemente grande de mercados independientes (22 ciudades/áreas metropolitanas),<sup>3</sup> se pueden obtener estimadores consistentes de los parámetros de demanda al tratar cada mercado como una observación separada. Esta aproximación permite contemplar estructuras de correlación arbitrarias al interior de los mercados entre factores no observables de demanda.

En el caso específico del modelo *logit*, es fácil obtener los niveles de utilidad media como función de las participaciones de mercado observadas. Por tanto, se inicia el proceso con la función de utilidad representada por la Ecuación 2 y se supone que  $\epsilon_{ij}$  es iid entre modos de transporte y pasajeros con una función de distribución de valores extremos de la forma:  $\exp(-\exp(-\epsilon))$ , por lo que la participación del mercado del producto  $j$  estaría dada por la Ecuación 7.

$$\psi_j(\delta) = e^{\delta_j} / \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right) \quad (7)$$

Con la utilidad media del bien externo normalizada a cero, el cociente entre la utilidad del bien consumido y el bien externo puede ser representado como lo indica la Ecuación 8.<sup>4</sup>

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \delta_j \equiv x_j \beta - \alpha p_j + \xi_j \quad (8)$$

De esta manera,  $\delta_j$  se determina directamente y de manera única por medio de un cálculo algebraico relacionado con las participaciones de mercado. Por lo tanto, en el caso de *logit* multinomial, solo se requiere un ejercicio de regresión mediante MCO de las diferencias en logaritmos de las participaciones de mercado respecto a  $(x_j, p_j)$ .

Si bien el modelo *logit* produce patrones de sustitución entre alternativas poco razonables, en el presente ejercicio nos enfocaremos en la estimación de las elasticidades-precio y de ingresos, y también de elasticidades respecto a otros atributos

<sup>3</sup> Armenia, Barranquilla A.M., Bogotá A.M., Bucaramanga A.M., Cartagena, Cali A.M., Centroccidente A.M., Cúcuta A.M., Florencia, Ibagué, Montería, Neiva, Pasto, Popayán, Quibdó, Riohacha, Santa Marta, Sincelejo, Tunja, Valledupar, Villavicencio, Valle de Aburrá. A.M.

<sup>4</sup> Ver el Anexo para los detalles de la derivación.

como velocidad y frecuencia, sin hacer énfasis en los patrones de sustitución entre modos de transporte.

La Ecuación 8 se estima para cada mercado en cada año analizado. Entre las variables relacionadas con las características observables del producto  $x_i$  se incluyen: tarifa, velocidad, frecuencia, Índice de Pasajeros por Kilómetro (IPK), longitud de la ruta, vehículos, Producto Interno Bruto *per cápita* (PIB pc), población, tamaño de la ciudad, densidad poblacional, variedad de modos de transporte, existencia de SITM en los centros urbanos examinados. Las estadísticas descriptivas de las principales variables son presentadas en el Cuadro 1.

Para cada período y localización, la elasticidad precio de la demanda fue calculada siguiendo a Nevo (2000), como lo indica la Ecuación 9.

$$\eta_j = \frac{\partial s_j}{\partial p_j} \frac{p_j}{s_j} = -\alpha p_j (1 - s_j) \quad (9)$$

Donde,

$\alpha$  es el coeficiente del precio derivado del modelo de efectos fijos (tercera columna del Cuadro 2, más adelante),

$p_j$  es la tarifa del modo de transporte  $j$ , y

$s_j$  es la participación observada de mercado del modo de transporte  $j$ .

#### IV. DATOS

Se usó información de la Encuesta de Transporte Urbano de Pasajeros (ETUP) del DANE, correspondiente a los 11 años comprendidos entre 2000 y 2010. Según la documentación oficial, la encuesta se desarrolla en 23 ciudades capitales analizando el transporte público municipal prestado en el perímetro urbano, sin incluir el servicio de taxi, ni otros servicios informales como colectivos y mototaxis.

La información se recolecta mensualmente e incluye información sobre el tipo de vehículo, nivel de servicio, parque automotor, viajes y kilómetros recorridos, pasajeros movilizados y tarifa diaria vigente. La encuesta incluye información sobre diferentes tipos de vehículo (bus, buseta, microbus, metro, SITM), así como de niveles de servicio (colectivo, corriente, intermedio, ejecutivo, super-ejecutivo, entre otros). Como antecedente de su uso, Tobón y Galvis (2009) hicieron un análisis descriptivo trimestral de la encuesta de transporte público urbano del DANE.

Con base en la información disponible es posible construir algunas variables adicionales útiles en el análisis de la demanda de transporte público en Colombia,

**CUADRO 1**  
*Estadísticas descriptivas de las variables usadas en el modelo*

Variables	Tipo	Unidades	Fuente	Min	Max	Promedio
Participación en el Mercado	Dependiente	Proporción	Cálculos propios	0	1	0.261
Tarifa	Independiente	Miles de pesos corrientes	ETUP-DANE	0.11	1.80	0.86
Velocidad	Independiente	Kilómetros por hora	Cálculos propios	0.55	58.2	15.02
Frecuencia	Independiente	Vueltas por Vehículo	Cálculos propios	0.053	12.25	1.925
IPK	Independiente	Índice de Pasajeros por Kilómetro	Cálculos propios	0.125	29.18	2.005
Longitud de la Ruta	Independiente	Kilómetros	Cálculos propios	3.9	171.4	28.8
Vehículos	Independiente	Promedio diario de vehículos en servicio	ETUP-DANE	0.5	6,074	496
PIBpc	Independiente	PIB pc Departamental (Industria + Servicios) Miles de millones de pesos	Cuentas Nacionales - DANE	0.413	5.72	1.143
Población	Independiente	Millones de habitantes	DANE	0.112	8.63	1.692
Tamaño de la ciudad	Independiente	Miles de kilómetros cuadrados	Varios	0.121	4.49	1.779
Densidad	Independiente	Miles de habitantes por kilómetro cuadrado	Cálculos propios	0.054	6.93	2.419
Veriedad	Independiente	Tipos de vehículo y nivel de servicio por ciudad y año	Cálculos propios	1	13	5.043
SITM	Independiente	Dummy 1 si hay SITM	ETUP-DANE	0	1	0.132

**Fuentes:** Elaboración propia con base en datos de la Encuesta de Transporte Urbano de Pasajeros (ETUP) del DANE.

como velocidad, frecuencia e índice de pasajeros por kilómetro, entre otros. La información se encuentra organizada en forma de panel de datos.

La combinación entre tipo de vehículo, nivel de servicio y ciudad permite establecer un código de identificación único para cada modo de transporte particular en cada ciudad y para el cual se dispone de información a lo largo de 11 años. Por ejemplo, bus-ejecutivo-Cartagena o buseta-corriente-Barranquilla corresponden a un modo de transporte específico para el cual se observó información sobre las diferentes variables: viajes recorridos, kilómetros recorridos, pasajeros movilizados, tarifa, etc.

Además, la base de datos incorpora información sobre dos SITM de las áreas metropolitanas de Bogotá y Centro-occidente. Las diferentes combinaciones entre tipos de vehículo, niveles de servicio, ciudades y años generan un panel desbalanceado con 922 observaciones.

La tarifa promedio observada en las 22 ciudades/áreas metropolitanas observadas fue de COP \$1.117 para 2010, último año de la base de datos.<sup>5</sup> Entre las áreas con tarifas más altas están Cartagena, Montería y las áreas metropolitanas de Bucaramanga, Centro-occidente y Valle de Aburrá, en las cuales la tarifa fue de 1.400 pesos, en promedio. Con tarifas inferiores a COP \$1.000 aparecen Quibdó, Sincelejo y Riohacha.

En términos de la variedad en la oferta (tipos y niveles) es notoria la relación entre el tamaño de la ciudad y las posibilidades de transporte que se ofrecen – una forma de economías de aglomeración. Así, por ejemplo, Bogotá ofrece a sus habitantes 10 posibles tipos de transporte y seis distintos niveles, mientras que Armenia sólo ofrece dos tipos de vehículo (buses y busetas) en un nivel de servicio (corriente).

Con respecto a la velocidad, el promedio general para todas las ciudades es de 14,6 kilómetros por hora (kms/hora), aunque las diferencias entre ciudades son amplias: mientras que el promedio de velocidad en el área metropolitana de Centro-occidente (Pereira, Dosquebradas y La Virginia) fue de 21 kms/hora, en el caso de Quibdó fue de sólo 5 kms/hora.

Según los tamaños de flota y población de cada ciudad, es posible establecer que, en promedio, cada vehículo atiende una población de 3.334 personas. O, de manera equivalente, por cada 100.000 habitantes una ciudad incrementa su flota de vehículos diarios en servicio en un promedio de 30 vehículos.

---

<sup>5</sup> Por falta de información se eliminó de la base de datos el Área Metropolitana Centro.

## V. RESULTADOS

Suponiendo la ortogonalidad de los errores ( $\xi_j$ ) y la invertibilidad de la función que relaciona la participación de mercado observada y la estimada, se realizó la estimación del modelo presentado en la Ecuación 8. Se debe resaltar que, ante la limitada información disponible sobre modos de transporte informales y privados, los resultados derivados del ejercicio de modelación deben ser interpretados tomando el conjunto de los modos de transporte. En este caso, modos como mototaxis, colectivos y automóvil particular estarían incluidos dentro de la opción denominada 'bien externo', con respecto a la cual se interpretan los resultados.

Se estimaron cuatro formas del modelo presentado en la Ecuación 8. En la primera columna del Cuadro 2, se presentan los resultados del modelo usando como variable las participaciones de mercado condicionadas, sin tener en cuenta la existencia del bien externo. Las tres últimas columnas presentan la estimación de demanda usando como variable dependiente el cociente entre la participación de mercado no condicionada y la participación del bien externo, tal como lo presenta Berry (1994). En particular, en las columnas tres y cuatro se explota la estructura de panel de datos al estimar los modelos mediante las metodologías de efectos fijos y efectos aleatorios.<sup>6</sup>

Uno de los resultados a resaltar es que en los modelos que se ajustan más a la estructura de los datos la tarifa es negativa y estadísticamente significativa. Esto significa que la función de demanda, como se espera, tiene pendiente negativa. En otras palabras, los incrementos en la tarifa generan una reducción en la participación de mercado del transporte público urbano formal respecto al modo externo.

Otro resultado que resalta es el coeficiente obtenido para los ingresos (PIB pc) cuando se realiza la estimación mediante panel de datos. Los coeficientes son negativos y estadísticamente significativos, lo que indica que el transporte público de pasajeros es un bien inferior: un aumento de ingresos de los consumidores reduce el consumo de este servicio pues lo reemplazan por otras modalidades de transporte.

---

<sup>6</sup> El test de Hausman mostró la existencia de efectos fijos individuales (interceptos) para cada modo de transporte en cada ciudad. La estimación del modelo como panel de datos con efectos fijos elimina la posibilidad de contar con las características de la ciudad como variables explicativas. Por lo tanto el tamaño de la ciudad, la densidad poblacional y la existencia de SITM no son incluidas en esta estimación.



**CUADRO 2**  
*Resultados de la estimación de los modelos*

Variable	OLS	MNL	FE	RE
Tarifa	0,048*	-0,549***	-0,475**	-0,699***
	0,100	0,003	0,023	0,000
Velocidad	0,007***	0,090***	0,026*	0,052***
	0,000	0,000	0,065	0,000
Frecuencia (vpv)	0,011	-0,026	0,630***	0,306
	0,233	0,656	0,000	0,000
IPK	0,007***	0,102***	0,271***	0,159***
	0,006	0,000	0,000	0,000
Longitud de ruta	-0,003***	-0,027***	-0,013**	0,020***
	0,002	0,000	0,049	0,001
Vehículos	0,000***	0,001***	0,001***	0,001***
	0,000	0,000	0,000	0,000
PIBpc	0,015	0,089	0,546***	-0,368***
	0,245	0,255	0,000	0,002
Población	-0,041***	0,283***	0,341	0,103
	0,000	0,000	0,144	0,372
Tamaño ciudad	0,012	-0,139***		-0,355***
	0,141	0,004		0,003
Densidad	-0,010*	-0,098***		-0,356***
	0,068	0,006		0,000
Variedad	-0,035***	0,016	0,063*	0,066**
	0,000	0,633	0,071	0,040
SITM	0,085*	0,720***		-0,185
	0,051	0,008		0,762
Constante	0,310***	-4,102***	-5,899***	-3,741***
	0,000	0,000	0,000	0,000
R <sup>2</sup>	33,7%	37%	39,1%	37,2%
Observaciones	922	922	922	922

**Notas:** 1) Coeficientes y p-valores. 2) Significancia: \*: p < 0,1; \*\*: p < 0,05; \*\*\*: p < 0,001.

**Fuentes:** Elaboración propia con base en datos de la ETUP del DANE.

Los resultados obtenidos respecto a otras variables muestran que las utilidades marginales, por ejemplo, de la velocidad y la frecuencia, son positivas. Esto sugiere que mejoras en estos atributos producen incrementos en la participación de mercado del transporte público.

Los parámetros obtenidos de la estimación presentada en la tercera columna (efectos fijos) se usaron para calcular la elasticidad-precio y la elasticidad-ingreso, así como la elasticidad respecto de otros atributos como la velocidad y la frecuencia. El cálculo de la elasticidad se realizó con base en la Ecuación 9. Como se muestra en el Cuadro 3, los resultados indican que el transporte público de pasajeros es inelástico a cambios en los precios. En concreto, un incremento del 10% en la tarifa de algún modo de transporte genera una reducción del 3,9% en su participación en el mercado. Este resultado es muy similar al encontrado por Frankena (1978) y otros, para quienes la elasticidad-precio encontrada es de  $-0,33$ .

CUADRO 3  
*Colombia: Intervalos de confianza de las elasticidades de demanda por transporte público*

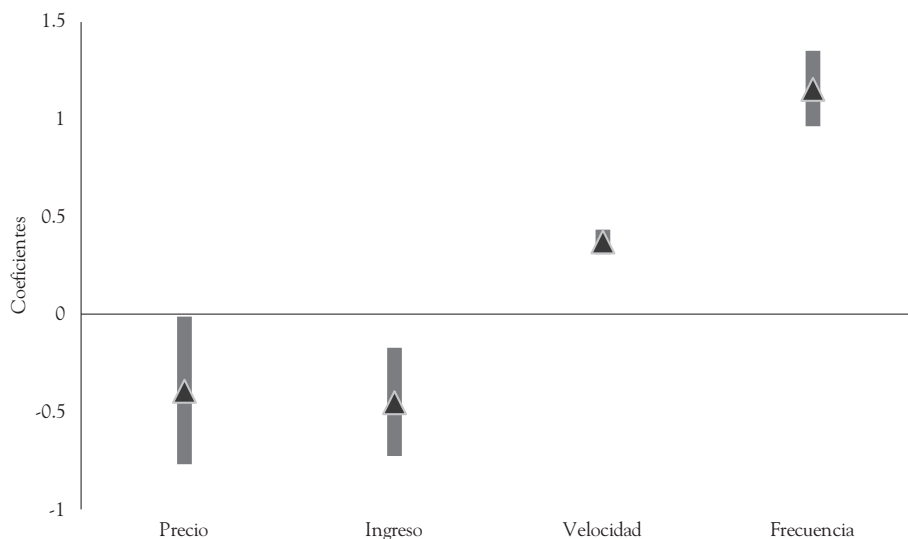
Elasticidad	Inferior	Coefficiente	Superior
Precio	-0,734	-0,391	-0,048
Ingreso	-0,688	-0,450	-0,211
Velocidad	0,347	0,370	0,393
Frecuencia	0,997	1,155	1,312

**Fuentes:** Elaboración propia con base en datos de la ETUP del DANE.

Como se señaló antes, el transporte público urbano formal de pasajeros es un bien inferior. Otra manera de examinar esto es mediante la estimación de la elasticidad-ingreso de la demanda. En este caso se halla que un aumento del 10% en los ingresos genera una reducción de la demanda en 4,5%.

Los atributos de cada modo de transporte, velocidad y frecuencia, tienen elasticidades positivas. En el caso de la velocidad, un incremento del 10% en la velocidad genera un incremento de 3,7% en la demanda. En el caso de la frecuencia, el resultado muestra alta sensibilidad: ante un aumento del 10% en la frecuencia de la ruta, la demanda se incrementa en 11,5%. Los cálculos de las elasticidades con sus respectivos intervalos de confianza se presentan en el Gráfico 1.

GRÁFICO 1  
 Colombia: Intervalos de confianza de las elasticidades  
 de demanda por transporte público (95%)



Fuente: Cuadro 3.

## VI. CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo señalan la importancia del diseño apropiado de una política de precios para los SITM que operan para dar solución a los graves problemas de atención y movilidad del transporte público en algunas ciudades de Colombia. Sin embargo, se debe resaltar la importancia de variables como la velocidad, la frecuencia y el índice de pasajeros por vehículo para diseñar políticas públicas de transporte adecuadas.

Con respecto a los ingresos, el resultado según el cual el transporte público es un bien inferior (elasticidad-ingreso menor que cero) permite afirmar que una política de subsidio al transporte público urbano formal actúa como medida redistributiva del ingreso. En este sentido, un subsidio al transporte público generaría beneficios directos para los consumidores con menores niveles de ingreso y contribuye a la ampliación del tamaño del mercado de transporte en las ciudades analizadas.

La existencia de externalidades positivas de un sistema de transporte organizado refuerza la idea de subsidiar las tarifas. La teoría económica plantea que un bien con externalidades positivas que se deja al mercado puede tener una provisión inferior a la socialmente deseable. Por lo tanto, un subsidio directo puede aumentar la oferta del bien y acercarla a su nivel óptimo. Esto demostraría que el transporte público es similar al mercado de la educación y de investigación, innovación y desarrollo de actividades científicas, las cuales deben ser subsidiadas para garantizar un mayor nivel de desarrollo.

Actualmente existen fuentes de recursos que permitirían implementar el subsidio del transporte público, como ocurre con la sobretasa a la gasolina y otros que pueden ser aplicados, como la sobretasa al gas. Un sistema de transporte público subsidiado con estos recursos no sólo fomentaría el desarrollo de las ciudades colombianas sino que, al mismo tiempo, ayudaría a reducir la desigualdad en la distribución en los ingresos.

## REFERENCIAS

- Ashiabor, Senanu, Hojong Baik, and Antonio Trani (2007), “Logit Models for Forecasting Nationwide Intercity Travel Demand in the United States”, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol. 2007, No. 1.
- Barff, Richard, David Mackay, and Richard W. Olshavsky (1982), “A Selective Review of Travel-Mode Choice Models”, *Journal of Consumer Research*, Vol. 8, No. 4.
- Baum, Herbert J. (1973), “Free Public Transport”, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 7, No. 1.
- Bento, Antonio M., Maureen L. Cropper, Ahmed Mushfiq Mobarak, and Katja Vinha (2005), “The Effects of Urban Spatial Structure on Travel Demand in the United States”, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 87, No. 3.
- Berry, Steven T. (1994), “Estimating Discrete-Choice Models of Product Differentiation”, *The RAND Journal of Economics*, Vol. 25, No. 2.
- Berry, Steven, James Levinsohn, and Ariel Pakes (1995), “Automobile Prices in Market Equilibrium”, *Econometrica*, Vol. 63, No. 4.
- Bocarejo, Juan Pablo, Juan Carlos Echeverry, Jorge Acevedo, Germán Ospina, Germán C. Lleras, y Álvaro Rodríguez Valencia (2009), *El transporte como soporte al desarrollo de Colombia: Una visión al 2040*, Bogotá: Universidad de Los Andes.

- Dajani, Jarir, M. Michael Egan, and Marjorie B. McElroy (1975), "The Redistributive Impact of the Atlanta Mass Transit System", *Southern Economic Journal*, Vol. 42, No. 1.
- Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) (2016), *Encuesta de Calidad de Vida*, Bogotá: DANE.
- Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) (2017), *Gran Encuesta Integrada de Hogares*, Bogotá: DANE.
- de Jong, Gerard, and Hugh Gunn (2001), "Recent Evidence on Car Cost and Time Elasticities of Travel Demand in Europe", *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 35, No. 2.
- de Rus, Ginés (1990), "Public Transport Demand Elasticities in Spain", *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 24, No. 2.
- de Rus, Ginés, Javier Campos, y Gustavo Nombela (2003), *Economía del transporte*, Barcelona: Antoni Bosch.
- Escobar García, Diego Alexander (2008), *Instrumentos y metodología de planes de movilidad y transporte en las ciudades medias colombianas*, Tesis Doctoral, Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña.
- Estache, Antonio, and Andrés Gómez-Lobo (2005), "Limits to Competition in Urban Bus Services in Developing Countries", *Transport Reviews*, Vol. 25, No. 2.
- Frankena, Mark W. (1978), "The Demand for Urban Bus Transit in Canada", *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 12, No. 3.
- Glaeser, Edward (2011), *Triumph of the City: How Urban Spaces Make us Human*, London: Macmillan.
- Graham, Daniel J. (2007), "Agglomeration, Productivity and Transport Investment", *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 41, No. 3.
- Johnson, Marc A. (1976), "Estimating the Influence of Service Quality on Transportation Demand", *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 58, No. 3.
- Nevo, Aviv (2000), "A Practitioner's Guide to Estimation of Random Coefficients Logit Models of Demand", *Journal of Economic & Management Strategy*, Vol. 9, No. 4.
- Nevo, Aviv (2001), "Measuring Market Power in the Ready-to-Eat Cereal Industry", *Econometrica*, Vol. 69, No. 2.
- Oum, Tae Hoon, W. G. Waters II, and Jong-Say Yong (1992), "Concepts of Price Elasticities of Transport Demand and Recent Empirical Estimates: An Interpretative Survey", *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 26, No. 2.
- Peñaloza, Enrique (2005), "The Role of Transport in Urban Development Policy", in Deutsche Gesellschaft für Internationale Zusammenarbeit (GTZ) (editor),

- Sustainable Transport: A Sourcebook for Policy-makers in Developing Cities*, Eschborn: GTZ.
- Posada Henao, John Jairo, y Carlos Alberto González Calderón (2010), “Metodología para el estudio de demanda de transporte público de pasajeros en zonas rurales”, *Revista de la Facultad de Ingeniería*, No. 53.
- Rasmusen, Eric (2007), “The BLP Method of Demand Curve Estimation in Industrial Organization”.
- Roberts, Paul O., and David T. Kresge (1968), “Simulation of Transport Policy Alternatives for Colombia”, *The American Economic Review*, Vol. 58, No. 2.
- Sánchez Jabba, Andrés (2011), “La economía del mototaxismo: El caso de Sinccelejo”, *Documentos de Trabajo sobre Economía Regional*, No. 140, Centro de Estudios Económicos Regionales (CEER), Banco de la República.
- Serebrisky, Tomás, Andrés Gómez-Lobo, Nicolás Estupiñán, and Ramón Muñoz-Raskin (2009), “Affordability and Subsidies in Public Urban Transport: What Do We Mean, What Can Be Done?”, *Transport Reviews*, Vol. 29, No. 6.
- Small, Kenneth A., and Clifford M. Winston (1999), “The Demand for Transportation: Models and Applications”, in José Gómez-Ibáñez, William B. Tye, and Clifford Winston (editors), *Essays in Transportation Economics and Policy. A Handbook in honor of John R. Meyer*, Washington: Brookings Institution Press.
- Small, Kenneth A., and Erick T. Verhoef (2007), *The Economics of Urban Transportation*, London and New York: Routledge.
- Steckel, Joel H., and Wilfried R. Vanhonacker (1988), “A Heterogeneous Conditional Logit Model of Choice”, *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 6, No. 3.
- Tobón A., Alexander, y Diana Galvis (2009), “Análisis sobre la evolución reciente del sector de transporte en Colombia”, *Perfil de Coyuntura Económica*, No. 13.
- Toro-González, Daniel, Jorge Alvis Arrieta, y William Arellano Cartagena (2005), “Transporte público en Cartagena: ¿Qué factores determinan las preferencias de los usuarios?”, *Economía & Región*, Vol. 2, No. 3.
- Train, Kenneth (2002), *Discrete Choice Methods with Simulation*, New York: Cambridge University Press.
- Venables, Anthony J. (2007), “Evaluating Urban Transport Improvements: Cost-Benefit Analysis in the Presence of Agglomeration and Income Taxation”, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 41, No. 2.
- Viton, Philip A. (1982), “Privately-Provided Urban Transport Services: Entry Deterrence and Welfare”, *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 16, No. 1)

Wardman, Mark (1994), "Forecasting the Impact of Service Quality Changes on the Demand for Inter-Urban Rail Travel", *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 28, No. 3.

Wardman, Mark (1998), "The Value of Travel Time: A Review of British Evidence", *Journal of Transport Economics and Policy*, Vol. 32, No. 3.

Williams, Martin (1979), "Firm Size and Operating Costs in Urban Bus Transportation", *The Journal of Industrial Economics*, Vol. 28, No. 2.

## ANEXO

### *Derivación de la Ecuación 8*

Retomando la Ecuación 7:

$$\&_j(\boldsymbol{\delta}) = e^{\delta_j} / \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right) \quad (7)$$

Usando la igualdad representada en la Ecuación 5 según la cual se pueden representar las participaciones de mercado como funciones de los niveles de utilidad media  $s_j = \&_j(\boldsymbol{\delta})$ :

$$s_j = e^{\delta_j} / \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right)$$

Aplicando logaritmo para cada bien  $j$ :

$$\ln(s_j) = \delta_j - \ln \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right)$$

Con la utilidad media del bien externo normalizada a cero:

$$\ln(s_0) = 0 - \ln \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right)$$

Finalmente, la diferencia entre las participaciones de mercado de cada bien  $j$  y el bien externo pueden representarse como:

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \left[ \delta_j - \ln \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right) \right] - \left[ 0 - \ln \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right) \right]$$

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \delta_j - \ln \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right) + \ln \left( \sum_{k=0}^N e^{\delta_k} \right)$$

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \delta_j$$

Por lo tanto la Ecuación 8 puede ser finalmente escrita como:

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \delta_j \equiv x_j \beta - \alpha p_j + \xi_j$$