

**GUIA DE ESTUDIO**  
**“COMUNICACIONES I”**

**CLARA PATRICIA HERRERA CANTILLO**  
**JOHAN SEBASTIAN JIMENEZ HOYOS**

**UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE BOLIVAR**  
**FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA**  
**PROGRAMA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**  
**CARTAGENA DE INDIAS D. T. Y C.**

**2008**

**GUIA DE ESTUDIO**  
**“COMUNICACIONES I”**

**CLARA PATRICIA HERRERA CANTILLO**  
**JOHAN SEBASTIAN JIMENEZ HOYOS**

**Trabajo de monografía presentado como requisito para optar al título de**  
**Ingeniero Electrónico**

**DIRECTOR**  
**ING. GONZALO LÓPEZ**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**  
**PROGRAMA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**  
**CARTAGENA DE INDIAS D. T. Y C.**

**2008**

**NOTA DE ACEPTACIÓN:**

---

---

---

---

---

**Firma del Presidente del Jurado**

---

**Firma del Jurado**

---

**Firma del Jurado**

Cartagena de Indias D. T. y C., Julio de 2008

Señores

**COMITÉ CURRICULAR**

Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Universidad Tecnológica de Bolívar

Ciudad

**Respetados señores:**

De la manera más atenta nos dirigimos a ustedes, con el propósito de informarles que la monografía titulada “**Guía de Estudio COMUNICACIONES I**” ha sido desarrollada conforme a los objetivos establecidos.

Como autores de la monografía consideramos que el trabajo es satisfactorio y solicitamos sea estudiado, evaluado y posteriormente aprobado por ustedes.

En espera de los resultados de dicha evaluación.

Atentamente,

---

**Clara Patricia Herrera Cantillo**

**CC N° 1.047.367.280 de Cartagena**

---

**Johan Sebastián Jiménez Hoyos**

**CC N° 1.050.944.084 de Turbaco**

Cartagena de Indias D. T. y C., Julio de 2008

Señores

**COMITÉ CURRICULAR**

Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Universidad Tecnológica de Bolívar

Ciudad

Cordial Saludo.

A través de la presente me permito poner en consideración para su respectiva evaluación, la monografía titulada “**Guía de estudio COMUNICACIONES I**”, la cual fue realizada por los estudiantes CLARA PATRICIA HERRERA CANTILLO y JOHAN SEBASTIAN JIMENEZ HOYOS, a quienes asesoré en su ejecución.

Atentamente;

---

**GONZALO LÓPEZ**

**Asesor de Monografía**

## AUTORIZACIÓN

Cartagena de Indias D. T. y C., Julio de 2008

Yo CLARA PATRICIA HERRERA CANTILLO, identificada con cedula de ciudadanía N° 1.047.367.280 de Cartagena, autorizo a la UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE BOLIVAR, para hacer uso de mi monografía y publicarlo en el catalogo en línea de la biblioteca.

Atentamente;

---

**CLARA PATRICIA HERRERA CANTILLO**

**CC N° 1.047.367.280 de Cartagena**

## **AUTORIZACIÓN**

Cartagena de Indias D. T. y C., Julio de 2008

Yo JOHAN SEBASTIÁN JIMÉNEZ HOYOS, identificado con cedula de ciudadanía N° 1.050.944.084 de Turbaco (Bolívar), autorizo a la UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE BOLIVAR, para hacer uso de mi monografía y publicarlo en el catalogo en línea de la biblioteca.

Atentamente;

---

**JOHAN SEBASTIÁN JIMÉNEZ HOYOS**

**CC N° 1.050.944.084 de Turbaco (Bolívar)**

Dedico este trabajo con mucho amor, principalmente a Dios quien es mi fortaleza y mi esperanza de vida, quien me levanta en los momentos de angustia. A mi madre Hilda Cantillo que desde el cielo me cuida y me guía, quien fue y será la luz de mi vida, de quien aprendí que todo se puede si se anhela con el corazón; a mi padre Benjamín Herrera, ejemplo de templanza y sabiduría, quien me guió en el camino de la enseñanza, fue mi apoyo incondicional y pudo ver el esfuerzo infinito que he hecho para llegar a ser quien soy hoy. A mis hermanas del alma Tivisay, Brigida y Rina quienes me demostraron que en la Fé y en la confianza se logran las metas, en especial mi hermanita Tivi, quien es el motivo de mi lucha, a mi abuela y a toda mi familia en Valledupar, quien sin dudarlo me recibían en vacaciones para ayudarme a recargar las fuerzas para seguir adelante.

Agradezco a toda mi familia en general, pero en especial a todos aquellos que algún día pensaron o dijeron que no podría, pues les agradezco, porque eso me motivó a demostrarme y ademostrales que si puedo lograr todo lo que quiera en la vida.

A todos los que fueron y son mis amigos y compañeros, a la familia UNITECNOLOGICA, a todos mis profesores que estuvieron presentes en este esfuerzo; a todos ellos les dedico este trabajo.

*“Más valen dos que uno, porque obtienen más fruto de su esfuerzo. Si caen, el uno levanta al otro... Uno puede ser vencido, pero dos pueden resistir. ¡La cuerda de tres hilos no se rompe fácilmente” .*

Eclesiastés 4:9,10,12 (NVI)

**CLARA PATRICIA HERRERA CANTILLO**

## **AGRADECIMIENTOS**

Principalmente agradecemos a Dios y a nuestras familias por su apoyo, amor y consideración, en el transcurso de la vida.

Damos gracias a la Universidad Tecnológica de Bolívar, específicamente a los programas de Ingeniería Eléctrica y Electrónica por brindarnos un cuerpo directivo y docente que nos proporcionó todos los conocimientos y experiencias necesarios para nuestra formación como profesionales.

Al director de programa Jorge Duque, por su compromiso con proceso formativo de educación superior; a Gonzalo López, asesor y amigo, gracias por mostrarnos el derrotero a seguir en este reto que nos propusimos asumir, quien además nos acompañó en el proceso y desarrollo de este trabajo.

Agradecemos a los profesores Eduardo Gómez, William Cuadrado, Oscar Acevedo, Luís Villa, Enrique Vanegas entre otros, quienes aportaron con sus conocimientos y experiencia a nuestro desarrollo académico y personal.

A Mary, secretaria de la facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, por toda su colaboración, información y paciencia.

A nuestra gran amiga Diana Roca, ofrecemos nuestra gratitud ya que en momentos de dificultad atendió nuestro llamado de auxilio y tendió sobre nosotros su mano amiga para sacar adelante este proyecto.

A nuestros compañeros de clases y amigos, a todos los que de alguna u otra forma ayudaron o estuvieron presentes en el transcurso de nuestra formación.

**GRACIAS!!!**



**GUIA DE ESTUDIO**  
**COMUNICACIONES I**

**CLARA PATRICIA HERRERA**

**JOHAN SEBASTIAN JIMENEZ**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR**

**2008**

# PROLOGO

Con el presente trabajo se intentó producir un material de apoyo para estudiantes de Ingeniería Electrónica, ya sea de la Universidad Tecnológica de Bolívar o de cualquier otra institución, que cursan su primera materia de COMUNICACIONES y que tienen bases teóricas de señales y sistemas.

Este trabajo facilitará el aprendizaje y permitirá desarrollar metodologías que harán más fácil y viable la comprensión de temas tan importantes que son bases para el desarrollo de otras áreas del conocimiento de Ingeniería Electrónica.

Como se pretende trabajar los temas de comunicaciones, se da por sentado el buen manejo matemático de las señales; el desarrollo de las temáticas de las unidades se presentan de forma clara y explicativa que permite al estudiante comprender fácilmente los conceptos y los análisis resueltos en cada tema. Se utilizaron graficas, esquemas, diagramas de bloques, tablas, ejemplos, etc; para facilitar el análisis de lo estudiado.

La elección de los contenido, se justifica en el hecho de que son temas desarrollados en la asignatura COMUNICACIONES I que imparte la Universidad Tecnológica de Bolívar; de este modo, este documento le servirá al estudiante como guía para el desarrollo programático de la asignatura, permitiendo así, la realización de lecturas previas, el desarrollo de un aprendizaje significativo y autónomo, en donde el estudiante aprenda a hacer y ser en una totalidad.

Al comienzo de cada unidad se presenta una introducción referente a lo que se va a estudiar, así como los objetivos que se desean alcanzar. En el desarrollo de las unidades se presentan ejemplos que permitirán al estudiante analizar y sintetizar respecto a las características, ventajas, desventajas de los temas resueltos; también al final de las unidades se presentan unas actividades a desarrollar que permitirán evaluar al estudiante respecto a lo aprendido.

Como estudiantes de Ingeniería Electrónica de la Universidad Tecnológica de Bolívar, quisimos aportar con este trabajo al desarrollo académico y formación profesional de los estudiantes de Ingeniería Electrónica. Es necesario aclarar que cuando alguien se propone desarrollar un texto como éste, seguramente encuentra que al final siempre quedan cosas por agregar y por mejorar, pero esto es lo que logramos y esperamos que sea de provecho para ustedes y para todos los interesados en el estudio de las comunicaciones en general, por lo tanto lo ponemos a su consideración.

**CLARA PATRICIA HERRERA**

**JOHAN SEBASTIAN JIMENEZ**

**Tutor: Ing. GONZALO LOPÉZ**

# INTRODUCCIÓN

Guía de Estudio COMUNICACIONES I, es un texto que les permitirá a los estudiantes de Ingeniería Electrónica, comprender, analizar y sintetizar acerca de la teoría conceptual y matemática de las técnicas de modulación existentes, la influencia del ruido en las telecomunicaciones y aspectos importantes sobre la teoría de la información.

Esta guía se encuentra dividida en seis unidades: Las dos primeras de ellas tratan sobre las técnicas de Modulación Analógica con todas sus variantes; sobre el aprovechamiento y manejo óptimo de los recursos principales en Telecomunicaciones, como son el Ancho de Banda y la Potencia.

En la tercera unidad se analizan los diferentes casos de Modulaciones Digitales y los aspectos de eficiencias de bits por ancho de banda y comportamiento ante la probabilidad de errores.

En la cuarta unidad incursionamos sobre la digitalización de la voz y la trama básica de las comunicaciones digitales, concepto fundamental de las comunicaciones digitales existentes en la actualidad.

En la quinta unidad, abarcamos los principales conceptos sobre la Teoría de Información, basados en los trabajos del científico Claude Shannon, los conceptos de Entropía de la Información, redundancia y el algoritmo de Huffman para la codificación óptima de las fuentes de información.

Por último, en la sexta unidad, estudiaremos la Teoría de Ruido y sus efectos en los Sistemas de Telecomunicaciones.

Al inicio de cada unidad encontrara una introducción referente a lo que se va estudiar, así como los objetivos que se desean alcanzar. En el desarrollo de cada unidad el lector podrá encontrar ejercicios resueltos que facilitaran la comprensión de lo estudiado.

Al final de cada unidad encontrara una serie de actividades que le permitirá evaluar lo aprendido en el transcurso de la unidad, así como también las referencias bibliográficas utilizadas para el desarrollo de cada unidad.

Esperamos que la Guía de Estudio COMUNICACIONES I, sea una herramienta que contribuya al desarrollo académico y profesional de los estudiantes de Ingeniería Electrónica.

## INDICE

	<b>Pág</b>
<b>UNIDAD I: MODULACIÓN DE AMPLITUD</b>	<b>19</b>
1.1 MODULACIÓN DE DOBLE BANDA LATERAL DSB	20
1.1.1 Generación de Señales DSB	21
1.1.1.1 Modulador Balanceado Sencillo	21
1.1.1.2 Modulador de Conmutación	22
1.1.1.3 Modulador de Anillo	24
1.1.2 Demodulación de DSB	25
1.1.3 Modulación de Amplitud en Cuadratura	26
1.1.4 Multiplexación por División de Frecuencia	28
1.2 MODULACIÓN EN AMPLITUD AM	30
1.2.1 Modulación Normal de Amplitud AM	30
1.2.2 Espectro de las Señales Normales AM	31
1.2.3 Demodulación de Señales Normales AM	34
1.3 MODULACIÓN DE UNA BANDA LATERAL SSB	37
1.3.1 Generación de Señales SSB	37
1.3.2 Demodulación SSB	40
1.4 MODULACIÓN DE BANDA LATERAL VESTIGIAL Ó RESIDUAL (VSB)	42
1.5 RECEPCIÓN DE SEÑALES	44
1.5.1 Receptor Superheterodino	46
1.5.2 Elección de FI	48

1.5.3 Control de Ganancia	50
ACTIVIDADES	52
<b>UNIDAD II: METODOS DE MODULACIÓN ANGULAR</b>	<b>54</b>
2.1 MODULACIÓN ANGULAR	55
2.1.1 Modulación de Fase (PM)	57
2.1.2 Modulación de Frecuencia (FM)	58
2.1.3 Modulación de Fase Uni-Tono y de Frecuencia	62
2.1.3.1 Modulación de Fase	62
2.1.3.2 Modulación de Frecuencia	62
2.1.4 Modulación Angular de Banda Angosta	65
2.1.5 Modulación Angular de Banda Ancha	66
2.1.6 Potencia y Ancho de Banda en Modulación Angular en Banda Ancha	67
2.1.6.1 Potencia en Modulación Angular	69
2.1.6.2 Ancho de Banda en Modulación Angular	69
2.2 CIRCUITOS MODUADORES DE FRECUENCIA	70
2.2.1 Osciladores Controlados por Voltaje	74
2.3 GENERACIÓN DE SEÑALES PM Y FM	74
2.3.1 Método Indirecto de Armstrong	77
2.3.2 Generación Directa	79
2.4 DEMODULACIÓN DE FRECUENCIA	82
2.5 FM ESTÉREO	85
2.5.1 Transmisión de la Señal	85

2.5.2 Receptor de FM Estéreo	87
2.6 REDES PREÉNFASIS Y DEÉNFASIS	88
ACTIVIDADES	91
<b>UNIDAD III: MODULACIÓN DE PULSOS CODIFICADOS PCM</b>	<b>92</b>
3.1 PRINCIPIO BÁSICO DE PCM	93
3.2 MUESTREO	95
3.2.1 Muestreo Ideal	95
3.2.2 Muestreo Natural	97
3.2.3 Muestreo de Techo Plano	99
3.2.4 Error de Seudointerferencia	101
3.3 CUANTIFICACIÓN	102
3.3.1 Análisis del Error de Cuantificación	103
3.3.2 Cuantificación Uniforme	103
3.3.2.1 Error Cuadrático Medio en un Intervalo de Cuantificación	103
3.3.2.2 Relación Señal a Ruido en el Proceso de Cuantificación Uniforme	104
3.3.3 Cuantificación No Uniforme	106
3.4 CODIFICACIÓN	110
3.5 MULTIPLEXACIÓN	113
3.5.1 Múltiplex por División de Tiempo (TDM)	113
3.5.2 Sistema Múltiplex MIC30	115
3.5.3 Sistema Múltiplex MIC24	117
3.5.4 Sistema Múltiplex de Segundo Orden	118

3.5.5 Jerarquía Digital Plesiocronica	121
3.6 CÓDIGOS DE LINEA	123
3.6.1 Código de No Retorno a Cero (NRZ)	124
3.6.2 Código de Retorno a Cero (RZ)	125
3.6.3 Código de Inversión de Marcas Alternadas (AMI)	125
3.6.4 Código Bipolar de Alta Densidad (HDBn)	127
3.6.5 Código Manchester	130
3.6.6 Manchester Diferencial	131
3.6.7 Código CMI	131
ACTIVIDADES	133
<b>UNIDAD IV: MODULACIÓN DE SEÑALES DIGITALES</b>	<b>135</b>
4.1 MODULACIÓN ASK	136
4.1.1 Modulador ASK	137
4.1.2 Demodulación ASK	138
4.1.3 Análisis Espectral de la Señal ASK	140
4.1.4 Ancho de Banda ASK	141
4.2 MODULACIÓN FSK	142
4.2.1 Modulador FSK	144
4.2.2 Demodulación FSK	145
4.2.3 Análisis Espectral de la Modulación FSK	146
4.3 MODULACIÓN PSK	147
4.3.1 Modulador PSK	147

4.3.2 Demodulación PSK	148
4.3.3 Ancho de Banda PSK	148
4.3.4 Recuperación de la Portadora	149
4.4 MODULACIÓN DPSK	150
4.4.1 Modulador Transmisor DPSK	150
4.4.2 Demodulador Receptor DBPSK	151
4.5 MODULACIÓN MPSK	153
4.5.1 Modulación QPSK (4PSK)	154
4.5.1.1 Demodulación QPSK	156
4.5.2 Modulación 8PSK	157
4.5.2.1 Demodulación 8PSK	160
4.6 MODULACIÓN QAM	161
4.6.1 Modulación 8-QAM	161
4.6.1.1 Demodulación 8-QAM	163
4.6.2 Modulación 16-QAM	164
ACTIVIDADES	167
<b>UNIDAD V: TEORIA DE LA INFORMACIÓN</b>	<b>168</b>
5.1 TEORIA Y TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN	169
5.1.1 Modelo de un Sistema de Transmisión de Información	169
5.1.2 Información	172
5.2 MEDICIÓN DE LA INFORMACIÓN	173
5.3 CARACTERIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN	175

5.3.1 Entropía	175
5.3.2 Velocidad de Información	177
5.3.3 Velocidad de Modulación	177
5.3.4 Codificación de Canal	178
5.4 CODIFICACIÓN DE LA FUENTE	179
5.4.1 Códigos Compactos “Código Huffman”	180
ACTIVIDADES	185
<b>UNIDAD VI: RUIDO EN LAS TELECOMUNICACIONES</b>	<b>186</b>
6.1 CLASIFICACIÓN DEL RUIDO	187
6.1.1 Ruido Externo	187
6.1.2 Ruido Interno	188
6.2 RUIDO TERMICO	189
6.2.1 Espectro de Potencia del Ruido	191
6.2.2 Potencia de Ruido Disponible	192
6.2.3 Ruido Blanco	193
6.2.4 Ancho de Banda Equivalente	194
6.3 MODELOS DE RUIDO GENERADO INTERNAMENTE	195
6.3.1 Método de Temperatura de Ruido Eficaz	195
6.3.2 Método de Figura de Ruido	197
ACTIVIDADES	200
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>201</b>

# UNIDAD I

# MODULACIÓN DE AMPLITUD

## INTRODUCCIÓN

El énfasis de este capítulo está dirigido a una clase de técnicas de modulación que se refiere generalmente a métodos de Modulación en Amplitud. En general la Modulación en Amplitud se define como cualquier proceso en el cual la amplitud instantánea de una portadora de alta frecuencia se varía de acuerdo con la señal de mensaje.

Los diferentes métodos de modulación en amplitud pueden ser clasificados bajo el concepto de Amplitud Modulada y pueden ser clasificados como:

1. Modulación de Doble Banda Lateral DSB
2. Modulación Normal de la Amplitud AM
3. Modulación de una sola banda lateral SSB
4. Modulación Vestigial o Residual VSB

Cada uno de estos sistemas tiene sus propias ventajas, desventajas y aplicaciones prácticas, como estudiaremos en esta unidad.

## OBJETIVOS

- Comprender los conceptos de modulación lineal en todas sus variantes, DSB, AM, SSB y VSB.
- Comprender e interpretar los espectros, generación, demodulación de las señales estudiadas.
- Analizar e interpretar el proceso de recepción de señales.
- Analizar las diferencias, similitudes, aplicabilidad, ventajas y desventajas de los diferentes tipos de modulaciones lineales.
- Aplicar los conceptos en la resolución de problemas.

## 1.1 MODULACIÓN DE DOBLE BANDA LATERAL DSB

Inicialmente se estudiará de los métodos de Modulación por Amplitud, la *Modulación de Doble Banda Lateral (DSB)*. Esta modulación tiene cierta desventaja en su aplicación, pero es la más fácil de analizar por lo cual será el punto de inicio de nuestra explicación.

Una señal DSB puede ser generada al mezclar la señal modulante banda base  $m(t)$  con una portadora de alta frecuencia  $\cos \omega_c t$ , por medio de un modulador balanceado. El proceso para generar la señal DSB se muestra en la figura 1.1.

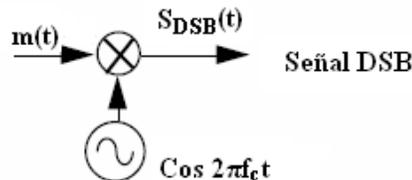


Figura 1.1: Generación de una señal DSB

La señal de doble banda lateral se representa así:

$$S_{DSB}(t) = m(t) \cos 2\pi f_c t \quad (1.1)$$

La figura 1.2 muestra el espectro de una señal DSB.

Realizando la transformada de Fourier de la ecuación 1.1 tenemos que:

$$S_{DSB} = \frac{1}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)] \quad (1.2)$$

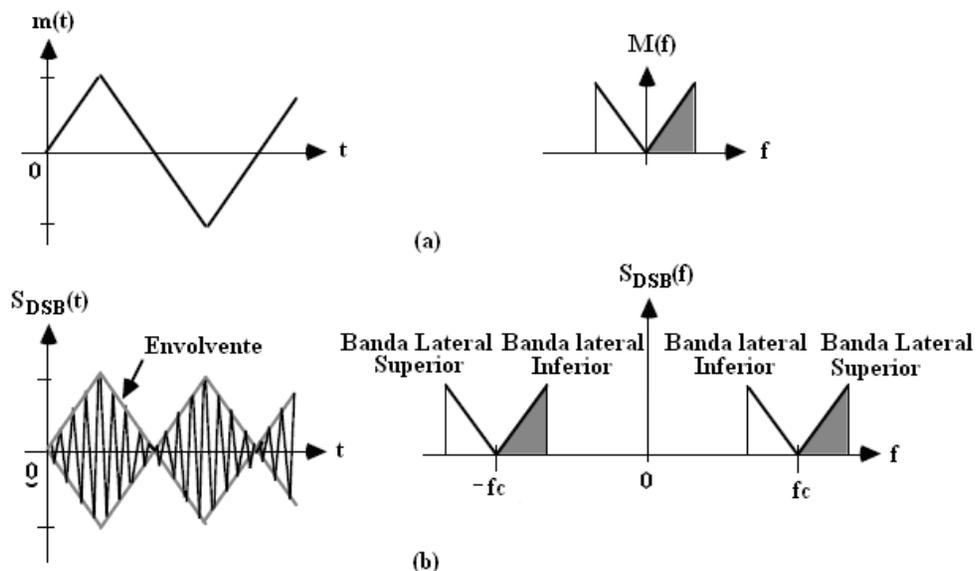


Figura 1.2: Muestra la forma de onda y el espectro asociado con una señal DSB.

La Modulación de Doble Banda Lateral, se puede definir como AM con la portadora suprimida con el objeto de ahorrar potencia. Este tipo de modulación se usa en comunicaciones punto a punto.

Claramente la envolvente de la señal modulada no tiene el mismo modelo de  $m(t)$ ; así como en AM, la modulación DSB cambia el espectro de  $m(t)$  a la frecuencia de la portadora  $m(t)$ . El ancho de banda de una señal modulada es  $2 f_m$  cuando  $f_m$  es el ancho de banda de la señal modulada  $m(t)$ .

### 1.1.1 Generación de señales DSB.

El proceso de generación de una señal DSB se puede lograr mediante las siguientes clases de moduladores:

- Modulador Balanceado sencillo
- Modulador de Conmutación
- Modulador de Anillo

#### 1.1.1.1 Modulador Balanceado Sencillo

De acuerdo a la característica de un diodo V-I (Voltaje-Corriente) estas se pueden relacionar aproximadamente mediante series de potencia.

$$v_o(t) = a v_i(t) + b v_i^2(t) \quad (1.3)$$

Donde  $a$  y  $b$  son constantes. Considerando el diodo  $D_1$  de la porción superior del circuito mostrado en la figura 1.3. El voltaje de entrada al diodo  $D_1$  es:

$$v_{i1}(t) = v_i(t) = \cos(2\pi f_c t) + m(t) \quad (1.4)$$

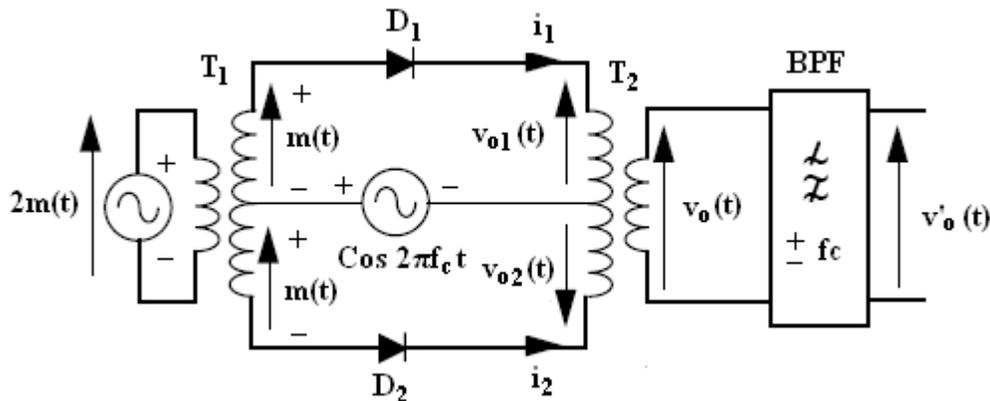


Figura 1.3: Modulador balanceado sencillo.

Si asumimos que la salida de voltaje del diodo  $v_{o1}(t)=v_o(t)$ , sustituimos en la ecuación (1.4), en la ecuación (1.3) y obtenemos

$$\begin{aligned} v_{o1}(t) &= a[\cos(2\pi f_c t) + m(t)] + b[\cos(2\pi f_c t) + m(t)]^2 \\ &= am(t) + b \cos^2(2\pi f_c t) + bm(t)^2 + a \cos(2\pi f_c t) + 2bm(t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ahora, consideremos que el diodo  $D_2$  en la sección inferior del circuito mostrado en la Figura 1.3, el voltaje de entrada del diodo  $D_2$  es:

$$v_{i,2}(t) = v_1(t) = \cos(2\pi f_c t) - m(t) \quad (1.6)$$

y si dejamos que la salida del voltaje del diodo sea  $v_{02}(t)=v_0(t)$ , podemos sustituir la ecuación (1.6) en la ecuación (1.3), y obtenemos:

$$\begin{aligned} v_{01}(t) &= a[\cos(2\pi f_c t) - m(t)] + b[\cos(2\pi f_c t) - m(t)]^2 \\ &= -am(t) + b \cos^2(2\pi f_c t) + bm(t)^2 + a \cos(2\pi f_c t) - 2bm(t) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sustrayendo de la ecuación (1.7) de (1.5), obtenemos:

$$v_0(t) = v_{0,1}(t) - v_{0,2}(t) = 2am(t) + 4bm(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (1.8)$$

Si pasamos esta señal por un filtro pasa-bandas centrado en  $\pm f_c$ , obtenemos la expresión de una señal DSB:

$$v_0' = 4bm(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (1.9)$$

### 1.1.1.2 Modulador de Conmutación

La operación de multiplicación que se requiere para la modulación puede remplazarse por una operación más simple de conmutación, si aceptamos que una señal modulada se puede obtener al multiplicar  $m(t)$ , no solamente por una senoide pura, sino por cualquier señal periódica  $\varphi(t)$  de la frecuencia fundamental en radianes  $\omega_c$ . Tal señal periódica puede expresarse como una serie trigonométrica de Fourier de la forma.

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^x C_n \cos(n\omega_c t + \theta_n) \quad (1.10a)$$

Por lo tanto,

$$m(t)\varphi(t) = \sum_{n=0}^x C_n m(t) \cos(n\omega_c t + \theta_n) \quad (1.10b)$$

Esto muestra que el espectro del producto  $m(t)\varphi(t)$  es el espectro  $M(\omega)$  trasladado a  $\pm \omega_c$ ,  $\pm 2\omega_c$ , ...,  $\pm n\omega_c$ , ... Si esta señal se hace pasar a través de un filtro de pasabanda de ancho de banda  $2B$  y sintonizado a  $\omega_c$ , y entonces se obtiene la señal modulada deseada  $c_1 m(t) \cos(\omega_c t + \theta_1)$ .

El tren de pulsos cuadrados  $k(t)$  de la figura (1.4b) es una señal periódica cuya serie de Fourier es de la forma:

$$k(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \cos n\omega_c t \quad (1.11)$$

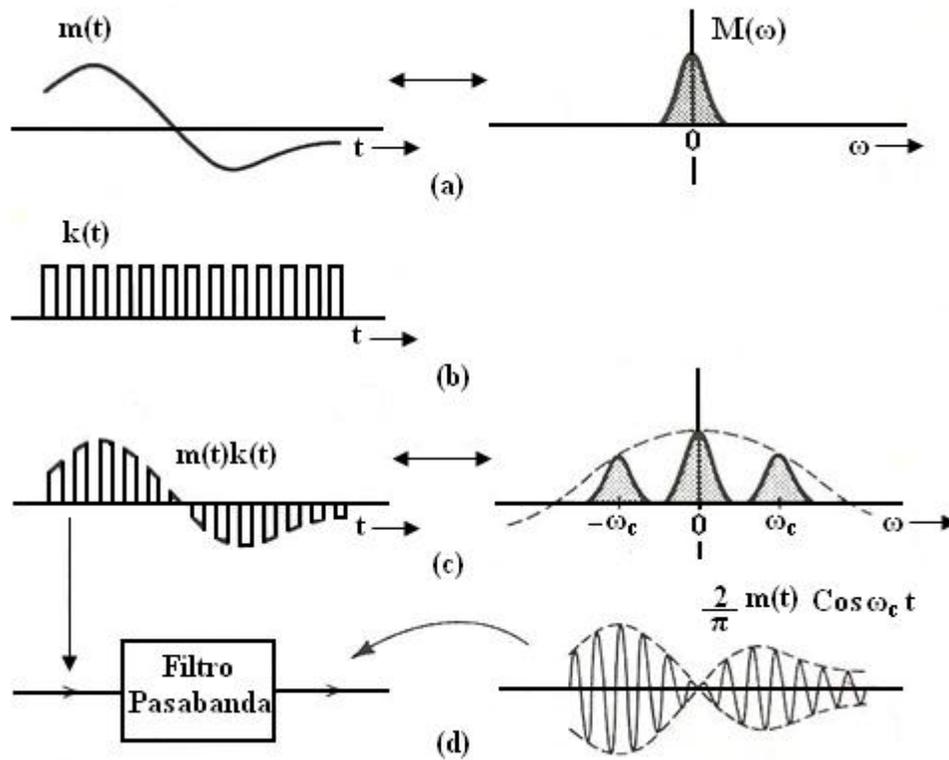
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right)$$

La señal  $m(t)k(t)$  se obtiene mediante

$$\begin{aligned} m(t)k(t) &= \frac{1}{2} m(t) \\ &= + \frac{2}{\pi} \left( m(t) \cos \omega_c t - \frac{1}{3} m(t) \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} m(t) \cos 5\omega_c t - \dots \right) \end{aligned} \quad (1.12a)$$

Y

$$m(t)k(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} M(\omega) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} [M(\omega + n\omega_c) + M(\omega - n\omega_c)] \quad (1.12b)$$

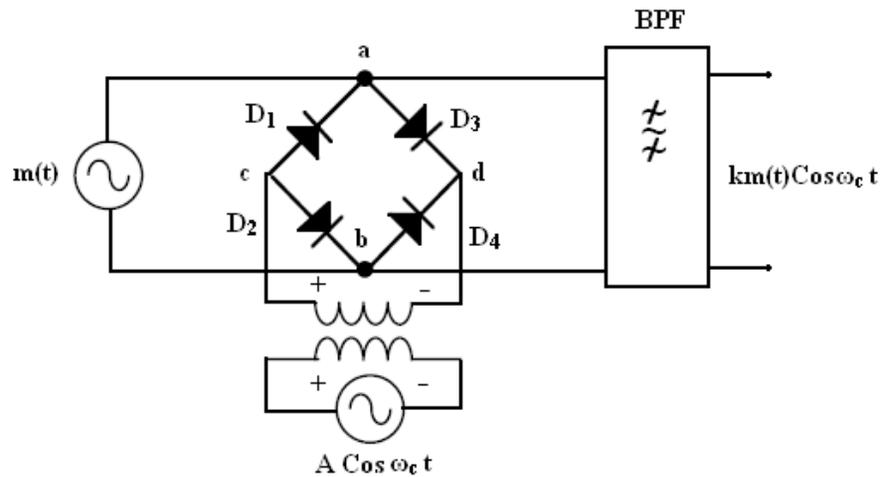


**Figura 1.4: Modulador de conmutación para DBLSP**

El producto  $m(t)k(t)$  y su espectro se ilustra en la figura 1.4c. Cuando la señal  $m(t)k(t)$  se hace pasar a través de un filtro de pasabanda, sintonizado a  $\omega_c$ , la salida es la señal modulada que se desea  $(2/\pi)m(t)\cos \omega_c t$  (figura 1.4d).

La figura 1.5 muestra un modulador de conmutación. Los diodos de D1, D2 y D3, D4 son pares balanceados. Cuando la señal  $\omega_c t$  es de una polaridad que hace positiva la terminal  $c$  con respecto a  $d$ , todos los diodos conducen, suponiendo que la amplitud  $A \gg m(t)$ . Debido a que los diodos D1 y D2 se encuentran balanceados, las terminales  $a$  y  $b$  están al mismo potencial,

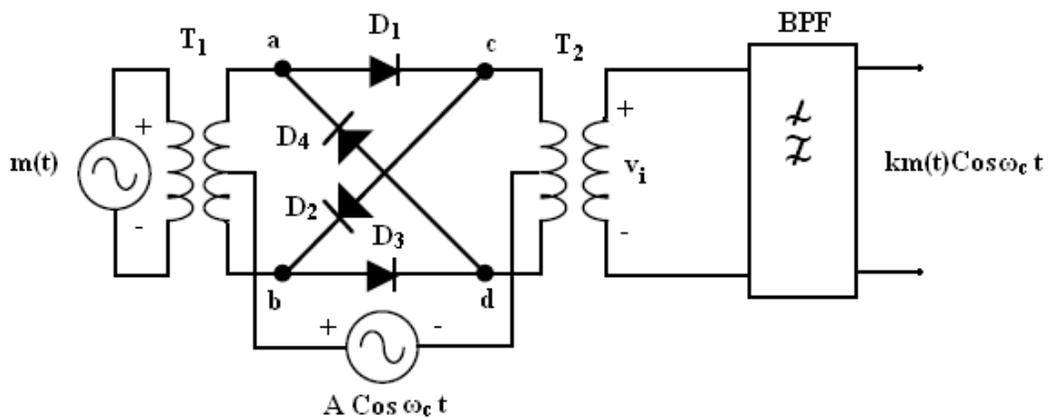
y la entrada al filtro de pasabanda queda en corto circuito durante este medio ciclo. Durante el medio ciclo siguiente, la terminal *d* es positiva con respecto a *c*, y los cuatro diodos están abiertos, conectando así a *m(t)* con la entrada del filtro de pasabanda. Esta conmutación de estado de conducción y no conducción aplicado a *m(t)* se repite para cada ciclo de la portadora. La entrada efectiva al filtro de pasabanda es  $m(t)k(t)$ , y la salida es la señal modulada que se desea,  $c_1 m(t) \cos \omega_c t$ .



*Figura 1.5: Modulador de diodos de puente en derivación*

### 1.1.1.3 Modulador de Anillo

Otro modulador de conmutación se conoce como Modulador de Anillo, se ilustra en la figura 1.6.



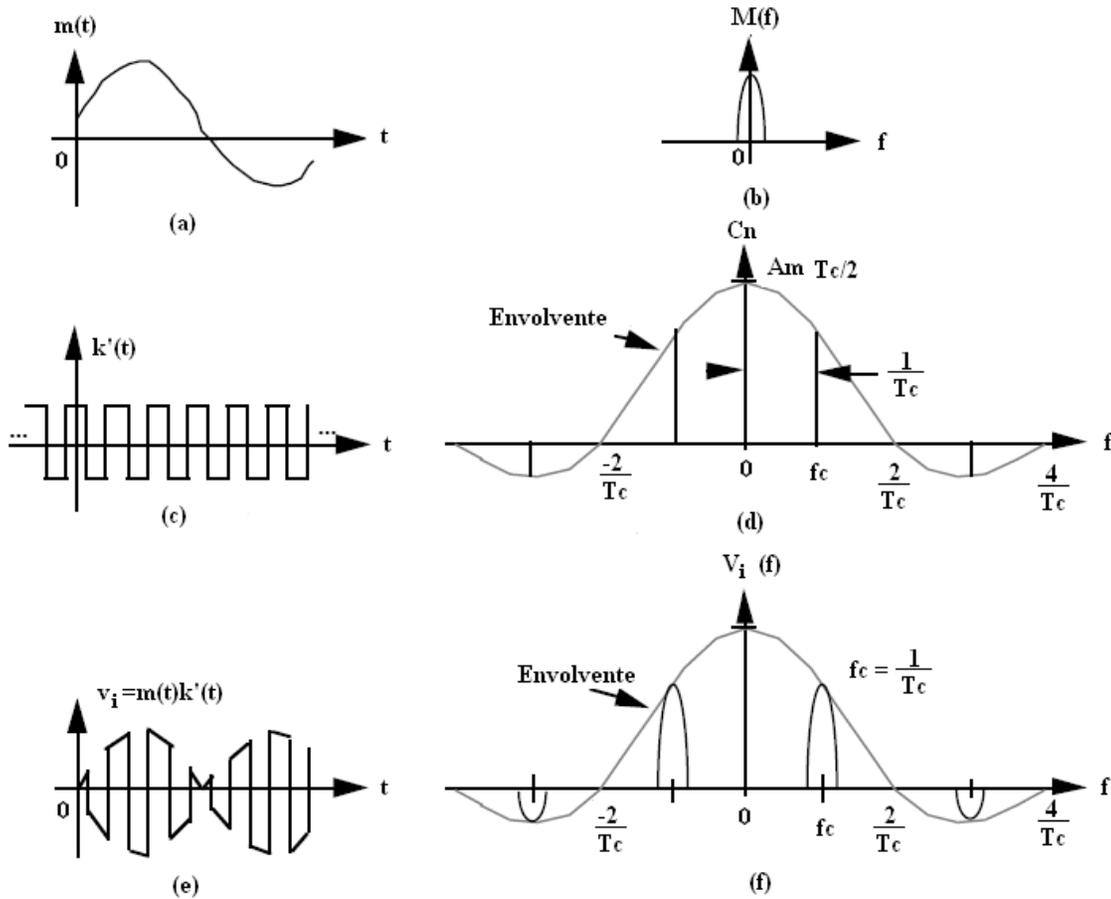
*Figura 1.6: Modulador de Anillo*

Durante los medios ciclos positivos de la portadora, los diodos *D1* y *D3* conducen, y *D2* y *D4* quedan abiertos. En consecuencia, la terminal *a* queda conectada a *c*. Por lo tanto, la salida será proporcional a  $m(t)$  durante el medio ciclo positivo y a  $-m(t)$  durante el medio ciclo negativo. En efecto,  $m(t)$  se multiplica por un tren de pulsos cuadrados  $k'(t)$  con  $A=2$  y su término *cd* es eliminado. Por consiguiente:

$$k'(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \text{Cos}n\omega_c t \quad (1.13a)$$

Y

$$m(t)k'(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} m(t) \text{Cos}n\omega_c t \quad (1.13b)$$



**Figura 1.7: Forma de onda y el espectro asociado con el modulador de anillo**

En la figura 1.7 se muestra la señal  $m(t)k'(t)$ . Cuando esta forma de onda se hace pasar a través de un filtro de pasabanda sintonizado a  $\omega_c$  (figura 1.6), la salida del filtro será la señal deseada  $(4/\pi)m(t)\text{Cos} \omega_c t$ .

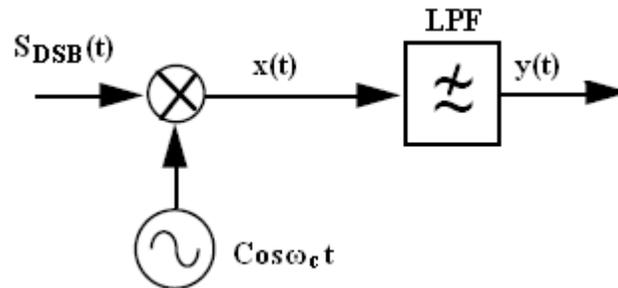
Hay dos diferencias significativas entre el espectro de Modulación de Conmutación y el Modulador Balanceado:

- El Modulador Balanceado no tiene componentes dc.
- Las componentes espectrales en el Modulador Balanceado son más grandes que en el Modulador de Conmutación.

### 1.1.2 Demodulación de DSB

El procesamiento para extraer la señal original de banda base de la señal modulada es llamado detección o demodulación, y normalmente este proceso se refiere a la *detección de producto*.

La detección de producto se logra mezclando una portadora generada en el receptor con la señal modulada entrante en un circuito multiplicador seguido por un filtro pasabajo. Si la portadora usada en el receptor es exactamente igual en fase y en frecuencia a la portadora usada en el generador nos referimos a una detección sincrónica o coherente.



*Figura 1.8: Detector Sincrono*

La salida del multiplicador es:

$$\begin{aligned} x(t) &= m(t) \cos(2\pi f_c t) \\ &= 0.5m(t) + 0.5m(t) \cos(4\pi f_c t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si se suprime el último término mediante un filtro pasa-bajo, se obtiene

$$y(t) = 0.5m(t) \quad (1.15)$$

Que representa lo que se puede recuperar de la componente  $m(t)$ . Si la señal de la portadora cambia en frecuencia o fase, la señal resultante estará atenuada o distorsionada.

### 1.1.3 Modulación de Amplitud en Cuadratura

Hemos enviado señales DSB que requieren ser transmitidas con un ancho de banda para la señal de mensaje  $m(t)$ . Para incrementar la eficiencia del ancho de banda de la transmisión, es posible enviar dos señales DSB utilizando portadoras de la misma frecuencia pero con cuadratura de fase. Ambas señales moduladas ocupan la misma banda de frecuencias. Aun juntas pueden ser separadas en el receptor por un detector sincrónico usando dos portadoras locales en fase de cuadratura. Esta técnica es conocida como *Modulación de amplitud en cuadratura o multiplexación en cuadratura*, y es mostrada en la figura 1.9.

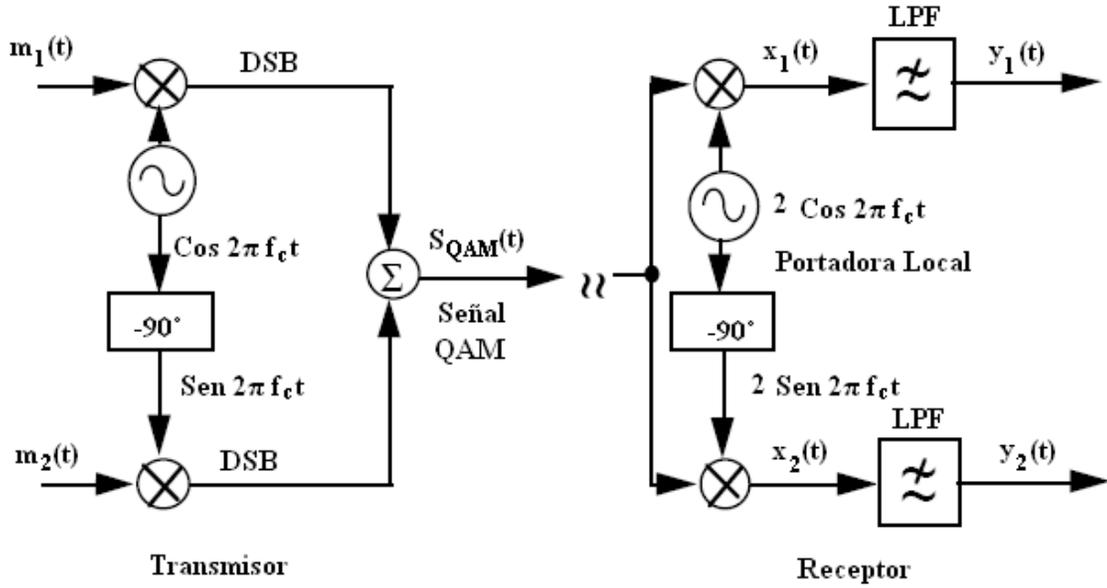


Figura 1.9: Un transmisor y receptor QAM

Una señal QAM está dada por

$$S_{QAM}(t) = m_1 \cos(2\pi f_c t) + m_2 \sin(2\pi f_c t) \quad (1.16)$$

En el final de la recepción, la señal modulada esta multiplicada por dos portadoras en cuadratura de fase. Las señales de salida multiplicadas son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2S_{QAM} \cos(2\pi f_c t) \\ &= m_1(t) + m_1(t) \cos(4\pi f_c t) + m_2(t) + m_2(t) \sin(4\pi f_c t) \end{aligned} \quad (1.17)$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 2S_{QAM} \sin(2\pi f_c t) \\ &= m_2(t) - m_2(t) \cos(4\pi f_c t) + m_1(t) + m_2(t) \sin(4\pi f_c t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Si se suprimen las altas frecuencias con filtros pasa-bajos, se obtiene:

$$y_1(t) = m_1(t) \quad (1.19)$$

$$Y \quad y_2(t) = m_2(t) \quad (1.20)$$

Esto es, las salidas obtenidas son las deseadas. Suponiendo que la señal portadora local es  $\cos(2\pi f_c t + \phi_0)$ , cuando el multiplicador de salida en la parte superior del circuito se convierte en

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2S_{QAM}(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_0) \\ &= m_1(t) \cos(\phi_0) + m_1 \cos(4\pi f_c t + \phi_0) - \\ &\quad m_2(t) \sin(\phi_0) + m_2 \sin(4\pi f_c t + \phi_0) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Si se suprimen el segundo y los últimos términos con un filtro pasa-bajo, tenemos

$$y_1(t) = m_1(t) \cos(\phi_0) + m_2 \sin(\phi_0) \quad (1.22)$$

La señal deseada  $m_1(t)$  y la señal no buscada  $m_2(t)$  aparecen en la parte superior del circuito. También, se muestra  $y_2(t)$  con el contenido deseado  $m_2(t)$  y el contenido no deseado  $m_1(t)$ . Las señales moduladas tienen la misma frecuencia de la portadora que ahora interfieren con otras. Esto se llama *interferencia co-canal* y puede ser evitada. Los peores problemas aparecen cuando la portadora local tiene un error en la frecuencia, pero puede ser sincronizada en fase con la señal portadora. Un pequeño error en la frecuencia o en la fase de la señal portadora no solo producirá pérdidas en la señal sino también distorsiones, pero esto se puede interpretar como interferencias.

La multiplexación en cuadratura se utiliza en los sistemas de televisión a color para multiplexar las señales de imagen con la señal de información de los colores.

#### 1.1.4 Multiplexación por División de Frecuencia

Uno de los problemas básicos en la ingeniería de comunicación es el diseño de un sistema que permita pocas señales individuales de usuarios transmitidas simultáneamente sobre un canal de comunicación simple. El método más común es el de trasladar señales individuales en una región de frecuencias. Supongamos que hay una diferenciación severa entre las señales con el mismo ancho de banda. Si se traslada una de esas señales a una región de frecuencia puede que se traslade el espectro de esa señal sin afectar a las señales de interés, ahora todas las señales pueden ser transmitidas en un canal de comunicación simple. Al final de la recepción, las señales pueden ser separadas y recuperadas. Nosotros llamaremos a este fenómeno *Sistema de Frecuencia Multiplexada*. Esta técnica de Multiplexación es llamada también *División de Multiplexación en Frecuencia*. El proceso de translación de frecuencias puede terminarse mediante la multiplicación de bajas frecuencias de la señal modulada con altas frecuencias de la señal portadora. La figura 1.10 muestra un transmisor, un receptor y el espectro de 5 FDM's con frecuencias de la portadora  $fc1 < fc2 < \dots < fc5$ .

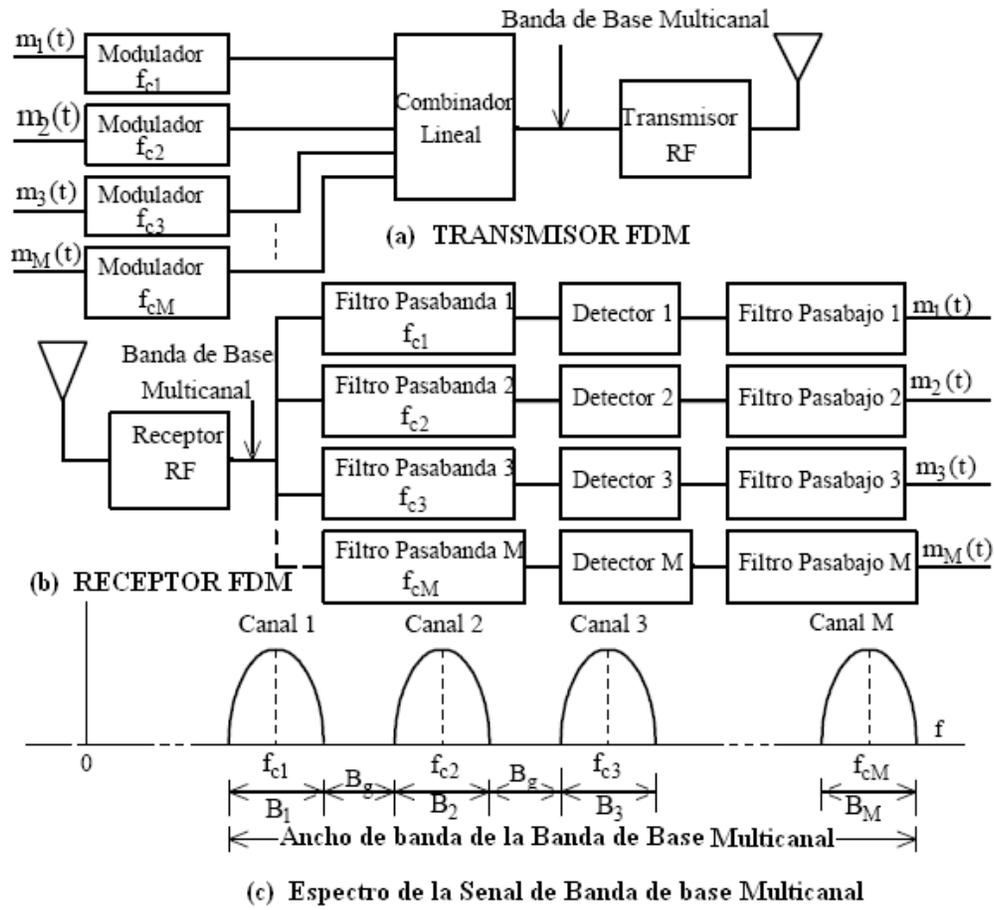


Figura 1.10: Multiplexación por División de Frecuencia FDM<sup>1</sup>

<sup>1</sup> "Principio de las Comunicaciones", 3ª Edición, Pág 487, José Briceño Márquez.

## 1.2 MODULACIÓN EN AMPLITUD AM

### 1.2.1 Modulación Normal de Amplitud AM

Una señal normal de amplitud modulada se da así:

$$S_{AM}(t) = [A + m(t)]\cos 2\pi f_c t \tag{1.23}$$

$$S_{AM}(t) = \underbrace{A\cos 2\pi f_c t}_{\text{Portadora}} + \underbrace{m(t)\cos 2\pi f_c t}_{\text{Bandas laterales}}$$

Como su nombre lo indica, consiste en variar la amplitud de una senoide de acuerdo al mensaje que se desea transmitir. A la senoide se le llama portadora debido a que llevará la información sobre si. Este tipo de modulación se usa en radiodifusión comercial y en algunos segmentos de transmisión de banda ciudadana.

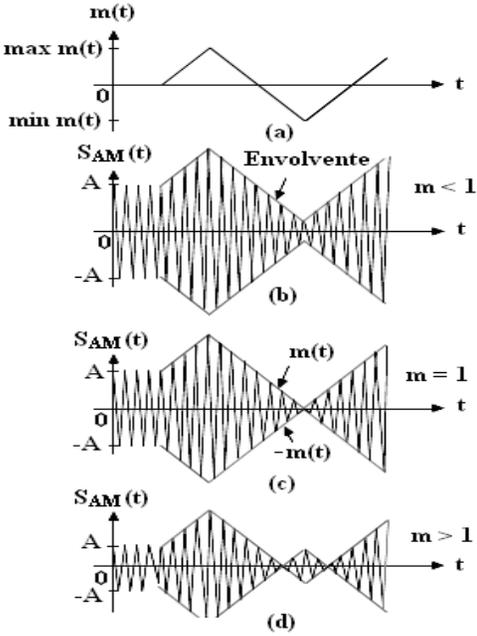
Donde  $m(t)$  es la señal de modulación.  
 Es la señal de amplitud-modulada como:

$$S_{AM}(t) = [A + m(t)]\cos 2\pi f_c t \tag{1.24}$$

El índice de modulación

$$m = \frac{|\min m(t)|}{A} \tag{1.25}$$

En la figura 1.11 se muestran varios valores del índice de modulación para las señales normales AM. Claramente, el desarrollo de las señales moduladas tiene la misma forma que  $m(t)$  cuando  $m < 1$ , se dice que la señal portadora se sobre modula y la envolvente se distorsiona.



*Figura 1.11: Índice de modulación*

La eficiencia de una señal normal AM se define como:

$$\eta = P_s / P_t \times 100\% \quad (1.26)$$

Donde  $P_s$  es la potencia de la portadora de la banda lateral y  $P_t$  es la potencia total de la señal normal AM.

## 1.2.2 Espectro de las Señales Normales AM

Para la modulación normal de la amplitud

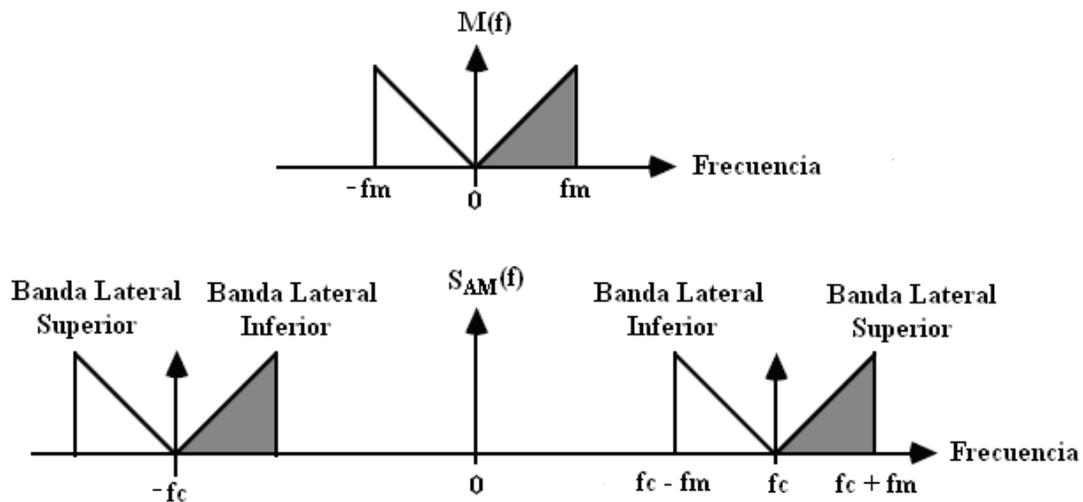
$$S_{AM}(t) = [A + m(t)]\text{Cos}2\pi f_c t \quad (1.27)$$

$$S_{AM}(t) = A\text{Cos}2\pi f_c t + m(t)\text{Cos}2\pi f_c t$$

La transformada de Fourier de  $S_{AM}(t)$  es:

$$S_{AM}(f) = 1/2A[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + 1/2[M(f - f_c) + M(f + f_c)] \quad (1.28)$$

La figura 1.12 muestra el espectro de una señal normal AM. La modulación normal de la amplitud simplemente cambia el espectro de  $m(t)$  de acuerdo a la frecuencia portadora  $f_c$ . El ancho de banda de la señal modulada es  $2f_m$  Hz, donde  $f_m$  es la anchura de banda de la señal modulada  $m(t)$ .



*Figura 1.12: Espectro de una señal normal AM*

Uno de las formas de generar una señal normal AM se muestra en la figura 1.13.

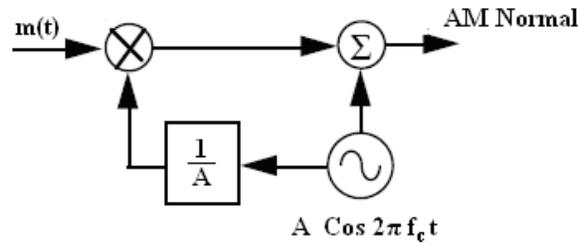


Figura 1.13: Generación de una señal normal AM

Este tipo de modulación puede lograrse usando un dispositivo no lineal, como un diodo. Esto se muestra en la figura 1.14.

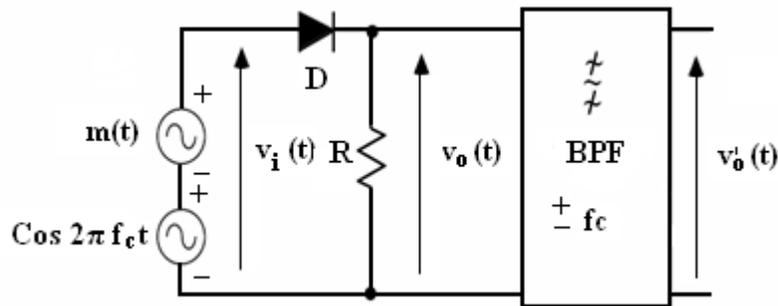


Figura 1.14: Modulador de amplitud usando un diodo

La característica entrada-salida de un diodo es aproximada en series de potencia a:

$$v_o(t) = av_i(t) + bv_i^2(t) \quad (1.29)$$

Donde  $a$  y  $b$  son constantes y

$$v_i(t) = \text{Cos}2\pi f_c t + m(t) \quad (1.30)$$

Sustituyendo la ecuación (1.30) en (1.29):

$$\begin{aligned} v_o(t) &= a[\text{Cos}2\pi f_c t + m(t)] + b[\text{Cos}2\pi f_c t + m(t)]^2 \\ &= am(t) + b\text{Cos}2\pi f_c t + bm(t)^2 + a\text{Cos}2\pi f_c t + 2bm(t)\text{Cos}2\pi f_c t \end{aligned} \quad (1.31)$$

Si pasamos la señal  $v_o(t)$  a través de un filtro pasa banda centrado en  $+f_c$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} v'_o(t) &= [a + 2bm(t)]\text{Cos}2\pi f_c t \\ &= 2b[A + m(t)]\text{Cos}2\pi f_c t \end{aligned} \quad (1.32)$$

Donde  $A = a / 2b$ , generamos una señal normal AM.

Una señal normal de amplitud-modulada puede también ser obtenida multiplicando el  $m(t)$  por una señal periódica digital  $s(t)$ . El modulador es llamado *Modulador Conmutado*. Si

tomamos una forma de onda rectangular periódica  $s(t)$  de período  $T_c = 1/f_c$ , con amplitud  $A_m$ , y ancho de pulso  $\tau$ , la serie Trigonometrica de Fourier aplicada a  $s(t)$  seria:

$$C_n = A_m \tau \frac{\text{Sin} 2\pi f_c \tau / 2}{2\pi f_c \tau / 2} \quad (1.33)$$

Su correspondiente en serie de Fourier Compleja es:

$$s(t) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( A_m \tau \frac{\text{Sin} 2\pi f_c \tau / 2}{2\pi f_c \tau / 2} \right) e^{j 2\pi f_c n t} \quad (1.34)$$

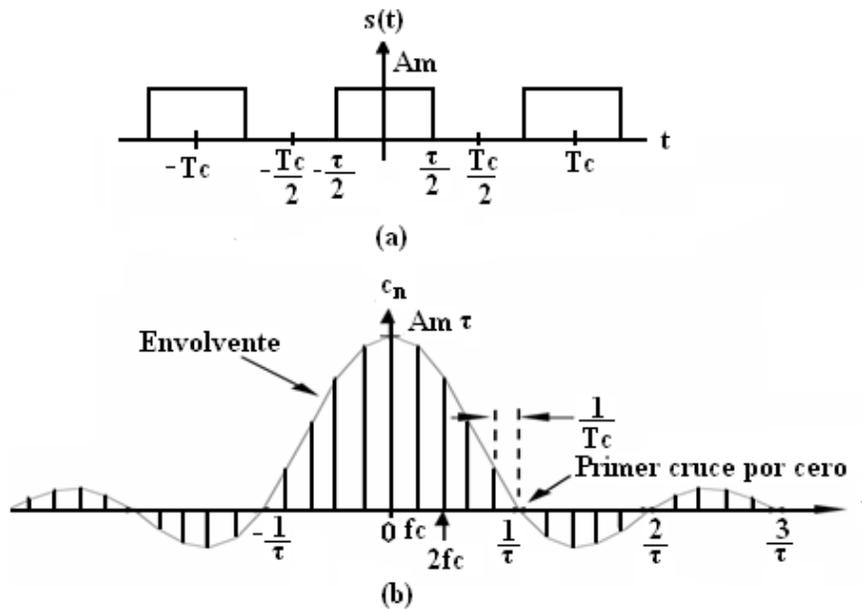


Figura 1.15: (a) Forma de onda de una señal rectangular periódica (b) Su espectro de línea

Si la señal de entrada es  $v_i(t) = \text{Cos } 2\pi f_c t + m(t)$ , la salida de un modulador conmutado es:

$$v_o(t) = v_i(t)s(t) = [\text{Cos} 2\pi f_c t + m(t)]s(t) \quad (1.35)$$

$$\left[ \frac{2}{T_c} \text{Cos} 2\pi f_c t \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{Cos} 2\pi f_c n t \right] + \frac{c_0}{T_c} m(t) + \frac{c_0}{T_c} \text{Cos} 2\pi f_c t + m(t) \frac{2}{T_c} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{Cos} 2\pi f_c n t$$

$v_o(t)$  tiene una componente dc, una componente  $m(t)$ , y un número infinito de señales AM con frecuencias de portadora  $f_c, 2f_c, 3f_c...$ . Si pasamos  $v_o(t)$  a través de un filtro pasa banda centrado en  $+f_c$ , la señal filtrada es:

$$\begin{aligned}
 v'_o(t) &= \frac{c_0}{T_c} \cos 2\pi f_c t + \frac{2}{T_c} m(t) c_1 \cos 2\pi f_c t + \frac{c_2}{T_c} \cos 2\pi f_c t \\
 &= \frac{2c_1}{T_c} [A + m(t)] \cos 2\pi f_c t
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

Donde  $A = \frac{C_0 + 2}{2c_1}$ . Es decir, obtenemos una señal normal AM.

### 1.2.3 Demodulación de Señales Normales AM

El proceso de recuperar la señal mensaje de la señal modulada es llamado **demodulación** o **detección**. Existen dos métodos básicos para la demodulación de señales normales AM.

#### Detección de la envolvente

En este método, se usa un detector de envolvente es usado para recuperar la señal mensaje. Un detector de envolvente consiste de un diodo y una combinación de resistor-condensador. Esto se muestra en la figura 1.16.

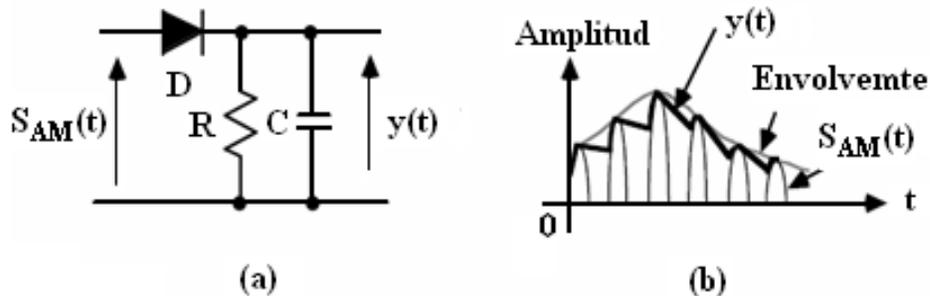
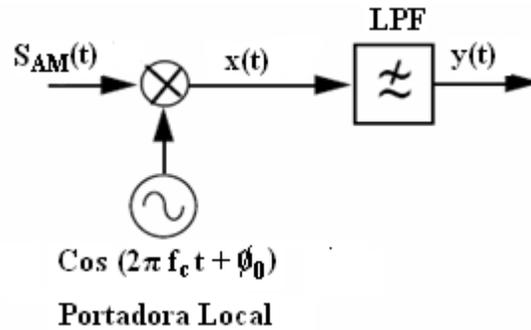


Figura 1.16: Detector de envolvente

Durante los picos de los semiciclos positivos de la señal modulada, el diodo se polariza en inversa, y el condensador se carga hasta el valor máximo de la señal modulada. Como el valor máximo de la señal modulada decae, el diodo no conduce y el condensador se descarga a través del resistor. El proceso se repite indefinidamente. Para el funcionamiento apropiado, el tiempo de descarga RC es constante y se debe elegir correctamente.

#### Detección (Coherente) Síncrona

Aquí, el resultado del detector se utiliza para convertir la señal pasa banda a banda base. Esto se muestra en figura 1.17.



**Figura 1.17: Detector Síncrono**

En el extremo de recepción, la señal pasa banda es multiplicada por una señal portadora generada localmente  $\text{Cos}(2\pi f_c t + \phi_0)$ , donde  $\phi_0$  es la fase inicial. La salida del multiplicador es:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= [A + m(t)] \text{Cos} 2\pi f_c t \text{Cos}(2\pi f_c t + \phi_0) \\
 &= 0.5[A + m(t)] [\text{Cos} \phi_0 + \text{Cos}(4\pi f_c t + \phi_0)] \\
 &= 0.5[A + m(t)] \text{Cos}(4\pi f_c t + \phi_0) + 0.5A \text{Cos} \phi_0 + 0.5m(t) \text{Cos} \phi_0
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Si suprimimos el primer término de la ecuación (1.37) mediante un filtro pasa bajo, conseguimos

$$x(t) = 0.5A \text{Cos} \phi_0 + 0.5m(t) \text{Cos} \phi_0 \tag{1.38}$$

Podemos recuperar la componente  $m(t)$  si la fase inicial  $\phi_0$  es constante y pequeña.

Supongamos ahora que la señal portadora local es  $\text{Cos}[2\pi(fc + \Delta f)t]$ , en la salida del multiplicador obtendremos:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= [A + m(t)] \text{Cos} 2\pi f_c t \text{Cos}[2\pi(f_c + \Delta f)t] \\
 &= 0.5[A + m(t)] [\text{Cos} 2\pi \Delta f t + \text{Cos} 2\pi(2f_c + \Delta f)t] \\
 &= 0.5[A + m(t)] \text{Cos} 2\pi(2f_c + \Delta f)t + 0.5A \text{Cos} 2\pi \Delta f + 0.5m(t) \text{Cos} 2\pi \Delta f
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Si suprimimos el primer término mediante un filtro pasa bajo, conseguimos:

$$x(t) = 0.5A \text{Cos} 2\pi \Delta f + 0.5m(t) \text{Cos} 2\pi \Delta f \tag{1.40}$$

No podemos recuperar la componente  $m(t)$  a menos que la derivada de la frecuencia  $\Delta f$  sea cero. Por lo tanto, la portadora local no solo debe tener la misma frecuencia sino que se debe sincronizar con la fase de la señal portadora. Si la portadora cambia en frecuencia o fase, la señal resultante se distorsiona o se atenúa. La detección síncrona también se le llama detección coherente.

### Ejemplo 1.1

Un tono de 10 V de amplitud y frecuencia 10Khz, de forma cosenoidal, modula en amplitud a una portadora de 100Khz, con un índice de modulación del 80%. Si el sistema se acopla a una impedancia de 50 Ohms.

Determinar:

- a) La expresión de onda modulada.
- b) El valor de la tensión pico de portadora.
- c) La expresión de la onda portadora.
- d) La expresión de la onda modulada.
- e) La potencia de la portadora.
- f) La potencia total.
- g) El rendimiento de modulación.
- h) Grafica amplitud Vs Frecuencia de la señal.

Solución:

a)  $e_m(t) = E_m \text{Cos} \omega_m t = 10V \text{Cos} 2\pi 10^4 t$

b)  $E_c = \frac{E_m}{m} = \frac{10V}{0.8} = 12.5V$

c)  $e_c(t) = E_c \text{Cos} \omega_c t = 12.5V \text{Cos} 2\pi 10^5 t$

d)  $\phi_{AM} = 12.5 \text{Cos} 2\pi 10^5 t + 5V \text{Cos} 2\pi 11 \cdot 10^4 t + 5V \text{Cos} 2\pi 9 \cdot 10^4 t$

e)  $P_c = \frac{12.5^2}{2 \cdot 50} = 1.5625W$

f)  $P_T = 1.5625W \left( 1 + \frac{0.8^2}{2} \right) = 2.0625W$

g) La potencia de las dos bandas laterales es de 0.5W.

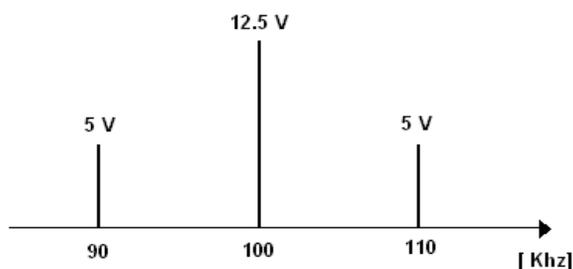
$$\eta = \frac{0.5}{2.0625} = 0.24$$

Por las potencias

$$\eta = \frac{0.8^2}{2 + 0.8^2} = 0.24$$

Por el índice

h)



## 1.3 MODULACIÓN DE UNA BANDA LATERAL SSB

### 1.3.1 Generación de Señales SSB

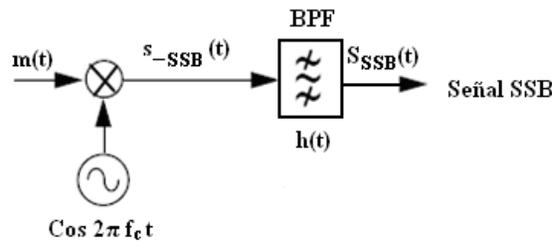
Hay dos métodos comunes de generar una señal de banda lateral, estos son:

- El Método del Filtro
- El Método Por Corrimiento de Fase

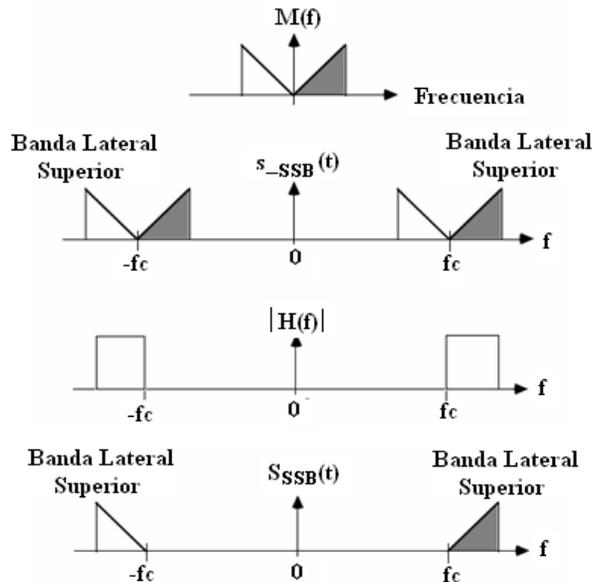
#### Método del Filtro

En este método, un modulador equilibrado se utiliza para producir una señal de DSB, y la señal deseada de la banda lateral se pasa a través de un filtro de pasa banda para ser transmitida.

Las figuras 1.18 y 1.19 ilustran la generación de una señal de SSB que utiliza el método del filtro, y los espectros asociados a ella.



*Figura 1.18: Generación de una señal SSB usando el Método del Filtro*



*Figura 1.19: Generación de una señal SSB*

El sistema de modulación AM se modificó para aumentar la eficiencia al no tener que llevar la portadora. Esto produjo modulación DSB. Sin embargo, analizando el espectro de una señal DSB, se encuentra que aún hay redundancia ya que las dos bandas alrededor de  $f_c$  son simétricas. Por lo tanto bastaría enviar una sola de las dos. Esta modulación se llama SSB.

**Método de Corrimiento de Fase**

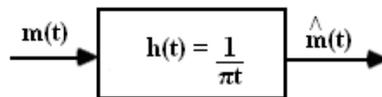
Una señal de banda lateral esta dada por:

$$S_{SSB}(t) = m(t)\text{Cos}2\pi f_c t \pm \hat{m}(t)\text{Sin}2\pi f_c t \tag{1.41}$$

Dónde el signo (-) se asocia con la banda lateral superior (USB) y el signo (+) se asocia con la banda lateral inferior (LSB).  $\hat{m}(t)$  se obtiene cambiando la fase de todas las componentes de la frecuencia de  $\hat{m}(t)$  por  $-90^\circ$ .  $\hat{m}(t)$  es llamada transformada de Hilbert de  $m(t)$  y es definida como:

$$\hat{m}(t) = H[m(t)] = m(t) * h(t) = m(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(\tau)}{t - \tau} d\tau \tag{1.42}$$

Donde  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$  (Figura 1.20).



**Figura 1.20: Diagrama de bloques de fase 90 grados.**

La transformada inversa de  $\hat{m}(t)$  es:

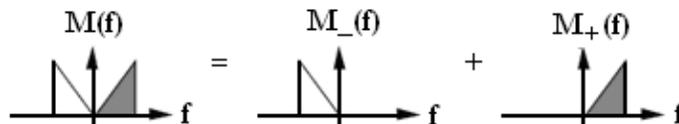
$$m(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{m}(\tau)}{t - \tau} d\tau \tag{1.43}$$

Si  $M(f)$  es la transformada de Fourier de  $m(t)$ , definimos:

$$\begin{cases} M_+(f) = M(f) & f \geq 0 \\ M_-(f) = M(f) & f < 0 \end{cases} \tag{1.44}$$

Entonces podemos escribir

$$M(f) = M_+(f) + M_-(f) \tag{1.45}$$



**Figura 1.21: Composición de  $M(f)$**

Considere un circuito lineal invariable en el tiempo que cambia la fase de todas las componentes de frecuencias positivas de una señal  $m(t)$  por  $-90$  grados y todas las componentes de frecuencias negativas de  $m(t)$  por  $+90$  grados.

Si definimos a  $\hat{M}(f)$  como la transformada de Fourier de  $\hat{m}(t)$ . Tenemos:

$$\begin{cases} \hat{M}(f) = -jM(f) & f \geq 0 \\ \hat{M}(f) = jM(f) & f < 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

Sustituimos la ecuación (1.45) en (1.46), obtenemos:

$$\hat{M}(f) = -jM_+(f) + jM_-(f) \quad (1.47)$$

Al tomar la transformada de Fourier de la ecuación (1.41), tenemos:

$$S_{SSB}(f) = \frac{1}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)] \mp \frac{1}{2j}[\hat{M}(f - f_c) - \hat{M}(f + f_c)] \quad (1.48a)$$

Sustituyendo la ecuación (1.45) y (1.47) en la ecuación (1.48a), tenemos:

$$\begin{aligned} S_{SSB}(f) &= \frac{1}{2}[M_+(f - f_c) + M_-(f - f_c)] + M_+(f + f_c) + M_-(f + f_c) \mp \\ &\frac{1}{2j}[-jM_+(f - f_c) + jM_-(f - f_c) + jM_+(f + f_c) - jM_-(f + f_c)] \\ S_{SSB}(f) &= \frac{1}{2}[M_+(f - f_c) + M_-(f + f_c) + M_+(f + f_c) + jM_-(f + f_c)] \mp \\ &\frac{1}{2}[-M_+(f - f_c) + M_-(f - f_c) + M_+(f + f_c) - M_-(f + f_c)] \end{aligned} \quad (1.48b)$$

Tomando el signo negativo de la expresión (1.48b) se haya la expresión para USB, y lo contrario para hallar LSB.

$$S_{SSB}(f) = \begin{cases} M_+(f - f_c) + M_-(f + f_c) & \text{Para\_USB} \\ M_+(f + f_c) + M_-(f - f_c) & \text{Para\_LSB} \end{cases} \quad (1.49)$$

La figura 1.22 expone la generación de una señal de SSB que utiliza el método de corrimiento de fase.

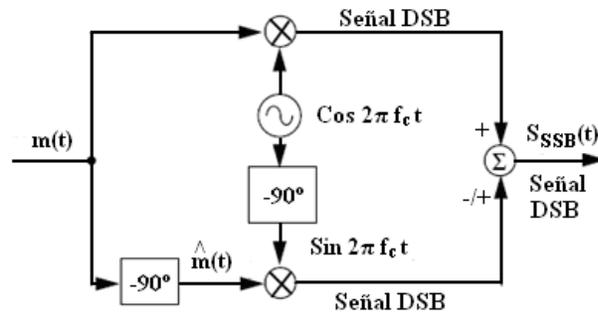


Figura 1.22: Generador de una señal SSB usando el método de corrimiento de fase.

La figura 1.23 representa los espectros en frecuencia de la señal generada SSB.

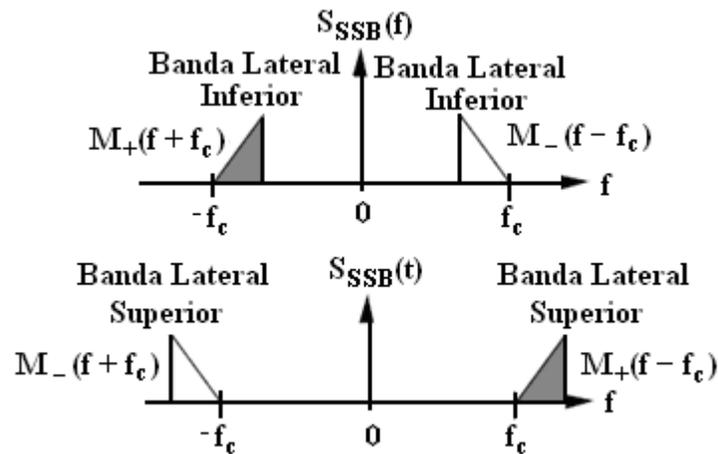


Figura 1.23: Espectro SSB en términos  $M_+(f)$  y  $M_-(f)$

Las ventajas de emplear el Método de Corrimiento de Fase son:

1. No emplea el filtro pasabanda.
2. Es conveniente para señales de mensaje que poseen una pequeña componente dc.

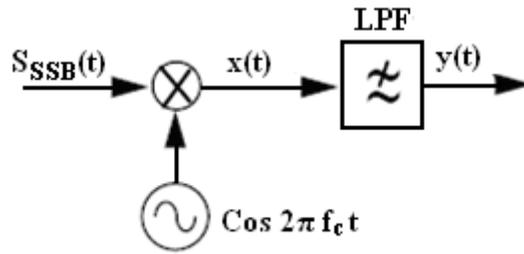
La desventaja es:

1. La realización práctica de un circuito que permita el corrimiento de fase de  $90^\circ$  es difícil.

### 1.3.2 Demodulación SSB

La Demodulación de Señales de SSB puede ser lograda utilizando un detector síncrono como en la demodulación de AM y las señales de DSB.

Esto se muestra en la Figura 1.24.



**Figure 1.24: Detector síncrono**

En el detector síncrono, la señal SSB es multiplicada por  $\text{Cos}2\pi f_c t$ :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= [m(t)\text{Cos}2\pi f_c t \mp \hat{m}(t)\text{Sin}2\pi f_c t]\text{Cos}2\pi f_c t \\
 &= m(t)\text{Cos}^2 2\pi f_c t \mp [\hat{m}(t)\text{Sin}2\pi f_c t]\text{Cos}2\pi f_c t \\
 &= 0.5m(t) + 0.5m(t)\text{Cos}4\pi f_c t \mp 0.5\hat{m}(t)\text{Sin}4\pi f_c t
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Si pasamos los dos últimos términos por un filtro pasabajos, obtenemos:

$$y(t) = 0.5m(t) \tag{1.51}$$

Es decir, podemos recuperar la componente  $m(t)$ . El filtro pasabajo solo dejaría pasar el primer término, que es precisamente el mensaje. Si la señal de portadora tiene errores de fase o de frecuencia, se distorsiona el mensaje recuperado.

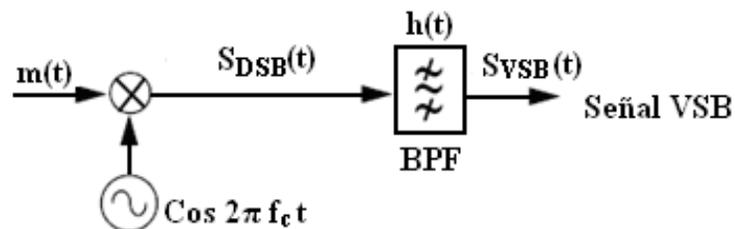
## 1.4 MODULACIÓN DE BANDA LATERAL VESTIGIAL Ó RESIDUAL (VSB)

Cuando se quiere ahorrar ancho de banda, la modulación SSB parece la más adecuada. Sin embargo, dado que es imposible eliminar exactamente la banda indeseada, este esquema de modulación produce una mala reproducción de las bajas frecuencias; además, es bastante complicado generarla y detectarla. Aparece entonces un esquema de modulación que mejora estos dos últimos problemas a cambio de un ligero aumento del ancho de banda. El resultado de esto produce la modulación VSB o Banda Lateral Vestigial, que deja pasar casi completamente una banda y un vestigio de la otra tal y como se muestra a continuación.

La modulación VSB es un compromiso intermedio entre DSB y SSB. Comparte las ventajas de DSB y SSB y evita sus desventajas: una señal VSB es relativamente fácil de generar y únicamente tiene un ancho de banda algo superior (entre un 12% o un 25%) superior al de SSB.

La aplicación más difundida de VSB es en TV comercial. La señal VSB puede ser vista como una señal DSB filtrada de manera muy particular. Las características de dicho filtro se deducen al imponer como condición que el mensaje se pueda recuperar con un detector síncrono, como en todos los otros métodos de modulación lineal.

Las figuras 1.25 y 1.26 muestran la generación de una señal de VSB, y los espectros asociados a ella.



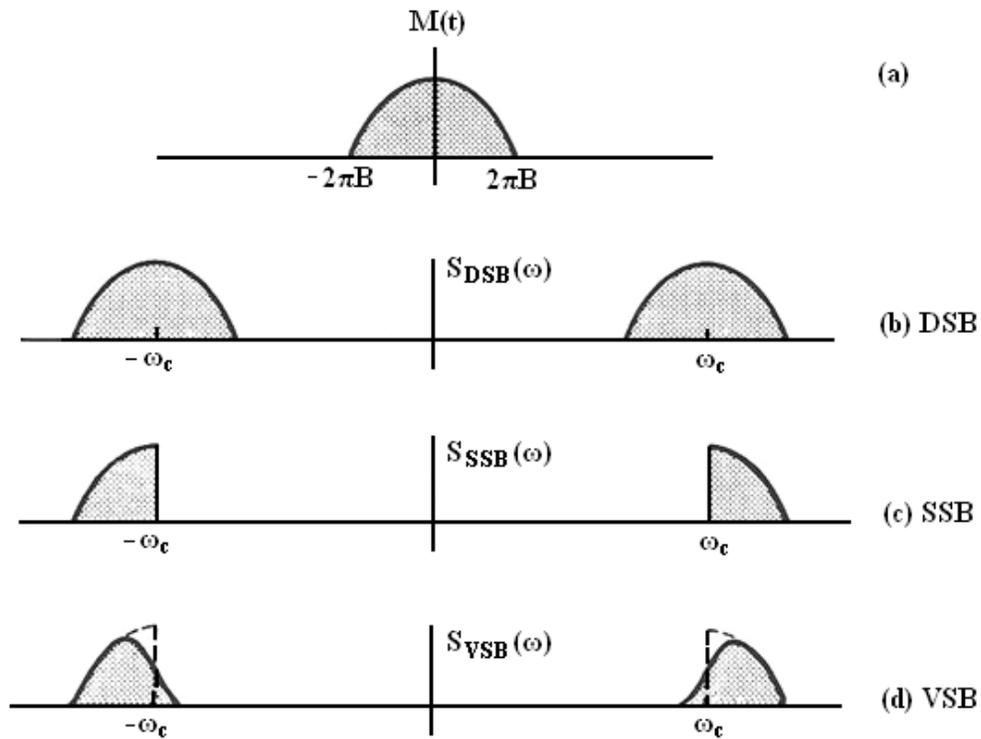
*Figura 1.25: Modulador VSB*

La señal DSB tiene un espectro de la siguiente forma:

$$X_{DSB}(f) = A_c / 2 [X(f - f_c) + X(f + f_c)] \quad (1.52)$$

Al pasarla por el filtro pasabanda, VSB:

$$X_{VSB}(f) = A_c / 2 [X(f - f_c) + X(f + f_c)] H(f) \quad (1.53)$$



**Figura 1.26: Espectro de la señal moduladora y de las señales DSB, SSB, y VSB correspondientes**

Por la inspección de la figura 1.26, la transformada de Fourier de la señal modulada VSB es:

$$S_{VSB}(f) = \frac{1}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)] H(f) \quad (1.54)$$

Donde está la función de transferencia  $H(f)$  del pasa banda.

## 1.5 RECEPCIÓN DE SEÑALES

Analizada la modulación y demodulación en amplitud, con sus diferentes variantes, se discutirá de manera genérica la recepción de señales tomando como referencia AM, pero se puede aplicar cualquier técnica.

Si tenemos varias portadoras moduladas para la demodulación, se necesita un detector sintonizado para cada una, lo que significa complicar los receptores. La idea consiste en que un solo receptor funcione para una banda determinada. Entonces ¿Cómo se soluciona el hecho de tener varias portadoras moduladas?.

La FI, se obtiene mezclando la señal de entrada con una generada localmente mediante un oscilador que difiere de la sintonizada en una FI. A la salida se obtendrá una gama de valores armónicos de suma y resta y se sintonizará la que se desea.

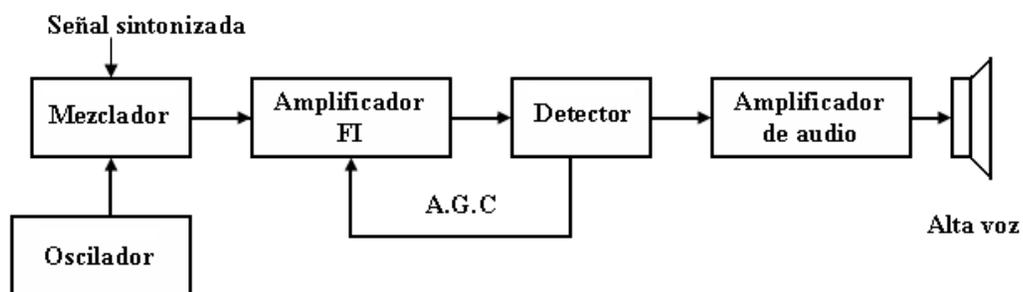
En principio, luego de sintonizar la frecuencia de portadora deseada, lo que se hace es cambiar dicha frecuencia a otro valor único sin alterar la modulación. De tal manera que este proceso significa sintonizar cualquier portadora modulada dentro de la banda y cambiar su valor en otra frecuencia única de trabajo. Este proceso se llama *Conversión* y la nueva frecuencia recibe el nombre de *frecuencia intermedia (FI)*. De una manera genérica se utiliza el término de receptor heterodino.

Heterodinizar significa trasladar o desplazar en frecuencia. La señal de FI, se amplifica y se puede detectar con un solo demodulador, con independencia de la frecuencia sintonizada.

Teniendo en cuenta la forma como se obtiene la FI, entonces la señal del oscilador deberá variar en la medida en que cambia la FI por encima o por debajo. Esto se expresa así:

$$f_{osc} = f_{sintonia} \pm 1.FI \quad (1.55)$$

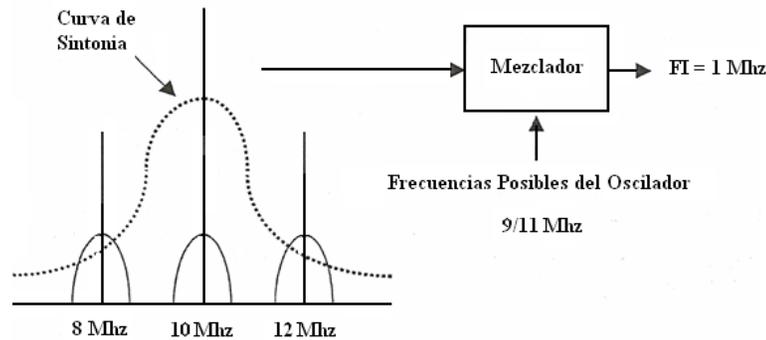
Obtenida la FI, se amplifica y luego se realiza la detección y se obtiene la banda base. La Figura 1.27, representa un esquema en bloques de un receptor. Cuando en el receptor, el oscilador esta por encima de la sintonía se los denomina superheterodinos.



*Figura 1.27: Esquema en bloque de un receptor.*

Si bien es cierto es una alternativa muy útil, en la generación de la FI, aparece un problema muy particular y es el de la frecuencia imagen.

Supongamos que sintonizamos una portadora en 10 Mhz modulada en AM y deseamos obtener una FI de 1 Mhz. La frecuencia del oscilador local deberá estar en 11 o en 9 Mhz. Supongamos la respuesta de sintonía tal como se ve en la Figura 1.28.



**Figura 1.28: Respuesta de sintonía**

Nótese que por la característica más atenuada de la sintonía, las otras dos estaciones pueden ser captadas. Si el oscilador estuviera en 8 Mhz y la portadora de 9 Mhz, al mezclarse da la FI ( $9-8 = 1$  Mhz) y si el oscilador estuviera en 11 Mhz y se combina con la portadora de 12 Mhz, se obtiene la FI ( $12-11 = 1$  Mhz).

Para ambos casos esta es una situación no deseada, ya que se toma una portadora no sintonizada que ingresa como una sintonía normal.

Esta frecuencia se la denomina frecuencia imagen y surge como resultante de la conversión, esta se calcula como:

$$f_{imagen} = f_{sintonia} \pm 2.FI \quad (1.56)$$

La frecuencia imagen no puede ser eliminada pero se pueden minimizar sus efectos, por ejemplo, haciendo más selectivo el sintonizado de entrada para que solo pase la portadora deseada. Por esto es que se utiliza un amplificador a la entrada del mezclador denominado amplificador de RF. Pero debe tenerse en cuenta que cuando se desea obtener una FI, a partir de una portadora sintonizada muy elevada este amplificador no puede ser tan selectivo. Por ello es muy importante el criterio de elección de la FI. Esta deberá ser tan baja como sea posible y tan alta que se pueda rechazar la imagen. Por lo anterior se ha llegado a tener receptores de doble y hasta de triple conversión. Obteniendo en primer instancia FI altas y luego por sucesivas conversiones la deseada.

El criterio es elegir la FI, de tal manera que la frecuencia imagen quede fuera de la banda de servicio deseada.

## 1.5.1 Receptor Superheterodino

En los receptores que hemos visto hasta ahora hemos supuesto que se recibía siempre una señal centrada a una frecuencia fija  $f_c$  y que tanto el amplificador de RF como el oscilador local estaban sintonizados a esa misma frecuencia. Este tipo de receptor se denomina “receptor de radiofrecuencia sintonizada”. Pero en la práctica es necesario transmitir a diferentes frecuencias o bandas y las ventajas de un sistema a una sola frecuencia ya no pueden aplicarse, pues sería necesario sintonizar cada vez todos los amplificadores de RF presentes.

El problema de la sintonización sobre una amplia gama de frecuencias, es la dificultad en el establecimiento de la banda de atenuación apropiada, mientras que al mismo tiempo se mantiene una amplitud constante sobre las diferentes bandas de paso. Además, es difícil conseguir altas ganancias en radiofrecuencia y al mismo tiempo impedir el acoplamiento parásito entre la entrada y salida del amplificador de RF, que puede hacer que el amplificador entre en un lazo de oscilación. Ahora bien, si una señal de RF, no importa cual sea su frecuencia central, pudiera ser trasladada a una frecuencia o banda predeterminadas, las ventajas de la operación a una frecuencia fija se pueden instrumentar fácilmente en un receptor. Este es el principio del “receptor superheterodino”, cuyo diagrama de bloques y principio de operación se muestra en la Figura. 1.29.

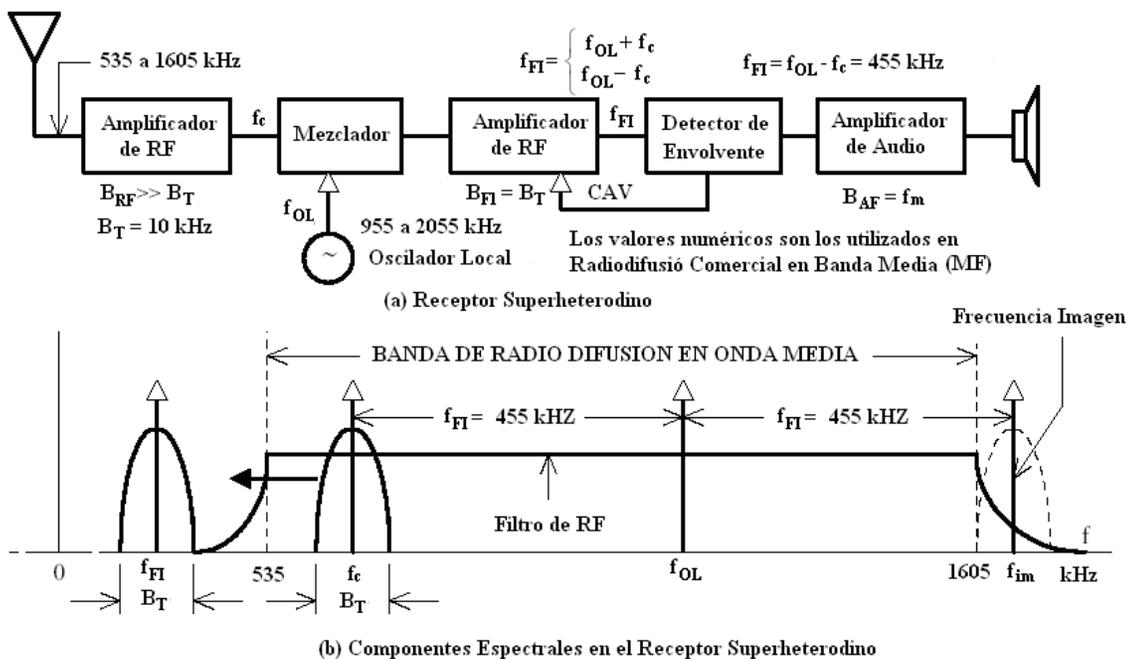


Figura 1.29: El receptor superheterodino y sus componentes espectrales asociadas.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> “Principios de las Comunicaciones”, 3ª Edición, Pág. 484, José E. Briceño.

La señal entrante, centrada a una frecuencia  $f_c$ , primero se amplifica en el amplificador de RF. Los amplificadores de RF típicos son amplificadores pasabanda sintonizables dentro de diferentes gamas de frecuencias. Por ejemplo, en Radiodifusión Comercial en Banda Media (MF), esta gama se extiende desde 535 a 1605 kHz. En la etapa mezcladora, la señal de RF centrada en  $f_c$  se mezcla con una señal sinusoidal de frecuencia  $f_{OL}$  generada localmente. El circuito de sintonización del oscilador local está acoplado (mecánica o electrónicamente) con el circuito de sintonización del amplificador de RF, de tal manera que la diferencia entre  $f_{OL}$  y  $f_c$  sea constante; esta frecuencia constante se denomina “frecuencia intermedia,  $f_{FI}$ ”. El acoplamiento de la sintonización generalmente se realiza con un capacitor variable de varias secciones, cuyos valores cambian cuando se actúa el control de sintonización. En los receptores modernos se utiliza diodos varactores, que no están sujetos a acumulación de polvo o humedad y que se prestan para ser utilizados con los sintetizadores de frecuencia. La frecuencia  $f_{OL}$  puede ser más alta o más baja que la frecuencia de entrada  $f_c$ , pero la diferencia  $|f_{OL} - f_c|$  debe ser siempre constante e igual  $f_{FI}$ .

El mezclador puede ser cualquier tipo de modulador balanceado que se puede instrumentar de diferentes formas. A la salida del mezclador aparecen las señales  $f_{OL} + f_c$  y  $f_{OL} - f_c$ . La componente centrada en  $f_{OL} + f_c$  es rechazada por el amplificador de frecuencia intermedia (FI), el cual está sintonizado a la frecuencia fija  $f_{FI} = f_{OL} - f_c$ . La salida del amplificador de FI pasa al detector de envolvente, se demodula, se amplifica y filtra en el amplificador de audio y se presenta a la salida, en este caso un altavoz.

Ahora el principio del receptor superheterodino puede deducirse. En vez de intentar la sintonización en toda la gama de RF con un filtro altamente selectivo, lo que se hace es utilizar un filtro sintonizable también, pero dentro de una parte de la gama de RF; por ejemplo, entre 535 y 1605 kHz, a fin de rechazar la mayor parte de las frecuencias imagen; los receptores comerciales de comunicación pueden tener hasta nueve bandas de RF. Todas las señales que pasan por el filtro de RF son desplazadas entonces por el mezclador, pero solamente serán aceptadas aquellas señales que caigan dentro de la banda de paso del amplificador de FI. La selectividad, sensibilidad y ganancia del receptor están entonces determinadas por las características pasabanda del amplificador de FI, el cual puede ser diseñado y optimizado pues trabaja siempre dentro de una banda fija.

### **Ejemplo 1.2**

La radiodifusión comercial de AM, la banda de frecuencia ocupa un rango entre 520 a 1680 Khz, modulada en amplitud con un ancho de banda base de 5 Khz, con una FI de 455 Khz.

Si se utiliza un receptor superheterodino, que toma la señal de LW1 (Radio Universidad de Cartagena) cuya portadora esta en 580 Khz.

Determinar:

- a) Frecuencia del oscilador local.

- b) Valor de la frecuencia imagen.
- c) Analice, si este valor de frecuencia imagen afecta a nuestra recepción.

Respuesta:

$$a) f_{oscilador} = f_{sintonia} \pm 1.FI = 580Khz + 455Khz = 1035Khz$$

$$b) f_{imagen} = f_{sintonia} \pm 2.FI = 580Khz + 910Khz = 1490Khz$$

- c) Solo analizamos el valor de 1490 Khz, ya que el otro no afecta. Esta valor cae dentro de la banda, sin embargo debe tenerse en cuenta que la señal modulada ocupa en el canal 10 Khz. El ancho de banda de sintonización esta muy próximo a los 10Khz. Por lo tanto es muy poco probable que pueda entrar este valor cuando se está sintonizando LW1.

### 1.5.2 Elección de FI

La elección de la FI, se basa en que sea muy baja y que en la medida de lo posible la frecuencia imagen quede fuera de la banda de sintonía.

Se trata siempre de trabajar con una sola FI y cuando no se puede, se realiza doble y hasta triple conversión.

Un criterio razonable de elección suele ser tomar la semidiferencia de la banda de sintonía, tal que:

$$FI_{min} = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} \tag{1.57}$$

En este caso si analizamos la frecuencia imagen, se debe trabajar sobre la máxima y la mínima de sintonía quedando la imagen en los extremos de banda.

Si sintonizamos el extremo superior, es decir; la frecuencia de sintonía máxima y recordando la expresión 1.57, la imagen queda:

$$f_{imagen} = f_{sintonia} \pm 2.FI = f_{max} \pm 2 \cdot \left( \frac{f_{max} - f_{min}}{2} \right) \tag{1.58}$$

Dando dos posibles valores de imagen:

$$f_{imagen} = 2 \cdot f_{max} - f_{min} \tag{1.59}$$

$$f_{imagen} = f_{\min} \quad (1.60)$$

Donde un valor queda fuera de la banda de sintonía y el otro en el extremo inferior de la banda.

De la misma manera si se sintoniza el extremo inferior de la banda, es decir la frecuencia de sintonía mínima, la imagen queda:

$$f_{imagen} = f_{sintonia} \pm 2.FI = f_{\min} \pm 2 \cdot \left( \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} \right) \quad (1.61)$$

Dando los posibles valores de imagen:

$$f_{imagen} = 2f_{\min} - f_{\max} \quad (1.62)$$

$$f_{imagen} = f_{\min} \quad (1.63)$$

Donde se ve que el único valor importante es el segundo y queda en el extremo superior de la banda de sintonía. Cualquier otro valor que se sintonizara dentro de la banda, tendrá su frecuencia imagen fuera de la banda de sintonía.

Para lograr que la imagen quede fuera de la banda de sintonía, para los extremos, habrá que agregar algún valor a la FI, entonces la ecuación 1.57 se transforma en:

$$FI_{\min} = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} + K \quad (1.64)$$

Donde K, se determinará como un valor mínimo.

### Ejemplo 1.3

En una banda de 2,8 a 3 Ghz, un radar superheterodino trabaja en una frecuencia de 2,9 Ghz, con el oscilador en 2,95 Ghz. Otro receptor que opera en la frecuencia imagen del primero, produce interferencia.

Determinar:

- a) La FI del primer receptor.
- b) La frecuencia de portadora del segundo receptor.
- c) El valor de la FI mínima, para no tener problemas de imagen en esta banda.

Respuesta:

$$a) \quad FI = f_{osc} - f_{sintonia} = 2,95 - 2,9 = 0,05 \text{Ghz}$$

$$b) \quad f_{imagen} = f_{sintonia} - 2 \cdot FI = 2,95 - 2 \cdot 0,05 = 2,85 \text{Ghz}$$

$$c) \quad FI_{\min} = \frac{f_{sint.\max} - f_{sint.\min}}{2} = \frac{3 - 2,8}{2} = 0,01 \text{Ghz}$$

Este será el valor mínimo de FI, con el cual la imagen quedará en los extremos de sintonía. Para sacarla fuera de la banda habrá que elegir un valor mayor.

### Ejemplo 1.4

Un receptor superheterodino, sintoniza una señal modulada de 100 Mhz, la FI es de 10 Mhz. Una estación en 210 Mhz con la misma modulación produce interferencia.

Determinar ¿porque razón ocurre esto?

Respuesta:

La frecuencia del oscilador local será:

$$f_{osc} = f_{sin} + FI = 100 + 10 = 110 \text{Mhz}$$

Por un lado la segunda armónica del oscilador local es de 220Mhz si esta no se filtra bien y por otro si el sintonizado de entrada no es suficientemente selectivo puede ocurrir que otras frecuencias tales como 210 y 230 Mhz ingresen al mezclador y den la FI.

$$f_{sin} = f_{osc} \pm FI = 220 \pm 10 = 230 \text{ ó } 210 \text{Mhz}$$

Por ello es muy importante un receptor con una buena etapa de RF y adecuado filtrado en el oscilador.

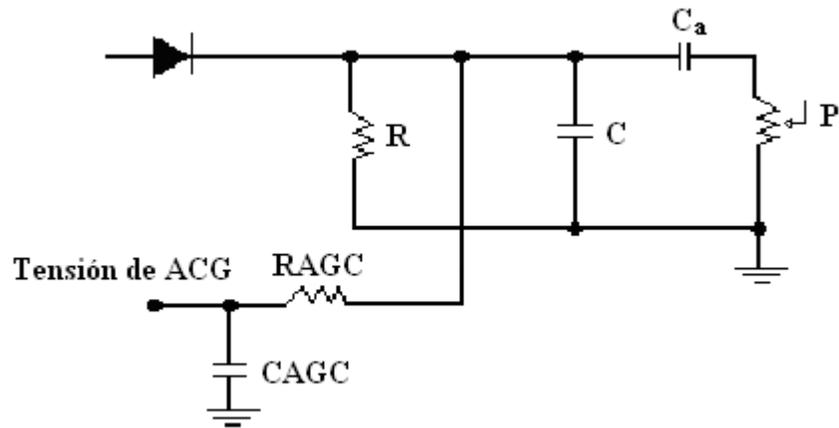
### 1.5.3 Control de Ganancia

En la figura 1.27, se ve que desde el detector sale una tensión de control a la cadena de FI. Esta es la tensión de AGC (Control Automático de ganancia), que mantiene la salida de la señal demodulada constante frente a cambios de la señal de entrada

Al efecto esta tensión mantiene constante la salida, variando la ganancia de la cadena de FI y del amplificador RF, en el caso de tenerlo.

Todos los receptores disponen de AGC y hay una gran variedad de sistemas donde el más sencillo consiste en una tensión obtenida por un filtro de gran constante de tiempo a la salida del detector.

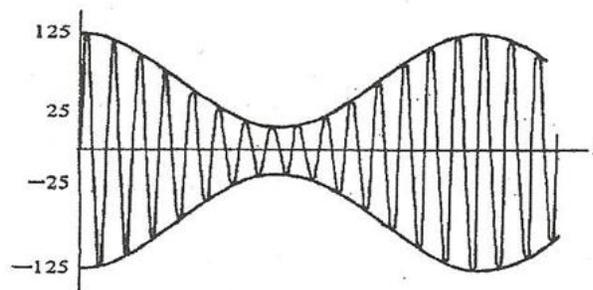
En la figura 1.29, se ve un detector de envuelta, donde la salida de AGC, se logra por  $R_{AGC}$  y  $C_{AGC}$ , esta señal será positiva o negativa según el tipo de tensión que se necesite para el control de la amplificación. La polaridad la fija el diodo. Para este caso la tensión es positiva.



*Figura 1.30: Detector de envuelta*

## ACTIVIDADES

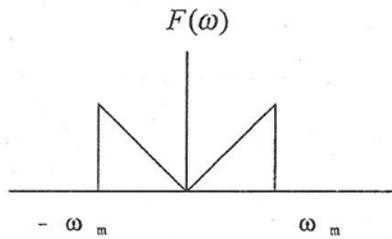
- Una portadora con frecuencia de 500Khz es modulada en un modulador balanceado ideal por la señal  $x(t) = 6 \cos 4\pi \times 10^3 t + 4 \cos 10\pi \times 10^3 t$ .
  - Usando solamente aritmética simple, haga una lista de las frecuencias (en Hertz) que aparecen en la salida DSB del modulador.
  - Desarrolle una expresión formal para la salida DSB  $y(t)$ . Asuma una función cosenoidal con una unidad de amplitud normalizada para la portadora.
  - Grafique el espectro unilateral tanto para la entrada como para la salida del modulador.
- Asuma que la señal de DSB generada en el ejemplo anterior es aplicada directamente a un detector de producto que tiene una portadora local de la forma  $c(t) = \cos(10^6 \pi t + \theta)$ . Después de la multiplicación, la señal es aplicada a un filtro pasabajo que tiene una frecuencia de corte justo por encima de 5KHz.
  - Para  $\theta = 0$ , mostrar que la salida  $x_d(t)$  del filtro pasabajo es directamente proporcional a la modulación de la señal  $x(t)$ .
  - Para  $\theta = 90^\circ$ , mostrar que  $x_d(t) = 0$ .
- En el siguiente gráfico en tensión, muestra una portadora cosenoidal de 10 Mhz, que es modulada en amplitud por un tono cosenoidal de 10 Khz.



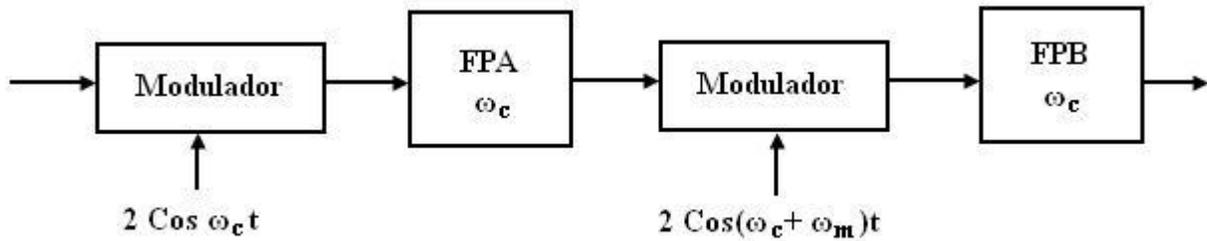
Determinar:

- El índice de modulación.
- Escriba la ecuación de la onda modulada.
- El gráfico en frecuencia de la señal modulada.
- La potencia total del sistema si se carga sobre una resistencia de  $50\Omega$ .

4. El espectro de una cierta  $f(t)$  se muestra a continuación.



Para generar un tipo de criptografía que asegure la comunicación, esta es aplicada a un sistema mezclador cuyo diagrama en bloques se muestra a continuación.



Determinar:

- La gráfica en frecuencia de la señal en cada uno de los puntos del diagrama.
- Un esquema en bloques para la recuperación de la señal original.
- La gráfica de la señal en frecuencia en cada punto del diagrama propuesto.

# UNIDAD II

## MÉTODOS DE MODULACIÓN ANGULAR

### INTRODUCCIÓN

Recordemos que el proceso de modulación consiste en variar algunos de los parámetros de una portadora, generalmente senoidal, de acuerdo a una señal de información o señal moduladora. En el caso de modulación angular, se hace variar la frecuencia o la fase de la portadora. Por lo anterior, la modulación angular tiene dos variantes: modulación de frecuencia (FM) y modulación de fase (PM). En ambos casos, la amplitud de la portadora se mantiene constante. Por esta razón a estos tipos de modulación se les designa también como de *envolvente constante*, en tanto que a la modulación de amplitud se le designa como de *envolvente variable*.

A continuación se estudiarán los métodos de modulación angular, sus características de ancho de banda, potencia, etc; así como los métodos de generación de las señales FM y PM, la demodulación angular y las aplicaciones en FM Estéreo, entre otras variables.

### OBJETIVOS

- Analizar y comprender los conceptos relacionados con la Modulación Angular, sus características y variantes.
- Comprender los métodos de demodulación analógica de frecuencia.
- Sintetizar la estructura de generación y recepción de señales FM y PM.
- Analizar las ventajas, desventajas, utilidad y características generales de los métodos de modulación angular.
- Interpretar las características de transmisión y recepción de FM Estéreo.
- Desarrollar y aplicar los conceptos para la resolución de problemas.

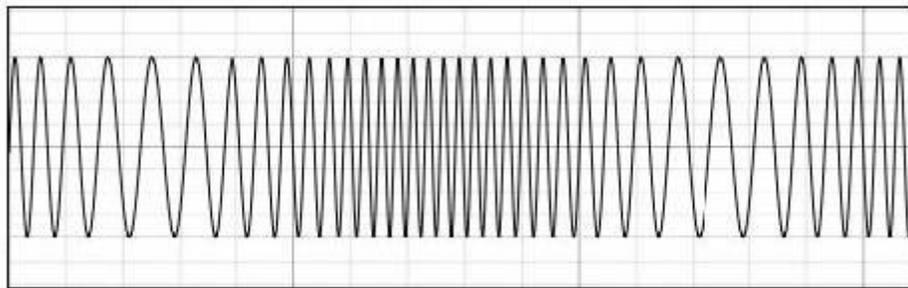
## 2.1 MODULACIÓN ANGULAR

Existen varias ventajas en utilizar la modulación angular en vez de la modulación en amplitud, tales como; la reducción de ruido, la fidelidad mejorada del sistema y el uso más eficiente de la potencia. Sin embargo, FM y PM tienen varias desventajas importantes, las cuales incluyen el requerimiento de un ancho de banda extendido y circuitos más complejos, tanto en el transmisor, como en el receptor.

Considere la función definida por:

$$y(t) = A \cdot \cos[\omega_c t + \phi_i(t)] \quad (2.1)$$

Para  $\phi_i(t)=0$ , la ecuación (2.1) describe una sinusoidal ordinaria con amplitud  $A$  y frecuencia angular  $\omega_c$ . De cualquier manera, se asume que  $\phi(t)$  esta hecha para variar de alguna forma una función controlada por una señal de información dada; excepto para ciertos casos la función no aparecerá como una simple señal sinusoidal. La forma de la onda aún oscilará entre los valores de  $A$  y  $-A$ , pero la forma con que suceden las oscilaciones dependen en gran manera, de la fase  $\phi_i(t)$ . Esta idea es ilustrada en la Fig. 2.1 para algunas funciones de fase arbitrarias.



**Figura 2.1: Representación de una señal arbitraria modulada en fase**

Este concepto es básico para la modulación angular, la cual, para este análisis, puede ser definida como el proceso en el cual el ángulo de una función sinusoidal de referencia es variado de acuerdo con una señal moduladora. De cualquier manera, más adelante se observará que la función para la cual la modulación es inicialmente aplicada no necesita ser una sinusoidal, pero, en la mayoría de las aplicaciones, la señal final después del proceso está basada en una referencia sinusoidal, de manera que su forma puede ser asumida como se desarrollará a continuación.

Las dos formas de modulación angular son: **modulación de fase (PM)** y **modulación de frecuencia (FM)**. Las formas de las señales moduladas en fase y las moduladas en frecuencia solo difieren en la razón de variación de ángulo; es por esto que usualmente no es posible distinguir una señal PM de una FM por simple inspección; es más, muchos sistemas de modulación emplean una combinación de PM

Actualmente, la modulación angular es usada extensamente para la radiodifusión comercial, transmisión de sonido de televisión, radio móvil de dos sentidos, radio celular y los sistemas de comunicaciones por microondas y satélites.

y FM. Por esta razón, no es necesario ni deseable estudiar PM y FM como dos conceptos totalmente separados.

A continuación se muestran varios términos que se usaran frecuentemente en el desarrollo del tema.

$$\phi_i(t) = \text{Angulo de fase señal instantánea}$$

$$\Phi_i(t) = \text{Angulo de fase total instantáneo} = \omega_c t + \phi_i(t)$$

$$\omega_i(t) = \text{Frecuencia en radián de la señal instantánea}$$

$$\Omega_i(t) = \text{Frecuencia en radianes total instantánea} = \omega_c + \omega_i(t)$$

Observe que para ambas; fase y frecuencia, hay una función de señal y una función total. La función de señal en cada caso será la porción que representa el efecto directo de la señal moduladora. La función total tiene un término adicional, que representa la referencia de la portadora de alta frecuencia.

La referencia de la portadora permite que el espectro total tienda a crecer y a centrarse en  $f_c$  para propósitos de transmisión, como se verá más adelante. Note que el término de referencia de la portadora aparece como  $\omega_c t$  en la función de fase, pero aparece como  $\omega_c$  en la función de frecuencia en radianes.

Las relaciones entre la señal de fase y frecuencia se definen como:

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi_i(t)}{dt} \quad (2.2)$$

$$\phi_i(t) = \int_0^t \omega_i(t) dt \quad (2.3)$$

donde se ha asumido para un mejor entendimiento que el ángulo de fase inicial es cero  $\phi_i(t) = 0$ .

Las relaciones entre las funciones de fase total y de frecuencia total son similares y están dadas por:

$$\Omega_i(t) = \frac{d\Phi_i(t)}{dt} \quad (2.4)$$

y

$$\Phi_i(t) = \int_0^t \Omega_i(t) dt \quad (2.5)$$

Donde nuevamente, la fase inicial se asume como cero. Note que la frecuencia total y la fase total están relacionadas de la misma manera.

De esta forma una señal compuesta modulada en ángulo puede ser expresada en términos de las definiciones:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= A \cdot \cos \Phi(t) \\
 y(t) &= A \cdot \cos[\omega_c t + \phi_i(t)]
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

La frecuencia total instantánea correspondiente a esta función, puede ser determinada aplicando la ecuación (2.4), y la señal instantánea de frecuencia angular puede ser determinada a partir de la ecuación (2.2).

Lo apropiado para estas definiciones, puede ser verificado considerando el ejemplo de una senoide de frecuencia constante. En este caso, la señal de fase  $\phi_i(t)$  puede ser asumida como cero y la señal total de fase  $\Phi_i(t) = \omega_c t$ . Aplicando la ecuación (2.4), se tiene que  $\Omega_i(t) = \omega_c$ , lo cual es un valor constante. Este resultado está totalmente de acuerdo con el concepto previo de frecuencia. En el caso más general, la definición de frecuencia instantánea puede o no producir un resultado que sea inmediata e intuitivamente obvio.

Ahora se mostrará la manera en la cual PM y FM son generadas desde una señal moduladora arbitraria; es conveniente considerar la señal moduladora normalizada con una máxima magnitud de unidad. Sea:

$x(t)$  = Señal moduladora normalizada (máxima magnitud =1)

$\Delta\phi$  = Máxima desviación de fase en radianes (referida a la fase de referencia de la portadora  $\omega_c t$ ).

$\Delta\omega$  = Máxima desviación de frecuencia angular en radianes por segundo (referida a la fase de referencia de la portadora  $\omega_c$ ).

$$\Delta f = \text{Máxima desviación de frecuencia en hertz} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

En esencia, la diferencia entre la Modulación en Frecuencia (FM) y Modulación de Fase (PM), está en cuál propiedad de la portadora (la frecuencia o la fase) está variando directamente por la señal modulante y cuál propiedad está variando indirectamente. Siempre que la frecuencia de la portadora está variando, la fase también se encuentra variando, y viceversa. Por lo tanto, FM y PM, deben ocurrir cuando se realiza cualquiera de las formas de modulación angular. ***Si la frecuencia de la portadora varía directamente de acuerdo con la señal modulante, resulta en una señal de FM. Si la fase de la portadora varía directamente de acuerdo con la señal modulante, resulta en una señal PM.*** Por lo tanto, la FM directa es la PM indirecta y la PM directa es la FM indirecta.

### 2.1.1 Modulación de Fase (PM)

Con PM, la fase de la señal  $\phi_i(t)$  es proporcional a la señal moduladora.

$$\phi_i(t) = \Delta\phi x(t) \tag{2.7}$$

La fase total se obtiene adicionando la fase de la portadora a la ecuación (2.7), y la función PM compuesta resultante es:

$$y(t) = A \cdot \cos[\omega_c t + \Delta\phi x(t)] \tag{2.8}$$

La frecuencia angular instantánea para la señal PM es:

$$\Omega_i(t) = \omega_c + \Delta\phi \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.9)$$

Para la señal PM, se tiene que la fase instantánea de la señal es directamente proporcional a la señal moduladora, pero la frecuencia en radianes de la señal instantánea es directamente proporcional a la derivada de la señal moduladora.

*Desviación de fase instantánea:* Es el cambio instantáneo en la fase de la portadora, en un instante de tiempo, e indica cuánto está cambiando la fase de la portadora con respecto a su fase de referencia.

*Fase instantánea:* Es la fase de la portadora, en un instante de tiempo.

### 2.1.2 Modulación de frecuencia (FM)

Con FM, la frecuencia en radianes de la señal instantánea  $\omega_i(t)$  es proporcional a la señal modulada.

$$\omega_i(t) = \Delta\omega x(t) \quad (2.10)$$

La frecuencia angular instantánea total  $\Omega_i(t)$  se obtiene adicionando la frecuencia de la portadora  $\omega_c$  a la ecuación (2.10).

$$\Omega_i(t) = \omega_c + \Delta\omega x(t) \quad (2.11)$$

La fase total instantánea correspondiente a esta función es:

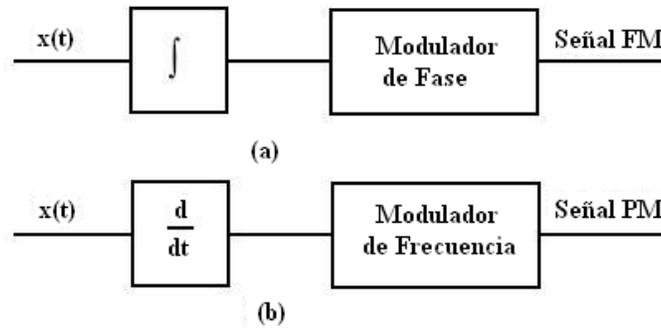
$$\Phi_i(t) = \int_0^t \Omega_i(t) dt = \omega_c t + \Delta\omega \int_0^t x(t) dt \quad (2.12)$$

Donde el ángulo de fase inicial se asume como cero. La señal compuesta FM es:

$$y(t) = A \cdot \cos \left[ \omega_c t + \Delta\omega \int_0^t x(t) dt \right] \quad (2.13)$$

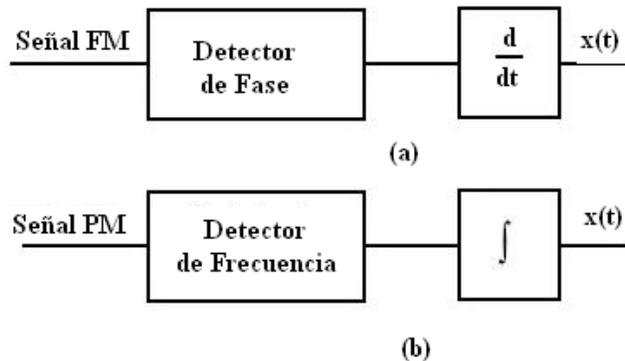
La forma matemática de PM y FM han sido desarrolladas en las secciones anteriores (2.1.1 y 2.1.2). En ambos casos, la fase y la frecuencia cambiarán en alguna manera en cuanto la señal moduladora cambie. Con respecto a la señal moduladora, existe una relación directa de fase en PM y en FM una relación directa en frecuencia. Gracias a las relaciones derivativas/integrativas entre PM y FM, se usan algunos de los circuitos moduladores y detectores diseñados para PM con FM y viceversa.

Para el bloque modulador PM mostrado en la figura (2.2a). El circuito tiene como salida la fase de la señal, la cual es directamente proporcional a la señal moduladora en la entrada. Si la señal se integra primero, tenemos que la salida será, de hecho, una señal FM con respecto a la señal moduladora. Considerando el bloque modulador mostrado en la figura (2.2b), este circuito produce una salida en donde la frecuencia de la señal es proporcional a la señal moduladora en la entrada. Si primero se deriva la señal, la salida será una señal PM con respecto a la señal moduladora.



**Figura 2.2:** a) Un modulador PM puede ser usado para generar una señal FM si la señal moduladora se integra primero. b) Un modulador FM puede ser usado para generar una señal PM si la señal moduladora se deriva primero.

Considere ahora el detector FM mostrado en la Fig. (2.3a). Este circuito produce un voltaje de salida proporcional a la fase de la señal modulada en la entrada. El circuito puede ser usado para demodular una señal FM si un circuito derivador procesa la señal a la salida del detector. Finalmente, el circuito detector PM mostrado en la Fig. (2.3b) puede ser usado para demodular una señal PM si un circuito integrador procesa la señal a la salida del detector.



**Figura 2.3:** a) Un detector FM puede ser usado para detectar una señal FM si la señal detectada es derivada. b) Un detector PM puede ser usado para detectar una señal PM si la señal detectada se integra.

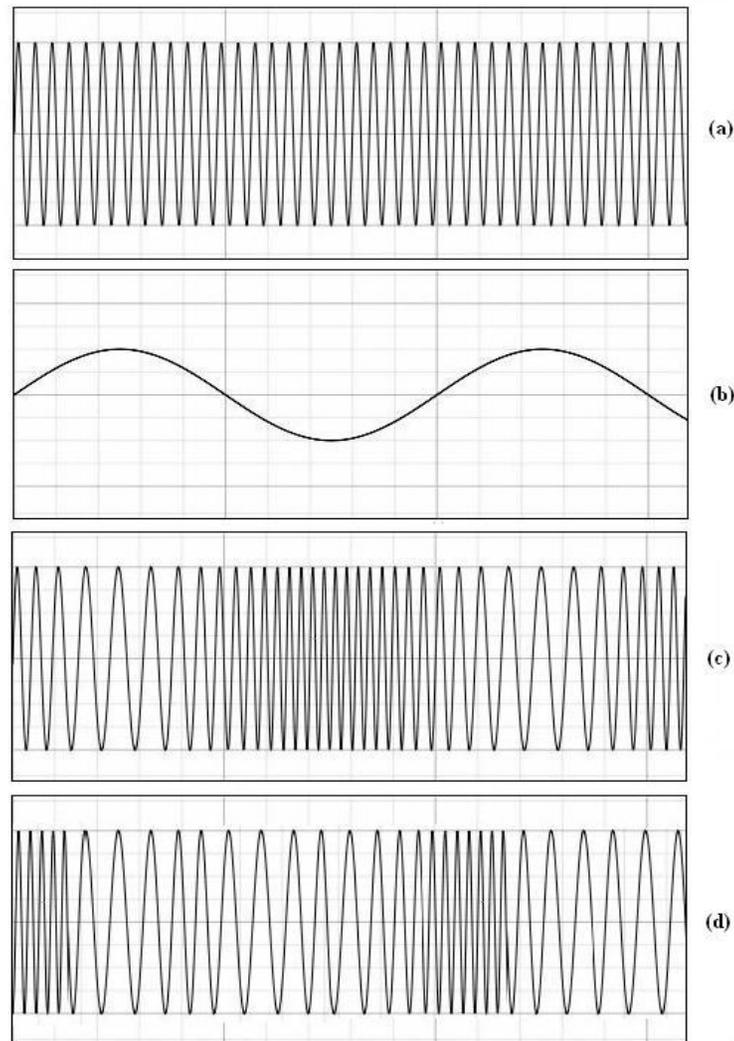
En este momento es importante preguntarse acerca de la potencia contenida en una señal modulada angularmente.

Asumiendo una amplitud  $A$ , la potencia normalizada generada por una portadora sin modular en una resistencia de referencia de  $1\Omega$  es, claramente:  $P = \frac{A^2}{2}$ . En todo caso, reconocemos que la señal

todavía oscila en el mismo rango de amplitud que antes, entonces, uno podría intuitivamente sospechar que la potencia promedio permanece constante. Esta sospecha es, de hecho, confirmada, y puede demostrarse por un riguroso desarrollo que la potencia promedio sigue siendo la misma que la suministrada, si es tomada sobre un intervalo suficientemente largo. Esta restricción es hecha, ya que es posible definir ciertas señales moduladoras en las que un promedio de la potencia total en un intervalo corto puede llevar a un resultado diferente.

En resumen, la potencia promedio en un período largo de una señal modulada angularmente, permanece constante con o sin modulación y es  $P = \frac{A^2}{2}$  en una referencia de  $1\Omega$ . Este punto usualmente resulta en una aproximación más simple al diseñar las etapas de amplificación de potencia en un transmisor modulado angularmente, comparado con uno para AM.

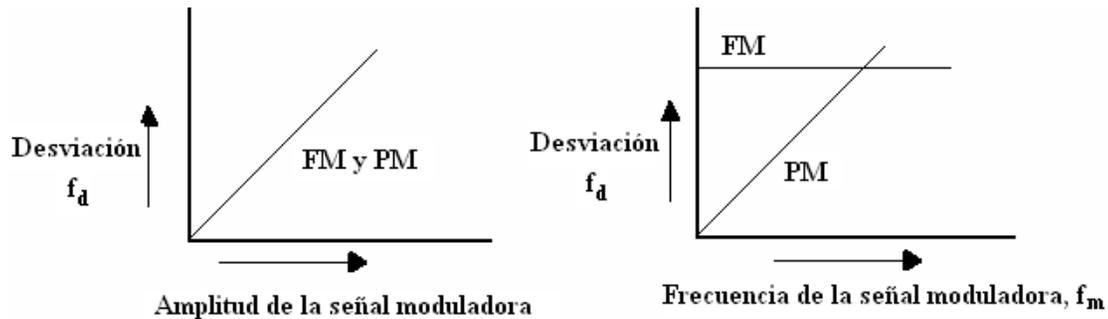
La figura 2.4 muestra la modulación en frecuencia y en fase de una portadora sinusoidal por una señal modulante de frecuencia única. Se puede observar que las formas de onda FM y PM son idénticas, excepto por su relación de tiempo (fase). Por lo tanto, es imposible distinguir una forma de onda de FM de una forma de onda de PM, sin saber las características de la señal modulante.



**Figura 2.4: Modulación en fase y en frecuencia de una portadora de onda seno, por una señal de onda seno: (a) portadora demodulada; (b) señal modulante; (c) onda de frecuencia modulada; (d) onda de fase modulada.**

Para FM, la máxima desviación de frecuencia (cambio en la frecuencia de la portadora) ocurre durante los máximos puntos negativos y positivos de la señal modulante, es decir, la desviación de frecuencia es proporcional a la amplitud de la señal modulante.

Para PM, la máxima desviación de frecuencia ocurre durante los cruces de cero de la señal modulante, es decir, la desviación de frecuencia es proporcional a la pendiente o primera derivada de la señal modulante. Por ende, para PM la desviación de frecuencia de la portadora es proporcional a la frecuencia moduladora y a la amplitud moduladora. Mientras que en FM, ésta desviación de frecuencia tan sólo es proporcional a la amplitud de la señal moduladora sin depender de su frecuencia. Este análisis se puede observar en la figura 2.5.



**Figura 2.5: Representación gráfica entre desviación de frecuencia y la amplitud y la frecuencia de la señal moduladora para FM y PM**

### Ejemplo 2.1

Un generador de señales de baja frecuencia puede ser modulado angularmente con varias formas de onda. Basado en una sinusoidal de 2Hz antes de que la modulación angular se lleve a cabo, la salida modulada bajo ciertas condiciones, está dada por:

$$y(t) = 10 \cdot \cos[4\pi t + \pi t^2] \quad (2.14)$$

Considerando que 2Hz representa la frecuencia de la portadora, determine:

- La fase total instantánea.
- La fase instantánea de la señal
- La frecuencia instantánea total (angular y cíclica)
- La frecuencia instantánea de la señal (angular y cíclica)

### Solución

a) Por inspección directa de (2.14) y una comparación con (2.9), la fase total instantánea es:

$$\Phi_i(t) = 4\pi \cdot t + \pi \cdot t^2 \quad (2.15)$$

b) El período de la portadora es  $4\pi$ , ya que representa una frecuencia cíclica de  $4\pi/2\pi = 2\text{Hz}$ .

La fase instantánea de la señal es, así:  $\phi_i(t) = \pi t^2$  (2.16)

Ya que esta función crece sin límite a medida que se incrementa  $t$ , no es posible definir una desviación de frecuencia pico  $\Delta\phi$

c) La frecuencia angular total instantánea es:

$$\Omega_i(t) = \frac{d\Phi_i(t)}{dt} = 4\pi + 2\pi t \quad (2.17)$$

La correspondiente frecuencia cíclica total instantánea, en Hz, es:

$$\frac{\Omega_i(t)}{2\pi} = 2 + t \quad (2.18)$$

d) La frecuencia angular instantánea de la señal es:

$$\omega_i(t) = 2\pi t \quad (2.19)$$

La correspondiente frecuencia cíclica instantánea de la señal es:

$$f_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{2\pi} = t \quad (2.20)$$

## 2.1.3 Modulación de Fase Uni-Tono y de Frecuencia

Como punto importante para un interés práctico, consideremos ahora las formas tanto de las señales PM como de FM, cuando la señal moduladora es un tono de frecuencia sencilla.

Asuma que la señal moduladora es una sinusoidal con amplitud unitaria de la forma:

$$x(t) = \cos(\omega_m t) \quad (2.21)$$

### 2.1.3.1 Modulación de Fase

La señal de fase  $\phi_i(t)$  estará relacionada en una proporción directa a  $x(t)$  y tendrá la siguiente forma

$$\phi_i(t) = \Delta\phi \cos(\omega_m t) \quad (2.22)$$

La fase total sería entonces

$$\Phi_i(t) = \omega_c t + \Delta\phi \cos(\omega_m t) \quad (2.23)$$

La señal compuesta  $y(t)$  para tono modulado PM será

$$y(t) = A \cos[\omega_c t + \Delta\phi \cos(\omega_m t)] \quad (2.24)$$

La señal de frecuencia instantánea correspondiente a la señal PM puede ser determinada así

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi_i(t)}{dt} = -\omega_m \Delta\phi \cdot \text{sen } \omega_m t \quad (2.25)$$

Observe que la desviación de frecuencia pico de la señal PM es  $\omega_m \Delta\phi$  (en rad/seg) o  $f_m \Delta\phi$  (en hertz), lo que significa que la desviación de frecuencia pico para PM es directamente proporcional a la frecuencia de la moduladora.

### 2.1.3.2 Modulación de Frecuencia

La señal de frecuencia  $\omega_i(t)$  será directamente proporcional a  $x(t)$  y tendrá entonces la forma

$$\Phi_i(t) = \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \text{sen}(\omega_m t) \quad (2.26)$$

donde, de nuevo, el ángulo de fase inicial se ha colocado en cero. La señal modulada compuesta esta dada entonces, por:

$$y(t) = A \cos \left[ \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \text{sen}(\omega_m t) \right] \quad (2.27)$$

Existe un parámetro importante,  $\beta$ , llamado índice de modulación, que se definirá como:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \quad (2.28)$$

Sustituyendo  $\beta$  en (2.27), la señal FM unitono modulada puede ser expresada como:

$$y(t) = A \cos[\omega_c t + \beta \cdot \text{sen}(\omega_m t)] \quad (2.29)$$

$\beta$  es un parámetro muy importante para determinar el ancho de banda de transmisión. Observe que el índice de modulación es la tasa de *desviación máxima de frecuencia* a la *frecuencia de modulación particular*.

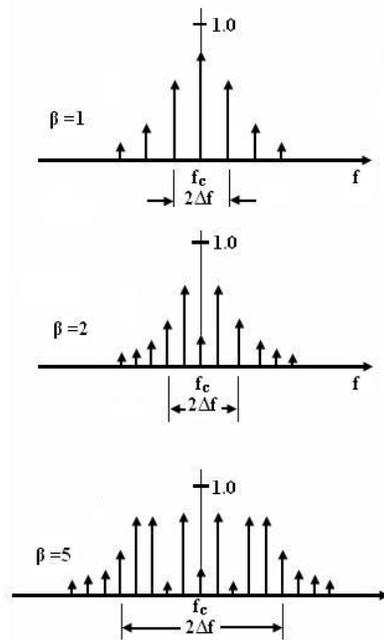
Con una FM pura, la desviación instantánea de frecuencia  $\Delta\omega$  ó  $(\Delta f)$ , es una constante a todas las frecuencias, entonces  $\beta$  varía inversamente con la frecuencia; esto significa que tiene su máximo valor a frecuencias bajas y su mínimo valor a frecuencias altas.

Podemos hacer algunas comparaciones interesantes y útiles entre PM y FM de acuerdo a estos resultados para modulación de tono. Asuma que  $\Delta\phi$  se establece para algún modulador PM de referencia, y asuma que  $\Delta\omega$  se establece para algún modulador FM de referencia. Asuma que una señal moduladora sinusoidal normalizada se aplica a cada modulador y considere los resultados como los cambios de frecuencia de la sinusoidal. En cada caso, buscaremos el pico (o amplitud) de la desviación de fase y frecuencia como una función de la frecuencia de la sinusoidal moduladora.

Entonces tenemos que, el valor pico de la desviación de fase para el modulador PM no cambia con la frecuencia. De cualquier forma, el valor pico de la desviación de frecuencia para el modulador PM varía en forma lineal con respecto a la frecuencia. El signo menos es ignorado, ya que la magnitud de la sinusoidal todavía se considera positiva.

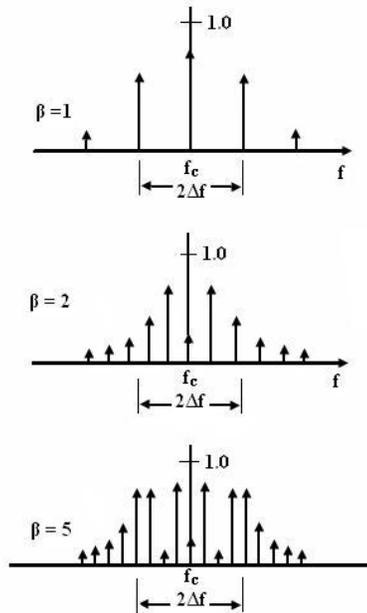
De igual forma el valor pico de la desviación de la frecuencia para el modulador FM no cambia con la frecuencia y el valor pico de la desviación de fase para un modulador FM es una función decreciente de frecuencia.

En la figura 2.6 se muestra el espectro discreto de amplitud de una señal modulada en frecuencia, normalizada con respecto a la amplitud de la portadora, para el caso de una señal moduladora de frecuencia fija y amplitud variable. En la figura solamente se muestra el espectro para las frecuencias positivas y como se puede apreciar la desviación de frecuencia, por consecuencia, el ancho de banda de la señal modulada aumenta con la amplitud de la señal moduladora, es decir, con el índice de modulación  $\beta$ .



**Figura 2.6:** Espectro de una señal de FM, para una señal moduladora de frecuencia constante y amplitud variable.

Analógicamente, en la figura 2.7 se muestra el espectro de una señal modulada en frecuencia, en que ahora, la señal moduladora tiene amplitud constante y frecuencia variable. En este caso, la desviación de frecuencia  $\Delta f$ , es constante y por consecuencia, también el ancho de banda significativo  $2 \Delta f$ .



**Figura 2.7:** Espectro de una señal modulada de FM, para una señal moduladora de amplitud constante y frecuencia variable

## 2.1.4 Modulación Angular de Banda Angosta

Consideremos la señal modulada en ángulo. Donde  $(y(t) = x_c(t))$  como la expresión (2.1). Desarrollando el coseno,

$$x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] = A_c \cos[\phi(t)] \cos(2\pi f_c t) - A_c \text{sen}[\phi(t)] \text{sen}(2\pi f_c t)$$

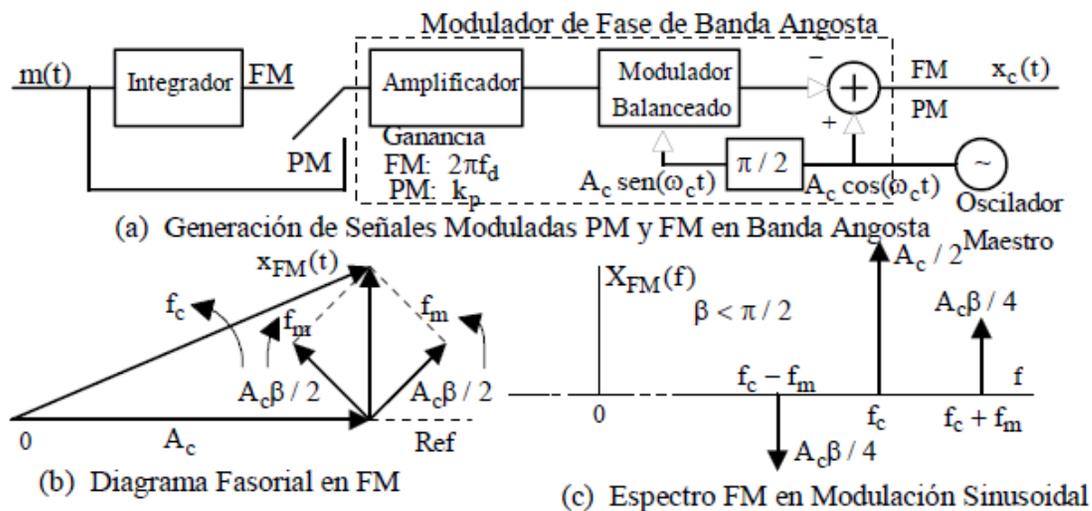
Si  $\phi(t)$  es muy pequeño o si  $\beta < \pi/2$ , entonces  $\cos[\phi(t)] \approx 1$  y  $\text{sen}[\phi(t)] \approx \phi(t)$ . En consecuencia, la señal  $x_c(t)$  puede aproximarse de la siguiente forma:

$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \phi(t) \text{sen}(2\pi f_c t) \quad (2.30)$$

Y el dominio de la frecuencia, si  $\phi(t) \Leftrightarrow \Phi(f)$ ,

$$x_c(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] - j \frac{A_c}{2} [\Phi(f + f_c) - \Phi(f - f_c)] \quad (2.31)$$

Las expresiones (2.30) y (2.31) son parecidas a las correspondientes en AM, con la diferencia de que hay un desfase de  $90^\circ$  en la resultante de las dos bandas laterales respecto a la portadora, como se puede apreciar en la Fig. 2.8(b). Si  $\phi(t)$  tiene un ancho de banda B, el ancho de banda de la señal modulada será de  $2B$ , de aquí el nombre de “modulación angular de banda angosta”.



**Figura 2.8: Modulación Angular de Banda Angosta<sup>3</sup>**

En general, puesto que en FM,  $\phi(t) = 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau \Leftrightarrow \Phi(f) = -j \frac{f_d}{f} M(f)$ ,

<sup>3</sup> “Principios de las Comunicaciones”, 3ª Edición, Pág 496, José Briceño.

$$\text{Entonces } X_{FM}(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] - \frac{A_c f_d}{2} \left[ \frac{M(f + f_c)}{f + f_c} - \frac{M(f - f_c)}{f - f_c} \right] \quad (2.32)$$

En PM,  $\phi(t) = k_p m(t) \Leftrightarrow \Phi(f) = k_p M(f)$ , entonces

$$X_{PM}(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] - j \frac{A_c k_p}{2} [M(f + f_c) - M(f - f_c)] \quad (2.33)$$

Estas señales se pueden generar mediante el esquema mostrado en la Fig. 2.8(a).

Un concepto más claro del significado de “banda angosta” lo obtendremos si consideramos la modulación sinusoidal.

Si  $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ , entonces, en FM,

$$\phi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t) \Leftrightarrow \Phi(f) = j \frac{\beta}{2} [\delta(f + f_c) - \delta(f - f_c)]$$

Remplazando este  $\phi(t)$  en (2.31),

$$x_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \beta \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \beta}{2} \cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \frac{A_c \beta}{2} \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \quad (2.34)$$

Y,

$$x_{FM}(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{A_c \beta}{4} \{ \delta[f + (f_c + f_m)] + \delta[f - (f_c + f_m)] - \delta[f + (f_c - f_m)] - \delta[f - (f_c - f_m)] \} \quad (2.35)$$

### 2.1.5 Modulación Angular de Banda Ancha

La modulación angular de banda angosta representa un modo de transmisión muy importante en las comunicaciones digitales. En la transmisión de señales continuas, tales como la voz y la música, en donde se necesita una alta fidelidad, es necesario un alto valor del ancho de banda. Esto implica un ancho espectral mucho más alto, lo cual se verifica si  $k_p$  o  $\beta$  son relativamente grandes. Por esta razón, las condiciones establecidas para el caso de banda angosta ( $\beta < \pi/2$ ) ya no son válidas y el análisis de la señal modulada angular se complica bastante.

Cuando la señal mensaje es sinusoidal, las desviaciones instantáneas de fase y de frecuencia son también sinusoidales tanto en FM como en PM, y el espectro puede determinarse con relativa facilidad.

Si entonces  $\phi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t)$ , donde  $\beta$  es el índice de modulación correspondiente a la desviación máxima de fase tanto en FM como en PM.

La señal modulada  $x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$  puede expresarse en la forma

$$x_c(t) = \text{Re}[A_c \exp\{j[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]\}] = \text{Re}[\tilde{x}_c(t) \exp(j2\pi f_c t)] \quad (2.36)$$

donde  $\tilde{x}_c(t)$  es la envolvente compleja de  $x_c(t)$ , definida por

$$\tilde{x}_c(t) = A_c \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (2.37)$$

La función  $\exp[j\beta \text{sen}(2\pi f_m t)]$  es periódica con una frecuencia fundamental igual a la frecuencia de modulación  $f_m$ ; por consiguiente, la envolvente compleja  $\tilde{x}_c(t)$  se puede desarrollar en una serie de Fourier de la forma:

$$\tilde{x}_c(t) = A_c \exp[j\beta \text{sen}(2\pi f_m t)] = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp(j2\pi n f_m t) \quad (2.38)$$

La expresión (2.38) se puede representar en términos de los coeficientes de Bessel.

$$\tilde{x}_c(t) = A_c \exp[j\beta \text{sen}(2\pi f_m t)] = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(j2\pi n f_m t) \quad (2.39)$$

Reemplazando (2.39) en (2.36),  $x_c(t) = A_c \text{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp[j2\pi(f_c + n f_m)t] \right\}$

Evaluando la parte real, obtenemos

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t] \quad (2.40a)$$

En la figura 2.9 se muestra la forma de  $J_n(\beta)$  y en las tabla 2.1 se dan los valores de  $J_n(\beta)$  para algunos valores particulares de  $n$  y  $\beta$ . El correspondiente espectro de  $x_c(t)$  es:

$$x_c(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \delta[f - (f_c + n f_m)] \quad (2.40b)$$

$n \setminus \beta$	0.1	0.2	0.5	1	2	4	5	6	8	10
0	0,997	0,990	0,938	0,765	0,224	0,397	-0,178	0,151	0,172	-0,246
1	0,050	0,100	0,242	<u>0,440</u>	<u>0,577</u>	-0,066	-0,328	-0,277	0,235	0,043
2	0,001	0,005	0,031	<u>0,115</u>	0,353	0,364	0,047	-0,243	-0,113	0,255
3				0,020	<u>0,129</u>	<u>0,430</u>	0,365	0,115	-0,291	0,058
4				0,002	0,034	0,281	<u>0,391</u>	<u>0,358</u>	-0,105	-0,220
5					0,007	<u>0,132</u>	0,261	0,362	0,186	-0,234
6						0,054	<u>0,131</u>	0,246	0,338	-0,014
7						0,018	0,053	<u>0,130</u>	<u>0,321</u>	0,217
8						0,006	0,018	0,057	0,223	<u>0,318</u>
9							0,006	0,021	<u>0,126</u>	0,292
10							0,001	0,007	0,061	0,207
11								0,002	0,026	<u>0,123</u>
12									0,010	0,063
13									0,003	0,029

Tabla 2.1: Coeficientes de Bessel,  $J_n(\beta)$ , en función de  $n$  y  $\beta$ <sup>4</sup>

La expresión (2.40b) sugiere que aún con la modulación sinusoidal la señal modulada en ángulo contiene un número infinito de bandas laterales, centradas en  $f_c$  y separadas de la frecuencia de la portadora por múltiplos enteros de la frecuencia  $f_m$ . Teóricamente, una señal modulada en ángulo tiene un ancho de banda infinito.

<sup>4</sup> “Principios de las comunicaciones”, 3ª Edición, Pág 500, José Briceño.

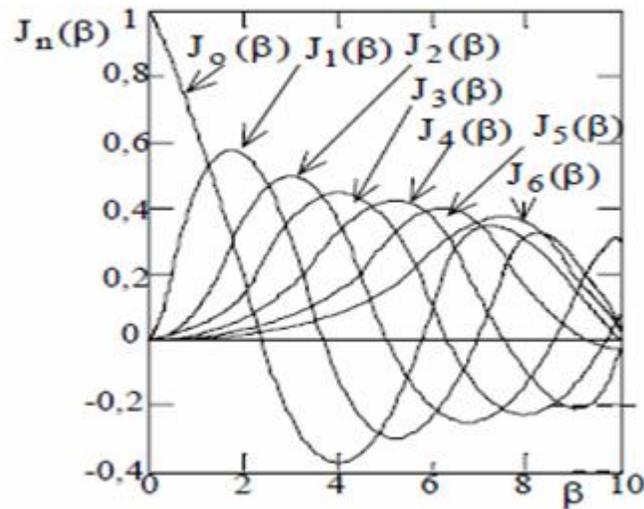


Figura 2.9: Curvas de Bessel<sup>5</sup>

La forma de  $x_c(f)$  se presta para ser representada mediante el espectro unilateral.

La amplitud de cada componente se puede obtener de una tabla de funciones de Bessel. En la Tabla 2.1 se tiene los valores de  $J_n(\beta)$  para  $n$  positivo, pero de la definición de  $J_n(\beta)$  se puede notar que:

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta) & \text{para } n \text{ par} \\ -J_n(\beta) & \text{para } n \text{ impar} \end{cases} \quad (2.41)$$

**Ejemplo 2.2**

Una señal modulada FM está dada por

$$y(t) = 100 \cos(2\pi \times 10^8 t + 20 \sin 2\pi \times 10^3 t) \quad (2.42)$$

Determine:

- a) La frecuencia de la portadora sin modular en Hz.
- b) La frecuencia de la moduladora en Hz.
- c) Índice de modulación,  $\beta$
- d) Máxima desviación de frecuencia,  $\Delta f$  en Hz.
- e) Si la señal es un voltaje, determine la potencia promedio disipada en una carga resistiva de  $50\Omega$ .

**Solución**

- a) En esta parte y en la mayoría de las partes que siguen, la función dada puede ser comparada con (2.27) y (2.29). A partir del término de la fase de la portadora  $2\pi \times 10^8 t$ , la frecuencia de la portadora sin modular es  $f_c = 10^8 \text{ Hz} = 100 \text{ MHz}$ .
- b) La señal modulante de frecuencia angular es identificada a partir de la función seno como  $\omega_m = 2\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$ . Así que,  $f_m = 1 \text{ KHz}$ .
- c) El índice de modulación es inmediatamente identificado como  $\beta = 20$ .

<sup>5</sup> “Principios de las Comunicaciones”, 3ª Edición, Pág 499, José Briceño.

d) Si  $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$ , y tanto  $\beta$  como  $f_m$  son conocidas, la desviación de frecuencia es determinada

como  $\Delta f = \beta f_m = 20 \times 1 \text{KHz} = 20 \text{KHz}$

e) Asumiendo que en las señales de voltaje, la potencia promedio disipada en una resistencia de  $50\Omega$  es  $P = 100^2 / (2 * 50) = 100 \text{W}$ . Como se explicó anteriormente, esta potencia es la misma que la potencia de la portadora sin modular.

### Ejemplo 2.3

Asumiendo que la función dada en el ejemplo 2.2, ecuación (2.42), es una señal PM, determine **a)** la máxima desviación de fase y **b)** la forma funcional de la señal moduladora normalizada.

### Solución

**a)** La forma matemática del ejercicio no es totalmente la misma debido a la diferencia en la fase de la señal moduladora, pero como ya se ha explicado, esta es una elección arbitraria. La máxima desviación de fase es representada por  $\Delta\phi = 20 \text{rad}$ . Note que la máxima desviación de fase para la señal PM modulada tiene el mismo valor numérico que  $\beta$ , cuando la función era considerada como un señal FM, En general,  $\beta$  para FM y  $\Delta\phi$  para PM tienen propiedades similares a una frecuencia dada. De cualquier forma, si la frecuencia es cambiada, pero la amplitud de la señal moduladora permanece constante, el valor constante de 20 cambiaría si la señal fuera PM ó si la señal fuera FM.

**b)** La forma funcional de la señal moduladora normalizada está determinada como

$$x(t) = \sin 2\pi \times 10^3 t \quad (2.43)$$

## 2.1.6 Potencia y Ancho de Banda en Modulación Angular en Banda Ancha

### 2.1.6.1 Potencia en Modulación Angular

La potencia promedio de una señal modulada angular se puede determinar directamente a partir de (2.1) donde ( $y(t) = x_c(t)$ ), esto es,

$$\langle x_c^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} \quad (2.44)$$

La potencia de la señal modulada es constante e independiente de la modulación. En el aspecto práctico esto es de gran importancia pues la potencia no varía y el diseño de los circuitos electrónicos se simplifica bastante.

En modulación sinusoidal, de (2.40a), la potencia de la señal modulada es:

$$\langle x_c^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{A_c^2}{2} \left[ J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta) \right] = \frac{A_c^2 J_0^2(\beta)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_c^2 J_n^2(\beta) \quad (2.46)$$

Comparando (2.43) con (2.44), verificamos la conocida relación;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \quad (2.45)$$

### 2.1.6.2 Ancho de Banda en Modulación Angular

En cuanto al ancho de banda de la señal modulada, estrictamente hablando, es infinito, ya que la modulación angular de una portadora da como resultado la generación de un número infinito de componentes laterales, aún en el caso de modulación sinusoidal.

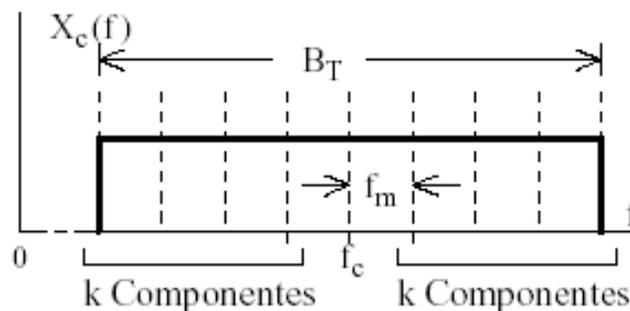
El ancho de banda está entonces determinado por la dispersión de las componentes significativas del espectro a ambos lados de la portadora. La estimación de esta dispersión define un ancho de banda, el cual dependerá de las aplicaciones del sistema. Por otro lado, se debe tener en cuenta que después del modulador hay que colocar un filtro pasabanda de RF centrado en la frecuencia de portadora, y lo mismo en el receptor. La cuestión ahora es, decidir cuál será el ancho de banda óptimo de los filtros, de modo que deje pasar el máximo de la señal con el mínimo efecto interferente en el transmisor y que al mismo tiempo reduzca el ruido en el receptor. Estimaciones acerca del ancho de banda requerido pueden obtenerse a partir de las siguientes consideraciones aplicadas sobre todo en FM.

Sea la Fig. 2.10, en modulación sinusoidal, donde se muestran las componentes y la banda de paso del filtro, para la definición del ancho de banda de transmisión  $B_T$ . El filtro debe estar centrado en la frecuencia de portadora  $f_c$ , y suponemos que la componente continua del mensaje ha sido removida.

El ancho de banda vendrá dado por:

$$B_T = 2kf_m \quad \text{para } k \geq 1 \quad (2.46)$$

donde  $k$  es el número de componentes a cada lado de la portadora.



**Figura 2.10: Definición del Ancho de Banda en Modulación Angular**

Nótese que  $\frac{B_T}{f_m} = \beta_m = 2k$  es la relación de expansión del ancho de banda; como  $k \geq 1$ , esto nos

indica que el sistema de modulación angular es un sistema de modulación de banda ancha en el cual se puede intercambiar ancho de banda por relación S/N.

La estimación del valor de  $k$  depende del criterio empleado para definir las componentes significativas del espectro.

Una primera forma de estimación del ancho de banda de la señal modulada angular, es despreciar aquellas componentes de frecuencia cuya amplitud sea menor del 1% de la amplitud unitaria, es decir, se desprecian aquellas componentes para las cuales se cumple que:

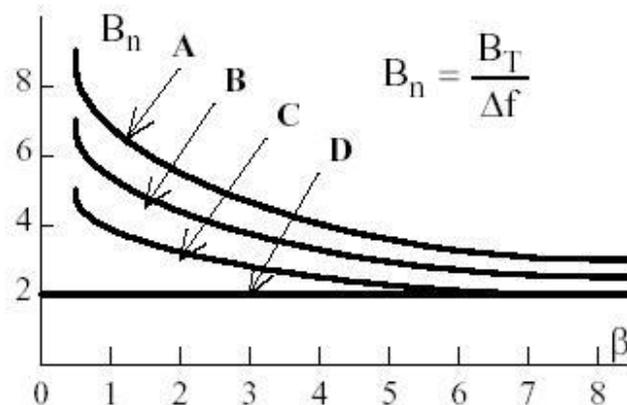
$$|J_n(\beta)| \leq 0.01 \quad (2.47)$$

Por ejemplo, en la Tabla 2.1 de Coeficientes de Bessel la condición (2.47) se cumple para  $\beta = 5$  y  $k = 8$ ; para  $\beta = 6$  y  $k = 9$ , etc. En consecuencia, el valor de  $k$  varía junto con el valor de  $\beta$ . El ancho de banda que se calcula utilizando este procedimiento puede expresarse en la forma que veremos a continuación.

Sea  $k_n$  el valor mínimo de  $n$  que satisface la condición (2.47). De (2.46), el ancho de banda será  $B_T = 2k_n f_m$ ; pero como  $\beta = \Delta f / f_m$ , entonces podemos definir un “ancho de banda normalizado  $B_n$ ” dado por:

$$B_n = \frac{B_T}{\Delta f} = \frac{2k_n}{\beta} \quad (2.48)$$

Los valores de  $k_n$  y  $\beta$  se obtienen de una Tabla de Coeficientes de Bessel. Las curvas de la Fig. 2.11 permiten estimar el ancho de banda  $B_T$  cuando  $\beta$  y  $\Delta f$  son conocidos. En la curva A de la Fig. 2.11 se grafica (2.48).



**Figura 2.11: Ancho de Banda Normalizado en Modulación de frecuencia**

Nótese que a medida que aumenta el índice de modulación  $\beta$ , el ancho de banda normalizado  $B_n$  tiende a 2, ó, lo que es lo mismo,  $B_T \rightarrow > 2 \Delta f$ .

Un segundo criterio se basa en la observación que hicimos anteriormente de que  $n$  no necesita ser mucho mayor que  $\beta$ . En efecto, si suponemos que se considera como significativas todas aquellas componentes para las cuales se cumple que  $\beta \approx k$ , siendo  $k \gg 1$ , entonces el ancho de banda, de (2.46), será  $B_T \approx 2 \beta f_m$ , de donde

$$B_T \approx 2\Delta f \quad (2.49)$$

El ancho de banda se puede aproximar entonces como *el valor pico a pico de la desviación máxima de frecuencia*. Este criterio se utiliza frecuentemente para estimar, en primera aproximación, el ancho de banda de una señal FM, sobre todo en banda ancha. Nótese que en este caso el ancho de banda normalizado, de la forma (2.48), es constante (independiente de  $\beta$ ). En la curva D de la Fig. 2.11 se muestra la variación de este ancho de banda.

El criterio más empleado en la práctica es el de la “potencia significativa”. En efecto, de

(2.44) y la Fig. 2.11, la potencia contenida dentro del ancho de banda  $B_T$  será:

$$\langle x_{cT}^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} \left[ J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^k J_n^2(\beta) \right] = P_r \langle x_c^2(t) \rangle \quad (2.50)$$

$$\text{donde } P_r = \left[ J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^k J_n^2(\beta) \right] < 1 \quad (2.51)$$

$P_r$  es la fracción de la potencia total  $A_c^2 / 2$  que es transmitida.

El ancho de banda para alguna aplicación particular se puede estimar definiendo un valor aceptable para  $P_r$ , resolviendo (2.51) para  $k$  mediante una tabla de valores de los coeficientes de Bessel y reemplazando ese valor de  $k$  en (2.46). Así, por ejemplo, en la Tabla 2.1 de Coeficientes de Bessel se ha subrayado con un trazo los valores de  $n = k$  correspondientes a  $P_r \geq 0.5$ , y con dos trazos y en negrita los correspondientes a  $P_r \geq 0.98$ . Nótese que para  $P_r \geq 0.98$ , el valor de  $k$  es aproximadamente igual a la parte entera de  $(\beta + 1)$ , de tal manera que, de (2.46),

$$B_T \approx 2(\beta + 1) \cdot f_m \quad (2.52)$$

En este ancho de banda está contenido aproximadamente el 98% de la señal modulada  $x_c(t)$ . Nótese que en banda ancha ( $\beta \gg 1$ ) las expresiones (2.52) y (2.49) son equivalentes, mientras que en banda angosta ( $\beta \ll 1$ ),  $B_T \approx 2f_m$ .

La expresión (2.52) se puede expresar también como un ancho de banda normalizado. En efecto, siguiendo el mismo procedimiento de la expresión (2.48), el ancho de banda normalizado es:

$$B_n = \frac{B_T}{\Delta f} = 2 + \frac{2}{\beta} \quad (2.53)$$

Esta expresión se grafica en la curva C de la Fig. 2.11.

Como el índice de modulación  $\beta$  se ha definido solamente para modulación sinusoidal, para el caso de una señal mensaje  $m(t)$  arbitraria se puede obtener una expresión aproximada para el ancho de banda mediante la definición de la “relación de desviación,  $\Delta$ .” en la forma:

Si  $B_m$  es el ancho de banda de  $m(t)$ , entonces la relación de desviación es;

$$\Delta = \frac{\Delta f}{B_m} = \frac{f_d}{B_m} |m(t)|_{\max} \quad (2.54)$$

Para la modulación no sinusoidal, la relación de desviación  $\Delta$  viene a ser lo que el índice de modulación  $\beta$  es para la modulación sinusoidal. El ancho de banda de transmisión será entonces;

$$B_T = 2(\Delta + 1) \cdot B_m \quad (2.55)$$

Esta relación se conoce con el nombre de “Regla de Carson”. Nótese que si  $\Delta \ll 1$ , el ancho de banda corresponde a una señal de banda angosta. Si  $\Delta \gg 1$ , el ancho de banda tiende al valor pico a pico de la desviación de frecuencia, resultado es obtenido por otros medios.

En resumen, desde un punto de vista práctico, la Regla de Carson subestima en parte el requerimiento de ancho de banda en FM, mientras que la utilización del criterio (2.47) requiere más componentes de frecuencia, pero el aumento en la potencia es muy pequeño.

Una expresión intermedia entre la Regla de Carson y la condición (2.47) es la siguiente:

$$B_T = 2(\Delta f + 2B_m) = 2(\Delta + 2) \cdot B_m \quad \text{Para } \Delta > 2 \quad (2.56)$$

Este ancho de banda es un poco mayor que el dado por la Regla de Carson, pero menor que el dado por la condición  $|J_n(\beta)| \leq 0.01$ . El ancho de banda normalizado correspondiente se grafica en la curva B de la Fig. 2.11.

En general, se puede usar cualquiera de estos criterios para la estimación del ancho de banda de transmisión; sin embargo, el criterio de la “potencia significativa” (Regla de Carson) es el más utilizado en las aplicaciones prácticas.

#### **Ejemplo 2.4.**

Una portadora de 20 MHz se modula sinusoidalmente en FM de manera que la desviación máxima de frecuencia es de 100 kHz. Vamos a determinar el índice de modulación y el ancho de banda de la señal FM para los siguientes valores de la frecuencia  $f_m$  de la señal moduladora:

- (a) 1 KHz;      (b) 50 KHz;      (c) 500 KHz.

Solución:

Tenemos que:  $\Delta f = 100 \text{ KHz}$ ;  $f_c = 20 \text{ Mhz}$ . En modulación sinusoidal,  $\beta = \Delta f / f_m$ .

Entonces;

- a)  $f_m = 1 \text{ KHz}$ ;  $\beta = 10^5 / 10^3 = 100$ . Este es un caso de FM de banda ancho, de donde,  
 $B_T = 2(\beta + 1)f_m = 202 \text{ KHz} \approx 2\Delta f$
- b)  $f_m = 50 \text{ KHz}$ ;  $\beta = 2$  y  $B_T = 2(\beta + 1)f_m = 300 \text{ KHz}$
- c)  $f_m = 500 \text{ KHz}$ ;  $\beta = 0.2$ . Este es un caso de FM de banda angosto, de donde  
 $B_T \approx 2f_m = 1 \text{ Mhz}$

## 2.2 CIRCUITOS MODULADORES DE FRECUENCIA

Al principio de la modulación en frecuencia se utilizaron válvulas al vacío configuradas en un circuito que actuaba como una reactancia variable según el voltaje de la señal, constituyendo así un *oscilador de reactancia variable* (VCO).

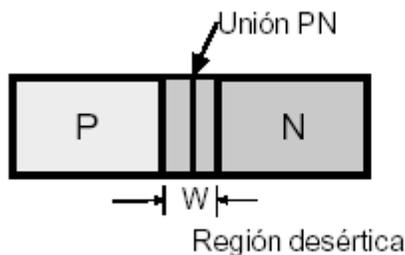
En los transmisores actuales, se utilizan con frecuencia VCO integrados y bien sea que se trate de circuitos con elementos discretos o integrados, el VCO suele ir seguido de un amplificador que actúa como *buffer* para producir el aislamiento entre el oscilador y la carga y mantener la estabilidad de frecuencia.

Para generar una señal modulada en frecuencia debe utilizarse un oscilador cuya frecuencia varíe según la amplitud de la señal de información, de modo que es necesario que algunos de los elementos del oscilador varíen su *reactancia*, según la señal de información.

La señal modulada en frecuencia se amplifica hasta obtener el nivel deseado de potencia a la salida. Los amplificadores de potencia en FM pueden funcionar en clase C y cerca de la saturación para conseguir la máxima eficiencia y, aunque la potencia en FM es constante, al ser constante la envolvente de la señal modulada, es necesario algún circuito limitador de picos para mantener constante el nivel de la señal transmitida.

### 2.2.1 Osciladores Controlados por Voltaje

Puesto que un VCO requiere de un elemento cuya reactancia varíe de acuerdo a la amplitud instantánea de la señal de entrada, se utiliza un *varactor* ó *varicap*. Un varactor (*variable reactor*), designado también como varicap (*variable capacitor*), es un diodo cuyas propiedades fueron observadas inicialmente por Schottky<sup>6</sup> y analizadas también por Schockley<sup>7</sup>, particularmente la presencia de una capacidad, alrededor de la unión, sensible al voltaje inverso aplicado al diodo.



Un varactor o varicap es un diodo que, en polarización inversa varía el ancho de la región desértica alrededor de la unión, según el voltaje aplicado, actuando así como un elemento de capacidad variable.

**Figura 2.12: Diodo varactor y símbolo del mismo**

Cuando se aplica a un diodo un voltaje inverso, alrededor de la unión P-N se forma una región de transición sin carga eléctrica significativa respecto a la carga en las regiones N y P fuera de dicha región desértica, de anchura W, como se muestra en la figura 2.12, de modo que esta región actúa como un dieléctrico entre dos regiones cargadas, constituyendo así un condensador que, si es de placas planas tiene una capacidad dada por:

<sup>6</sup> Schottky, W. "Simplified and Extended Theory of Boundary Layer Rectifiers", Z. Physik, Vol 118, Pág.539-592, 1942.

<sup>7</sup> Schockley, W. "The Theory of P-N Junctions in Semiconductors and P-N Junction Transistors". Bell System Technical Journal, vol 28, Pág. 435-489, July 1949.

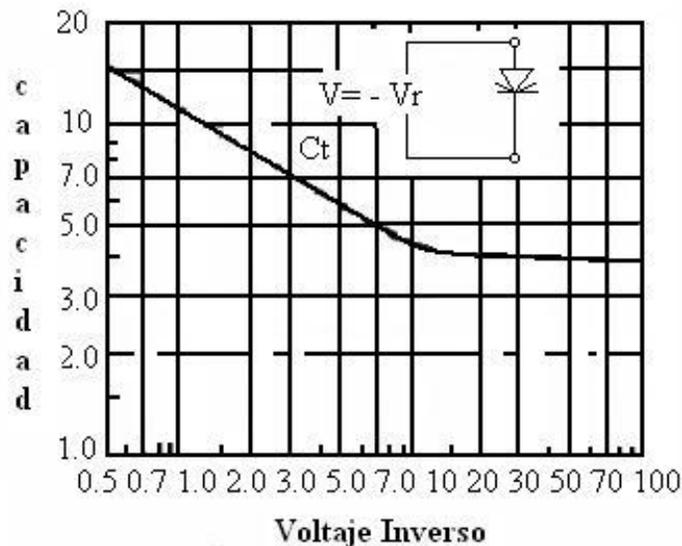
$$C = \frac{A\varepsilon}{W} \text{ [F]} \quad (2.57)$$

Donde A es el área de las placas en  $m^2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$  es la permitividad del dieléctrico y W la distancia entre las placas en m. En esta geometría simple, de placas planas y paralelas, la capacidad es función únicamente de la distancia entre ellas. En el caso del diodo, puesto que la anchura de la región de transición depende del voltaje inverso aplicado, la capacidad depende del voltaje, del nivel de dopaje del semiconductor y de la geometría de la unión. Para una unión N-P abrupta, la capacidad de la región de transición entre las regiones del semiconductor, suponiendo nivel de impurezas constante está dada por:

$$C_V(V_R) = \frac{C_{V0}}{\sqrt{1 + \frac{V_R}{V_\phi}}} \quad (2.58)$$

Donde  $C_{V0}$  es la capacidad a  $V_R=0$ ,  $V_R$ , el voltaje inverso aplicado al diodo y  $V_\phi$  es un pequeño voltaje positivo de contacto, generalmente menor que 1V. La expresión anterior tiene algunas variantes que, para nuestro propósito, no son muy significativas.

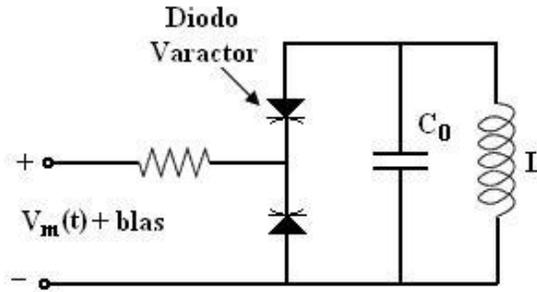
Tenemos que  $C_V(V_R)$  decrece monótonicamente según aumenta  $V_R$  (figura 2.13). Esto es de esperar, ya que según aumenta el voltaje inverso, W también aumenta y la capacidad disminuye.



**Figura 2.13: Variación de la capacidad en función del voltaje inverso**<sup>8</sup>

En la figura 2.14, se muestra un circuito modulador de frecuencia, muy sencillo, utilizando dos varactores.

<sup>8</sup> “Modulación Angular”, Pág 14, Constantino Peréz Vega.



**Figura 2.14: Modulador de frecuencia con dos varactores**

El circuito LC está constituido por una combinación paralela de un oscilador LC. Un método simple de variar la frecuencia de resonancia de ese circuito sintonizado, es emplear varactores, para variar la capacidad total del paralelo y, por consecuencia su frecuencia de resonancia según la magnitud del voltaje de señal aplicado a la entrada. La capacidad total del circuito está dada por  $C = C_0 + \Delta C$ , en la cual  $\Delta C$  es la capacidad total de los dos varactores, proporcional a el voltaje de señal  $V_m(t)$ . La frecuencia angular de resonancia del circuito en estas condiciones está dada por:

$$\omega_{FM} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C_0}}} \quad (2.59)$$

Si,  $\Delta C \ll C_0$ , la expansión binomial  $[1 + \Delta C / C_0]^{-1/2}$ , puede aproximarse como  $(1 - \Delta C / 2C_0)$ , con lo que:

$$\omega_{FM} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left( 1 - \frac{\Delta C}{2C_0} \right) \quad (2.60)$$

La variación de capacidad de los varactores depende del voltaje de señal de modo que  $\Delta C = K v_m(t)$ , por lo tanto la frecuencia instantánea de la señal modulada en frecuencia puede expresarse ahora como:

$$\omega_{FM} = \omega_0 \left[ 1 - \frac{K v_m(t)}{2C_0} \right] \quad (2.61)$$

O bien:

$$f_{FM} = f_0 [1 - K_c v_m(t)] \quad (2.62)$$

Con lo que la frecuencia de oscilación del circuito resonante queda directamente relacionada con la amplitud de la señal moduladora. En estas condiciones el circuito resonante se puede utilizar como la red determinante de la frecuencia en un oscilador retroalimentado, produciendo en forma directa, una señal modulada en frecuencia. Este tipo de modulador sólo puede usarse para generar FM de banda estrecha, ya que  $\Delta C \ll C_0$ ; lo que requiere de multiplicación de frecuencia subsecuente para generar FM de banda ancha. El valor máximo del índice de modulación,  $\beta$ , que se puede conseguir con este tipo de modulador LC, es del orden de 0.2, de modo que para producir FM de banda ancha se requieren varias etapas multiplicadoras. Al multiplicar la frecuencia mediante un dispositivo no lineal, también se multiplica el índice de modulación por el mismo factor.

## 2.3 GENERACIÓN DE SEÑALES PM Y FM

Como las señales moduladas en ángulo son de envolvente constante o amplitud constante, el diseño de los dispositivos generadores o detectores se facilita pues no hay que preocuparse por los posibles picos de la señal que pudieran introducir excesiva disipación de potencia en algún dispositivo electrónico. Aún más, el ruido aditivo no produce prácticamente ningún efecto en la información puesto que ella está contenida en los cruces por cero de la señal modulada.

Sin embargo, las variaciones espurias de la frecuencia son sumamente dañinas, pues ellas son interpretadas en el detector como variaciones de amplitud con la consiguiente distorsión.

Por ejemplo, los sistemas de radioenlaces de microondas emplean modulación FM en las etapas de FI debido a que los amplificadores lineales de banda ancha requeridos para la modulación de amplitud son prácticamente imposibles de construir a esas altas frecuencias.

La generación de señales FM se puede agrupar esencialmente en dos tipos: la generación FM indirecta y la generación FM directa.

### 2.3.1 Método indirecto de Armstrong

En el Método indirecto, parte de una señal FM de banda estrecha es generada a partir de un modulador lineal. Se aumenta la desviación de frecuencia mediante un multiplicador de frecuencia (un dispositivo no lineal y un filtro paso-banda adecuado) y finalmente se traslada el espectro con un conversor de frecuencia. El elemento no lineal aumenta la desviación de frecuencia:

$$e_i(t) = \varphi_{FM}(t) = \cos\left(\omega_c t + k_f \int_{-t}^t m(\tau) d\tau\right) \quad e_0(t) = e_i^2(t)$$
$$e_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\omega_c t + 2k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau\right) \quad (2.63)$$

Uno de los generadores de FM indirecto más conocidos es el sistema Armstrong, en el cual se utiliza un modulador PM de banda angosta, como se muestra en la Fig. 2.15. La señal FM básica es producida mediante integración de  $m(t)$ .

El elemento esencial en la generación FM indirecta, es la presencia de un modulador de fase de banda angosta, cuya frecuencia de portadora proviene de un oscilador de cristal, de muy alta estabilidad. En FM directa la frecuencia de portadora se modula directamente de acuerdo con la señal modulante.

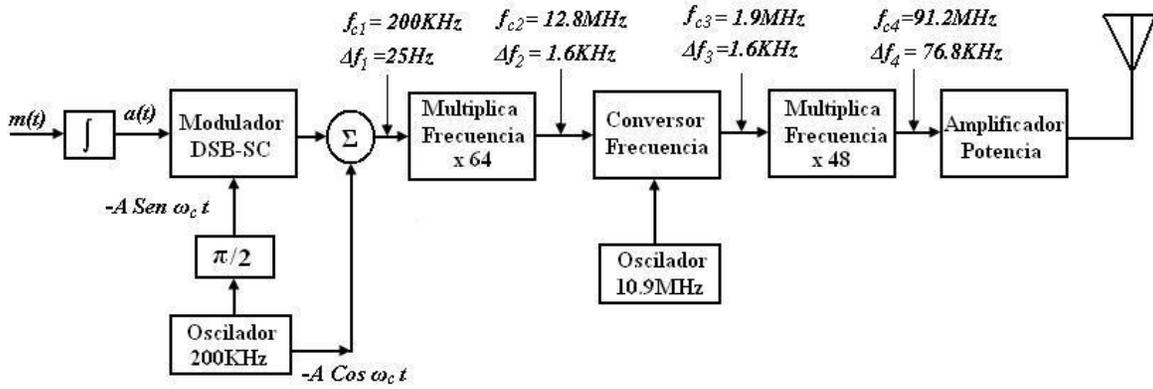


Figura 2.15: Transmisor Armstrong de FM Indirecta.

El método de Armstrong tiene la ventaja de su estabilidad en frecuencia, pero el inconveniente de introducir distorsiones no lineales de amplitud y frecuencia causadas por la aproximación usada en la generación de Modulación de Banda Angosta.

$$\varphi_{FM}(t) = A(\cos(\omega_c t) - k_f a(t) \sin(\omega_c t)) = AE(t) \cos(\omega_c t + \theta(t)) \quad (2.64)$$

$$E(t) = \sqrt{1 + k_f^2 a^2(t)} \quad \theta(t) = \tan^{-1}(k_f a(t))$$

La distorsión de amplitud tiene lugar porque E(t) no es constante. Este es un problema menor, dado que la variación de amplitud puede ser eliminada con un pasabanda.

Sin embargo, también aparece una distorsión no lineal en la fase. Esta distorsión hace que aparezca una distorsión no lineal en la frecuencia que afecta a la señal transmitida.

Idealmente, la fase debería ser  $\theta(t) = k_f a(t)$  y la frecuencia instantánea  $\omega_i(t) = k_f m(t)$ .

Sin embargo, debido a la distorsión se tiene:

$$\omega_i(t) = \frac{k_f a(t)}{1 + k_f^2 a^2(t)} = \frac{k_f m(t)}{1 + k_f^2 a^2(t)} = k_f m(t) [1 - k_f^2 a^2(t) + k_f^4 a^4(t) - \dots] \quad (2.65)$$

Para la modulación de un tono se tiene:

$$m(t) = \alpha \cos(\omega_m t) \quad a(t) = \frac{\alpha}{\omega_m} \sin(\omega_m t) \quad a(t) = \frac{\alpha}{\omega_m} \sin(\omega_m t)$$

$$\omega_i(t) = \beta \cos(\omega_m t) [1 - \beta^2 \sin^2(\omega_m t) + \beta^4 \sin^4(\omega_m t) - \dots] \quad (2.66)$$

Considerando únicamente armónicos inferiores a orden 4 tenemos:

$$\begin{aligned} \omega_i(t) &\approx \beta \omega_m \cos(\omega_m t) [1 - \beta^2 \sin^2(\omega_m t)] = \beta \omega_m \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) \cos(\omega_m t) + \frac{\beta^3 \omega_m}{4} \cos(3\omega_m t) \\ &\approx \beta \omega_m \cos(\omega_m t) + \frac{\beta^3 \omega_m}{4} \cos(3\omega_m t) = k_f a \cos(\omega_m t) + \frac{\beta^3 \omega_m}{4} \cos(3\omega_m t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

La distorsión es proporcional a  $\beta^2 / 4$ .

### 2.3.2 Generación Directa

Conceptualmente, la generación directa en FM es un proceso muy sencillo. Todo lo que se requiere es un oscilador controlado por voltaje (VCO) cuya frecuencia de oscilación depende del voltaje aplicado a su entrada. En la región de microondas ( $f_c > 1$  GHz) hay dispositivos como el Klystron cuya frecuencia varía linealmente en un rango de varios MHz. En bajas frecuencias, la frecuencia de portadora se genera mediante un oscilador en el cual se pueden variar los valores de inductancia o capacitancia de su circuito paralelo resonante LC; este tipo de modulador recibe el nombre de “modulador de reactancia”.

Por ejemplo, si la capacitancia del circuito resonante es proporcional a la señal mensaje, entonces;

$$C(t) = C_0 - K \cdot m(t) \quad (2.68)$$

$C_0$  es la capacitancia para  $m(t) = 0$  y  $k$  una constante de proporcionalidad.

Supongamos que  $km(t)$  es pequeño en comparación con  $C_0$ . Si la salida del oscilador es  $A_c \cos[\theta(t)]$ , se puede demostrar que la frecuencia instantánea  $f_i(t)$  de resonancia del circuito sintonizado viene dada por:

$$f_i(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \cdot C(t)}} \quad (2.69)$$

Reemplazando (2.68) en (2.69) y reorganizando:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \cdot C(t)}} \left[ 1 - \frac{k}{C_0} m(t) \right]^{-1/2} \quad (2.70)$$

Definiendo  $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ , y puesto que  $\left| \frac{k}{C_0} m(t) \right| \ll 1$ , entonces tomando los dos primeros términos del desarrollo en serie binomial de la raíz cuadrada, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = \omega_c \left[ 1 - \frac{k}{C_0} m(t) \right]^{-1/2} \quad (2.71)$$

Integrando, la fase instantánea de la portadora es;

$$\theta(t) = \omega_c t + 2\pi \frac{k f_c}{2C_0} \int^t m(\tau) d\tau \quad (2.72)$$

Esta es la fase de una señal modulada FM en la cual;

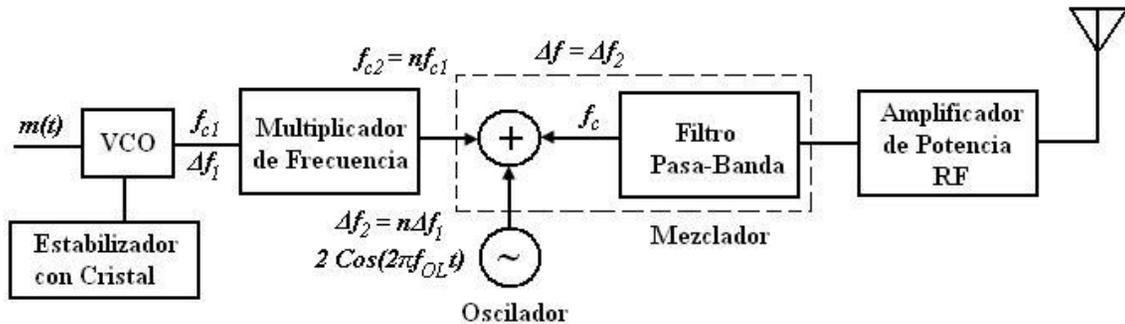
$$f_d = \frac{k f_c}{2C_0} \quad \text{y} \quad \Delta f = \frac{k f_c}{2C_0} |m(t)|_{\max}$$

Si  $|m(t)|_{\max} < 1$ , la aproximación tiene una precisión del 1% cuando  $(k/C_0) < 0.013$ , en cuyo caso la desviación máxima de frecuencia es:

$$\Delta f \leq 0.006 \cdot f_c \quad (2.73)$$

Aunque el cambio en la capacitancia es por necesidad pequeño, la desviación máxima de frecuencia puede ser bastante grande si la frecuencia de portadora es grande también. Por ejemplo, si tenemos que  $k|m(t)|_{\max} / 2C_0 = 0.005$  y  $f_c = 15\text{MHz}$ , entonces  $\Delta f = 75\text{kHz}$ . Esta  $\Delta f$  es igual a la desviación máxima de frecuencia especificada para FM comercial.

La desventaja del sistema FM directo es que la frecuencia de la portadora tiende a ser inestable requiriendo técnicas de estabilización mediante retroalimentación (control automático de frecuencia). Una alternativa de generación directa es la de utilizar un VCO con multiplicadores de frecuencia y un mezclador en la configuración mostrada en la Fig. 2.16.



**Figura 2.16: Transmisor FM con VCO y Multiplicación de Frecuencia.**

Con el transmisor de la Fig. 2.16 se puede generar una señal FM de banda ancha a partir de la señal FM producida por el VCO. Esto es posible mediante los “multiplicadores de frecuencia” (o más propiamente, multiplicadores de fase). El multiplicador de frecuencia es un dispositivo en el cual, si la entrada es  $x(t) = A_c \cos[\theta(t)]$ , la salida será  $y(t) = A_c \cos[n\theta(t)]$ , donde n es el factor de multiplicación. Sea  $x(t)$  una señal FM de la forma:

$$x(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau \right] \quad (2.74)$$

Si el factor de multiplicación es n, a la salida del multiplicador de frecuencia se tiene;

$$y(t) = A_c \cos \left[ 2\pi (nf_c) t + 2\pi (nf_d) \int^t m(\tau) d\tau \right] \quad (2.75)$$

En consecuencia, si la entrada al multiplicador tiene una frecuencia de portadora  $f_c$  y una constante de desviación de frecuencia  $f_d$  (o  $\Delta f$ ), entonces la salida tendrá la portadora a la frecuencia  $nf_c$  con una constante de desviación de frecuencia  $nf_d$  (o  $n\Delta f$ ).

Nótese entonces la diferencia entre un conversor de frecuencia y un multiplicador de frecuencia: En el conversor de frecuencia hay traslación de espectro pero su ancho de banda no varía, mientras que en el multiplicador de frecuencia hay también traslación del espectro (de  $f_c$  a  $nf_c$ ) pero su ancho de banda aumenta linealmente con n. La multiplicación de frecuencia de una señal FM modulada sinusoidalmente aumenta la frecuencia de la portadora y el índice de modulación, pero no la frecuencia de modulación: el espectro se desplaza a  $nf_c$ , cambian las amplitudes relativas de las componentes de frecuencia, pero su espaciamiento sigue siendo el mismo.

Sea el transmisor mostrado en la Fig. 2.16. Si la salida del VCO es

$$x_{c1}(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau \right] \quad (2.76)$$

A la salida del multiplicador de frecuencia la señal será:

$$x_{cn}(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_{c1} t + 2\pi f_{d1} \int^t m(\tau) d\tau \right] \quad (2.77)$$

A la salida del mezclador las frecuencias presentes serán:

$$f_{OL} + f_{c2} = f_{OL} + n f_{c1}; \quad f_{OL} - f_{c2} = f_{OL} - n f_{c1} \quad \text{y} \quad \Delta f = n \Delta f_1 = \Delta f_2$$

Podemos hacer entonces  $f_c = f_{OL} \pm n f_{c1}$ , de donde

$$f_{OL} = f_c \pm n f_{c1}; \quad f_d = n f_{d1} \quad \text{y} \quad \Delta f = n \Delta f_1 = \Delta f_2 \quad (2.78)$$

donde  $f_c$  y  $f_d$  son la frecuencia de portadora de transmisión y la constante de desviación de frecuencia de la señal FM transmitida, respectivamente. La señal FM transmitida será

$$x_{FM}(t) = A_c \cos \left[ 2\pi f_c t + 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau \right] \quad (2.79)$$

Por ejemplo, si  $f_{c1} = 10 \text{ Mhz}$ ;  $|m(t)|_{\text{max}} = 10$ ;  $f_{d1} = 1250 \text{ Hz/V}$ ; y se desea transmitir en FM comercial con  $f_c = 100 \text{ MHz}$  y  $\Delta f = 75 \text{ kHz}$ , entonces

$$n = \frac{\Delta f}{\Delta f_1} = \frac{75 \times 10^3}{10 \times 1250} = 6 \quad \text{y} \quad f_d = n f_{d1} = 6 \times 1250 = 7500 \text{ Hz/V}$$

Se puede usar un doblador y un triplicador de frecuencia ( $2 \times 3 = 6$ ). De (2.78), la frecuencia del oscilador local del transmisor será:

$$f_{OL} = 100 + 6 \times 10 = 160 \text{ Mhz} \quad \text{o} \quad f_{OL} = 100 - 6 \times 10 = 40 \text{ Mhz}$$

## 2.4 DEMODULACIÓN DE FRECUENCIA

La expresión para una señal modulada en frecuencia es:

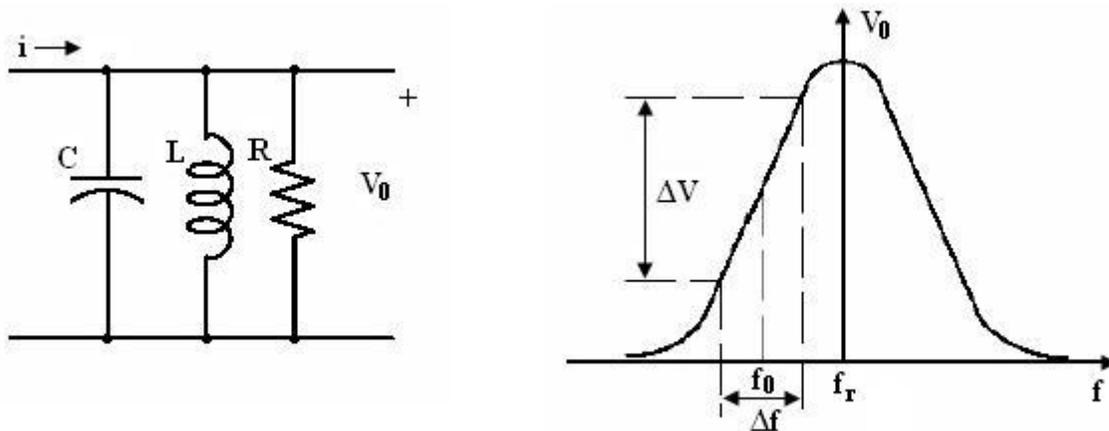
$$v_{FM}(t) = A \cos \left[ \omega_0 t + K \int_0^t v_m(t) dt \right] \quad (2.80)$$

Si se deriva la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{dv_{FM}(t)}{dt} = A \left[ \omega_0 + K v_{FM}(t) \right] \text{sen} \left( \omega_0 t + k \int_0^t v_m(t) dt \right) \quad (2.81)$$

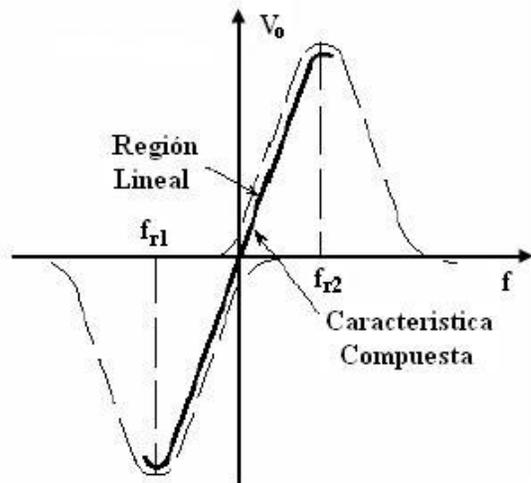
La función principal de un demodulador o detector de frecuencia es generar una señal cuya amplitud sea proporcional a la frecuencia instantánea  $f_i$  de la señal modulada en frecuencia.

La ecuación (2.81) es la expresión de una señal modulada en frecuencia, pero cuya envolvente tiene una magnitud proporcional a la amplitud de la señal moduladora  $v_m(t)$ , que puede recuperarse mediante un detector de envolvente que, ignorará las variaciones de frecuencia de la portadora. Tradicionalmente los demoduladores o detectores de FM aplicaron las propiedades de los circuitos sintonizados para conseguir la derivación deseada, lo que se ilustra en la figura 2-17, en que la frecuencia de resonancia del circuito sintonizado,  $f_r$ , se elige, no a la frecuencia central,  $f_0$  de la señal modulada en frecuencia, sino ligeramente desviada, de modo que  $f_0$  caiga sobre la parte lineal de la respuesta del circuito.



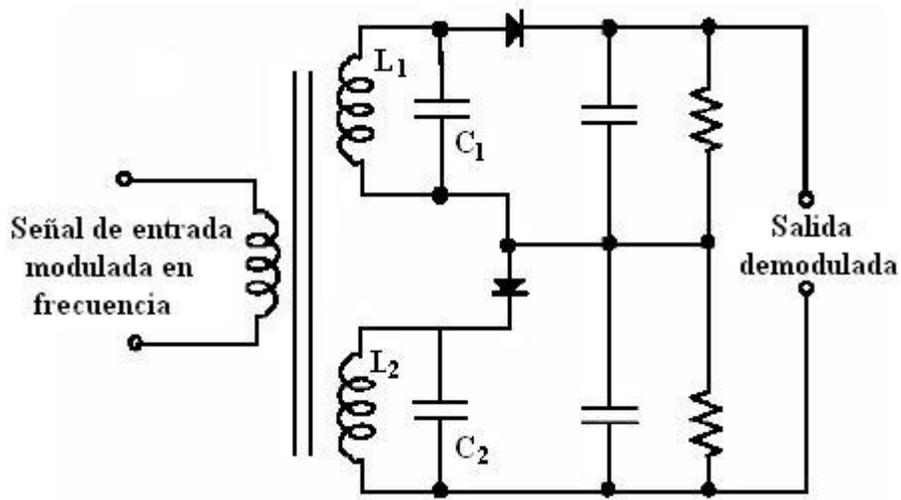
**Figura 2.17: Principios de la demodulación en frecuencia**

La linealidad de un circuito resonante simple como el anterior, está limitada a un rango de frecuencias reducido, que puede extenderse introduciendo un segundo circuito resonante a una frecuencia ligeramente diferente del primero, de modo que entre ambos tengan una respuesta como se ilustra en la figura 2.18:



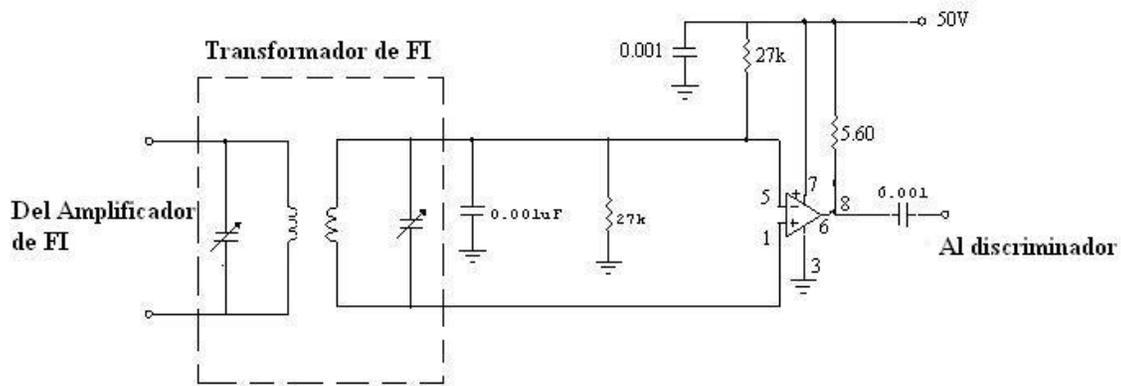
**Figura 2.18: Discriminación de frecuencia mediante dos circuitos sintonizados**

Cada uno de los circuitos sintonizados se alimenta con fases opuestas, produciendo una característica de transferencia como la mostrada. En este principio se basan algunos de los *discriminadores de frecuencia*, como el que se ilustran en la figura 2.19 y que designan como *discriminadores balanceados*.



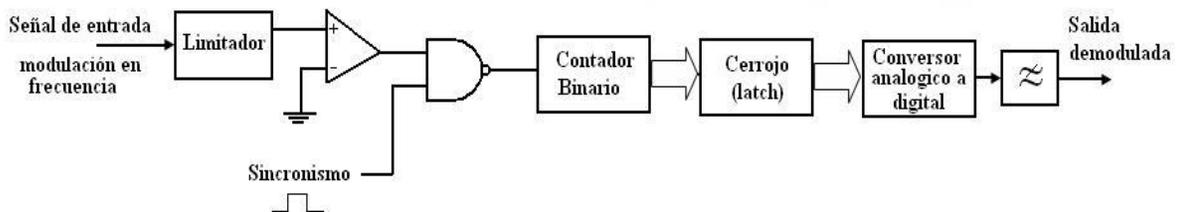
**Figura 2.19: Discriminador balanceado**

En la figura 2.20 se ilustra un limitador típico con circuito integrado. La entrada al limitador es la señal de salida del amplificador de frecuencia intermedia en un receptor, con variaciones de amplitud como las discutidas antes. Su salida, de amplitud constante, es la señal de entrada al discriminador o detector de frecuencia.



**Figura 2.20: Limitador con circuito integrado**

Las técnicas actuales de demodulación o detección de señales moduladas en frecuencia se basan en el empleo de la tecnología de circuitos integrados, en que por lo general, no se emplean inductancias. El efecto de la limitación de la señal de FM, como se aprecia de la figura anterior, produce de hecho, una señal de pulsos de amplitud constante y frecuencia variable, en la que la frecuencia instantánea se preserva en los cruces por cero de la señal pulsante. En la figura 2.21 se ilustra un circuito, completamente digital, basado en la detección de los cruces por cero.



**Figura 2.21: Demodulador digital de FM**

El número de cruces por cero en un intervalo determinado se aplican a la entrada de un contador binario, y sus salidas se aplican a un convertidor digital-analógico (DAC), cuyo voltaje de salida, ya en el dominio analógico, es proporcional al número de cruces por cero y, por consecuencia, proporcional a la amplitud de la señal moduladora original.

## 2.5 FM ESTÉREO

En FM estéreo se transmiten dos señales de audio de banda base hacia el receptor, donde alimentan dos bocinas individuales. En un estudio de radio, por ejemplo, los micrófonos se encuentran en lugares separados, lo mismo que en el receptor, las dos bocinas están físicamente separadas. La ventaja de la transmisión de FM estéreo consiste en que se genera en el receptor un sonido más natural. El sonido que se escucha en el receptor se parece más a lo que el radio-escucha oiría si se localizara en el propio estudio de radio.

FM-estéreo emplea FDM (Frequency Division Multiplexing), consiste en modular cada fuente de información a una frecuencia de portadora diferente de forma que no solapan los espectros y puedan ser recuperados.

Podemos decir que un aparato estereofónico no es más que 2 amplificadores con características idénticas y las señales que recibe se aplican a bocinas separadas, lo cual le da un efecto agradable al oyente.

Cuando se graba en estéreo, esto resulta sencillo de reproducir, no así cuando se trata de transmitir estas señales, en vista de que se necesita transmitir por separado ambas, estas mismas se procesan en el receptor para luego escucharlas tal y como se originaron.

El "Multiplex Estéreo De FM", es el sistema aprobado por la FCC, y mediante el cual se puede transmitir el sonido en estéreo en una sola onda portadora en frecuencia modulada.

Una de las ventajas del multiplexado estéreo de FM, es que la reproducción del sonido es tan buena en los receptores estereofónicos como en los de FM normal, estos lo reproducen como una señal monofónica de FM.

### *Características de FM estéreo*

- Frecuencias de Portadora: 88.1 Mhz a 107.9 Mhz
- Existen un total de canales (emisoras) separadas cada 200 KHz
- Índice de Modulación  $\beta = 5$ . Máxima desviación  $\Delta F = 75$  KHz
- Ancho de banda de la señal de información  $B = 15$  KHz  $\rightarrow BW = 180$  KHz

### 2.5.1 Transmisión de la Señal

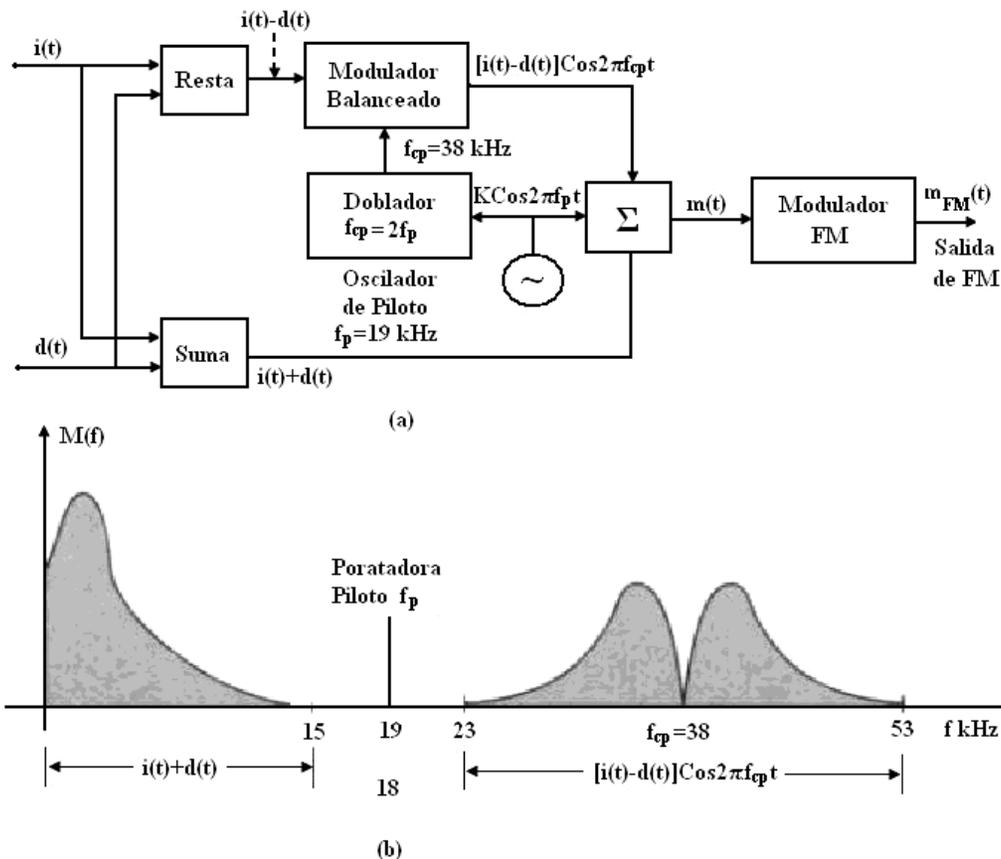
Consideremos el siguiente ejemplo; en un estudio de radio, un micrófono genera una señal de audio izquierda  $i(t)$  y el otro la señal de audio derecha  $d(t)$  como se ilustra en la Figura 2.22a. Estas señales se suman y se restan para generar  $i(t) + d(t)$  e  $i(t) - d(t)$ . Cada una de estas señales, suma y diferencia se limitan en banda a 15 kHz mediante filtros. El oscilador genera una senoide que se conoce como *frecuencia piloto*  $f_p = 19$  kHz. Esta frecuencia piloto se aplica a un doblador de frecuencia que entrega la subportadora sinusoidal  $f_{2p} = 2f_p = 38$  kHz. La subportadora y la señal diferencia se alimentan a las entradas de un modulador balanceado y la salida de este modulador es:

$$[i(t) - d(t)] \cos 2\pi f_{2p} t \quad (2.82)$$

Mediante la combinación de la salida del modulador balanceado más la señal suma ( $i(t)+d(t)$ ), en la salida del generador de piloto, se forma  $m(t)$  dada por:

$$m(t) = [i(t) + d(t)] + [i(t) - d(t)] \cos 2\pi f_{2p} t + k \cos 2\pi f_p t \quad (2.83)$$

Aquí,  $k$  es una constante que determina el nivel de la portadora piloto en comparación con las demás componentes de  $m(t)$ . La densidad espectral de la señal compuesta  $m(t)$  típica se ilustra en la figura 2.22b. La señal suma  $i(t) + d(t)$  ocupa la banda de frecuencia entre 0 y 15 kHz. La salida del modulador balanceado, que es la señal DBL-PS  $[i(t) - d(t)] \cos 2\pi f_{2p} t$  tiene una banda lateral inferior que se extiende desde 23 hasta 38 kHz y una banda lateral superior que se extiende desde 38 hasta 53 kHz. . La portadora piloto de 19 kHz está presente como se muestra en la figura 2.22b. La señal compuesta  $m(t)$  modula en frecuencia a la portadora y entonces se entrega a la antena para su transmisión.



**Figura 2.22:** (a) Transmisión de FM estéreo. (b) Densidad espectral de la señal compuesta de FM estéreo

## 2.5.2 Receptor de FM Estéreo

En el receptor de FM estéreo, la señal compuesta  $m(t)$  se recupera, a partir de la portadora modulada, con el discriminador de FM. Como se ilustra en la figura 2.23, la señal  $m(t)$  se descompone en sus partes individuales mediante filtros. La portadora piloto, aplicada a un doblador, regenera la subportadora. La disponibilidad de esta subportadora permite ahora la demodulación sincrónica de la señal de DBL-PS. La salida del demodulador sincrónico es proporcional a la señal de diferencia  $i(t) - d(t)$ , en tanto que la salida del filtro de pasa bajo es proporcional a  $i(t) + d(t)$ . Hemos visto que la transmisión de la portadora piloto permite regenerar, en el receptor, la onda subportadora que se requiere. Podemos ver de la figura 2.22b la razón por la cual la subportadora de 38 kHz no se transmitió directamente. Tal subportadora no está separada por algún intervalo de frecuencia apreciable de las componentes espectrales de sus bandas laterales. Por tanto, para extraer tal subportadora se requeriría de un filtro sintonizado muy angosto y agudo. Por otro lado, la portadora piloto ocupa un lugar aislado en el espectro, en donde no existen otros componentes espectrales en el rango de 4 kHz a ambos lados. Teniendo ahora disponible la señal suma  $i(t) + d(t)$  y la señal diferencia  $i(t) - d(t)$ , entonces, como se indica en la figura 2.23, las señales individuales  $i(t)$  y  $d(t)$  respectivamente, se recuperan mediante la suma y la resta.

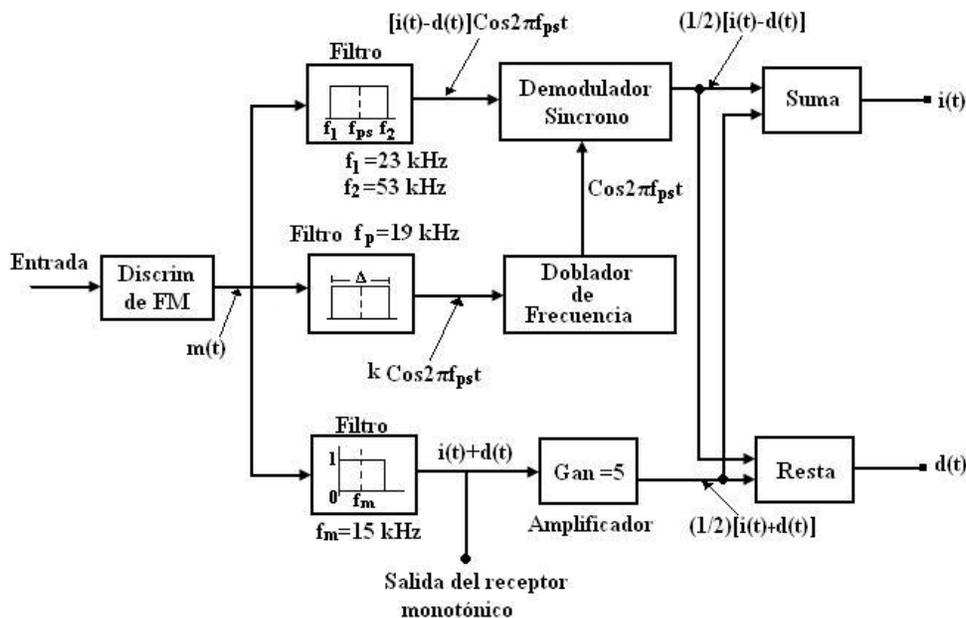


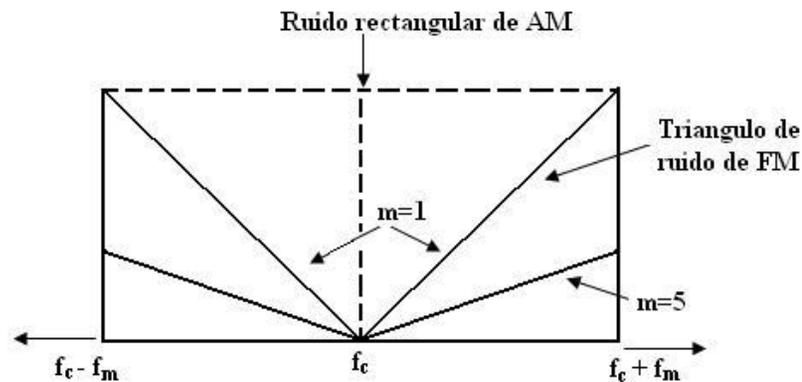
Figura 2.23: Receptor de FM estéreo

El sistema es completamente compatible con los requisitos de un receptor monofónico. En tal receptor, la señal suma  $i(t) + d(t)$  pasa por el filtro de banda base mientras que la portadora piloto y la señal de portadora suprimida no. En consecuencia, estas dos últimas señales contribuyen en nada a la salida del receptor monofónico y ninguna de ellas interfiere con la operación del receptor.

## 2.6 REDES PREÉNFASIS Y DEÉNFASIS

Al agregar ruido térmico con una densidad espectral constante a una señal de FM, se produce una desviación de frecuencia no deseada de la portadora. La magnitud de esa desviación no deseada depende de la amplitud relativa del ruido con respecto a la portadora. Cuando la desviación no deseada es demodulada, se convierte en ruido si tiene los componentes de frecuencia que decaen dentro del espectro de información – frecuencia. Su forma espectral depende si se usó un demodulador FM o PM.

El voltaje de ruido de la salida de un demodulador de PM es constante con la frecuencia, mientras que en la salida de un demodulador de FM se incrementa en forma lineal con la frecuencia, este último es llamado triángulo de ruido de FM y se ilustra en la Figura 2.24. El voltaje de ruido demodulado es mayor para las frecuencias de señal modulante más altas.

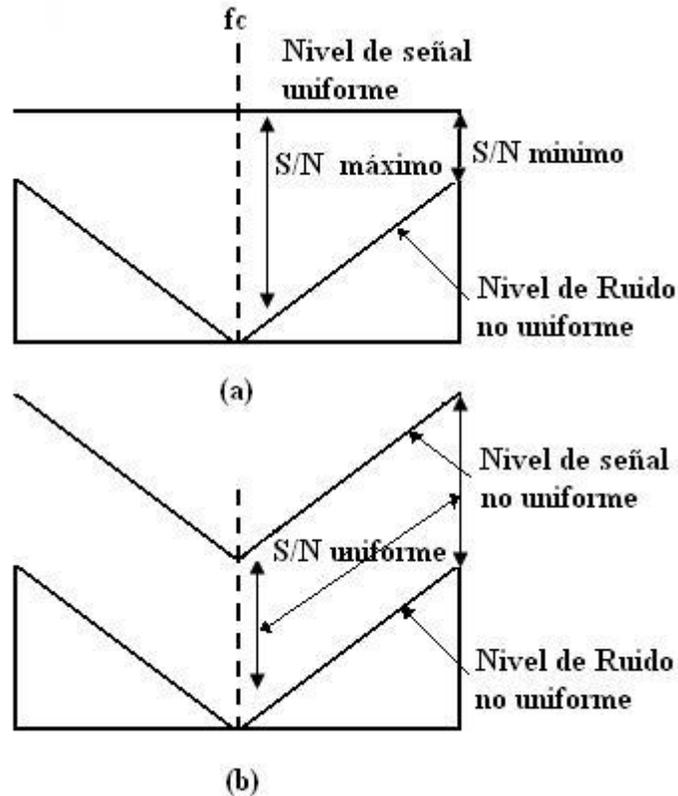


*Figura 2.24: Triángulo de ruido de FM*

El triángulo de ruido, mostrado en la figura 2.24, muestra que, con FM, existe una distribución uniforme de ruido. El ruido en las frecuencias de la señal modulante superiores, es inherentemente mayor en amplitud que el ruido en las frecuencias inferiores. Esto incluye la interferencia de frecuencia única y el ruido térmico. Por lo tanto, para las señales de información con un nivel de señal uniforme, se produce una relación señal/ruido más bajo que las frecuencias inferiores. Esto se muestra en la figura 2.25a.

Puede observarse que la relación S/N es más baja en las orillas de alta frecuencia del triángulo. Para compensar todo esto, las señales modulantes de alta frecuencia son enfatizadas o aumentadas en amplitud, en el transmisor, antes de realizar la modulación. Para compensar este aumento, las señales de alta frecuencia son atenuadas o desenfatisadas en el receptor después de que se ha realizado la demodulación. Deénfasis es el recíproco de preénfasis, y por lo tanto una red de deénfasis restaura las características originales de amplitud – Vs-frecuencia a las señales de información. Esencialmente, la red de preénfasis permite que las señales modulantes de alta frecuencia modulen la portadora a un nivel más alto y, por lo tanto,

causen más desviación de frecuencia que las que sus amplitudes originales hubiesen producido.



*Figura 2.25: Señal a ruido de FM: (a) Sin preénfasis; (b) Con preénfasis*

Las señales de alta frecuencia se propagan por el sistema a un nivel elevado (desviación de frecuencia incrementada), demoduladas y, después, restauradas a sus proporciones de amplitud originales.

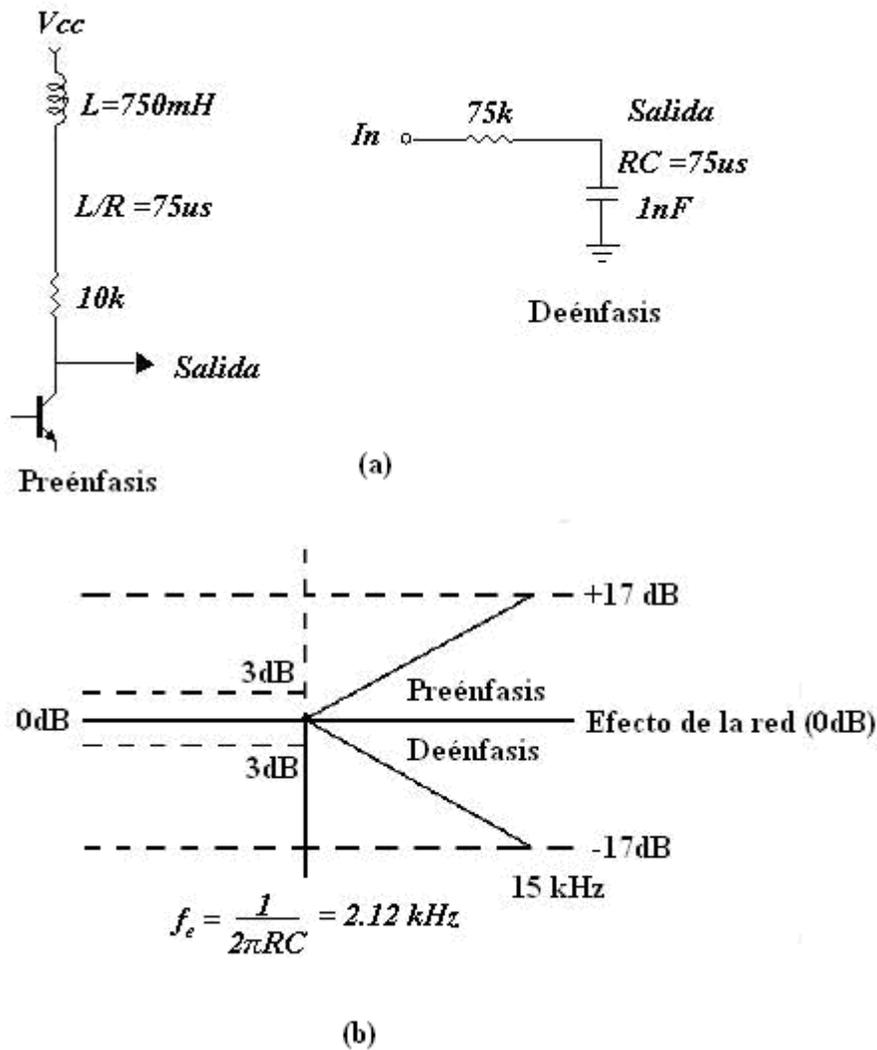
La figura 2.26b muestra los efectos de preénfasis y deénfasis sobre la relación señal/ruido. La figura muestra que el preénfasis y deénfasis producen una relación señal/ruido más uniforme en el espectro de frecuencia de la señal modulante.

Una red de preénfasis es un filtro de pasa-altos (es decir, un diferenciador) y una red de deénfasis es un filtro de pasa-bajos (un integrador).

La figura 2.26b muestra los diagramas esquemáticos para una red de preénfasis activa y una red de deénfasis pasiva.

Las curvas de respuesta de frecuencia correspondientes se muestran en la figura 2.26b.

Una red de preénfasis le proporciona un incremento constante a la amplitud de la señal modulante con un incremento en la frecuencia. Con FM, se logran aproximadamente 12dB de aumento en el rendimiento de S/N, utilizado preénfasis y deénfasis.



**Figura 2.26: Preénfasis y deénfasis: (a) Diagramas esquemáticos; (b) Curvas de atenuación**

La frecuencia de corte (la frecuencia en donde el preénfasis y deénfasis comienzan) se determina por la constante de tiempo  $RC$  o  $L/R$ , de la red. La frecuencia de corte ocurre en la frecuencia en donde  $X_c$  o  $X_L$  es igual a  $R$ . Matemáticamente, la frecuencia de corte es:

$$f_b = \frac{1}{2\pi RC} \quad (2.84a)$$

$$f_b = \frac{1}{2\pi L/R} \quad (2.84b)$$

Las redes mostradas en la figura 2.26 son para la banda de radiodifusión de Fm, la cual utiliza una constante de tiempo de  $75\ \mu\text{s}$ . Por lo tanto, la frecuencia de corte aproximadamente es:

$$f_b = \frac{1}{2\pi 75\ \mu\text{s}} = 2.12\text{ kHz} \quad (2.85)$$

## ACTIVIDADES

1. Dadas las siguientes señales, determinar las frecuencias instantáneas en Hz.

- a)  $10 \cos(200\pi t + \frac{\pi}{3})$
- b)  $10 \cos(20\pi t + \frac{\pi}{3})$
- c)  $\cos 200\pi t \cos(5 \text{sen} 2\pi t) + \text{sen} 200\pi t \text{sen}(5 \text{sen} 2\pi t)$

2. Una señal modulada en ángulo es descrita por:

$$x_c(t) : 10 \cos[2\pi(10^6)t + 0.1 \sin(10^3)\pi t]$$

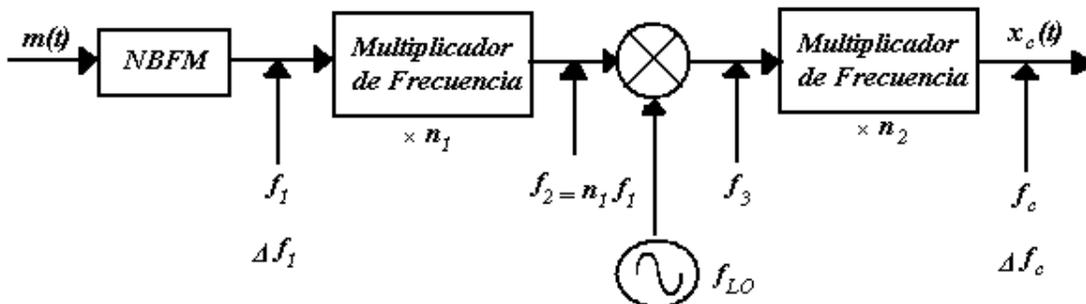
- a) Considerando  $x_c(t)$  como una señal PM con  $k_p = 10$ , encontrar  $m(t)$ .
- b) Considerando  $x_c(t)$  como una señal FM con  $k_f = 10\pi$ , encontrar  $m(t)$ .

3. Se tiene una señal modulada en ángulo  $x_c(t)$  es:

$$x_c(t) : 10 \cos(2\pi 10^8 t + 200 \cos 2\pi 10^3 t)$$

- a) Determina la frecuencia instantánea.
- b) Hallar el ancho de banda para esta señal.

4. Un diagrama de bloques de un transmisor de FM indirecto se muestra en la siguiente figura:



Calcular la frecuencia de desviación máxima  $\Delta f$  de la salida del transmisor de FM y la frecuencia portadora  $f_c$  si  $f_1 = 200 \text{ kHz}$ ,  $f_{LO} = 10.8 \text{ MHz}$ ,  $\Delta f_1 = 25 \text{ Hz}$ ,  $n_1 = 64$  y  $n_2 = 48$ .

# UNIDAD III

## MODULACIÓN DE PULSOS CODIFICADOS PCM

### INTRODUCCIÓN

En 1926, P. M. Rainey, de los Estados Unidos, desarrolló un método para transmitir una representación de una señal continua mediante una sucesión de valores discretos de la misma señal.

Posteriormente, en 1936, A. H. Reeves, entonces ingeniero de la ITT en Francia, patentó un sistema para la transmisión de voz basado en el método de Rainey. Este sistema se conoce desde entonces con el nombre de Modulación de Pulsos Codificados (PCM). En la modulación PCM cada muestra del mensaje se representa o codifica en una secuencia de Pulsos, generalmente binarios.

En este capítulo estudiaremos la modulación de pulsos codificados, el teorema de muestreo, los procesos de cuantificación y codificación y sus características más importantes.

### OBJETIVOS

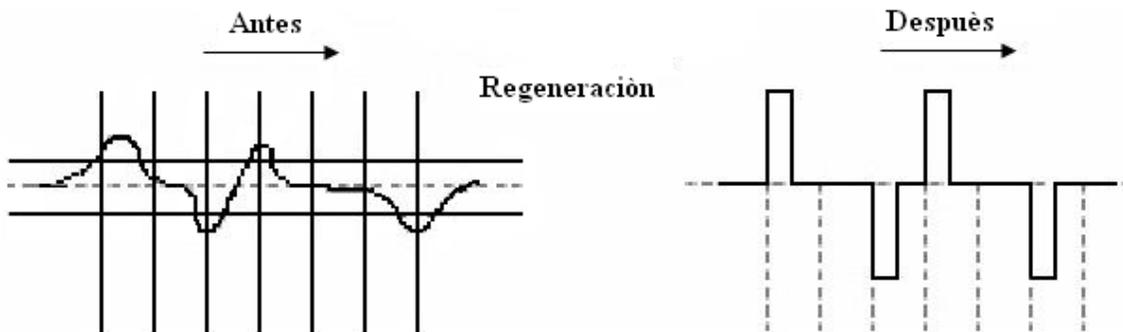
- Comprender los conceptos de la Modulación de Pulsos Codificados PCM.
- Analizar e interpretar el Teorema de Muestreo.
- Comprender y analizar los procesos de cuantificación y codificación.
- Entender la trama básica G703.
- Comprender los principios de Multiplexación Digital.
- Aprender la Jerarquía de Multiplexación Digital.
- Aplicar dichos conceptos en la resolución de problemas.

### 3.1 PRINCIPIO BÁSICO DE PCM

Debido a que las redes de Telecomunicaciones eran analógicas, éstas, utilizaban solo los principios de FDM (Multiplexación por División de Frecuencia). Entonces con la llegada del PCM se inicio un nuevo proceso de digitalización.

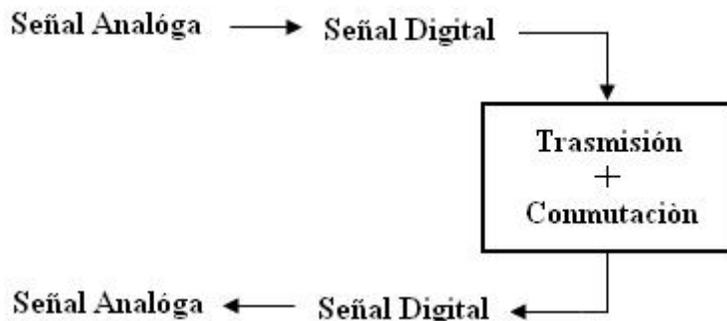
Una gran ventaja de esta técnica radica en el hecho de que, en cada punto de regeneración a lo largo de la red de transmisión, se generan unos y ceros iguales a los originales, indicando que la señal llega a su destino libre de imperfecciones. independiente de la distancia

Como sus siglas lo indican PCM o MIC en español significa Modulación por Pulsos Codificados. Fue la creación de una técnica con el fin de disminuir los problemas de ruido y distorsión en la transmisión de señales de voz, utilizando un mayor ancho de banda.



*Figura 3.1: Proceso de Regeneración*

Al observar en la figura 3.2 la señal original es de naturaleza analógica, ésta señal es convertida en digital antes de entrar a la red (concentrador o aparato de abonado), y se mantiene en este estado durante su tránsito a través de la misma, lo cual implica que los equipos de conmutación y los sistemas de transmisión son digitales. Al final, la señal logra su forma analógica a la salida de la red mencionada y es entregada al abonado de destino.

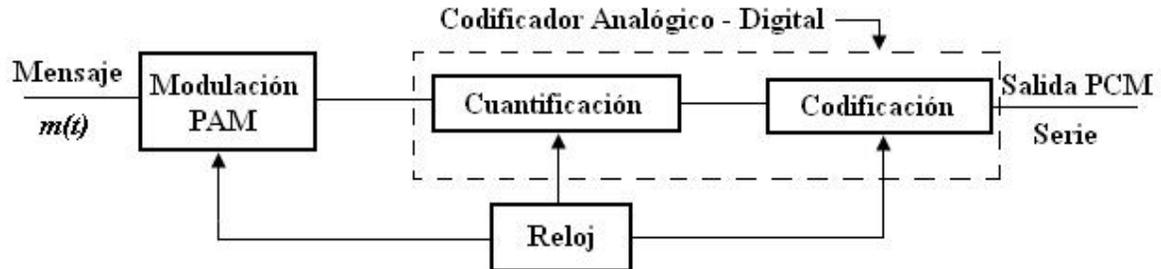


*Figura 3.2: Ciclo que cumple una señal original al transmitirla*

La figura 3.3 representa un esquema global de la técnica PCM, donde se observa claramente los pasos o camino que sigue el mensaje, se empieza por el muestreo, pasa por la

cuantificación y por último se llega a la codificación. Por ende iniciaremos la explicación de esta técnica mostrando los diferentes tipos de muestreo.

El diagrama de bloques de la figura 3.3 indica que este sistema está estrechamente relacionado con los principios del sincronismo de señales donde cada pulso de reloj corresponde a la duración de un bit.



*Figura 3.3: Esquema Global Técnica PCM*

## 3.2 MUESTREO

El muestreo ideal no es un proceso físicamente realizable, y una definición que está más de acuerdo con la operación práctica sería la siguiente: Una muestra es una medida de la amplitud de la señal, evaluada bajo un periodo corto de tiempo comparado con el intervalo entre exámenes sucesivos de la señal y durante el cual la señal cambia solamente cantidades despreciables.

En sistemas PCM, a cada muestra se le asigna un valor discreto de amplitud; por lo tanto, cada muestra se puede representar por un pulso de amplitud constante y de muy corta duración. O sea que una señal muestreada consiste de un tren (o secuencia) de pulsos reales, teniendo cada uno una amplitud igual al valor de la señal en el instante de muestreo.

Existen tres diferentes tipos de muestreo, el Muestreo Ideal, Muestreo Natural y el Muestreo Techo Plano o también llamado Muestreo Instantáneo. Estos se estudiarán a continuación.

### 3.2.1 Muestreo Ideal

El teorema de Muestreo (Nyquist) establece que:

Para reconstruir una señal a partir de sus muestras, la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la máxima frecuencia. Esto indica que una señal de banda limitada a B Hz, (es decir, una señal cuya transformada de Fourier es igual a cero para todo  $|\omega| > 2\pi B$ ) queda determinada unívocamente por sus valores a intervalos uniformes con separación menor a  $1/2B$  segundos.

Para demostrar el teorema del muestreo, se considera una señal  $g(t)$  de banda limitada a B (Figura 3.4a y b). La multiplicación de  $g(t)$  por un tren de impulsos unitarios (Figura 3.4c) produce la señal muestreada  $g_s(t)$  (figura 3.4d).

$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (3.1)$$

Utilizando la serie de Fourier para el tren de impulsos, se tiene.

$$\begin{aligned} g_s(t) &= \frac{1}{T_s} g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) e^{jn\omega_s t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se toman las transformadas de Fourier de ambos miembros y se tiene.

En el muestreo consiste en hacer la discretización en el tiempo.

El Muestreo es el proceso de examinar una señal continua (toma de muestras) a determinados intervalos de tiempo.

$$G_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_s) \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad (3.3)$$

La transformada de Fourier de la señal muestreada  $g_s(t)$  consta de  $G(\omega)$  repitiéndose a sí misma indefinidamente a cada  $\pm n\omega_s$ , para  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  (Figura 3.4e). No habrá traslapes entre ciclos sucesivos de  $G(\omega)$ , siempre que  $\omega_s \geq 2(2\pi B)$ , o sea

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 4\pi B \quad . \quad \text{Esto es; } T_s \leq \frac{1}{2B} .$$

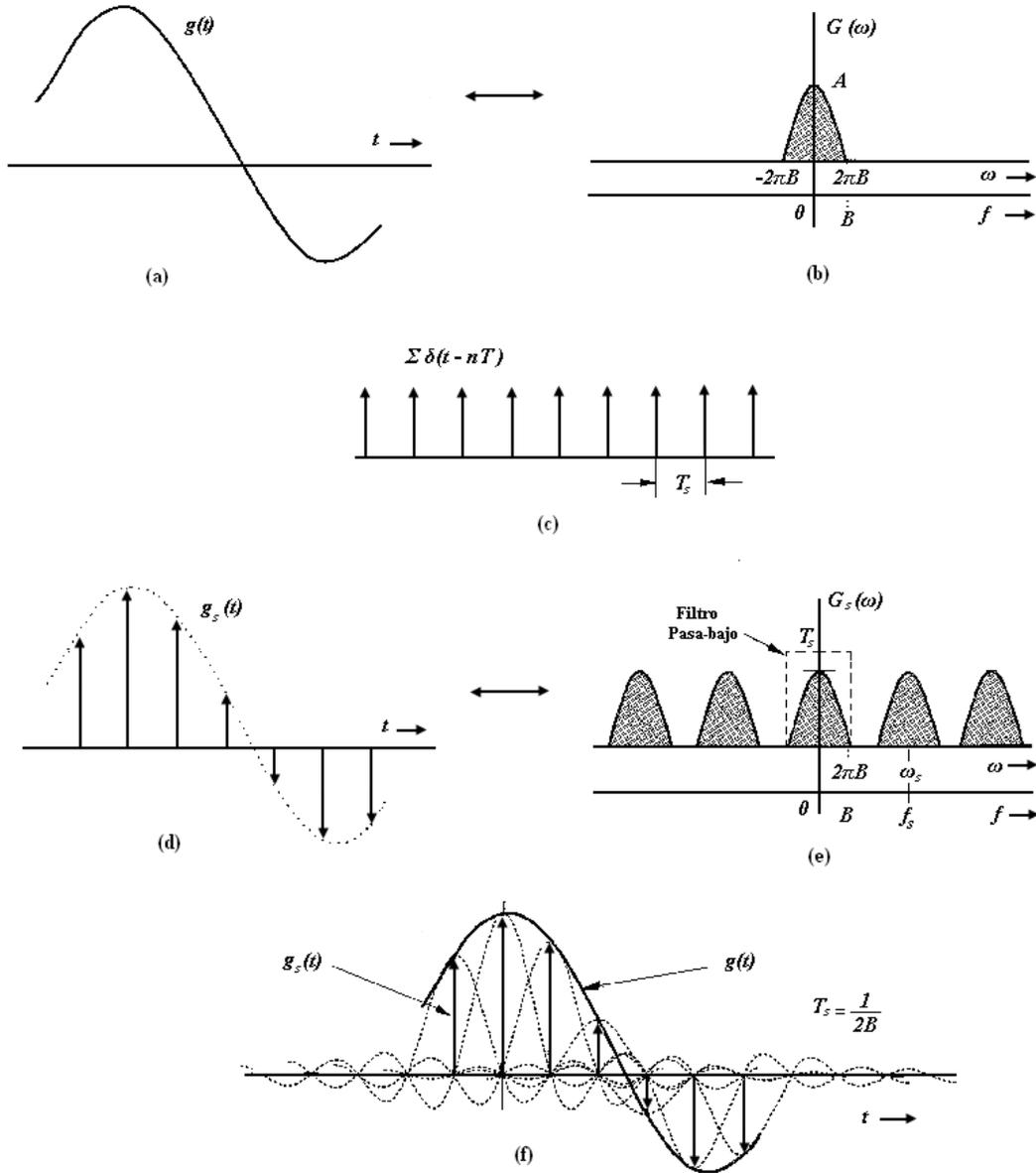


Figura 3.4: Muestreo de la Señal<sup>9</sup>

<sup>9</sup> "Modern Digital and Analog Communication" 3ª Edición, Pág. 252-255, B.P.Lathi.

En consecuencia, mientras el intervalo de muestreo  $T_s \leq 1/2B$  o la razón de muestreo sea mayor que  $2B$  muestras por segundo,  $G_s(\omega)$  constará de repeticiones que no se traslapan de  $G(\omega)$  y, en consecuencia,  $g(t)$  se podrá recuperar de  $g_s(t)$  simplemente al hacerla pasar a través de un filtro de pasabajas con una función de transferencia cuya características de magnitud  $|H(\omega)|$  aparece con línea punteada en la figura 3.4e. Esto demuestra el teorema del muestreo. El máximo intervalo de muestreo permisible,  $T_s = 1/2B$ , se conoce como *intervalo de Nyquist*, y el correspondiente índice o razón de muestreo ( $2B$  muestras por segundo) se conoce como el *índice de muestreo de Nyquist*.

Es evidente, de la ecuación (3.3) y de la figura (3.4e), que  $g(t)$  puede reconstruirse a partir de la señal muestreada  $g_s(t)$  haciendo pasar esta última a través de un filtro de pasabajas de ganancia  $T_s$  y ancho de banda  $B$ . La función de transferencia  $H(\omega)$  de tal filtro es.

$$H(\omega) = T_s \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) \quad (3.4a)$$

La respuesta de impulso unitario  $h(t)$  correspondiente es

$$h(t) = 2T_s B \text{Sinc}(2Bt) \quad (3.4b)$$

La entrada  $g_s(t)$  a este filtro es una sucesión de impulsos uniformemente separados por el intervalo  $T_s$ . El  $n$ -ésimo impulso, que se localiza en  $t = nT_s$ , tiene la intensidad  $g(nT_s)$ . La salida  $g(t)$  del filtro es la suma de las salidas de todos los impulsos de la sucesión de entrada. En consecuencia,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \text{Sinc} 2B(t - nT_s) \quad (3.5a)$$

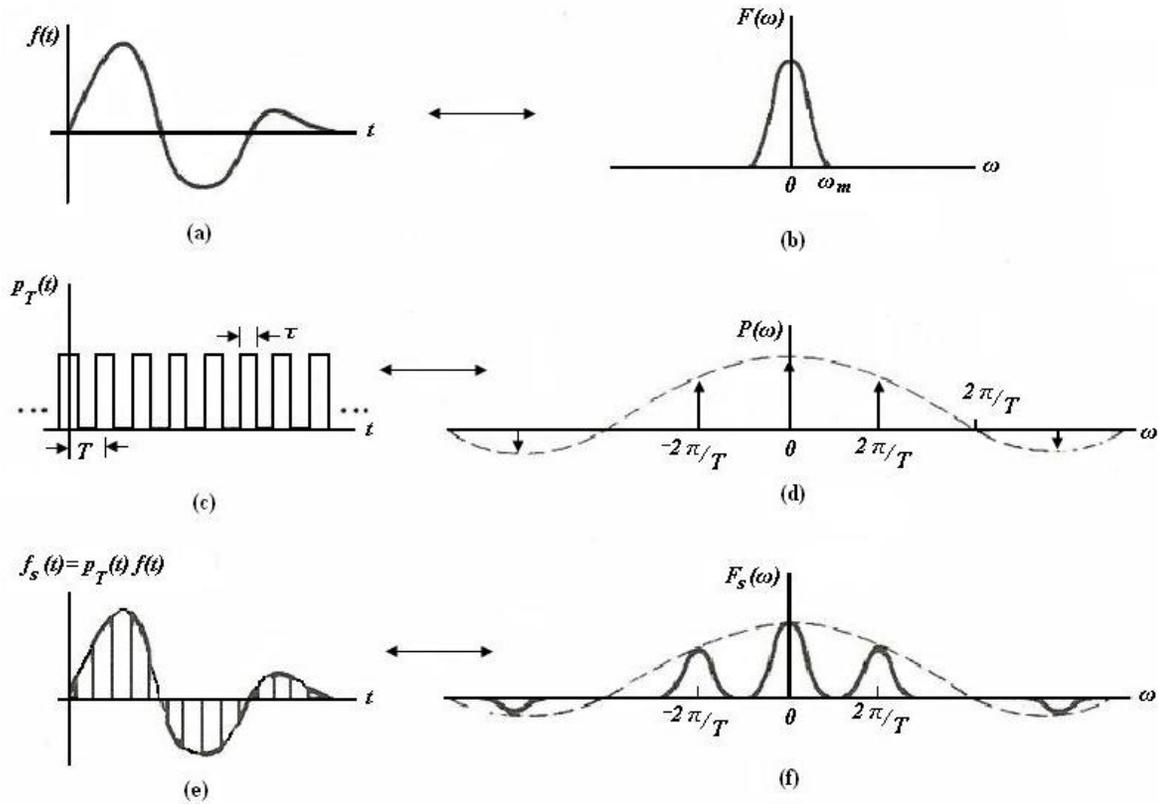
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \text{Sinc}(2Bt - n) \quad (3.5b)$$

Por lo tanto,  $g(t)$  se puede reconstruir a partir de sus muestras  $g(nT_s)$  conforme a la ecuación (3.5). El procedimiento de reconstrucción se muestra en forma gráfica en la figura 3.4f.

### 3.2.2 Muestreo Natural

En la modulación de amplitud de pulso (PAM, pulse-amplitud modulation), la amplitud de un tren de pulsos de ancho constante varia en proporción a los valores muestreados de la señal moduladora. Usualmente, los pulsos se toman a intervalos de tiempo equidistantes.

Considere una señal pasa-bajos  $f(t)$  de banda limitada a  $f_m$  Hz multiplicada por un tren periódico de pulsos rectangulares  $p_T(t)$ , como aparece en la figura 3.5. El intervalo de muestreo  $T$  es el intervalo de Nyquist  $(2f_m)^{-1}$  segundos.



**Figura 3.5: Muestreo Natural de una señal de banda limitada.**

La señal muestreada  $f_s(t)$  es el producto de  $f(t)$  por  $p_T(t)$ :

$$f_s(t) = f(t)p_T(t) \quad (3.6)$$

La densidad espectral de la señal muestreada se halla por la transformada de Fourier de la ecuación (3.6):

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes P(\omega) \quad (3.7)$$

En este caso, la convolución es fácil de realizar debido a las funciones impulso y se muestra en figura 3.5f. La expresión analítica equivalente de este resultado es:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\pi\tau/T) 2\pi\delta(\omega - n2\pi/T) \quad (3.8)$$

$$F_s(\omega) = \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\pi\tau/T) F(\omega - n2\pi/T) \quad (3.9)$$

De esto se concluye que el muestreo de  $f(t)$  produce la generación de réplicas espectrales en múltiplos de la razón del muestreo periódico. Los pulsos muestreadores no tienen que ser de la forma rectangular; la ecuación de la forma del pulso sólo alterará la forma de la envolvente del espectro de  $F_s(\omega)$ . Lo importante aquí es que cada réplica espectral generada sea una

reproducción exacta de la densidad original  $F(\omega)$  desplazada en frecuencia. La señal original  $f(t)$  puede recuperarse de la señal muestreada  $f_s(t)$  usando un filtro pasa-bajos ideal.

En el caso del muestreo natural examinado, las amplitudes de los pulsos variaban en proporción a los valores de muestra de la señal moduladora  $f(t)$ . Sin embargo, también variaban ligeramente las formas de los pulsos. En el caso del muestreo natural, las pendientes de las crestas de los pulsos varían con las pendientes de la señal moduladora en los puntos de muestra.

### 3.2.3 Muestreo de Techo Plano

El muestreo de Techo Plano es el método de muestreo más simple y por lo tanto, el más popular, es representado por un bloque funcional llamado circuito de muestreo/retención (S/H) mostrado en la figura 3.6a.

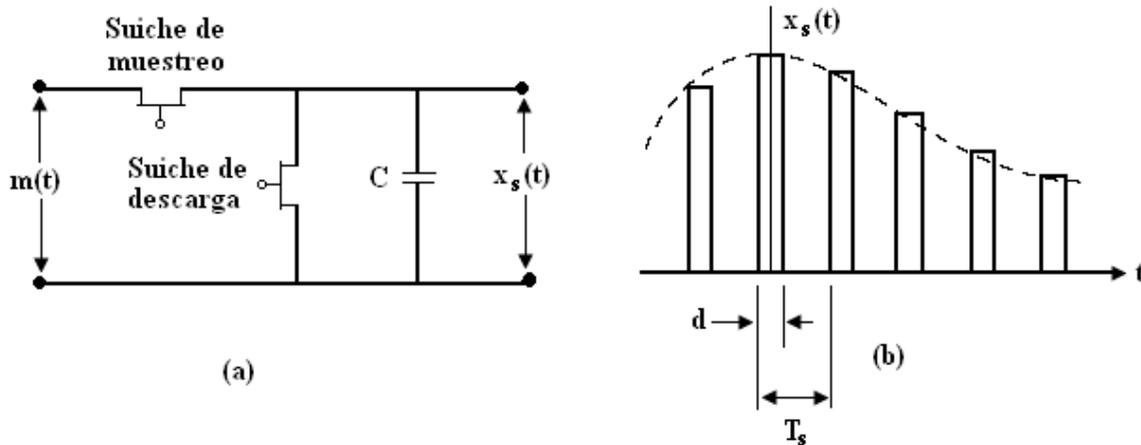


Figura 3.6: Muestreo de techo Plano

Este circuito produce una señal de muestreo de techo plano  $x_s(t)$  como se muestra en la figura 3.6b. El efecto del muestreo de techo plano es discutido en el siguiente ejemplo.

#### Ejemplo

Encuentre el espectro de  $x_s(t)$  en términos del espectro del mensaje  $m(\omega)$  teniendo en cuenta que  $x_s(t) = m_s(t) * p(t)$  y analice la distorsión en la forma de onda recuperada si el Muestreo de Techo Plano es aplicado.

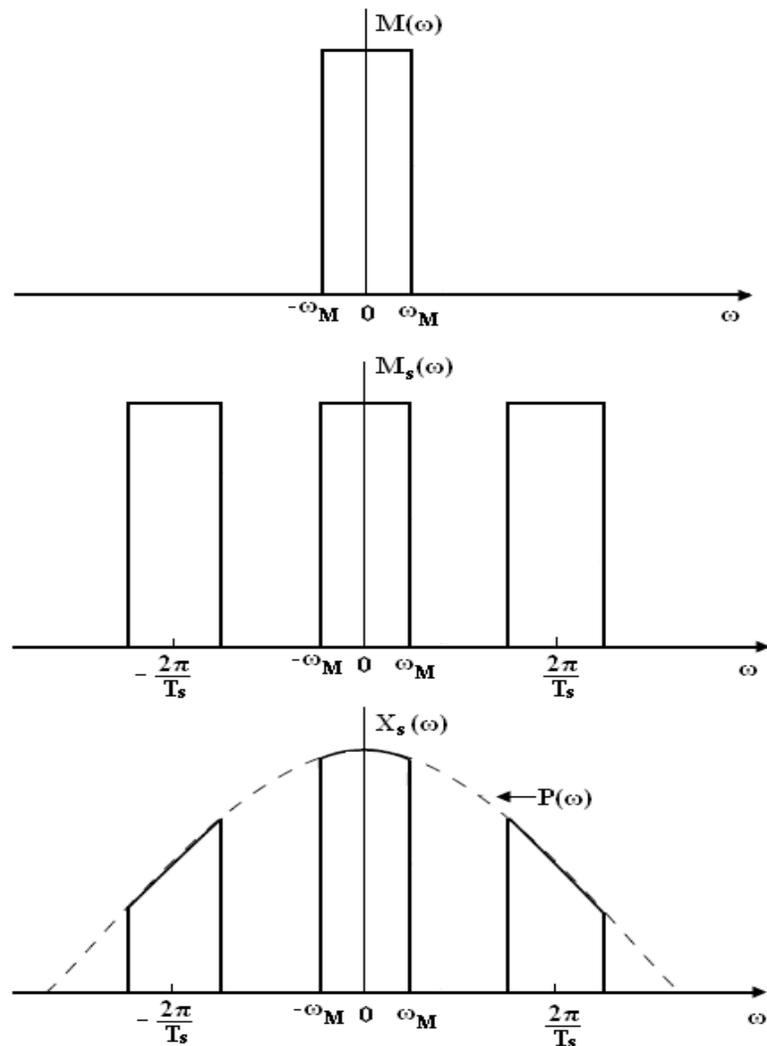
Usando la ecuación de la transformada de Fourier de una señal de pulso rectangular, tenemos que:

$$p(t) \leftrightarrow P(\omega) = d \frac{\text{Sin}(\omega d / 2)}{\omega d / 2} \quad (3.10)$$

Ahora convolucionando tenemos que:

$$X_s(\omega) = M_s(\omega)P(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(\omega - n\omega_s)P(\omega) \quad (3.11)$$

La figura 3.7 ilustra una interpretación grafica de la ecuación (3.11), con una  $M(\omega)$  asumida. Podemos observar que el muestreo de techo plano es equivalente a pasar una señal muestreada ideal a través de un filtro con respuesta en frecuencia  $H(\omega) = P(\omega)$ . La característica de caída de alta frecuencia de  $P(\omega)$  actúa como un filtro pasabajo y atenúa la parte superior del mensaje de espectro. Esta pérdida de alta frecuencia es conocida como el efecto apertura. El pulso de apertura de duración más grande es  $d$ . Ya que  $T_s$  no depende de  $d$ , la relación  $d/T_s$  es una medida de  $P(\omega)$  dentro del ancho de banda de el filtro pasabajo. En la práctica, este efecto de apertura puede ser  $d/T_s \leq 0.1$ .



*Figura 3.7: Efecto de Apertura en el Muestreo de Techo Plano*

### 3.2.4 Error de Seudointerferencia

Si una señal se submuestra, es decir, se muestra a una frecuencia por debajo de la frecuencia de Nyquist, el espectro  $G_s(\omega)$  constará de repeticiones de  $G(\omega)$  que se traslapan, como se muestra en la figura 3.8. Debido a los extremos que se traslapan,  $G_s(\omega)$  no tendrá la información completa acerca de  $G(\omega)$  y no será posible recuperar  $g(t)$  a partir de  $g_s(t)$ . Si la señal muestreada  $g_s(t)$  se hace pasar a través del filtro pasabajo, se obtiene un espectro que no es  $G(\omega)$  sino una versión distorsionada como resultado de dos causas diferentes:

1. Pérdida del extremo de  $G(\omega)$  más allá de  $|\omega| > \omega_s/2$ .
2. Este mismo extremo aparece invertido, o doblado, sobre el espectro a la frecuencia de corte. Esta inversión del extremo, que se conoce como doblez espectral, o seudointerferencia, se muestra sombreado en la figura 3.8.

La distorsión por seudointerferencia ó el Aliasing, como también se le conoce, puede eliminarse cortando el extremo de  $G(\omega)$  que está más allá de  $|\omega| = \omega_s/2$  antes que la señal sea muestreada. Haciéndolo así, se evita el traslape de ciclos sucesivos en  $G_s(\omega)$ . El único error en la recuperación de  $g(t)$  es el que causa el extremo faltante para  $|\omega| > \omega_s/2$ . El corte del extremo reduce la energía de la señal de error a la mitad. El error que se reduce al cortar el extremo que está más allá de una cierta frecuencia, puede hacerse despreciable si se hace  $B$  suficientemente grande.

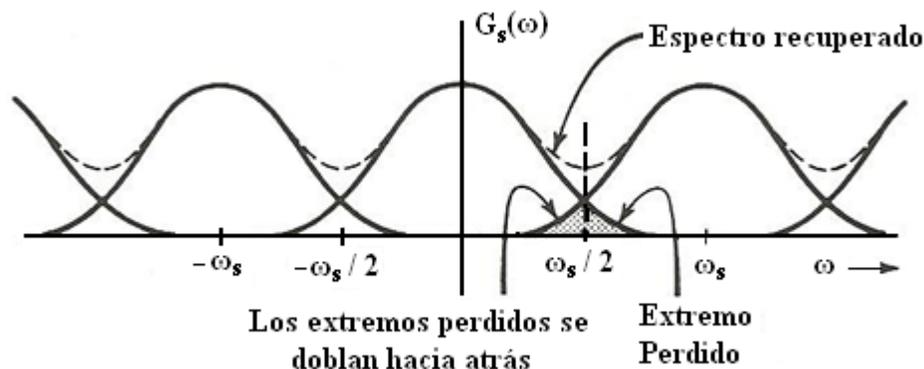


Figura 3.8: Error de seudointerferencia<sup>10</sup>

<sup>10</sup> "Ingeniería Electronica", Pág. 65, Editorial Interamericana, B.P. Lathi.

### 3.3 CUANTIFICACIÓN

La cuantificación aproxima cada muestra al nivel más cercano en un conjunto discreto de niveles conocidos como niveles de cuantización. El valor de cada muestra de la señal se representa como un valor elegido de entre un conjunto finito de posibles valores.

En el proceso de cuantificación, se busca establecer el valor de la amplitud de las muestras PAM, para posteriormente codificarlos en la forma de dígitos binarios. Se presenta entonces una diferencia entre el carácter continuo de la amplitud de las muestras, que pueden tomar un número infinito de posibles valores y el carácter discreto de la representación binaria, que sólo puede tomar  $2^n$  valores, siendo  $n$  el número de bits utilizados. La diferencia se resuelve descomponiendo la gama continua de amplitudes que pueden tomar las muestras, en una cantidad finita de valores de amplitud.

La gama de amplitudes se divide en intervalos y a todas las muestras cuyas amplitudes caen dentro de un intervalo de cuantificación se les da la misma amplitud de salida.

A manera de ejemplo, en la figura 3.9 se observa la utilización de ocho niveles para la cuantificación de la señal.

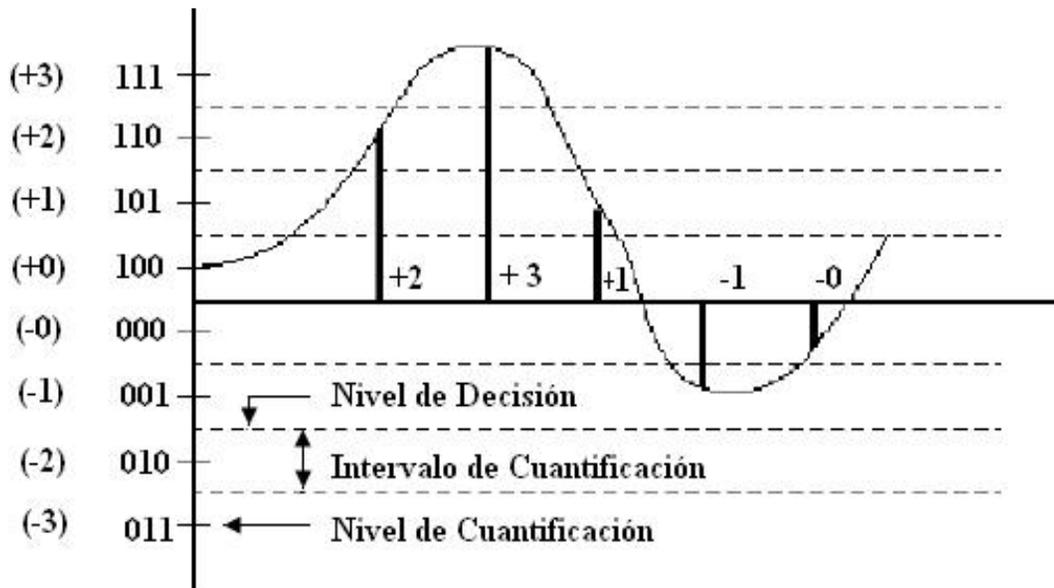


Figura 3.9: Principio de Cuantificación

En cada intervalo de cuantificación se destacan dos niveles bien definidos: El Nivel de decisión, el cual limita cada intervalo de cuantificación, y el Nivel de cuantificación, que determina el valor asignado a la muestra y está ubicado en la parte media de cada intervalo.

### 3.3.1 Análisis del Error de Cuantificación

El proceso de cuantificación introduce un error conocido como Distorsión de Cuantificación, que es la diferencia entre el valor real de la muestra y el valor que se le asigna en la cuantificación. El máximo error que se puede presentar en la cuantificación es la mitad del valor del intervalo de cuantificación, que ocurre cuando la señal se encuentra próxima al nivel de decisión. De hecho, este error será menor mientras menor sea el tamaño del escalón, ya que el valor queda acotado a la mitad del escalón. En la figura 3.10 se presenta una muestra donde se ve como se adiciona el error de cuantificación. Lo que interesa es que el ruido sea lo más bajo posible, para conseguir esto se pueden usar distintas técnicas de cuantificación, conocidas como:

- Cuantificación Uniforme
- Cuantificación No Uniforme

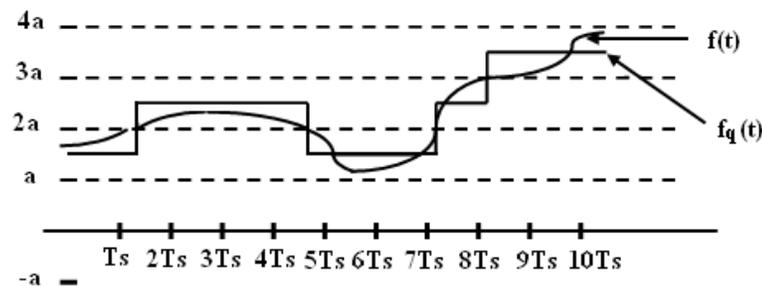


Figura 3.10: Error de cuantificación

### 3.3.2 Cuantificación Uniforme

Para una cuantificación uniforme se supone que las amplitudes de la señal se divide en intervalos uniformemente espaciados, cada uno de anchura  $2A_m/L$ , donde  $A_m$  es la amplitud máxima de la señal y  $L$  el número de niveles de cuantificación. Los valores de la muestra corresponderán al valor del nivel de cuantización explicados en los apartados anteriores.

#### 3.3.2.1 Error Cuadrático Medio en un Intervalo de Cuantificación

Vamos a calcular la potencia del error medio cuadrático de un intervalo de cuantificación, refiérase a la figura 3.11.

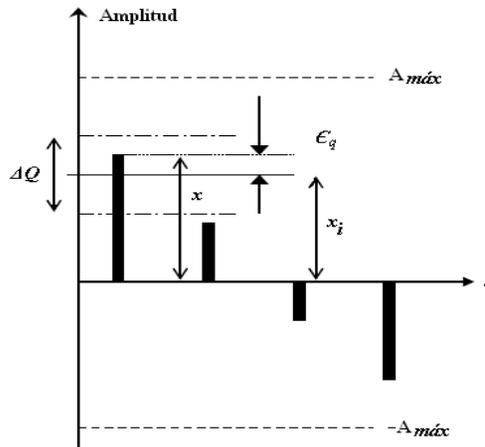


Figura 3.11: Error cuadrático medio de un intervalo de cuantificación

Sea:

$x$  un nivel de amplitud a cuantificar.

$x_i$  el valor aproximado mediante la cuantificación

$\Delta Q$  el tamaño del intervalo de cuantificación asociado a  $x_i$

$p_i(x)$  la función de densidad de probabilidad de  $x$  condicional a que  $x$  esté en el rango cuyo valor medio es  $x_i$ . Se supone que esta densidad es uniforme en el rango  $[x_i - \Delta Q/2, x_i + \Delta Q/2]$ .

Entonces  $x_i - \Delta Q/2 < x < x_i + \Delta Q/2$

El error cuadrático medio (condicional) del error de cuantificación ( $n_q$ ), será:

$$n_q = \int_{x_i - \Delta Q/2}^{x_i + \Delta Q/2} (x - x_i)^2 p_i(x) dx = p_i(x_i) \int_{-\Delta Q/2}^{\Delta Q/2} z^2 dz = \frac{\Delta Q^2}{12} \quad (3.12)$$

### 3.3.2.2 Relación Señal a ruido en el Proceso de Cuantificación Uniforme

Si asumimos tomar una señal sinusoidal dentro de todo el rango dinámico del convertidor analógico-digital (Número de bits del convertidor analógico-digital) y lo convertimos a dB, mediante la siguiente expresión:

$$RD(dB) = 20 \log_{10}(2^n) \quad (3.13)$$

Donde  $n$  es el número de bits.

La relación S/N pico, la podemos conocer así:

$$\frac{S}{N} = \frac{S_{\max}}{N} \frac{S}{S_{\max}} \quad (3.14)$$

Tratándose de una onda senoidal, tenemos que;

$$S_{\max} = \frac{A_m^2}{2} \quad (3.15)$$

Donde  $A_m$  es la amplitud de la señal senoidal; y como:

$$A_m = \frac{\Delta Q 2^n}{2} \quad (3.16)$$

Donde  $\Delta Q$  son los intervalos de cuantificación.

Ahora;

$$S_{\max} = \left( \frac{\Delta Q 2^n}{2} \right)^2 = \frac{\Delta Q^2 2^{2n}}{4} \quad (3.17)$$

Para la señal máxima de ruido tenemos que;

$$\frac{S_{\max}}{N} = \frac{(\Delta Q^2) 2^{2n}}{4} = (3 \times 2)^{2n} \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow 10 \log \left( \frac{S_{\max}}{N} \right) = 10 \log (3 \times 2)^{2n} = 10 \log 3 + 20 \log 2$$

$$10 \log \left( \frac{S_{\max}}{N} \right) = 10 \log 3 + 6n \text{ dB} \quad (3.19)$$

Por cada bit se incrementa la S/N pico en 6dB.

Volviendo a la ecuación (3.14) y convirtiendo a dB, tenemos;

$$10 \log \left( \frac{S}{N} \right) = 10 \log \frac{S_{\max}}{N} + 10 \log \frac{S}{S_{\max}}$$

$$10 \log \left( \frac{S}{N} \right) = 10 \log_{10} 3 + 6n + 10 \log \frac{S}{S_{\max}}$$

Para  $n = 8$  tenemos que;

$$10 \log \left( \frac{S}{N} \right) = 10 \log_{10} 3 + 6 \times 8 + 10 \log \frac{S}{S_{\max}}$$

$$10 \log \left( \frac{S}{N} \right) = 52.77 + 10 \log \frac{S}{S_{\max}} \quad (3.20)$$

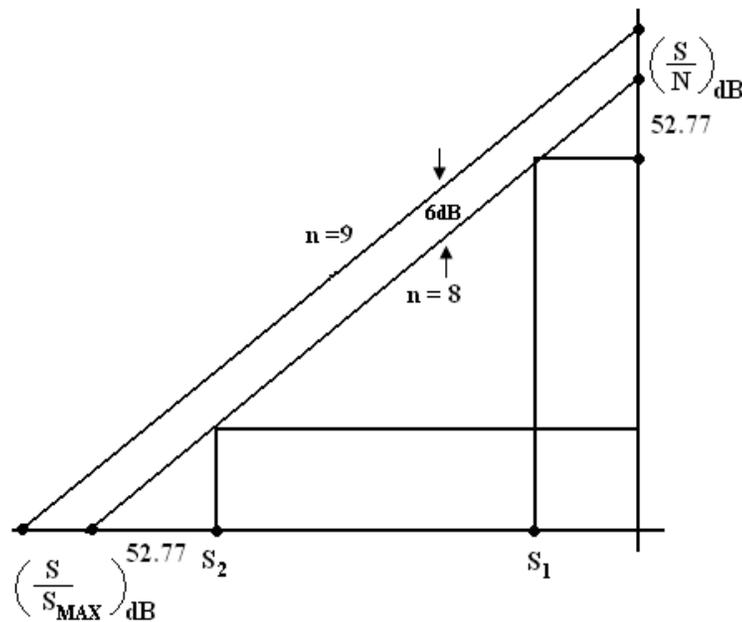


Figura 3.12: Relación señal a ruido en cuantificación uniforme con  $n=8$

De la figura 3.12 se puede concluir que las señales altas como  $S_1$ , tendrán una relación S/N mucho mayor que las señales bajas como  $S_2$ , por lo tanto, teniendo en cuenta que en las señales de voz, las señales bajas son más probables, tenemos que recurrir a la técnica de cuantificación no uniforme con el fin de disminuir el error en las señales débiles y así evitar la mala calidad de las señales.

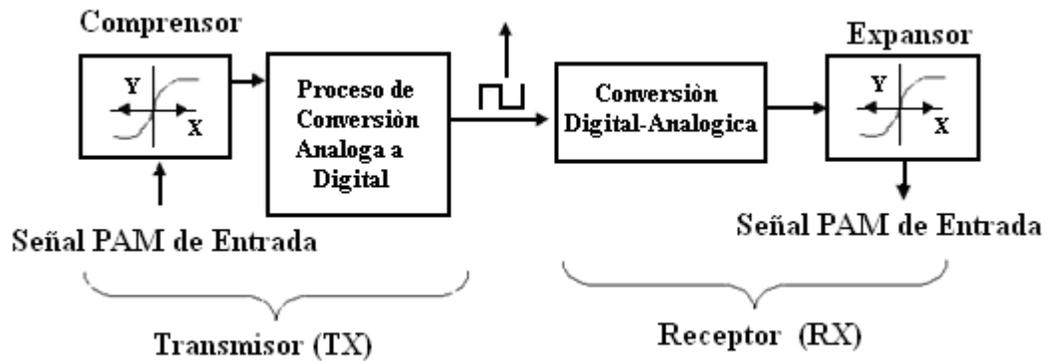
### 3.3.3 Cuantificación No Uniforme

Como vimos anteriormente, muchos de los niveles de cuantificación en un sistema uniforme serían raramente usados para señales de voz, así como el ruido de cuantificación es igual para todas las magnitudes, por lo tanto, la relación S/N es menor para señales de bajo nivel que para señales de alto nivel

Con cuantificación no uniforme se puede brindar una cuantificación fina para las señales débiles y una cuantificación gruesa para las señales fuertes, además mejora la relación S/N global, reduciendo el ruido en las señales débiles predominantes a expensas de un incremento de ruido en las señales fuertes que raramente ocurren.

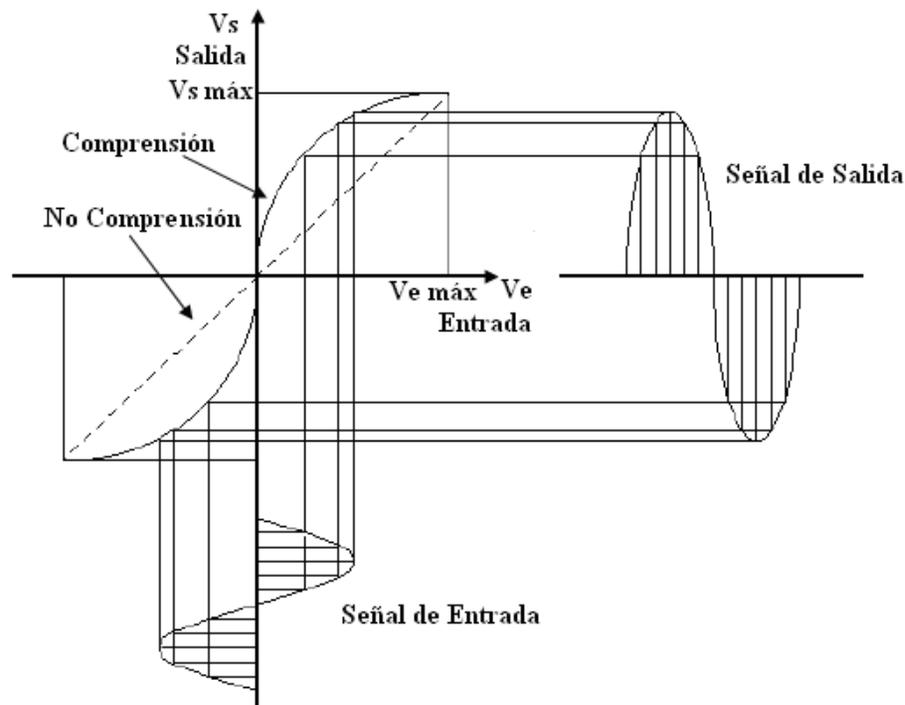
La cuantización no uniforme se hace distorsionando la señal con una característica de compresión logarítmica seguida de un cuantizador no uniforme. Es decir, el proceso con el cual se obtiene una Cuantización No Uniforme (ó no lineal) se le denomina **COMPANSIÓN** y hay dos maneras de realizarla:

1. La señal de entrada, que es una señal PAM es pasada por el compresor y la señal obtenida a la salida de éste se envía al proceso de cuantificación lineal, en el lado receptor se expande nuevamente la señal mediante un expansor, como se muestra en la figura 3.13.



**Figura 3.13: Compasión**

El compresor tiene el efecto de amplificar o agrandar proporcionalmente las amplitudes más bajas de la señal de entrada sobre las más altas, es decir, que el compresor genera una señal logarítmica, que permite reflejar las muestras de amplitud baja de la señal de entrada, en muestras de mayor amplitud a la salida, por lo tanto, todas las muestras de la señal a la salida del compresor tienen amplitudes altas, y sin temor a aumentar el error de cuantificación se puede aplicar después del compresor una cuantificación lineal. Como conclusión, se puede decir que el tamaño de los intervalos de cuantificación están definidos con respecto a una grafica logarítmica y obedece a una relación logarítmica. En la figura 3.14 se puede ver gráficamente lo que hace el compresor.



**Figura 3.14: Proceso del Compresor<sup>11</sup>**

2. El proceso utilizado por los sistemas PCM modernos usa intervalos de cuantificación crecientes con la amplitud de la señal de entrada, mediante la utilización de leyes de

<sup>11</sup> “Conmutación Digital: Modulación por Impulsos Codificados”, Álvaro Rendón Gallón.

aproximación logarítmica que manejen el incremento del tamaño del intervalo de cuantificación.

Para PCM/MIC en telefonía, el CCITT ha recomendado dos leyes de aproximación logarítmica conocidas comúnmente como la Ley A y Ley  $\mu$ , las cuales representan aproximaciones con segmentos lineales a curvas de compresión logarítmica. Matemáticamente lo que realizan estas ecuaciones es generar la curva logarítmica del compresor.

La Ley A (Rec. G.711) definida por la ecuación:

$$F_A(x) = \text{Sig}(x) \frac{A|x|}{1 + \ln(A)} \quad , (1/A \leq x \leq 1/A) \quad (3.21)$$

$$F_A(x) = \text{Sig}(x) \frac{1 + \ln|Ax|}{1 + \ln(A)} \quad , (1/A \leq x \leq 1) \quad (3.22)$$

La Ley  $\mu$  (Rec. G.712) definida por la siguiente ecuación:

$$F_\mu(x) = \text{Sig}(x) \frac{\ln(1 + |x|)}{\ln(1 + \mu)} \quad , (0 \leq x \leq 1) \quad (3.23)$$

Donde:

$x$  = Señal de entrada

$\text{Sig}(x)$  = Signo de la señal de entrada

$|x|$  = Valor absoluto de la señal de entrada

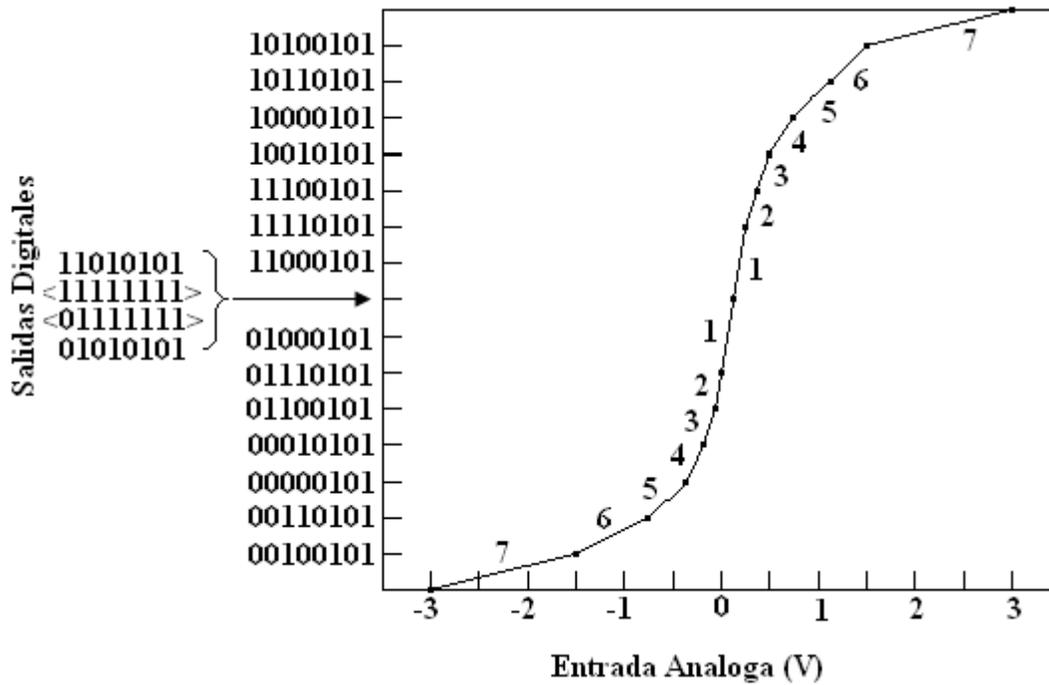
$\mu$  = 255 (definido por AT&T)

$A$  = 87,6 (definido por el CCITT)

Lo que significa que las curvas logarítmicas dependen del valor del parámetro ( $A$  en la europea y  $\mu$  en la americana). Colombia adopta la ley A (europea).

La realización práctica y física de las dos leyes logarítmicas de cuantificación/codificación (ley A y  $\mu$ ) se realiza por medio de segmentos lineales que se aproximan a la curva teórica logarítmica obtenida matemáticamente mediante la ley A y  $\mu$ .

La Ley A utiliza una aproximación con 13 segmentos como se muestra en la figura 3.15, mientras que la Ley  $\mu$  usa una de 15. En realidad, en ambos casos se tienen 16 segmentos, ocho de cada signo; pero en la Ley  $\mu$  el primer segmento positivo es colineal con el primer segmento negativo, por lo cual se lo considera como uno solo, obteniéndose así 15 en total; para la Ley A los dos primeros segmentos de cada polaridad (cuatro en total) son colineales y por lo tanto también se los considera como uno solo, obteniéndose esta vez 13 segmentos.



*Figura 3.15: Característica de transferencia de la Ley A.*

Como se dijo en la Ley A se tiene 13 segmentos y dentro de cada segmento hay 16 niveles, excepto en el segmento que pasa por el origen en el que se definen 32 niveles positivos y 32 negativos, es decir que en total se tiene 64 niveles.

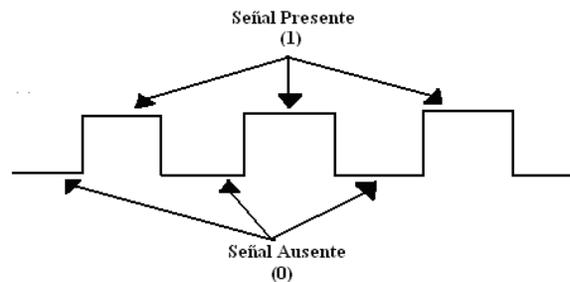
Esto significa que en la curva que se obtiene del compresor, caen 256 niveles de cuantificación tanto para la Ley A como para la Ley  $\mu$ .

### 3.4 CODIFICACIÓN

El proceso de codificación consiste en tomar una muestra que ha pasado por el proceso de cuantificación para representarla mediante un conjunto de impulsos eléctricos, cuyos números dependen de la cantidad de niveles de cuantificación que puede tomar cada muestra.

Actualmente los sistemas PCM/MIC realizan una codificación binaria, es decir, la señal puede representarse por impulsos eléctricos que toman dos niveles, uno (1) cuando la señal está presente o positiva y cero (0) cuando la señal está ausente o negativa, como se muestra en la figura 3.16.

Hasta este punto no se ha terminado el proceso de digitalización, solamente se cuenta con muestras tomadas cada  $125\mu\text{s}$  al canal de voz, las cuales pueden tomar usualmente 256 valores posibles de amplitud, estos se pasan por una técnica de codificación para completar el proceso de digitalización.



*Figura 3.16: Niveles de Impulsos eléctricos positivos y negativos*

El uso de código binario, esto es, el de base dos, es apto para el proceso de transmisión debido a que son señales fáciles de regenerar y además los circuitos lógicos utilizados para el proceso de cuantificación y codificación generalmente trabajan bajo dos estados posibles (0 y 1).

En telefonía existen 256 intervalos de cuantificación, ahora bien, como  $256=2^8$ , se necesitan ocho dígitos binarios para identificar un intervalo de cuantificación, como se muestra en la figura 3.17.

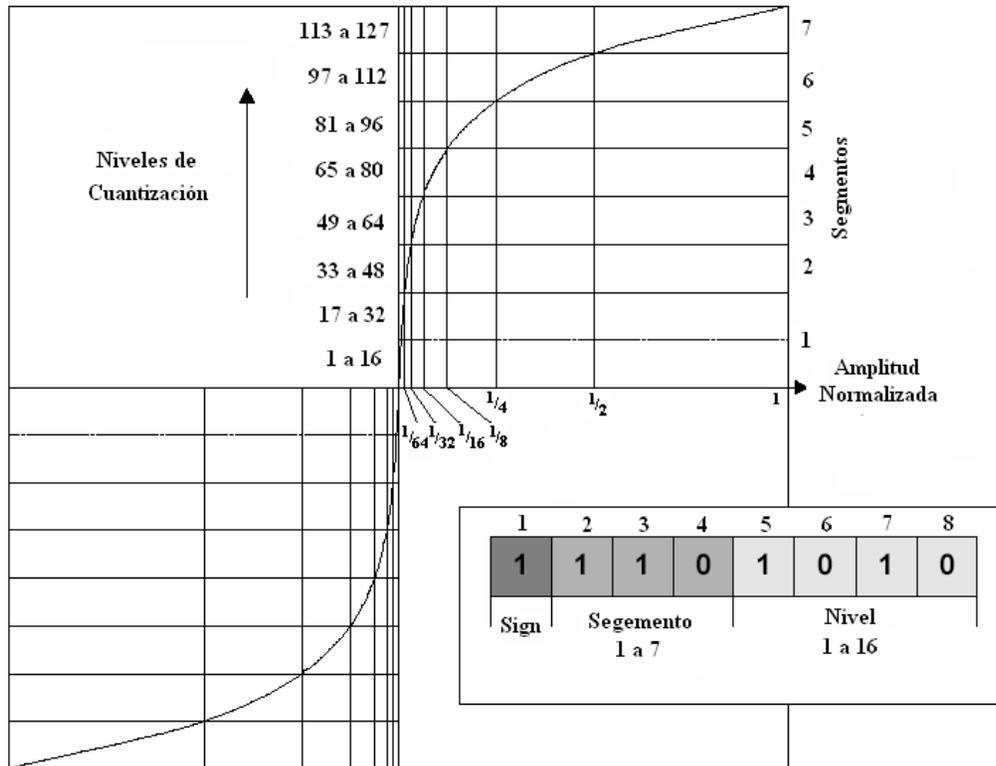
El bit 1 : Signo de la muestra

Bits 2 a 4 : Identifican el segmento dentro del cual fue ubicada la muestra.

Bits 5 a 8 : Identifican el Nivel que fue asignado a la muestra dentro del segmento.

El bit 1 es transmitido en primer lugar. En la Ley A el bit de signo es “uno” cuando la muestra es positiva y “cero” cuando es negativa, teniendo en cuenta la alta probabilidad de presencia de señales de pequeña intensidad, las cuales pertenecen al segmento “cero”, y la cantidad de “ceros” que se generarían cuando el canal esté en reposo, es decir cuando no hay señal, esto provocaría dificultades para la transmisión.

La solución adoptada para evitar una serie de dificultades en la transmisión fue: para la Ley A, invertir los bits pares con el fin de incrementar la densidad de pulsos en la línea de transmisión, y en la Ley  $\mu$  el bit de signo es “cero” para las muestras positivas y “uno” para las muestras negativas y se invierten todos los bits para la transmisión.



**Figura 3.17: Compasor Ley A.**

La tabla 3.1 muestra la Codificación / Decodificación de la ley A.

Rango de amplitud de entrada	Tamaño del paso	Código del segmento S	Código del nivel N	Valor del código	Amplitud del decodificador
0 - 2			0000	0	1
2 - 4		000	0001	1	3
...			...	...	...
30 - 32	2		1111	15	31
32 - 34			0000	16	33
...		001	...	...	...
62 - 64			1111	31	63
64 - 68	4	010	0000	32	66
...			...	...	...
124 - 128			1111	47	126
128 - 136	8	011	0000	48	132
...			...	...	...
248 - 256			1111	63	252
256 - 272	16	100	0000	64	264
...			...	...	...
496 - 512			1111	79	504
512 - 544	32	101	0000	80	528
...			...	...	...
992 - 1024			1111	95	1008
1024 - 1088	64	110	0000	96	1056
...			...	...	...
1984 - 2048			1111	111	2016
2048 - 2176	128	111	0000	112	2112
...			...	...	...
3968 - 4096			1111	127	4032

**Tabla 3.1: Tabla de Codificación/Decodificación de la Ley A<sup>12</sup>**

<sup>12</sup> “Conmutación Digital: Modulación por Impulsos Codificados”, Álvaro Rendón Gallón.

### Ejemplo 3.1

Una señal senoidal con una amplitud máxima de 1 voltio se va a digitalizar.

Queremos que la relación señal a ruido sea de 30dB. ¿Cuántas muestras necesitaré?; ¿Cuántos bits?.

A partir de la relación SNR y conociendo la potencia de la señal se puede calcular la potencia del ruido:

$$30 = 10 \log(Pot_{señal} / Pot_{ruido})$$

$$Pot_{ruido} = Pot_{señal} \times 10^{-3} \Rightarrow Pot_{señal} = Amplitud^2 / 2 = 0.5W$$

Conocida la potencia del ruido de cuantización se puede conocer el tamaño del Escalón **a**. Como el rango de variación de la señal es 2V (Pico a pico) por tanto el número de escalones será:

$$Pot_{ruido} = 5 \times 10^{-4} W = a^2 / 12 \Rightarrow a^2 = 6 \times 10^{-3} \Rightarrow a = 0.078$$

$$\frac{2V}{0.078V} = 25.6 = 261 \text{ intervalos} \Rightarrow N = \log_2 26 = 4.1 \rightarrow 5 \text{ bits / muestra}$$

La calidad mínima para la voz digitalizada  $A \rightarrow a_{max} = 0.123 * A$  es una SNR de más de 26dB.

Eso implica que si la amplitud máxima de la señal es decir 16 intervalos de cuantización o 4 bits.

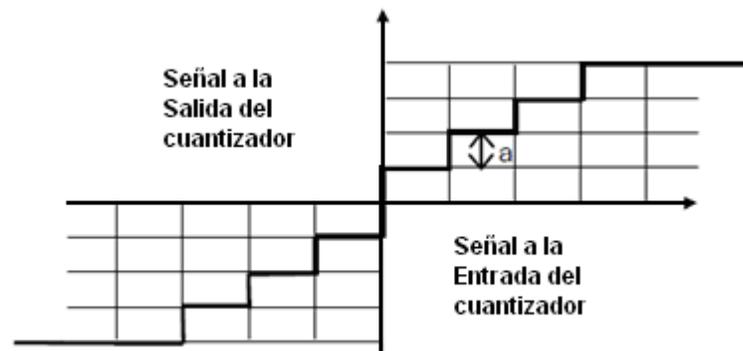


Figura 3.18: Grafica intervalos de cuantización del Ejemplo 3.2

## 3.5 MULTIPLEXACIÓN

La digitalización de la señal de voz tuvo aplicación práctica en sus orígenes por sus ventajas en la transmisión. Ya se han examinado los aspectos más importantes de las técnicas PCM ó MIC, de manera que ahora se estudiarán los métodos de transmisión de estas señales.

Dado que uno de los fundamentos de esta transmisión es el principio del Múltiplex por División de Tiempo, se explicará inicialmente este concepto.

### 3.5.1 Múltiplex por División de Tiempo (TDM)

En la múltiplex por división de tiempo, cada canal puede usar un intervalo de tiempo para transmitir su información. En la figura 3.19 se muestra cómo tres señales MIC se múltiplexan por división de tiempo en la misma línea de transmisión.

La multiplexación es un proceso que permite enviar por un mismo medio de transmisión muchas informaciones de diferentes orígenes, por División en el Tiempo significa que el medio de transmisión es compartido o multiplexado en el tiempo.

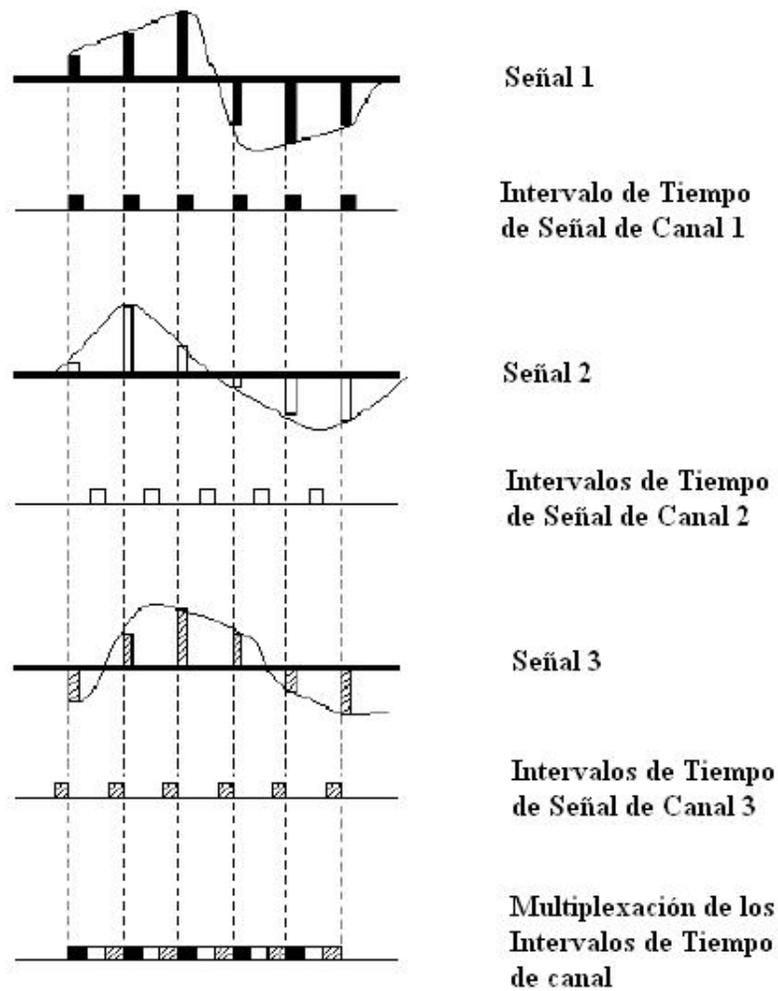
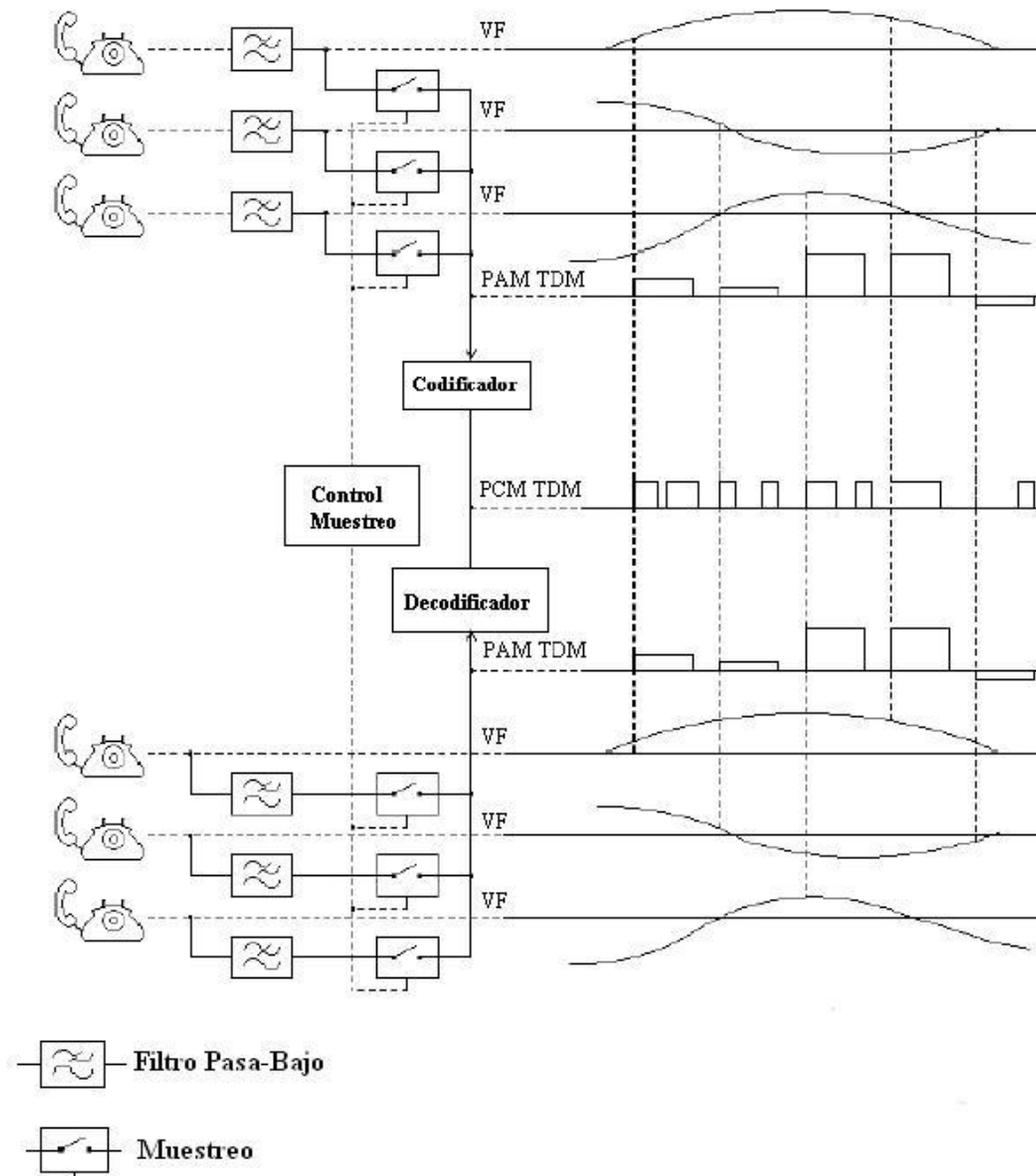


Figura 3.19: Multiplexación de tres señales MIC.

Los octetos que representan las muestras tomadas en los tres canales, son entrelazados conformando una secuencia de pulsos. Tal conjunto de pulsos se denomina trama, y el intervalo de tiempo que ocupa cada uno de los octetos se denomina intervalo de tiempo. En este ejemplo, cada trama tiene tres intervalos de tiempo.

Cuando recién se introdujo de la tecnología PCM se conformaba un tren PAM con las muestras capturadas de cada abonado y luego se usaba solo codificador PCM para hacer la conversión antes de inyectar la señal en la línea (figura 3.20). La tecnología ha permitido disminuir el costo de los codificadores de forma tal, que en la actualidad cada abonado dispone de un codificador que entrega la señal MIC en un bus digital, en un intervalo de tiempo prefijado.



**Figura 3.20: Sistema de transmisión PCM-TDM<sup>13</sup>**

<sup>13</sup> “Conmutación Digital: Modulación por Impulsos Codificados”, Álvaro Rendón Gallón.

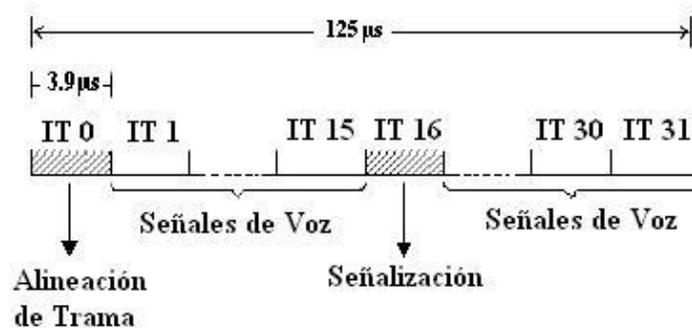
La duración de la trama está determinada por la frecuencia de muestreo. Al fijarse en 8 kHz, resulta que cada trama tiene una duración de 125µs. El número de intervalos de tiempo, y por ende el número de canales que se acomodan en una trama depende entonces de la velocidad de los bits: a mayor velocidad de la señal, mayor será el número de canales que son transportados por la trama. Este factor está determinado tanto por el ancho de banda del medio de transmisión como por la tecnología de los equipos utilizados.

El CCITT, en las Recomendaciones de la serie G.700 ha especificado las jerarquías de los sistemas MIC, conformadas por múltiplex de distintas velocidades. En la base de cada jerarquía se encuentra los múltiplex de primer orden o múltiplex primarios, a partir de los cuales se construyen los sistemas múltiplex de orden superior.

Los sistemas múltiplex primarios son de dos tipos: el MIC30, de origen europeo, que multiplexa 30 canales telefónicos (E1), y el MIC24, de origen norteamericano adoptado en Japón, que multiplexa 24 canales telefónicos (T1). Las especificaciones de estos sistemas están contenidas en las recomendaciones del CCITT G.732 y G. 733 respectivamente. A continuación se estudiarán las características más importantes de ambos sistemas.

### 3.5.2 Sistema Múltiplex MIC30

En el sistema MIC30 (figura 3.21) cada trama está constituida por 32 intervalos de tiempo (IT), de los cuales 30 están destinados a canales de voz.



*Figura 3.21: Estructura de la trama MIC30*

Cada IT tiene 8 bits, numerados de 1 a 8, y los 32 ITs están numerados de 0 a 31. El número de bits por trama es 256, numerados de 1 a 256, y la frecuencia de repetición de la trama es 8000 Hz. A partir de esta información se obtienen los siguientes datos:

$$\text{Duración de la trama} = 1/8000 \text{ Hz} = 125 \text{ µseg}$$

$$\text{Duración de un IT} = 125 \text{ µseg}/32 = 3.906 \text{ µseg}$$

$$\text{Duración de un Bit} = 3.906 \text{ µseg}/8 = 0.488 \text{ µseg}$$

$$\text{Velocidad de bit} = 1/0.488 \text{ µseg} = \mathbf{2048 \text{ Kbps}}$$

Otra forma de obtener la velocidad del sistema es:

$$8000 \text{ tramas/seg} \times 32 \text{ IT/trama} \times 8 \text{ bits/IT} = 2048 \text{ Kbps, señal E1}$$

Velocidad de canal = 8000 muestra/seg  $\times$  8 bits/muestra

Velocidad de canal = **64 Kbps**

Esto significa que la información de voz de un canal telefónico es transmitida de manera digital a una velocidad de 64 Kbits/seg.

La utilización de los ITs es la siguiente:

IT0 : Alineación de trama (tramas pares) y supervisión (tramas impares).

IT1-IT15 : Canales telefónicos o de datos.

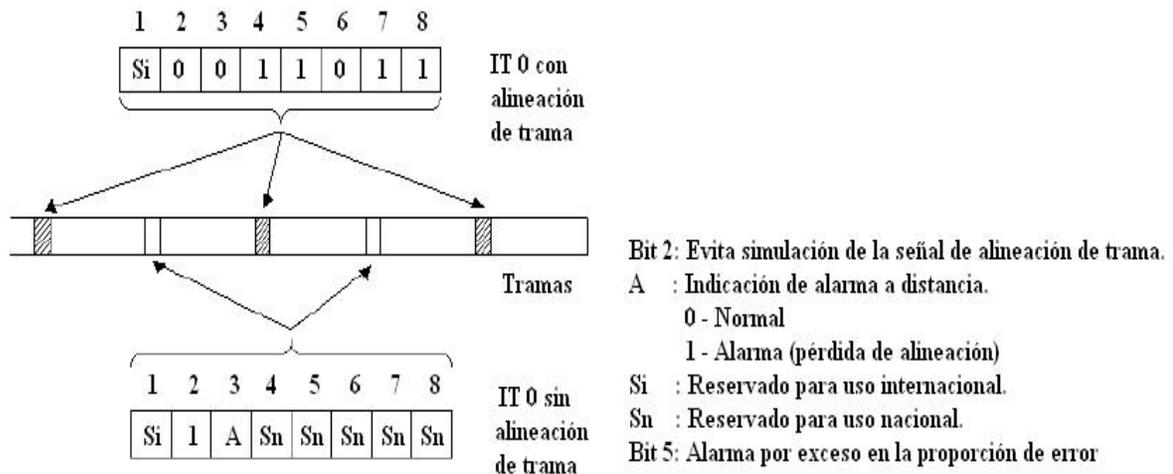
IT16 : Señalización.

IT17-IT31: Canales telefónicos o de datos.

Los 30 canales telefónicos transportan información de voz codificada según la Ley A especificada por el CCITT en la Recomendación G.711.

El IT0 contiene, en las tramas pares, la señal de alineación o sincronización de trama. Esta señal es requerida en el receptor con el fin de identificar individualmente los canales que transporta la trama.

El código de alineación de trama es X0011011 y es transportado cada dos tramas. La figura 3.22 muestra la asignación de los 8 bits del IT0.



**Figura 3.22: Asignación de los bits del IT0 en MIC30 (E1)**

El IT16 de la trama, por su parte, es utilizado para información de señalización. Los enlaces entre centrales transportan dos tipos de información: voz y señalización. En términos generales, la información de señalización puede utilizar el mismo canal telefónico o un canal común a varios canales de voz. Adicionalmente, cuando se tiene señalización en el mismo canal, ésta puede estar dentro de la banda de voz o fuera de banda. Cuando se digitaliza la información de señalización, si ésta es del tipo fuera de banda o canal común, es necesario adicionar bits a la trama para transportarla. El sistema MIC30 utiliza un TI adicional, que es el IT16.

### 3.5.3 Sistema Múltiplex MIC24

En el sistema MIC24 (figura 3.23), cada trama está por 24 ITs, todos ellos destinados a canales de voz, más un bit adicional para alineación de trama, control de calidad y suministro de enlaces de datos.



*Figura 3.23: Estructura de la trama MIC24 (T1)*

Cada IT tiene 8 bits, numerados de 1 a 8, y los 24 ITs están numerados de 1 a 24. El número de bits por trama es 193, numerados del 1 a 193, y la frecuencia de repetición de trama es 8000Hz. A partir de esta información se obtiene los siguientes datos:

$$\text{Duración de la trama} = 1/8000 \text{ Hz} = 125 \text{ } \mu\text{seg}$$

$$\text{Duración de un Bit} = 125 \text{ } \mu\text{seg}/193 = 0.648 \text{ } \mu\text{seg}$$

$$\text{Duración de un IT} = 0.648 \text{ } \mu\text{seg} \times 8 = 5.181 \text{ } \mu\text{seg}$$

$$\text{Velocidad de bit} = 1/0.648 \text{ } \mu\text{seg} = \underline{\underline{1544\text{Kbps}}}$$

Otra forma de obtener la velocidad del sistema:

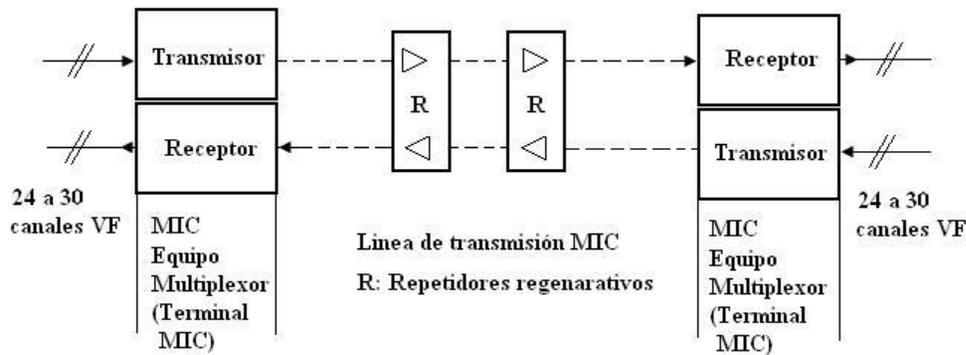
$$8000 \text{ tramas / seg} \times 193 \text{ bits/trama} = 1544\text{Kbps}$$

$$\text{Velocidad del canal} = 8000 \text{ muestras/seg} \times 8 \text{ bits/muestra}$$

$$\text{Velocidad del canal} = \underline{\underline{64 \text{ Kbps}}}$$

Obviamente, si la frecuencia de muestreo y el número de bits utilizados para representar cada muestra son los mismos que en el sistema MIC30, la velocidad de transmisión de un canal digital de voz se mantiene en 64 Kbps. Los 24 canales telefónicos transportan información de voz codificada según la Ley  $\mu$  especificada en la Recomendación G.711.

Cada sistema MIC es unidireccional, lo que implica que en telefonía, donde los sistemas son dúplex, se requiere como mínimo dos enlaces, uno para cada sentido. En cada extremo se dispone de equipos terminales transmisores y receptores, y la línea es equipada con repetidores regenerativos espaciados uniformemente, que regeneran los bits entrantes y transmiten una corriente de nuevos bits fresco (figura 3.24). Las líneas de transmisión usadas para interconexión de múltiplex primarios son en la mayoría de los casos cables de par telefónico ya existentes. La distancia entre regeneradores para estas líneas MIC debe ser de 1.5 a 2.3 Km, dependiendo del tipo de cable.



*Figura 3.24: Sistema MIC de primer orden*

### 3.5.4 Sistema Múltiplex de Segundo Orden

Los sistemas múltiplex primarios son adecuados para distancias cortas, de 2 a 50 Km. Para distancias medias y largas, se requiere agrupar una gran cantidad de canales sobre la línea de transmisión, a fin de obtener sistemas más económicos y prácticos.

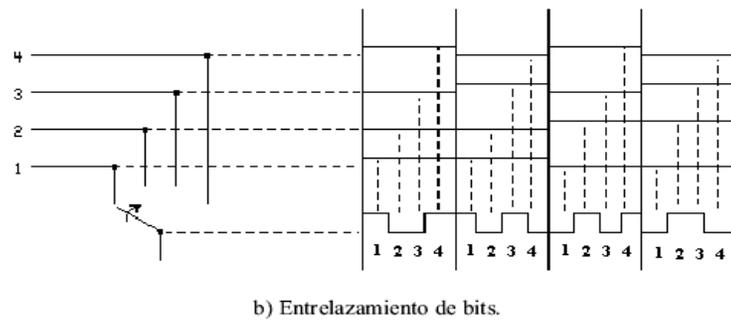
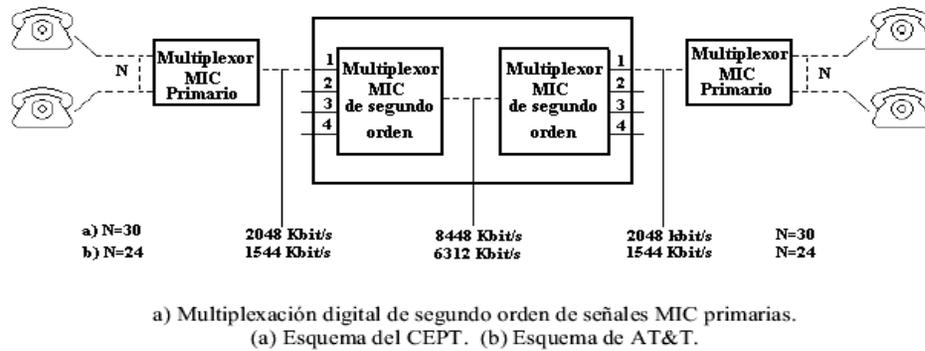
Con el fin de cubrir estas necesidades, se han desarrollado los sistemas múltiplex de orden superior, que pueden ser de dos tipos:

a) Múltiplex MIC.

La señal del múltiplex es obtenida a partir de tributarios analógicos, en un proceso simultáneo de digitalización y multiplexación. La trama es estructurada por el método de intercalación de grupos (word interleaving), en el cual el múltiplex se integra tomando en cada ciclo un grupo de bits, en este caso, correspondiente a cada tributario.

b) Múltiplex Digital

La señal del múltiplex es obtenida a partir de tributarios digitales de orden inferior, en un proceso de multiplexación. La trama es estructurada por el método de intercalación de bits (bit interleaving), en el cual el múltiplex se integra tomando en cada ciclo un bit de cada tributario (figura 3.25).



**Figura 3.25: Multiplexación Digital**

En los sistemas de segundo orden existen *multiplex MIC* de dos tipos:  
Multiplex MIC:

- Multiplex MIC de segundo orden a 8448 Kbps (E2) (Ley A)
- Multiplex MIC de segundo orden a 6312 Kbps (T2) (Ley  $\mu$ )

La Tabla 3.2 presenta la distribución de los ITs del sistema de 8448 Kbps.

Frecuencia de repetición de trama =	8000Hz
Señal de alineación de trama =	11100110100000
Número de IT	Asignación
0	Señal de alineación de trama (2)
1 a 4	Reservados para uso nacional
5 a 32	Canales telefónicos 1 a 28
33	Reservado para uso nacional
34 a 65	Canales telefónicos 29 a 60
66	Señal de alineación de trama (2)
67 a 70	Señalización
71 a 98	Canales telefónicos 61 a 88
99	Reservado para uso nacional
100 a 131	Canales telefónicos 89 a 120
(1) En caso de señalización asociada al canal. (2) El IT0 y los seis primeros bits del IT66 se asignan a la alineación de la trama. Los dos bits restantes del IT66 están destinados a otros servicios.	

**Tabla 3.2: Estructura de la trama del Multiplex MIC a 8448 Kbps<sup>14</sup>**

<sup>14</sup> “Conmutación Digital: Modulación por Impulsos Codificados”, Álvaro Rendón Gallón.

La tabla 3.3 presenta la distribución de los bits del sistema de 8448 Kbps. Nótese la utilización de bits de justificación (relleno) con el fin de compensar la diferencia de velocidades de los tributarios digitales, los cuales no están sincronizados, es decir, no tienen la misma frecuencia real.

Velocidad binaria de los afluentes (Kbps)	2048
Número de afluentes	4
<b>Estructura de la trama</b>	<b>Plan de numeración de los bits</b>
	<b>Grupo I</b>
Señal de alineación de trama (1111010000)	1 a 10
Indicación de alarma destinada al equipo multiplex digital distante	11
Bit reservado para uso nacional	12
Bits procedentes de los afluentes	12 a 212
	<b>Grupo II</b>
Bits $C_{j1}$ de control de justificación (1)	1 a 4
Bits procedentes de los afluentes	5 a 212
	<b>Grupo III</b>
Bits $C_{j2}$ de control de justificación (1)	1 a 4
Bits procedentes de los afluentes	5 a 212
	<b>Grupo IV</b>
Bits $C_{j3}$ de control de justificación (1)	1 a 4
Bits justificables, procedentes de los afluentes	5 a 8
Bits procedentes de los afluentes	9 a 212
Longitud de trama	848 bits
Bits por afluente	206 bits
Velocidad máxima de justificación por afluente	10 Kbps
Relación nominal de justificación	0.424
(1) $C_{ji}$ designa el bit número $i$ de control de justificación del afluente número $j$ .	

**Tabla 3.3: Estructura de la trama del Múltiplex Digital a 8448 Kbps<sup>15</sup>**

La salida de un multiplexor está conformada por un conjunto de canales que transportan la información de los tributarios respectivos a la misma velocidad de entrada.

El concepto básico del método de bits de justificación implica el uso de canales de salida cuyas velocidades son más altas que las velocidades de entrada. De esta manera, los canales de salida pueden transportar toda la información de la entrada más un número variable de bits “nulos” o bits de relleno.

Los bits nulos no son parte de la señal de entrada; ellos son insertados de una manera preestablecida para ajustar el tren de datos de entrada a la mayor velocidad de salida.

<sup>15</sup> “Conmutación Digital: Modulación por Impulsos Codificados”, Álvaro Rendón Gallón.

Naturalmente, debe ser posible identificar los bits de relleno con el fin de que el procedimiento de “des-relleno” pueda recuperar el tren de bits original.

El método de los bits de justificación es aplicado a menudo en los múltiplex de mayor nivel cuando los tributarios de menor nivel no están sincronizados entre sí. Al utilizar los bits de justificación, cada canal puede ajustar individualmente la diferencia entre sus velocidades de entrada y salida. Para los tributarios más rápidos, los bits de justificación contendrán normalmente información de entrada, mientras que los tributarios más lentos usarán a menudo los bits de justificación como relleno.

La figura 3.26 muestra la estructura de la trama del múltiplex digital de segundo orden a 8448 Kbps. Los bits de control de justificación de cada ( $C_i$ ) indican cuándo el bit de justificación del canal contiene información de entrada (ausencia de justificación) y cuándo contiene información de relleno (justificación positiva).

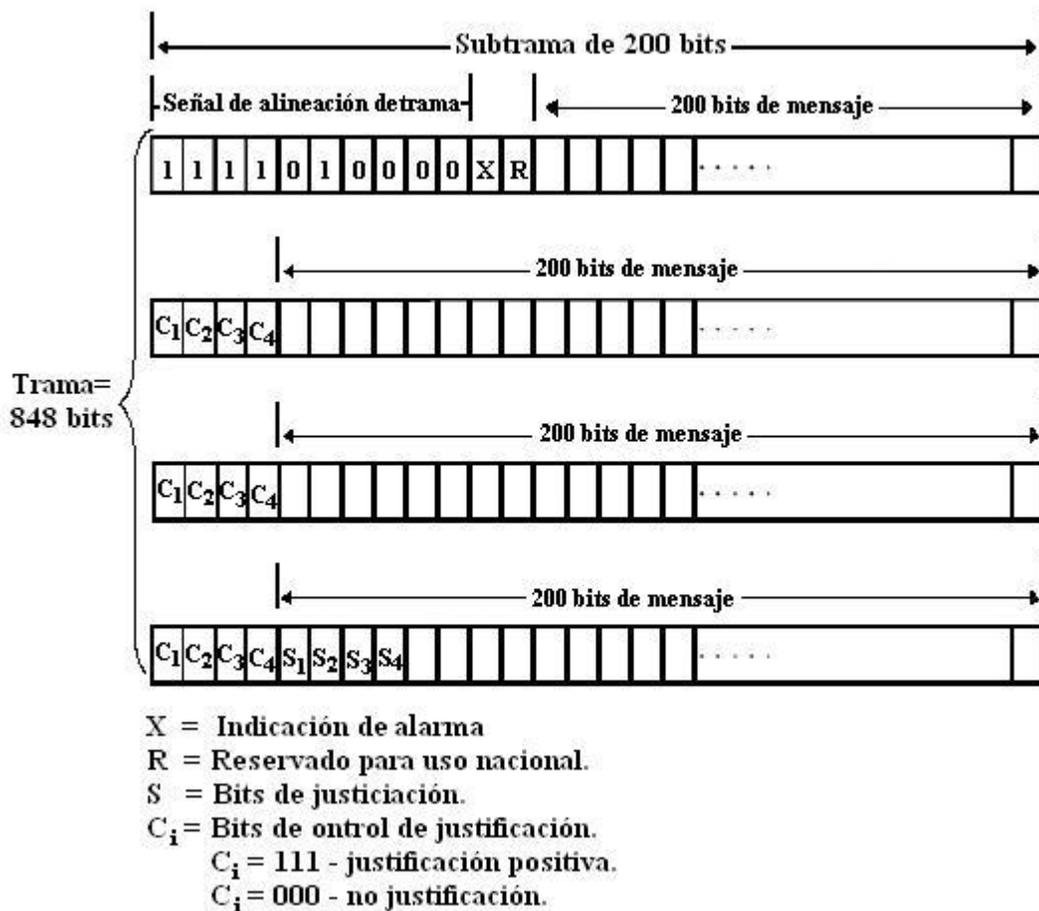


Figura 3.26: Formato de la trama del múltiplex digital a 8448 Kbps

### 3.5.5 Jerarquía Digital Plesiocronica

Además de los sistemas de primer y segundo orden, las jerarquías digitales poseen sistemas de órdenes superiores que, como se ha mencionado, buscan aprovechar al máximo los diferentes medios de transmisión, transportando un número cada vez mayor de canales telefónicos.

Se tiene dos jerarquías digitales, llamadas Plesiocronicas (PDH); una basada en el múltiplex de 2048 Kbps (MIC30), y la otra basada en el múltiplex de 1544 Kbps (MIC24). La figura 3.27 muestra un ejemplo de implementación de la primera de ellas, donde los sistemas de orden superior se obtienen mediante la multiplexación de los sistemas de orden inferior.

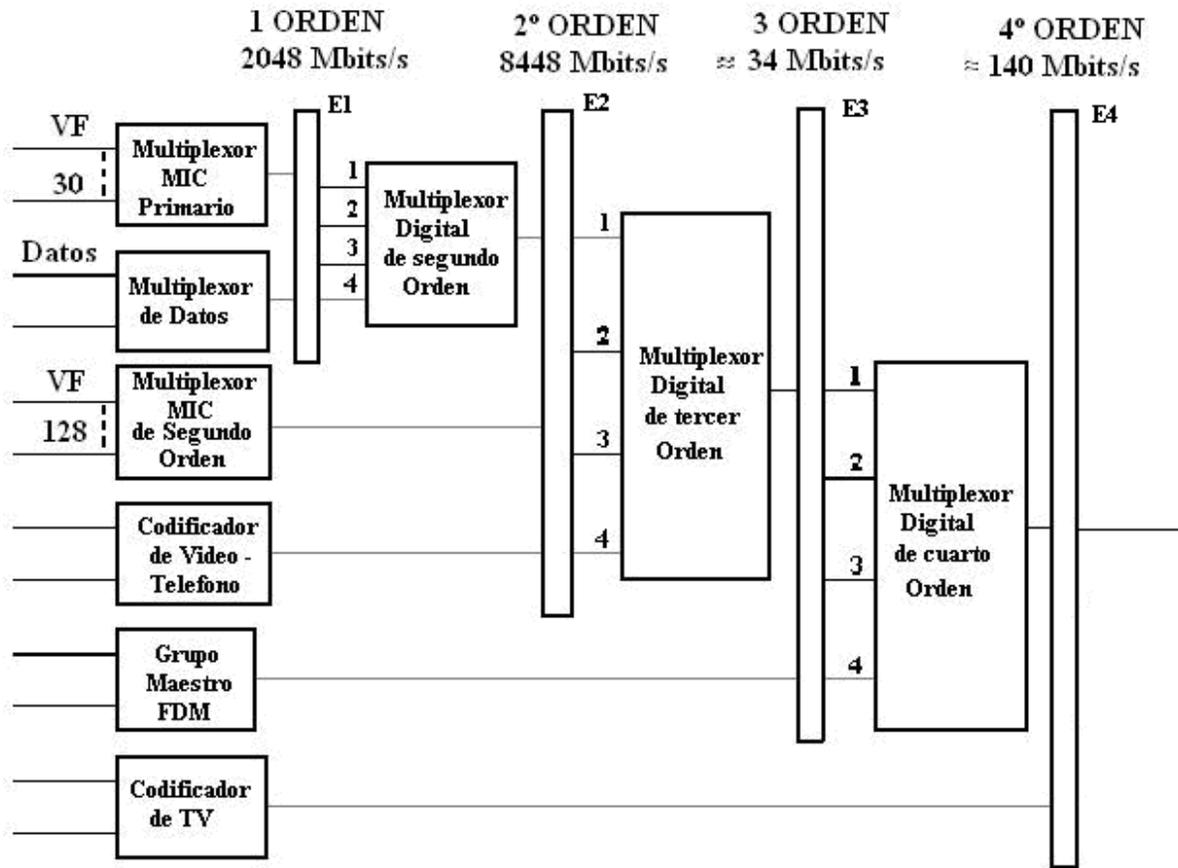


Figura 3.27: Jerarquía de transmisión digital basada en el sistema MIC30

### 3.6 CÓDIGOS DE LÍNEA

La señal binaria, conformada por unos y ceros, donde los unos son representados por impulsos eléctricos (marcas) y los ceros por la ausencia de estos (espacios), no es adecuada para la transmisión a grandes distancias. Por consiguiente, es necesario representar la información binaria en una forma más apropiada a las características del medio. Estas formas de representación reciben el nombre de códigos de línea.

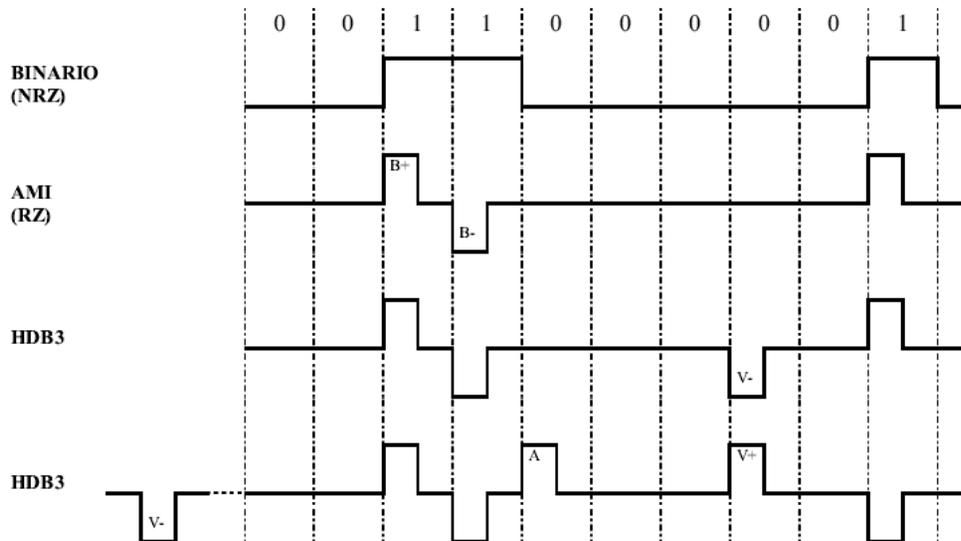
Los siguientes son algunos de los factores que se deben tener en cuenta al seleccionar el código de línea.

- El ancho de banda de la señal se debe mantener lo más angosto posible. La energía de la parte alta del espectro debe ser pequeña para evitar distorsión de atenuación causada por las grandes pérdidas del medio de transmisión a altas frecuencias.
- La energía de la parte baja del espectro debe ser pequeña para reducir la interferencia entre los circuitos de frecuencia vocal en el mismo cable.
- El código de línea no debe tener componentes D.C., porque la línea se debe acoplar por medio de transformadores a los terminales y repetidores.
- El código debe ayudar a los repetidores regenerativos para que su función sea lo más simple posible y que operen con la mejor relación S/N especialmente en la proximidad de la velocidad digital.
- El código de línea debe contener información de sincronismo estable, porque las frecuencias de sincronismo se obtienen del tren de impulsos en los repetidores regenerativos en el lado receptor del múltiplex.

Mientras algunos sistemas pueden transmitir directamente en binario natural, otros convierten las secuencias binarias originales en nuevas secuencias binarias, denominadas "Códigos de Línea".

En la elección del código de línea se ha recorrido un camino por diferentes implementaciones que han ido aportando soluciones a los problemas presentados por la transmisión.

La figura 3.28 muestra diferentes implementaciones de la información binaria.



*Figura 3.28: Códigos de línea.*

### 3.6.1 Código de No Retorno a Cero (NRZ)

El código NRZ es la forma más simple de codificación de línea. Se trata de una señal desbalanceada con respecto a 0V puesto que un 1 es representado por un voltaje positivo y un 0 por 0V.

Este código desbalanceado recibe también el nombre de código unipolar, mientras que los códigos balanceados, donde se tienen señales de niveles positivos y negativos, se denominan códigos bipolares.

El nivel de cada señal es mantenido en su intervalo de duración, razón por la cual se le llama código de no retorno a cero, como se observa en la figura 3.29.



*Figura 3.29: Código de No Retorno a Cero (NRZ)*

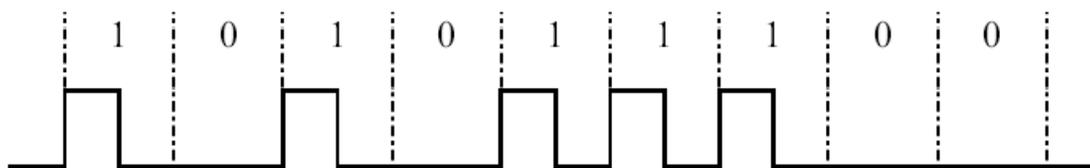
Dos de los principales inconvenientes de este código son:

- La componente DC de la señal transmitida.
- La señal NRZ no contiene transiciones cuando hay cadencias largas de unos o ceros, por lo que no constituye la sincronización de los regeneradores.

La señal que origina el sistema MIC es del tipo NRZ, que es el que utilizan los dispositivos electrónicos conocido como código binario.

### 3.6.2 Código de Retorno a Cero (RZ)

A diferencia del código NRZ, en el código RZ la duración de los pulsos que representan cada 1 lógico es sólo del 50% del intervalo de la señal (figura 3.30).



*Figura 3.30: Código Retorno a Cero (RZ)*

Este código ofrece dos ventajas principales:

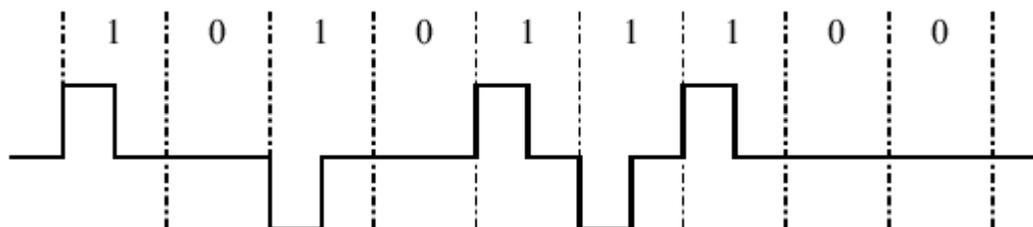
- Incrementa la componente de temporización de la señal, debida a las transiciones que aparecen cuando hay cadenas de unos, favoreciendo la extracción de la temporización.
- Reduce la interferencia intersímbolos, que consiste en el traslapamiento que se presenta entre bits consecutivos cuando la señal es distorsionada por el medio de transmisión, y que puede afectar el reconocimiento de la información en los regeneradores.

Su gran desventaja es la presencia de una componente DC en la señal.

La mayoría de los sistemas de transmisión por cable no permiten niveles DC puesto que están acoplados en AC con transformadores o capacitores para eliminar bucles de tierra. Además, algunos sistemas remueven a propósito los componentes DC de la señal para permitir la alimentación de los regeneradores a través de la línea.

### 3.6.3 Código de Inversión de Marcas Alternadas (AMI)

Consiste en un código bipolar que utiliza tres niveles para codificar la información binaria. El 0 lógico es codificado como un espacio, y el 1 lógico es codificado alternamente con marcas positivas y negativas del tipo RZ, (Figura 3.31)



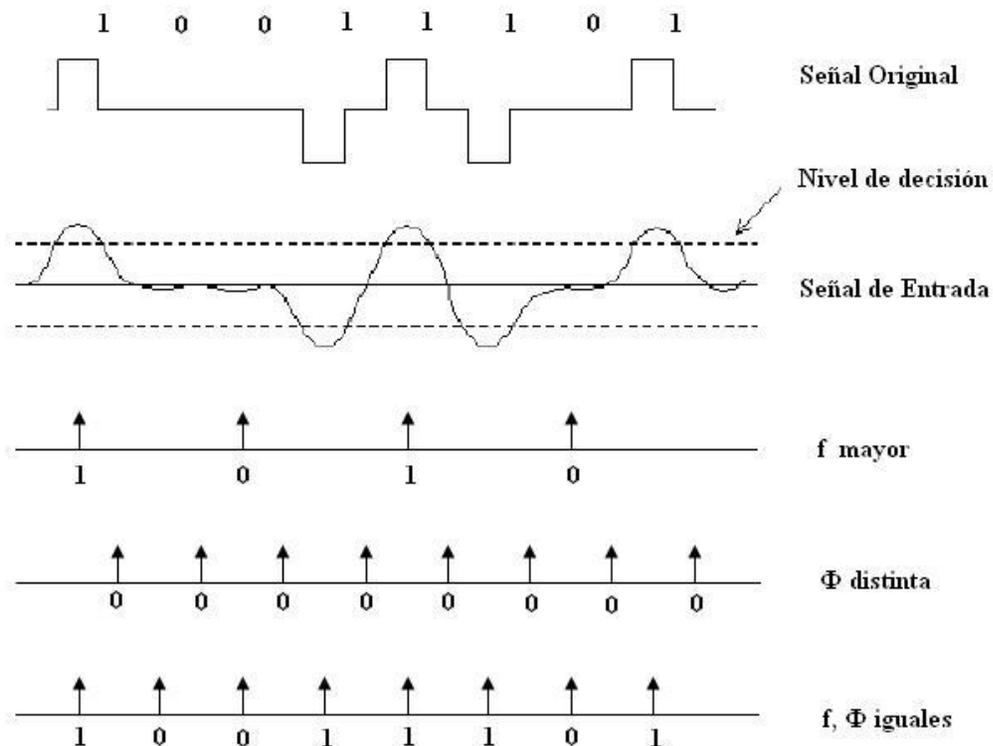
*Figura 3.31: Código de Inversión de Marcas Alternadas (AMI)*

Este código se considera pseudoternario puesto que, si bien consta de tres señales (espacio, marca positiva y marca negativa) como los códigos ternarios, ellas sólo representan dos tipos

de información por cuanto las marcas corresponden siempre a unos lógicos sin importar su polaridad.

La ventaja de esta señal es que no tiene componente de corriente continua. Adicionalmente, con la utilización de este código se tiene la posibilidad de reconocer errores, pues si durante la transmisión por cable un pico de ruido supera a un cero simulando por consiguiente la presencia de un uno, se tendría una violación del código, el cual prescribe que los unos sean alternativamente positivos y negativos. Debido a que este código bipolar utiliza polaridades alternadas para codificar los unos, las cadenas de unos tienen una fuerte componente de temporización. Sin embargo, las cadenas de ceros no contienen esta componente y por lo tanto debe evitarse su presencia en la línea.

La señal que se transmite a través de la línea sufre, por supuesto, distorsiones en amplitud y fase, y además se le agrega ruido. Por consiguiente es necesario regenerarla en puntos intermedios de la línea y en el receptor al final de la misma. La regeneración se efectúa examinando primero el tren de pulsos distorsionados para establecer la presencia de unos y ceros, luego generando pulsos “frescos” de acuerdo al resultado del examen, y transmitiéndolos de nuevo a la línea cuando se trata de regeneradores intermedios. Para el reconocimiento sin errores de los unos y los ceros de la señal distorsionada, es condición fundamental que el regenerador cuente con un reloj con la misma frecuencia y fase de la señal de entrada (figura 3.32).



**Figura 3.32: Reconocimiento de la señal de entrada**

Para la obtención de este sincronismo se utiliza la misma señal de entrada, la cual es aplicada a un circuito PLL (phase-locked-loop). El PLL está conformado por un oscilador controlado por voltaje (VCO), un detector de fase que mide la diferencia de fase entre la señal que recibe y el reloj generado localmente, y un filtro que elimina el ruido presente a la salida del detector de

fase y utiliza la diferencia de fase obtenida para ajustar la frecuencia del VCO de tal forma que se aproxime a la fase de la señal aplicada.

El adecuado funcionamiento del PLL depende de la información de sincronismo contenida en la señal de la línea, la cual a su vez está determinada por la cantidad de unos transmitidos. Como se ha señalado anteriormente, no es deseable la transmisión de series de ceros por cuanto dejarían al PLL sin señal de referencia, dando como resultado un corrimiento en el reloj local con los consecuentes errores en la regeneración de la señal. Se ha establecido que los repetidores pueden mantener su sincronización mientras no se presenten cadenas de más de 15 ceros.

En el código AMI subsiste la posibilidad de que se presente una larga secuencia de ceros. Sin embargo, para señales provenientes del equipo múltiplex MIC, es muy pequeña la probabilidad de que se produzcan grandes secuencias de ceros.

### 3.6.4 Código Bipolar de Alta Densidad (HDBn)

La practica ha demostrado que la desventaja más crítica del código AMI es la carencia de información de temporización cuando se transmiten patrones de señal que contienen una baja densidad de marcas, y como resultado, se han realizado varios intentos para modificar el AMI con el fin de mejorar este aspecto de su rendimiento.

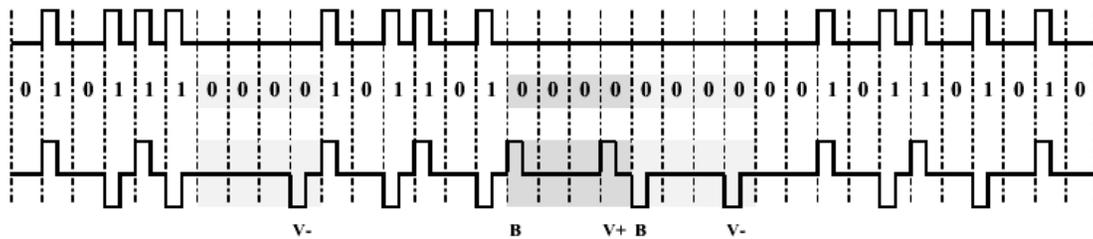
Las soluciones más ampliamente aceptadas son los códigos bipolares de alta densidad compatibles (Compatible High-Density Bipolar Codes: CHDB) propuestos por Croisier. La idea básica es que cuando se presenta una cadena de más de  $n$  ceros, el cero de la posición  $n+1$  se reemplaza por una marca, con el fin de incrementar el contenido de la temporización. Para identificar esta marca como una sustitución, ella es insertada con la misma polaridad que la marca precedente, violando así la regla de inversión de marcas alternadas. Sin embargo, esto en sí mismo no es suficiente, ya que sería posible la ocurrencia de una serie de inserciones que tuvieran la misma polaridad, lo cual introduciría de nuevo una componente DC en la señal.

Para resolver esto, Crosier propuso una modificación adicional, que obliga a las violaciones a alternar en polaridad. De esta manera, el codificador mantiene un chequeo constante en la generación del tren de bits, y si hay lugar para dos violaciones de la misma polaridad, realiza una doble sustitución. El primer cero en la cadena de  $n+1$  ceros es reemplazado por una marca que obedece la regla AMI, y el cero de la posición  $n+1$  es reemplazado luego por una marca de la misma polaridad que la última marca transmitida. El decodificador tiene entonces que chequear dos parámetros; primero la violación AMI, y en segundo lugar el número de ceros que preceden esta violación, para determinar si la última marca transmitida es también una sustitución.

Nótese que como resultado de esto se ha perdido el atributo de la decodificación instantánea, pero los retardos involucrados son pequeños, y en todos los demás aspectos las características del código han sido mejoradas. La figura 3.33 muestra un ejemplo de la codificación CHDB.

Podría pensarse que la capacidad para detectar errores del código ha sido reducida sustancialmente debido a esta modificación, porque una violación bipolar ya no suministra una única indicación de la ocurrencia de un error. Un rápido análisis muestra que este no es el caso. Cualquier error simple insertará una violación espúrea, o borrará una de las violaciones deliberadas. Esto se hará evidente cuando, en la siguiente violación, no aparece la alternación

de las violaciones. Un chequeo de esta característica proveerá por lo tanto una capacidad para detección de errores simples.



**Figura 3.33: Código CHDB3**

Puede observarse que existe una familia completa de estos códigos, de los cuales su elemento general es denotado como código CHDB $n$  o HDB $n$ , donde  $n$  es la longitud máxima permitida de la cadena de espacios. Para los sistemas MIC, el CCITT ha recomendado el código de línea HDB3 para interfaces a 2048 Kbps, 8448 Kbps y 34368 Kbps, el cual define de la siguiente manera:

Para convertir una señal binaria en una señal HDB3 se aplican las siguientes reglas de codificación:

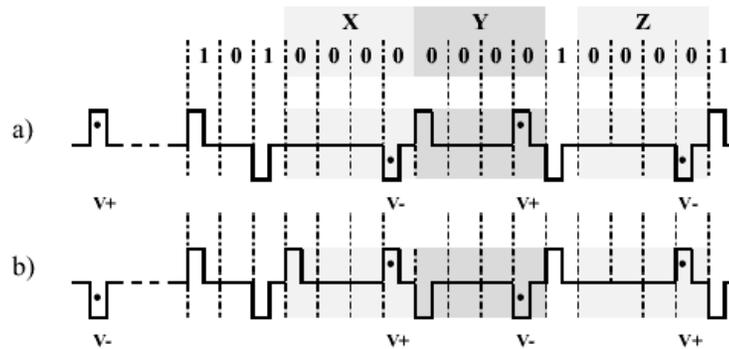
1. La señal HDB3 es pseudoternaria: sus tres estados se designan por B+, B- y 0.
2. Los 0 de la señal binaria se codifican como 0 en la señal HDB3, pero en el caso de secuencias de cuatro 0 se aplican reglas particulares (véase el punto 4).
3. Los 1 de la señal binaria se codifican alternadamente como B+ y B- en la señal HDB3 (bipolaridad). Cuando se codifican secuencias de cuatro 0, se introducen violaciones de la regla de la bipolaridad (véase el punto 4).
4. Las secuencias de cuatro 0 de la señal binaria se codifican de acuerdo a lo siguiente:
  - a) El primer 0 de la secuencia se codifica como 0 si el 1 precedente de la señal HDB3 tiene una polaridad opuesta a la de la violación precedente y no constituye una violación; se codifica como un 1 que no constituye una violación (es decir, B+ o B-) si el 1 precedente de la señal HDB3 tiene la misma polaridad que la violación precedente o constituyen una violación.

Esta regla asegura que las violaciones consecutivas sean de polaridad alternada, lo cual impide la introducción de una componente continua.

- b) El segundo y tercer 0 de la secuencia se codifican siempre como 0.
- c) El último 0 de la secuencia de cuatro se codifica siempre como un 1 de polaridad tal que viole la regla de bipolaridad. Estas violaciones se designan V+ y V- según su polaridad

La figura 3.34 presenta un ejemplo en el que pueden observarse las diferentes situaciones planteadas por la definición del CCITT, y en el que se obtienen además las siguientes conclusiones:

1. La secuencia X es 000V ó B00V, dependiendo de la violación anterior.
2. La secuencia Y siempre es B00V.
3. La secuencia Z siempre es 000V.
4. El 1 siguiente a la secuencia Y se invierte en el caso b.



**Figura 3.34: Código HDB3**

El código HDBn corresponde a un algoritmo de codificación de la señal binaria denominado BNZS (Binary N Zero Substitution) en el cual todas las cadenas de N ceros son reemplazadas con un código especial de longitud N que contiene algunos pulsos que generan a propósito violaciones bipolares. El código propuesto por el CCITT (HDB3) consiste entonces en un algoritmo de sustitución de cuatro ceros (B4ZS), el cual se describe de la siguiente manera:

En el formato B4ZS, cada cadena de cuatro ceros en los datos fuente es codificado ya sea con 00V ó con B00V. Un código de línea 00V consiste en tres intervalos de bit sin pulsos (000) seguidos por un pulso que representa una violación bipolar (V). Un código de línea B00V consiste en un pulso (00), y finalizando con un pulso con violación (V). Con cualquier sustitución, la violación bipolar ocurre en la última posición de bit de los cuatro ceros reemplazados por el código especial. Por lo tanto, la posición de la sustitución se identifica fácilmente.

La decisión de sustituir con 000V ó B00V es hecha de tal forma que el número de pulsos B (no violaciones) entre violaciones (V) es impar. Por lo tanto, si se ha transmitido un número impar de unos desde la última sustitución, se escoge 00V para reemplazar los cuatro ceros. Si el número de unos en el intermedio es par, se escoge B00V. De esta manera, todas las violaciones a propósito contienen un número impar de pulsos bipolares en el intermedio. También, las violaciones bipolares se alternan en polaridad de manera que se previene la fluctuación DC. Un número par de pulsos bipolares entre violaciones ocurre sólo como resultado de un error en el canal. Además, cada violación a propósito es inmediatamente precedida por dos ceros. Por lo tanto se mantiene una considerable redundancia sistemática en el código de línea para facilitar el monitoreo del desempeño. La tabla 3.4 resume el algoritmo de sustitución.

Polaridad del pulso Precedente	Número de pulsos bipolares (unos) Desde la última sustitución	
	Par	Impar
-	000-	+00+
+	000+	-00-

**Tabla 3.4: Reglas de Sustitución de HDB3**

### 3.6.5 Código Manchester

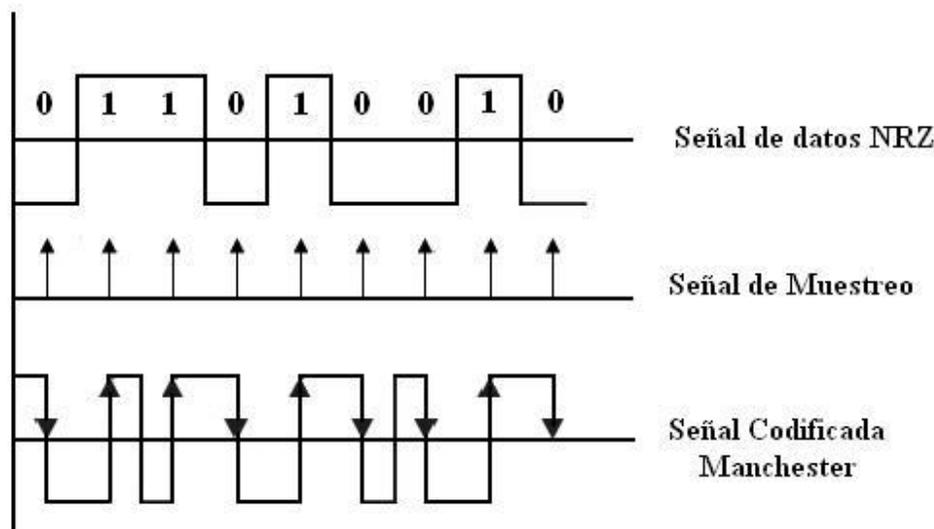
En el código Manchester siempre hay una transición en la mitad del intervalo de duración de los bits. Cada transición positiva representa un 1 y cada transición negativa representa un 0. Como se muestra en la figura 3.35.

Cuando se tienen bits iguales y consecutivos se produce una transición en el inicio del segundo bit la cual no es tenida en cuenta en el receptor al momento de decodificar, solo las transiciones separadas uniformemente en el tiempo son las que son consideradas por el receptor.

En esta codificación no se tienen en cuenta los niveles de tensión sino que solo se consideran las transiciones positivas y negativas.

Esta técnica posibilita una transición por bit, lo cual permite autosincronismo.

Se puede eliminar la componente continua si se emplean valores positivos y negativos para representar los niveles de la señal.



*Figura 3.35: Código Manchester*

Una consecuencia de las transiciones para cada bit es que el requerimiento del ancho de banda para la codificación Manchester es el doble comparado en las comunicaciones asíncronas, y el espectro de la señal es considerablemente más ancho. Sin embargo la codificación Manchester es una forma de codificación altamente fiable, pero el ancho de banda es visto como una gran desventaja. La mayoría de los sistemas modernos de comunicación están hechos con protocolos con líneas de codificación que persiguen las mismas metas, pero optimizan mejor el ancho de banda, haciéndolo menor. Una consideración a tener en cuenta en la codificación Manchester es la sincronización entre el transmisor y el receptor. A primera vista podría parecer que un periodo de error de medio bit conduciría a una salida invertida en el extremo receptor, pero una consideración más cuidadosa revela que para datos típicos esto llevaría a

violaciones de código. El hardware usado puede detectar esas violaciones de código, y usar esta información para sincronizar adecuadamente en la interpretación correcta de los datos.

### 3.6.6 Manchester Diferencial

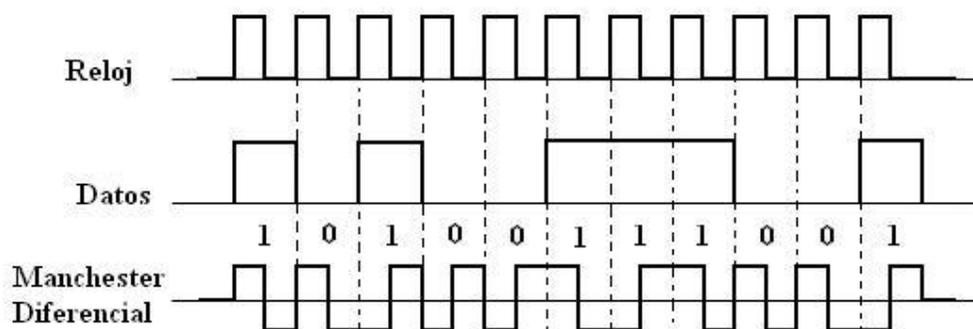
La codificación Manchester Diferencial es un método de codificación de datos en los que los datos y la señal reloj están combinados para formar un único flujo de datos autosincronizable. Es una codificación diferencial que usa la presencia o ausencia de transiciones para indicar un valor lógico. Esto aporta algunas ventajas sobre la codificación Manchester.

- Detectar transiciones es a menudo menos propenso a errores que comparar con tierra en un entorno ruidoso.
- La presencia de la transiciones es importante pero no la polaridad. La codificaciones diferenciales funcionarían exactamente igual si la señal es invertida (cables intercambiados).

Un bit “1” se indica haciendo en la primera mitad de la señal igual a la última mitad del bit anterior, es decir, sin transición al principio del bit. (Figura 3.36)

Un bit “0” se indica haciendo la primera mitad de la señal contraria a la última mitad del último bit, es decir, con una transición al principio del bit. (Figura 3.36)

En la mitad del bit hay siempre una transición, ya sea de high hacia low o viceversa. Una configuración inversa es posible, y no habría ninguna desventaja en su uso.



*Figura 3.36: Manchester Diferencial*

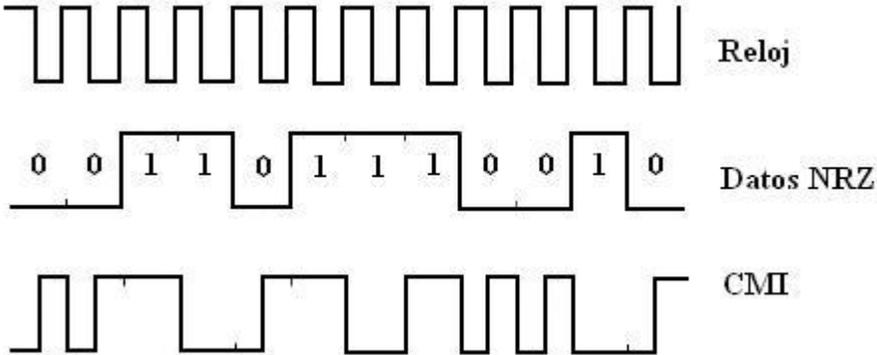
### 3.6.7 Código CMI

Se lo utiliza para la interfaz de 140 Mb/s. Las reglas de codificación son:

- Los bits 1 se reemplazan por 11-00 en forma alternada.
- Los bits 0 se reemplazan por 01 (un ciclo de reloj).

Se trata de un código bipolar que mantiene la equiprobabilidad de polaridad; es decir, no tiene componente de corriente continua. Nuevamente se produce una alta densidad de cambios de estado para asegurar la extracción del reloj.

La figura 3.37 muestra la representación del código CMI.



*Figura 3.37: Código CMI*

## ACTIVIDADES

1. Desarrolle analíticamente y gráficamente el teorema del muestreo ideal y defina la técnica PCM.
2. Implemente y explique un diagrama en bloques para obtener PCM de un canal.
3. Realice un estudio de la importancia de la cuantificación no uniforme en los sistemas PCM.
4. Cuales son las pautas de la cuantificación no uniforme utilizadas en las normas de telefonía en nuestro país (Ley A).
5. Encuentre la tasa (rata) de Nyquist y el intervalo de Nyquist para cada una de las siguientes señales:

a)  $m(t) = 5 \cos 1000\pi t \cos 4000\pi t$

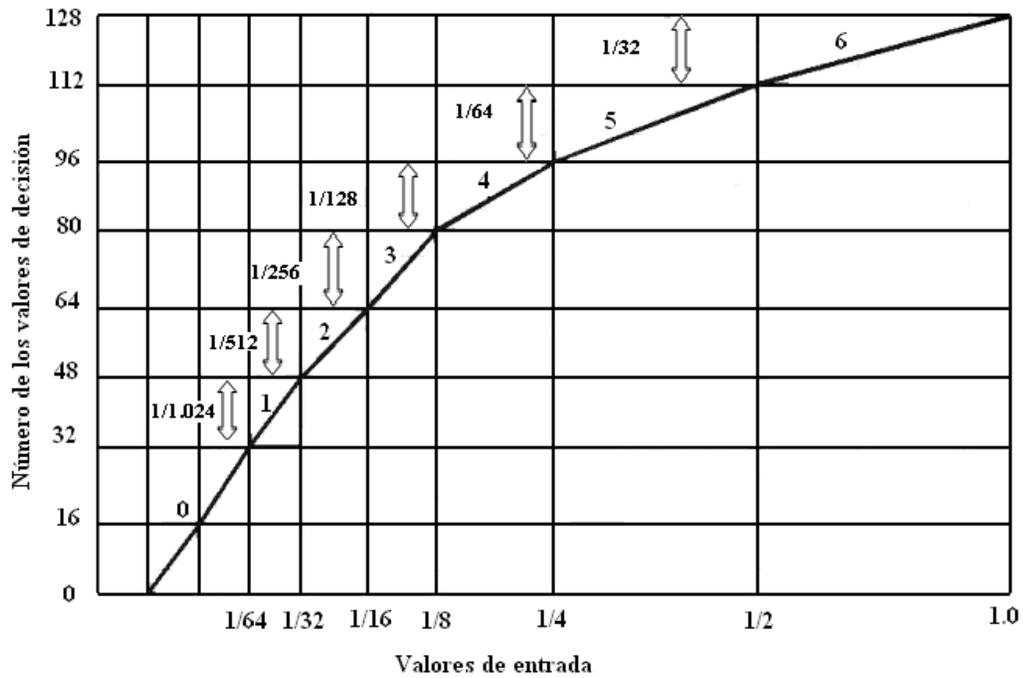
b)  $m(t) = \frac{\sin 200\pi t}{\pi t}$

c)  $m(t) = \left( \frac{\sin 200\pi t}{\pi t} \right)^2$

6. Una señal de banda limitada a 3.6kHz, y otras tres señales  $m_2(t)$ ,  $m_3(t)$  y  $m_4(t)$  son de banda limitada a 1,2kHz cada una. Estas señales se transmitirán por medio de multiplexación por división de tiempo TDM.
  - a) Establezca un esquema para la realización de esta multiplexación, con cada señal muestreada en su tasa de Nyquist.
  - b) ¿Cuál debe ser la velocidad del conmutador (en muestras por segundo)?
  - c) Si la salida es conmutador cuantificadas con  $L = 1024$  y el resultado es binario codificado-, ¿cuál es la tasa de bits de salida?
  - d) Determine el mínimo ancho de banda de transmisión del canal.
7. Normalizando los valores en eje X y Y de la figura.

Calcule:

- a) La pendiente de los diferentes segmentos
- b) Analice los efectos de la compasión.



*Figura: Curva de compasión Ley A*

8. Considere una secuencia binaria 0100101. Grafique la forma de onda para las siguientes formas de señalización:
- No retorno a cero NRZ
  - Retorno Cero RZ
  - Inversión de marcas alternas AMI
  - Manchester

# UNIDAD IV

## MODULACIÓN DE SEÑALES DIGITALES

### INTRODUCCIÓN

Debido a la importancia de los sistemas informáticos, se hace necesaria la introducción de mecanismos que permitan comunicar entre si los distintos sistemas informáticos. Por ello, paralelamente al desarrollo de la informática, en el campo de las telecomunicaciones ha venido generándose un mayor interés en la creación de sistemas orientados a la transmisión de información digital.

Existen dos formas de transmitir una señal digital. La primera consiste en transmitir la señal directamente a través del canal sin efectuar ningún tipo de modulación (Transmisión en Banda Base). La segunda forma, consiste en modular la señal con una técnica de modulación digital antes de ser transmitida (Transmisión en Banda Ancha). Esta ultima forma de transmisión, es lo que vamos a estudiar en este capitulo.

### OBJETIVOS

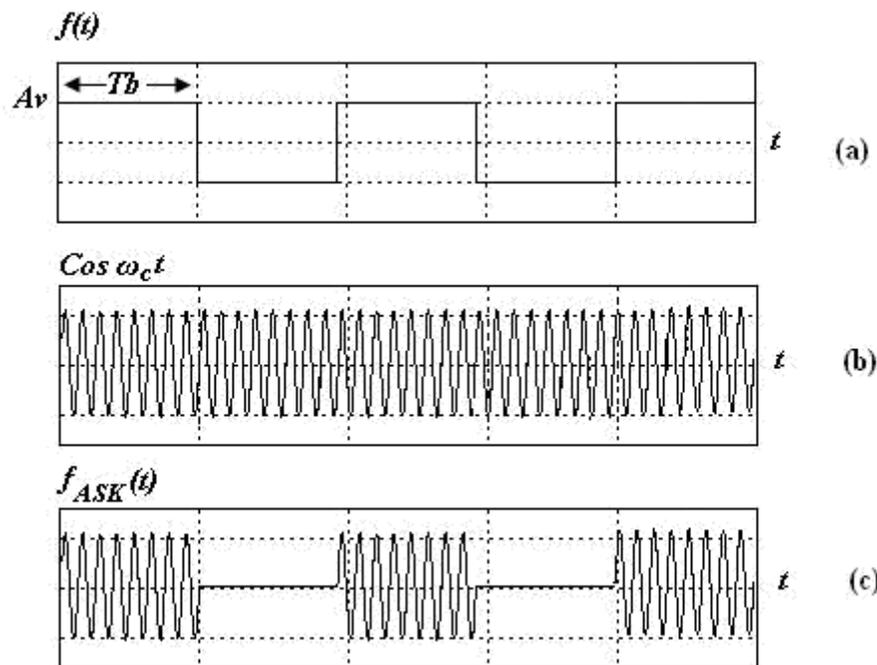
- Estudiar y comprender las distintas técnicas de modulación de señales digitales (ASK, FSK, PSK, QAM)
- Interpretar las características de modulación y demodulación de cada técnica.
- Analizar las diferencias, ventajas, desventajas y aplicabilidad de cada una de las técnicas de modulación digital.
- Aplicar dichos conceptos en la resolución de problemas de modulación digital.

## 4.1 MODULACIÓN ASK

La modulación ASK (Amplitude Shift Keying), es una técnica de modulación digital en la que la información se encuentra modulada en amplitud. Así pues, ASK no es más que un caso particular de modulación AM.

Para el estudio de este tipo de modulación, consideremos una señal binaria  $f(t)$ , que guarda la información a transmitir, con unos niveles de tensión de 0 a  $A$  voltios y anchura de bit  $T_b$ . Además emplearemos una señal portadora ( $\cos \omega_c t$ ) de alta frecuencia. Estas dos señales, banda base y portadora cosenoidal se mezclan para obtener la señal ASK como se ve en la figura 4.1.

La aplicación más popular de ASK son las transmisiones con fibra óptica ya que es muy fácil "prender" y "apagar" el haz de luz; además la fibra soporta las desventajas de los métodos de modulación de amplitud ya que posee poca atenuación. Otra aplicación son los cables transoceánicos.



**Figura 4.1: Señales de la Modulación ASK (a) Señal binaria de información; (b) Portadora Cosenoidal; (c) Señal Modulada ASK**

La función de la señal modulada ASK es entonces:

$$f_{ASK}(t) = f(t) \cos \omega_c t \quad (4.1)$$

Es decir que:

$$\text{Si } f(t) = 0V \Rightarrow f_{ASK}(t) = 0$$

$$\text{Si } f(t) = Av \Rightarrow f_{ASK}(t) = A \cos \omega_c(t)$$

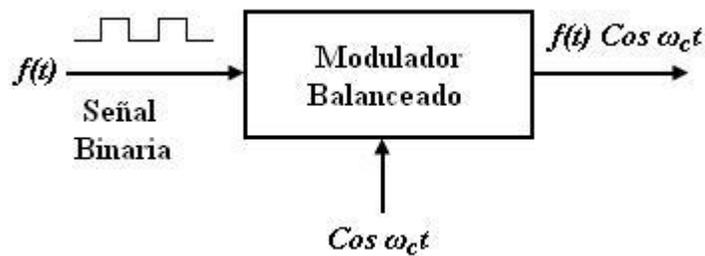
Tal como se muestra en la figura 4.1(c).

Siendo la función digital formada con unos y ceros, el producto resultante dará existencia o no de la portadora por lo cual se la denomina función de encendido y apagado (OOK) a la ecuación (4.1).

El efecto de la mezcla de  $\text{Cos}\omega_c(t)$  es simplemente el corrimiento del espectro de frecuencia original de la señal  $f(t)$  hasta la frecuencia  $\omega_c$  de la portadora, como se demostrará más adelante en el estudio espectral.

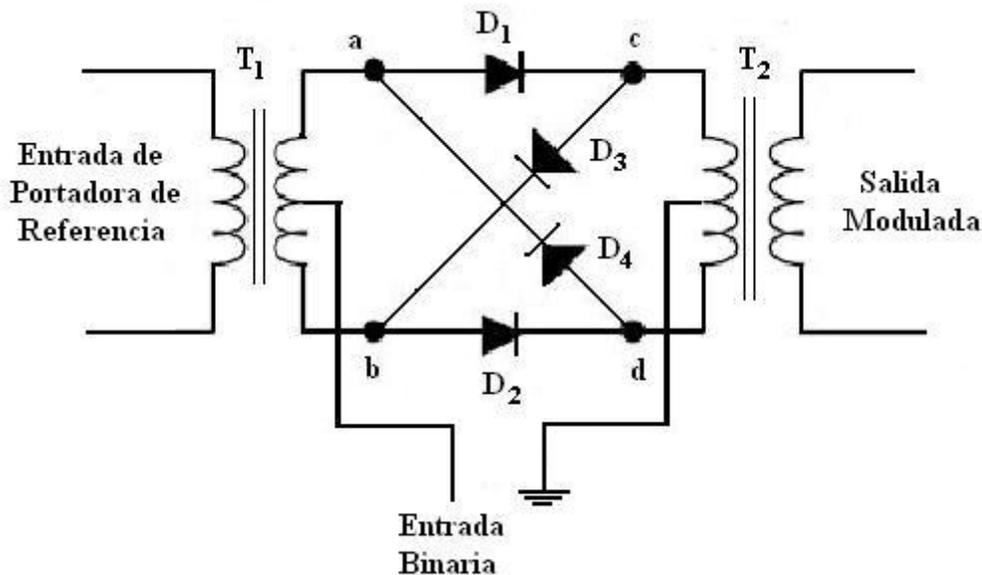
### 4.1.1 Modulador ASK

Existen un gran número de moduladores ASK, uno de los más conocidos es el modulador Balanceado mostrado en la figura 4.2.



**Figura 4.2: Modulador ASK**

Un modulador balanceado es similar a un circuito con puente de diodos con rectificación completa. El circuito del Modulador Balanceado se muestra en la figura 4.3



**Figura 4.3: Circuito Modulador Balanceado**

Una versión de este circuito se implementa en el CI 1496, con amplificadores operacionales. En él, la señal analógica de salida es el producto de las dos señales de entrada. Como se puede observar, a la salida del modulador aparece el producto de las señales  $f(t)$  digital y  $\text{Cos}\omega_c(t)$  portadora, que se

corresponde con la señal modulada ASK,  $f_{ASK}(t) = f(t)\text{Cos}\omega_c t$  que se muestra en la figura 4.1 (c).

#### 4.1.2 Demodulación ASK

Los moduladores de AM, son válidos para la detección de señales ASK, debido a que ASK es un caso particular de la modulación AM. De esta manera, existen dos métodos comunes de demodulación; la detección sincrónica y la de envolvente.

**Demodulación Sincrónica de ASK:** Consiste en multiplicar (analógicamente) la señal ASK que llega al demodulador, por la señal portadora que se genera localmente en el receptor. Luego, la señal resultante se hace pasar por un filtro pasa bajo con frecuencia de corte menor que  $2\omega_c$ , como se muestra en la figura 4.4.

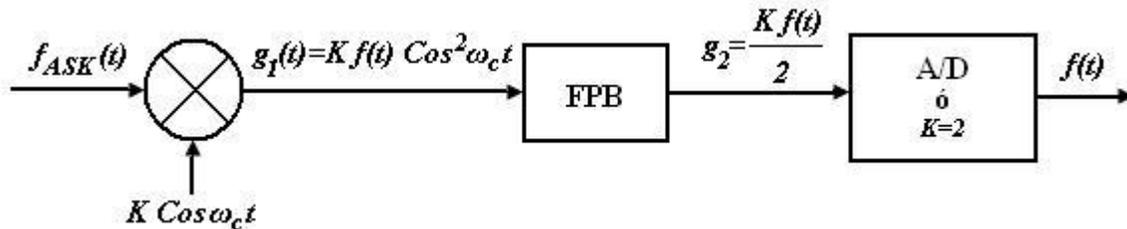


Figura 4.4: Demodulador sincrónico ASK

La expresión detectada en el tiempo muestra que:

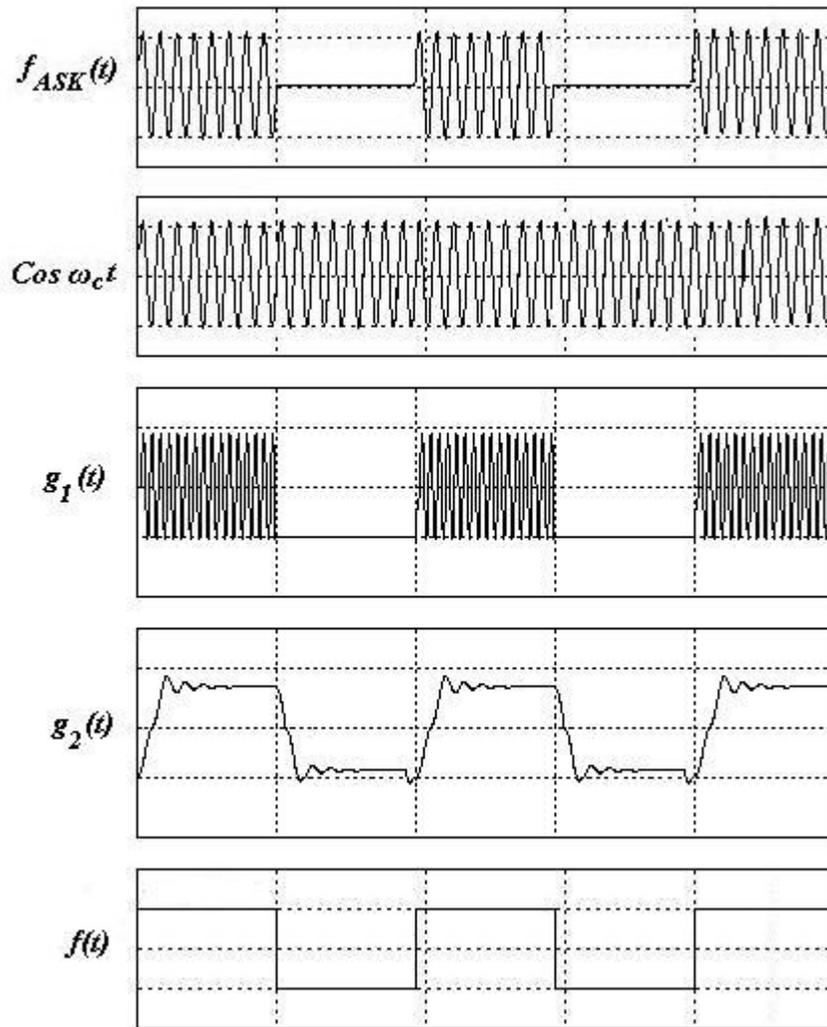
$$g_1(t) = f_{ASK}(t)K \cos \omega_c t = Kf(t)\text{Cos}^2 \omega_c t = Kf(t) \frac{1 + \text{Cos}2\omega_c t}{2}$$

$$g_1(t) = \frac{Kf(t)}{2} + \frac{Kf(t)\text{Cos}2\omega_c t}{2} \quad (4.2)$$

Al realizar el filtrado,  $\frac{Kf(t)\text{Cos}2\omega_c t}{2}$  desaparece, entonces tenemos a la salida del filtro,  $g_2(t) = \frac{Kf(t)}{2}$ .

Colocando a la salida un regenerador, o bien haciendo  $K = 2$ ; obtendremos la función original  $f(t)$ .

El análisis temporal se visualiza en la figura 4.5.



**Figura 4.5: Análisis temporal de la demodulación sincrónica**

**Demodulación Envolvente:** Con este otro método se evitan los problemas de frecuencia y de fase que aparecen en la demodulación sincrónica. En este caso, la señal  $f_{ASK}(t)$  de alta frecuencia que llega al receptor, se hace pasar a través de un dispositivo no lineal (diodo detector) y de un filtro pasa bajos, luego pasa a través de un adaptador de niveles para obtener la señal de banda base  $f(t)$ , como se observa en la figura 4.6.



**Figura 4.6: Demodulador Envolvente ASK**

En este tipo de demodulación, el diodo rechaza la parte negativa de la señal ASK, y el filtro no puede seguir las variaciones rápidas de la señal, por lo que solamente se queda con la envolvente de la señal que dejó pasar el diodo. El adaptador de niveles aparece para corregir la diferencia de escala a la salida del demodulador.

### 4.1.3 Análisis Espectral de la Señal ASK

Recordemos la ecuación (4.1), donde:

$$f_{ASK}(t) = f(t)\cos\omega_c t$$

A esta ecuación (4.1) se le realiza la transformada de Fourier, para el análisis de la frecuencia. Donde:

$$F_{ASK}(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_c)$$

$$F_{ASK}(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)] \quad (4.3)$$

Donde  $F(\omega)$  es el espectro del tren de pulsos binario y  $F(\omega - \omega_c)$  es el espectro de esta misma señal, corrido hasta la frecuencia  $\omega_c$  de la portadora, al igual que ocurre con  $F(\omega + \omega_c)$  pero esta vez desplazado hasta la frecuencia  $-\omega_c$ .

La representación en frecuencia se puede ver en la figura 4.7.

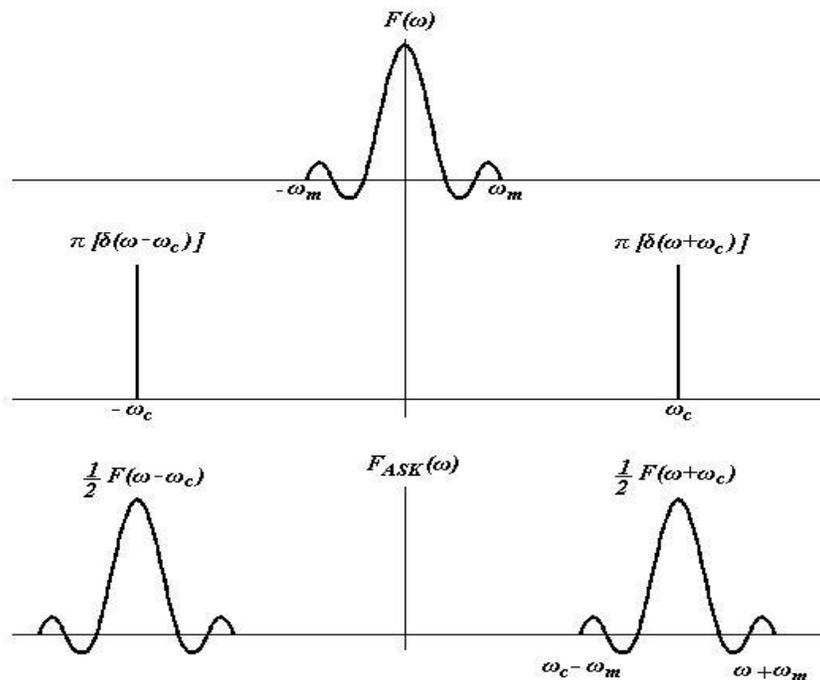
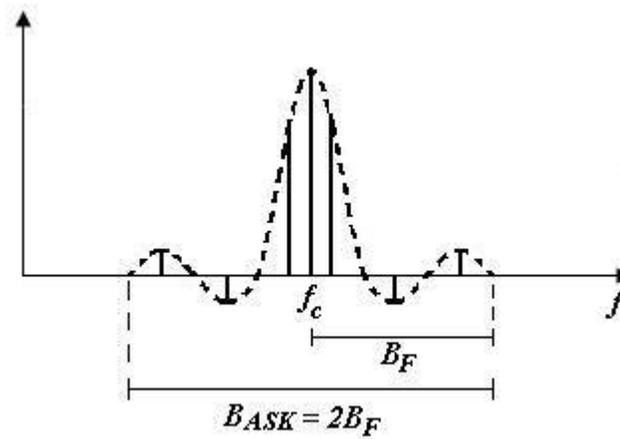


Figura 4.7: Representación en frecuencia de una señal ASK

#### 4.1.4 Ancho de Banda ASK

Como se muestra en la figura 4.7, la banda base aparece simétricamente repetida en ambos lados de la portadora, ocupando un ancho de banda igual al doble del ancho de banda base.



**Figura 4.8: Ancho de Banda de Señal modulada ASK (frecuencias positivas)**

La figura 4.8 muestra que el ancho de banda de la señal ASK ( $B_{ASK}$ ), es el doble del ancho de banda de la señal original ( $B_F$ ), debido precisamente al corrimiento de su espectro hasta la frecuencia de la señal portadora ( $\cos \omega_c t$ ).

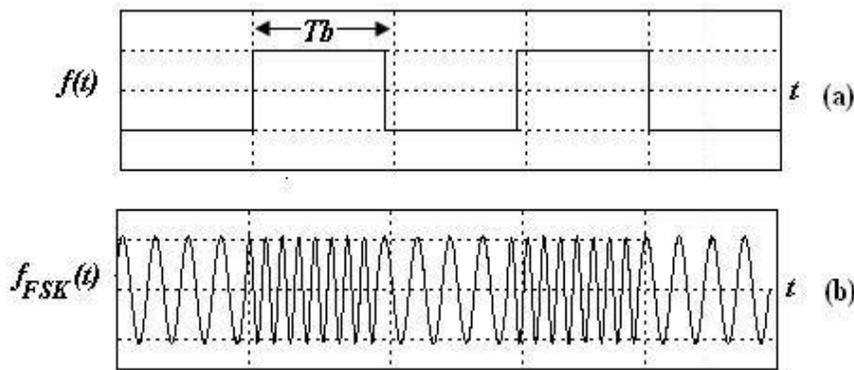
Por lo anterior tenemos que:

$$B_{ASK} = 2B_F \quad (4.4)$$

## 4.2 MODULACION FSK

El FSK binario es una forma de modulación angular de amplitud constante, similar a la modulación en frecuencia convencional, excepto que la señal modulante es un flujo de pulsos binarios que varía, entre dos niveles de voltaje discreto, en lugar de una forma de onda analógica que cambia de manera continua.

La Figura 4.9 representa las señales de la modulación FSK



**Figura 4.9: Modulación FSK; (a) Señal binaria de información; (b) Señal Modulada FSK**

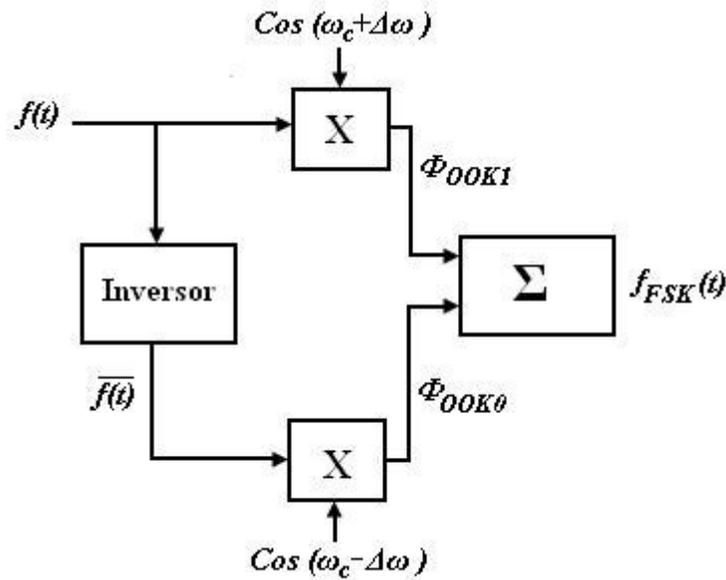
Suponiendo una señal binaria de información  $f(t)$  de unos y ceros y anchura de bit  $T_b$  como se ve en la figura 4.9a, se usan dos señales portadoras de alta frecuencia, ambas de amplitud  $A$  voltios pero con frecuencias diferentes ( $ACos\omega_1t$  y  $ACos\omega_0t$ ). Donde  $\omega_1$  se denomina la frecuencia de marca ( $f_m$ ) y  $\omega_0$  se denomina frecuencia de espacio ( $f_s$ ).

De esta manera, la función de la señal FSK va a ser:

$$f_{FSK}(t) = \begin{cases} ACos\omega_1t & \text{Si } f(t) = 1v \text{ (1 lógico)} \\ ACos\omega_0t & \text{Si } f(t) = 0v \text{ (0 lógico)} \end{cases} \quad (4.5)$$

Para mejor entendimiento de la modulación, analicemos el siguiente diagrama (Figura 4.10), de manera que un modulador trabajará con un estado y otro modulador hará lo mismo con el otro estado binario.

FSK (transmisión por desplazamiento de frecuencia) o también llamada BFSK, es otra técnica de modulación digital mediante la cual la información, como su propio nombre lo indica, se encuentra modulada en frecuencia.



**Figura 4.10: Diagrama de representación de Modulación ASK**

Donde  $\omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}$ , es la frecuencia de la portadora de una señal modulada FSK.

Y donde  $\Delta\omega_c = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}$  denominada desviación de frecuencia.

Basándonos en lo visto en el diagrama de representación de la modulación FSK de la figura 4.10 y lo explicado al principio de este capítulo, se puede expresar que:

$$f_{ASK}(t) = A \cos(\omega_c \pm \Delta\omega)t \quad (4.6)$$

Es decir que la señal FSK se desvía  $\pm \Delta\omega$  alrededor de  $\omega_c$ .

La inversión de la banda base transforma los ceros en unos de tal manera que cuando se realiza la multiplicación, estos salen representados por una frecuencia. El análisis temporal se ve en la figura 4.11.

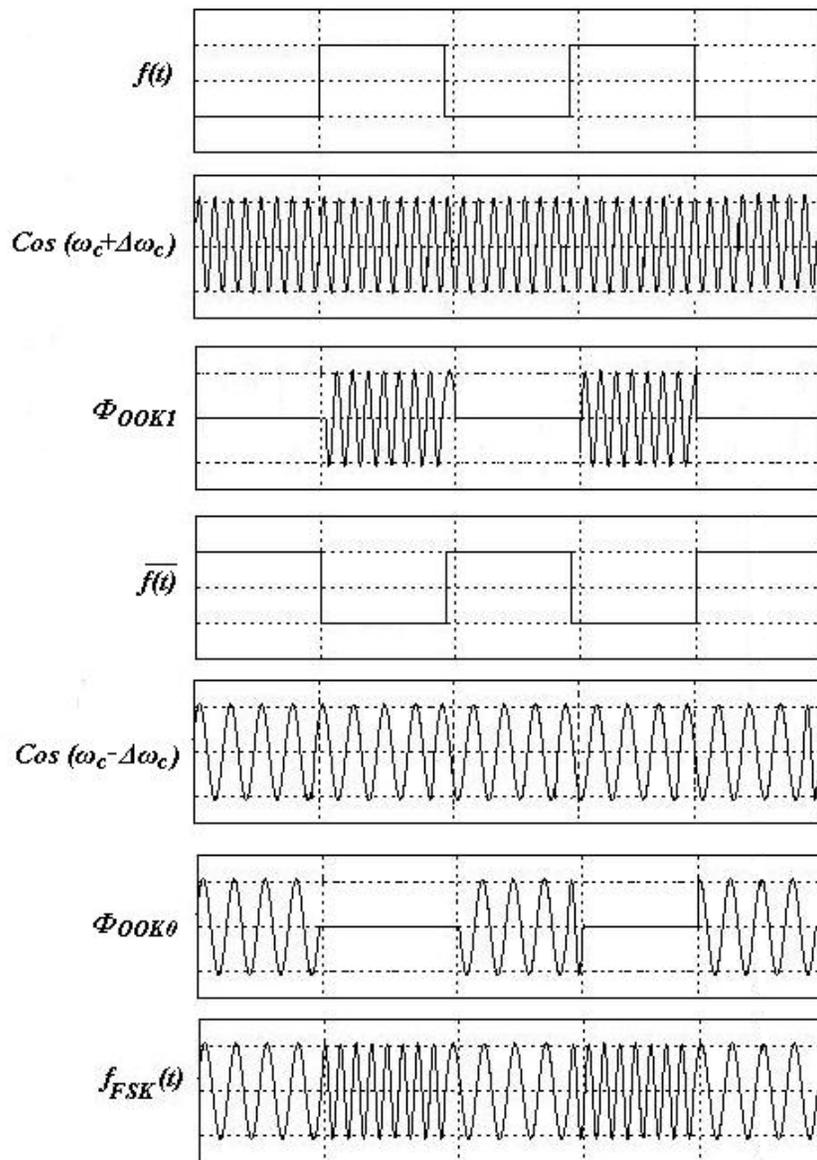


Figura 4.11: Análisis temporal Modulación FSK

### 4.2.1 Modulador FSK

El circuito mostrado en la figura 4.12 representa una implementación muy sencilla del modulador FSK.

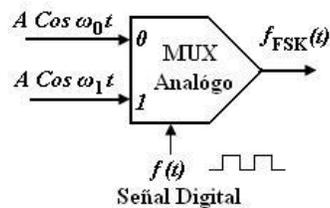


Figura 4.12: Modulador FSK

Se puede comprobar fácilmente que este modulador cumple la ecuación 4.5. Cuando  $f(t)$  es 0 voltios, la señal analógica de salida tiene el valor de  $ACos\omega_0t$ ; en cambio, si  $f(t)$  es 1 voltio, a la salida del multiplexor aparece  $ACos\omega_1t$ . Por consiguiente, esta señal de salida se corresponde con una señal modulada FSK como se ve en la figura 4.9b.

## 4.2.2 Demodulación FSK

El circuito que más se utiliza para demodular las señales de FSK binarias es el circuito de fase cerrada (PLL), que se muestra en forma de diagrama a bloques en la figura 4.13. Conforme cambia la entrada de PLL entre las frecuencias de marca ( $f_m$ ) y espacio ( $f_s$ ), el voltaje de error de cc a la salida del comparador de fase sigue el desplazamiento de frecuencia. Debido a que sólo hay dos frecuencias de entrada (marca y espacio), también hay sólo dos voltajes de error de salida. Uno representa un 1 lógico y el otro un 0 lógico. En consecuencia, la salida es una representación de dos niveles (binaria) de la entrada de FSK. Por lo regular, la frecuencia natural del PLL se hace igual a la frecuencia central del modulador de FSK. Como resultado, los cambios en el voltaje de error cc, siguen a los cambios en la frecuencia de entrada analógica y son simétricos alrededor de 0 V.

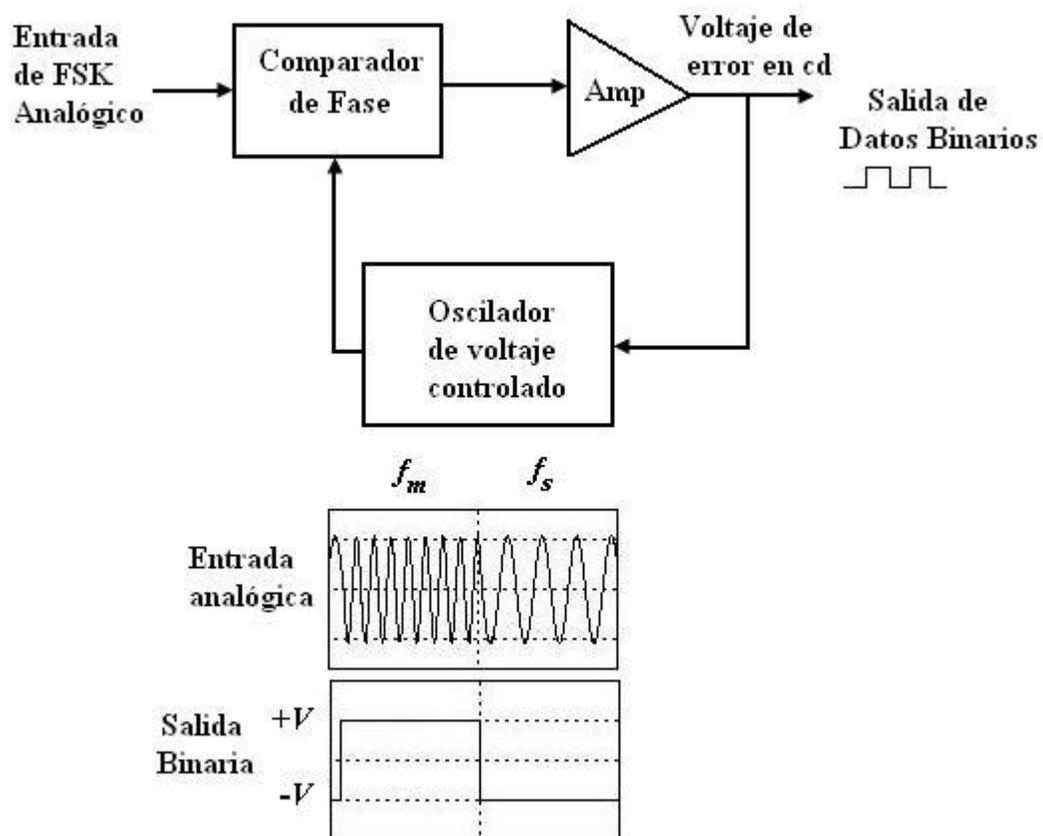
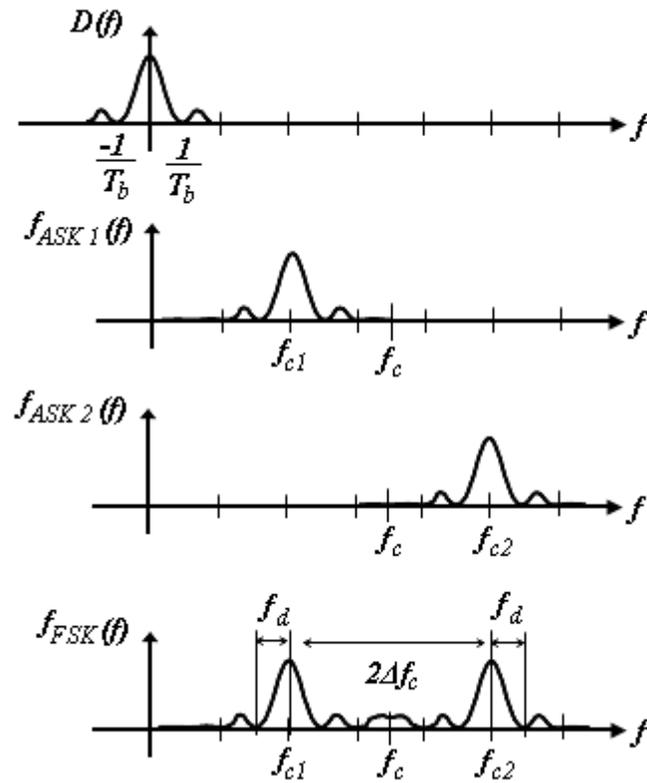


Figura 4.13: Diagrama de bloques de un PLL.

### 4.2.3 Análisis Espectral de la Modulación FSK

El espectro de la modulación FSK, se representa en la figura 4.14.



**Figura 4.14: Espectro de la Modulación FSK**

El ancho de banda de la señal modulada es dos veces la desviación de frecuencia más el ancho de banda base, tal que:

$$B_{ASK} = 2(\Delta f_c + f_d) \quad (4.7)$$

### 4.3 MODULACIÓN PSK

Para este tipo de modulación digital, lo que sucede es que se multiplica la señal binaria que contiene información a transmitir, con unos niveles de tensión de  $\pm 1V$ , con una señal portadora de alta frecuencia ( $\text{Cos}\omega_c t$ ).

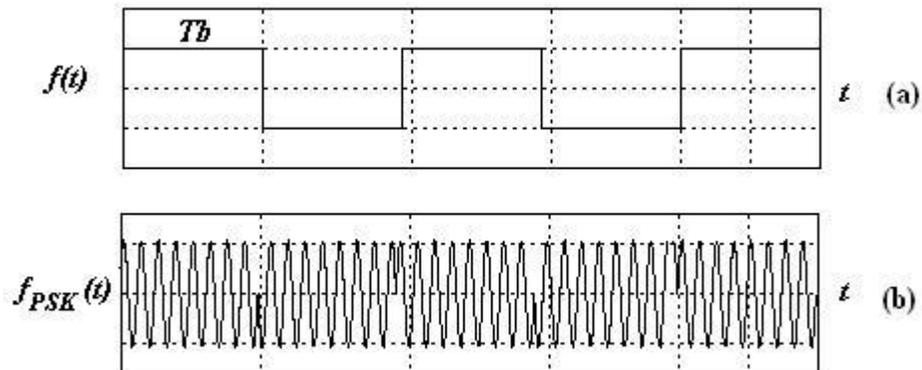
La función de la señal modulada PSK será:

$$f_{PSK}(t) = f(t)\text{Cos}\omega_c t \quad (4.8)$$

Siendo  $f(t) = \pm 1$ , de donde se puede expresar a la función FSK, como una portadora con dos fases, de tal manera que será:

$$f_{PSK}(t) = \pm \text{Cos}\omega_c t \quad (4.9)$$

La figura 4.15 muestra las señales de la modulación PSK.



**Figura 4.15: Señales de la modulación PSK (a) Señal binaria de información; (b) Señal modulada PSK**

#### 4.3.1 Modulador PSK

Como se puede observar en la figura 4.16, el modulador PSK es un circuito muy simple que consta únicamente de un modulador balanceado que realiza una multiplicación analógica de las señales de entrada, y un filtro pasabanda que elimina los armónicos no significativos de la señal PSK.

PSK (Transmisión de Desplazamiento de Fase) o también llamada BPSK (Transmisión por desplazamiento de fase binaria), es una técnica de modulación digital en la que la información se va a modular en fase, es decir, dependiendo de los valores de entrada digital, la señal analógica modulada va a tener una u otra fase de salida.

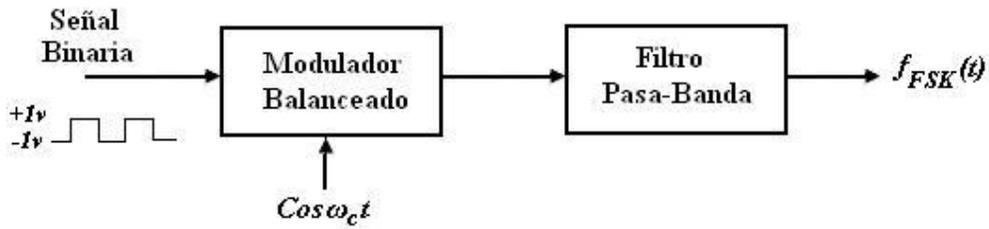


Figura 4.16: Modulador PSK

### 4.3.2 Demodulación PSK

La única forma de demodulación de PSK, es sincrónica, es decir reinyectando la portadora en frecuencia y fase tal cual fue generada, puesto que si se intenta detección de envuelta solo se obtiene un nivel de continua. El diagrama de bloques que representa la demodulación PSK se muestra en la figura 4.17.

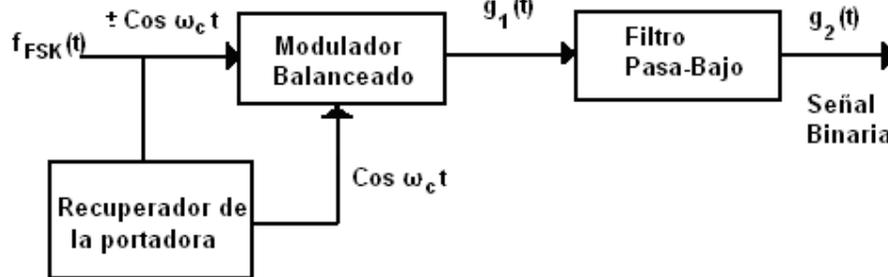


Figura 4.17: Demodulación PSK

### 4.3.3 Ancho de Banda PSK

Cuando modulamos en PSK, el espectro de señal  $f(t)$  sufre un desplazamiento hasta la frecuencia de la portadora ( $\omega_c$ ), y hace que el ancho de banda de la señal modulada PSK ( $B_{PSK}$ ) sea el doble del de la señal original de información como se observa en la figura 4.18.

$$B_{PSK} = 2B_F \quad (4.10)$$

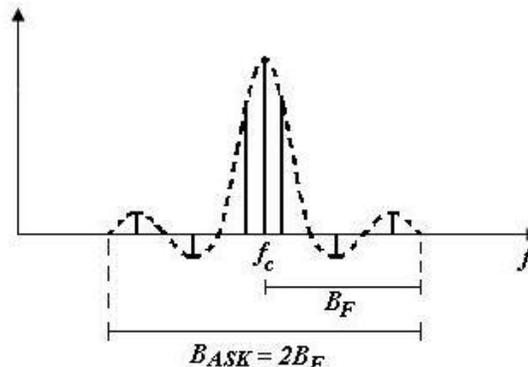


Figura 4.18: Ancho de banda de la señal modulada PSK

### 4.3.4 Recuperación de la Portadora

Para la demodulación de las señales moduladas PSK y QAM, como veremos mas adelante, se necesita una portadora local en el receptor que sea de la misma frecuencia y esté sincronizada en fase con la portadora correspondiente de la señal PSK recibida.

Esta portadora no puede ser generada internamente en el receptor ya que aparecerían problemas de sincronización.

La solución más eficiente, consistiría en recuperar la portadora ( $\text{Cos}\omega_c t$ ) directamente de la señal PSK recibida. Para ello se usa el circuito recuperador mostrado en la figura 4.19 y que recibe el nombre de *circuito recuperador de la portada*.



**Figura 4.19: Circuito recuperador de la portadora**

La señal recibida  $f_{PSK}(t) = \pm \text{Cos}\omega_c t$  se hace pasar por un elevador al cuadrado quedando a su salida.

$$g_1(t) = \text{Cos}^2 \omega_c t = \frac{1}{2} + \frac{\text{Cos}2\omega_c t}{2} \quad (4.11)$$

Si  $g_1(t)$  la hacemos pasar por un adaptador de niveles que quite el término de continua y que tenga un factor de ganancia igual a 2 se obtiene:

$$g_2(t) = \text{Cos}2\omega_c t \quad (4.12)$$

Posteriormente se hace pasar  $g_2(t)$  por el divisor de frecuencia por 2 y se obtiene:

$$g_3(t) = \text{Cos}\omega_c t \quad (4.13)$$

$g_3(t)$  representa la señal portadora que se quería recuperar.

## 4.4 MODULACIÓN DPSK

El principal problema de PSK, radica en el hecho de que la demodulación debe ser necesariamente sincrónica, con la problemática ya expresada para la recuperación de la portadora.

La transmisión por desplazamiento de fase diferencial (DPSK) o también conocida como Transmisión por desplazamiento de fase binaria diferencial (DBPSK), es una forma alterna de modulación digital en donde la información de entrada binaria está contenida en la diferencia, entre dos elementos sucesivos de señalización, en lugar de la fase absoluta.

En la Modulación Binaria Diferencial de Fase (DPSK), el desplazamiento en fase es relativo a la fase correspondiente al último símbolo transmitido, en vez, de ser relativo a algún valor constante de referencia.

Con DPSK no es necesario recuperar una portadora coherente en fase. En lugar de eso, se retarda un elemento de señalización durante un corto tiempo y luego se compara al siguiente elemento recibido de señalización. La diferencia, en fase, de los dos elementos de señalización determina la condición lógica de los datos.

### 4.4.1 Modulador Transmisor DBPSK

En la figura 4.20 se muestra un diagrama de bloques simplificado para un transmisor de transmisión por desplazamiento de fase binaria diferencial (DBPSK). El bit de información entrante usará la XNOR con el bit anterior, antes de entrar al modulador de BPSK (modulador balanceado). Para el primer bit de datos, no hay un bit anterior con el cual comparar. Por tanto, se asume un bit de referencia inicial.

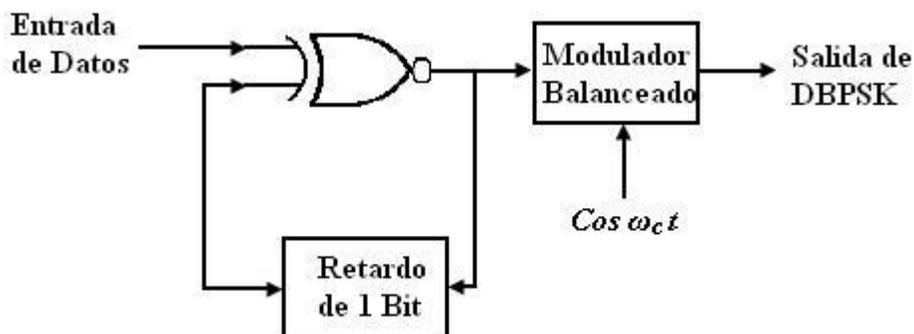
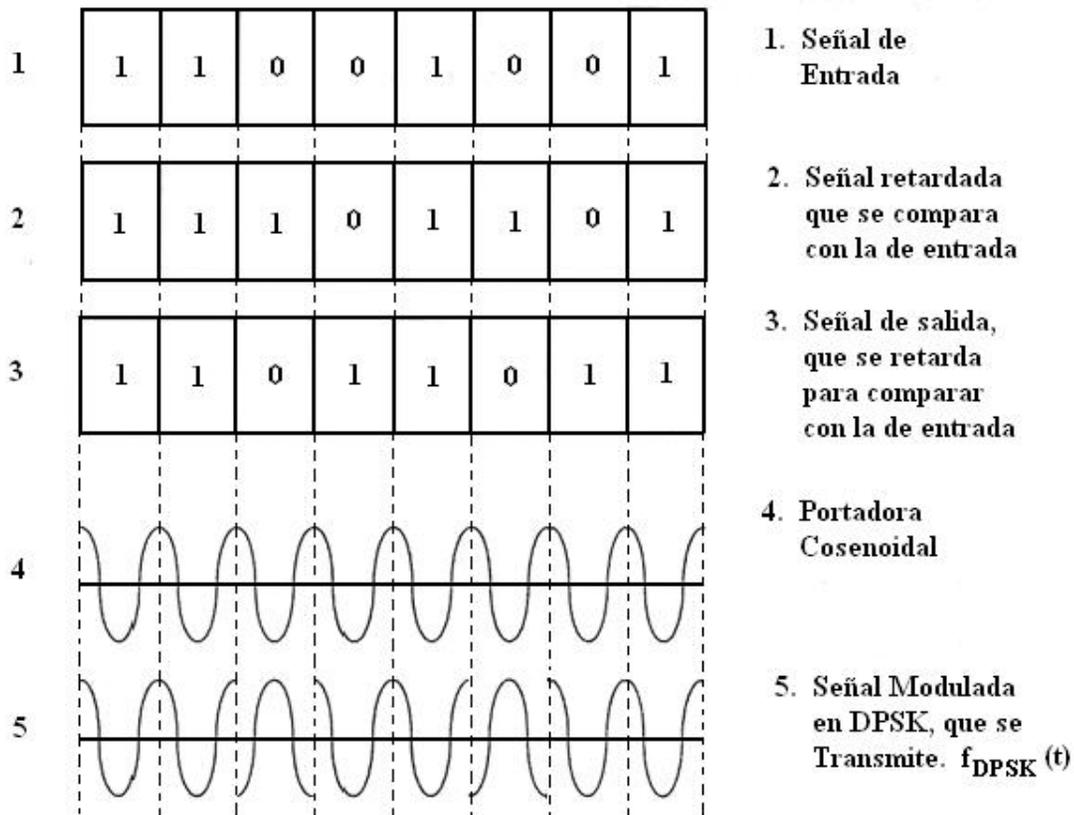


Figura 4.20: Diagrama de bloques de un Transmisor DBPSK

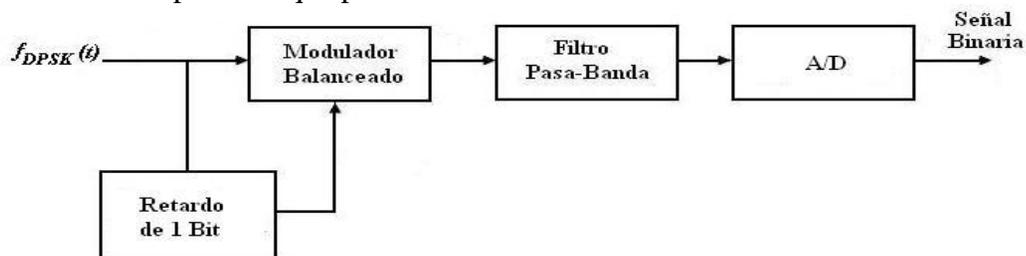
En la figura 4.21 se presenta el análisis temporal punto a punto del esquema de modulación DBPSK.



*Figura 4.21: Análisis de las señales de la Modulación DBPSK*

#### 4.4.2 Demodulador Receptor DBPSK

La figura 4.22 muestra un diagrama de bloques para un receptor de DBPSK. La señal recibida se retarda en un bit de tiempo, luego se compara con el siguiente elemento de señalización en el modulador balanceado. Si son iguales, se genera un 1 lógico (voltaje +). Si son diferentes, se genera un 0 lógico (voltaje -1). Si se supone incorrectamente la fase de referencia, sólo el primer bit demodulado está en error. La codificación diferencial se puede implantar con esquemas de modulación digital más alta que el binario, aunque los algoritmos diferenciales son mucho más complicados que para el DBPSK.

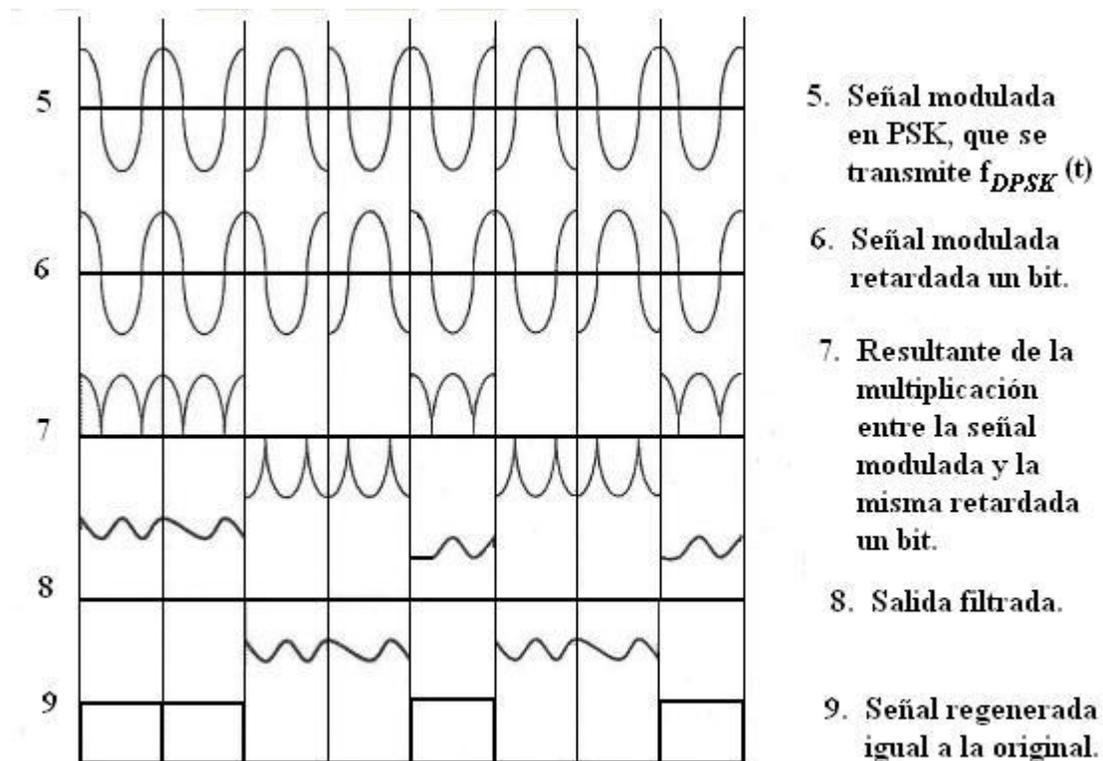


*Figura 4.22: Demodulador DPSK*

La ventaja principal del DPSK es la simplicidad con la que se puede implementar. Con DPSK, no se necesita circuito de recuperación de la portadora. Una desventaja del DPSK es que requiere de entre 1 y 3 dB más de relación señal a ruido para alcanzar la misma tasa de errores de bits que el PSK absoluto.

Cada vez que la salida del multiplicador (Modulador balanceado) es  $\text{Cos}\omega_c t$ , a la salida del circuito de la figura 4.22, aparece un 0 lógico, que es precisamente en lo que consiste la modulación DPSK. En caso contrario, sino se produce un cambio de fase, la salida del circuito demodulador es un 1 lógico.

La figura 4.23 representa un análisis de las señales del proceso de demodulación DBPSK.



**Figura 4.23: Análisis de las señales de la demodulación DBPSK**

## 4.5 MODULACIÓN MPSK

Si la señal PSK tenía dos posibles fases de salida, en MPSK la señal modulada tiene M fases posibles para una misma frecuencia portadora, pero igual que FSK, las señales analógicas MPSK tienen una amplitud constante.

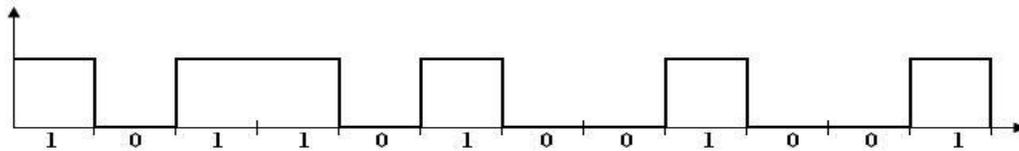
En este sistema la fase de la señal portadora puede tomar secuencialmente M valores posibles separados entre sí por un ángulo definido por:

$$\theta = \frac{2\pi}{M} \quad (4.14)$$

Este es un caso de transmisión multinivel, donde la portadora tomará los M valores posibles de acuerdo a los niveles de amplitud de la señal moduladora.

Dado que la cadencia de una transmisión de datos binarios está dada por la cantidad de veces que una señal cambia de nivel, observaremos como podemos enviar dos unidades de información (dos bits), mediante un solo cambio de nivel.

Tengamos la siguiente secuencia de bits.



**Figura 4.24: Secuencia de bits**

Si los bits de la cadena de información de la figura 4.24, los tomamos de a dos, tendremos:

10|11|01|00|10|01

O sea que al tomar los bits de a dos de una señal binaria unipolar, hay solo cuatro combinaciones a las cuales se las denomina dibits.

00
01
10
11

Si a cada par de bits, le asignamos diferentes niveles o amplitudes de señal, se obtiene la Tabla 4.1:

Dibit	Nivel Asignado
00	0
01	1
10	2
11	3

**Tabla 4.1: Tabla de nivel de asignación de dibit.**

Los cuales se pueden representar como lo muestra la figura 4.25.

La modulación MPSK (Múltiple Diferencial) no es más que una extensión de la técnica de modulación digital PSK. En este tipo de modulación se pueden presentar la Modulación por desplazamiento de fase cuaternaria (QPSK) donde existen 4 posibles fases o bien la Modulación 8-PSK

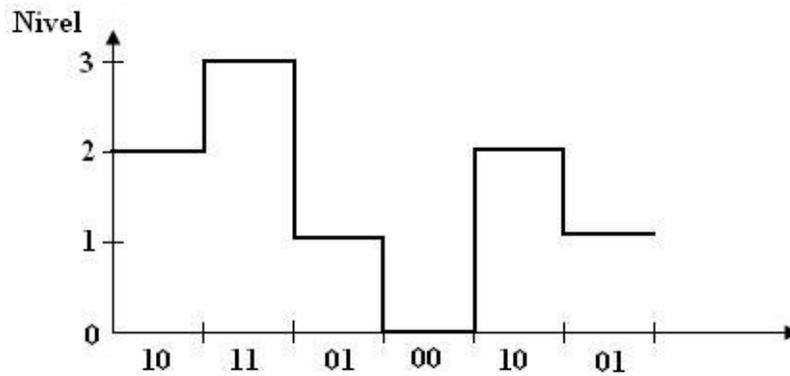


Figura 4.25: Representación de los niveles de díbits.

A los pulsos de las señales multinivel se los denomina díbits, puesto que en cada uno de ellos se envía dos bits. En forma similar se pueden obtener tribits, cuatribits, etc.

Este tipo de señales son las que se emplean en MPSK. Para el caso particular de  $M = 4$ , se tiene 4PSK o QPSK.

#### 4.5.1 Modulación QPSK (4PSK)

El circuito de la figura 4.26 es un modulador QPSK que se sirve de una señal portadora ( $\text{Sen } \omega_c t$ ), y en el que entra una señal digital de información  $f(t)$  secuencial con niveles de tensión de  $\pm 1V$ .

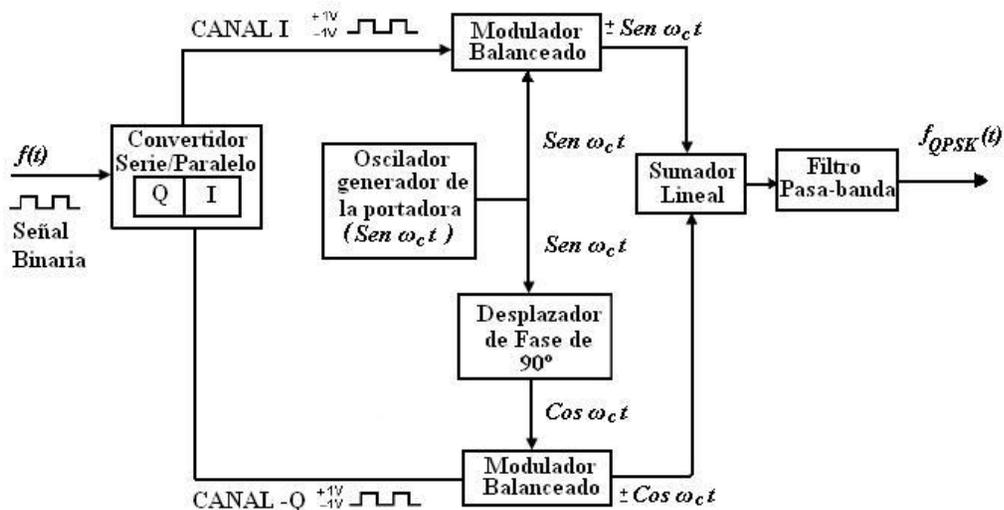


Figura 4.26: Modulador QPSK

En el modulador distinguimos dos canales (Canal I y Canal Q), cada uno de los cuales conducirá uno de los bits desde el convertidor serie-paralelo a su modulador balanceado correspondiente (opera como un multiplicador analógico).

El bit I, cuyo nivel de tensión puede ser de -1 ó +1 voltio, es multiplicado por la señal portadora ( $Sen\omega_c t$ ). Mientras, el bit Q se multiplica por la portadora desplazada en fase 90° ( $Cos\omega_c t$ ). La salida de ambos moduladores balanceados se suman linealmente para dar lugar a la señal QPSK.

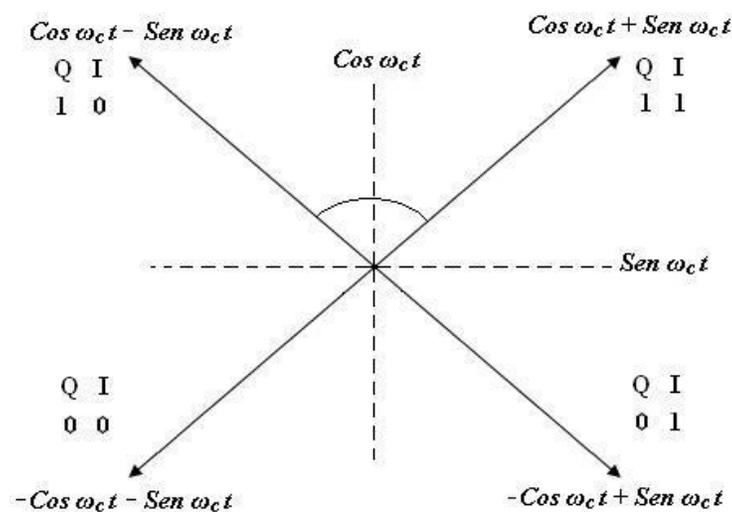
El filtro pasabanda se coloca a la salida del modulador QPSK para eliminar armónicos no significativos de la señal modulada, para no interferir con otras señales que pudieran transmitirse por el mismo canal.

Los valores que puede tomar la señal de salida  $f_{QPSK}(t)$  son los presentados en a Tabla 4.2.

Entrada Binaria		$f_{QPSK}(t)$	Fase de salida de la señal QPSK
Q	I		
0	0	$-Cos\omega_c t - Sen\omega_c t$	-135°
0	1	$-Cos\omega_c t + Sen\omega_c t$	-45°
1	0	$+Cos\omega_c t - Sen\omega_c t$	+135°
1	1	$+Cos\omega_c t + Sen\omega_c t$	+45°

**Tabla 4.2: Tabla de verdad de la modulación QPSK**

En QPSK, como se puede observar en el diagrama de fasores mostrado en la figura 4.27, la separación angular entre fases de salida adyacentes es de 90°. Además, para este modulador, cada dicit difiere del adyacente en un solo bit. Este sistema de codificación recibe el nombre de *Código de Gray*.



**Figura 4.27: Diagrama de fasores QPSK**

### 4.5.1.1 Demodulación QPSK

En la figura 4.28 se muestra un demodulador QPSK. El separador de potencia triplica la señal recibida  $f_{QPSK}(t)$  sin que ello conlleve una pérdida de potencia, y la conduce a través del canal I y el canal Q hasta los multiplicadores analógicos. En el circuito recuperador de la portadora, se obtiene la portadora ( $Sen\omega_c t$ ) a partir de la señal de QPSK. Las salidas de los multiplicadores analógicos se hacen pasar por dos filtros pasa-bajos que tienen que tener una frecuencia de corte menor que  $2\omega_c$ .

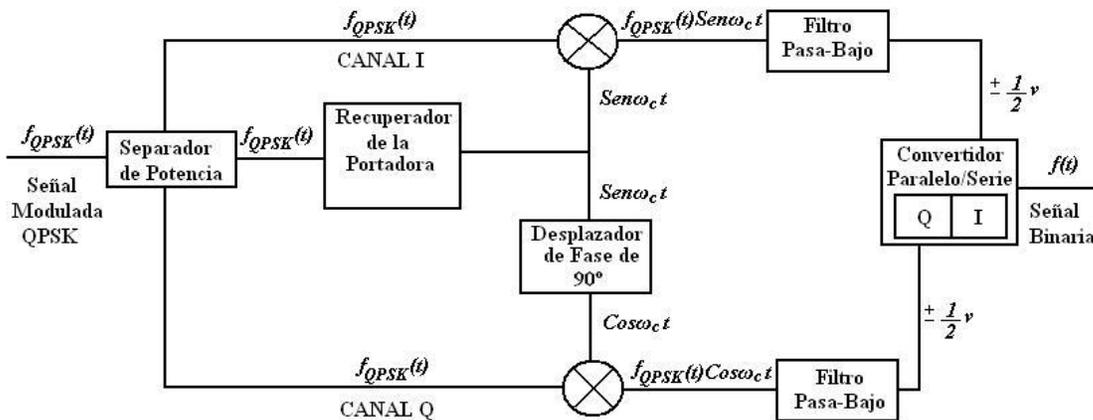


Figura 4.28: Demodulador QPSK

Analizaremos el proceso de demodulación. Suponemos que el dicit transmitido es  $QI = 10$ . Entonces la señal analógica  $f_{QPSK}(t) = +Cos\omega_c t - Sen\omega_c t$ . Analizando primero el canal Q, tenemos:

$$\begin{aligned}
 Q &= Cos\omega_c t f_{QPSK}(t) = Cos\omega_c t (Cos\omega_c t - Sen\omega_c t) \\
 &= Cos^2\omega_c t - Cos\omega_c t Sen\omega_c t \\
 &= \frac{1 + Cos2\omega_c t}{2} - \left[ \frac{Sen(\omega_c t + \omega_c t)}{2} + \frac{Sen(\omega_c t - \omega_c t)}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{Cos2\omega_c t}{2} - \frac{Sen2\omega_c t}{2}}_{\text{Filtrado}} - \frac{Sen0}{2}
 \end{aligned}$$

$$= +\frac{1}{2} \text{ voltios (1 lógico)}$$

Ahora para el canal I, tenemos que:

$$I = Sen\omega_c t f_{QPSK}(t) = Sen\omega_c t (Cos\omega_c t - Sen\omega_c t)$$

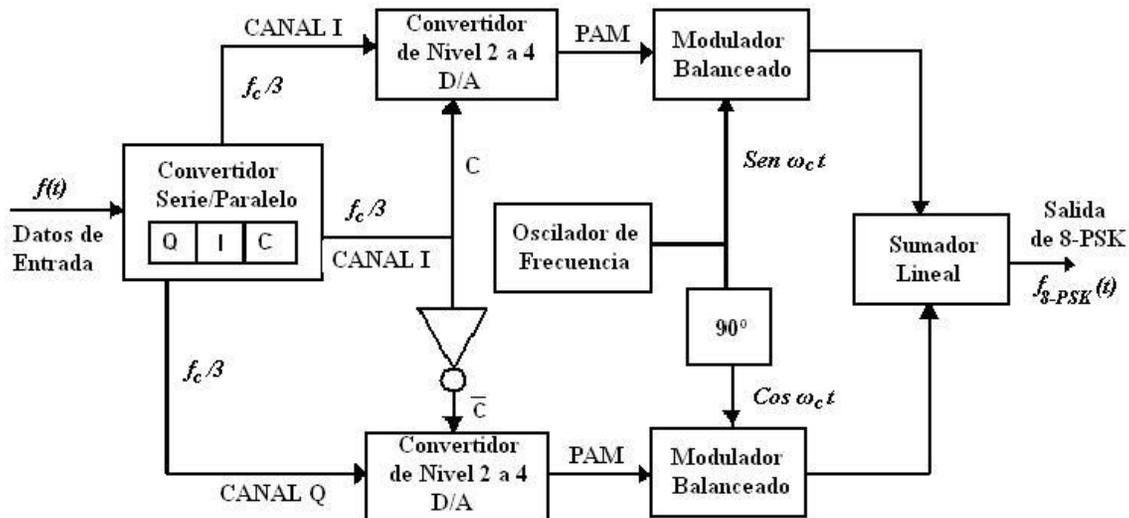
$$\begin{aligned}
&= \text{Sen} \omega_c t \text{Cos} \omega_c t - \text{Sen}^2 \omega_c t \\
&= \frac{\text{Sen}(\omega_c t + \omega_c t)}{2} + \frac{\text{Sen}(\omega_c t - \omega_c t)}{2} - \frac{1 + \text{Cos} 2\omega_c t}{2} \\
&= \underbrace{\frac{\text{Sen} 2\omega_c t}{2}}_{\text{Filtrado}} + \frac{\text{Sen} 0}{2} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\text{Cos} 2\omega_c t}{2}}_{\text{Filtrado}} \\
&= -\frac{1}{2} \text{ voltios (0 lógico)}
\end{aligned}$$

Así que al convertidor paralelo-serie llega  $QI = 10$  que efectivamente corresponde al valor del dicit transmitido.

## 4.5.2 Modulación 8PSK

La agrupación de tres bits genera la combinación de ocho posibles fases para la portadora, generándose 8PSK, que es otra técnica de modulación digital MPSK; y que achica el ancho de banda de la señal modulada. A estos tres bits de información se les llama tribits.

Un diagrama a bloques de un modulador de 8-PSK se muestra en la figura 4.29.



**Figura 4.29: Modulador 8-PSK**

El flujo de bits seriales que están entrando se introduce al desplazador de bits, en donde se convierte a una salida paralela de tres canales (el canal I, o en fase; el canal Q, o en cuadratura y el canal C, o de control). En consecuencia, la tasa de bits, en cada uno de los tres canales, es  $f_b/3$ . Los bits en los canales I y C, entran al convertidor de los niveles 2 a 4 del canal I, y los bits en los canales Q y  $\bar{C}$  entran el convertidor de los niveles 2 a 4, del canal Q. En esencia, los convertidores de los niveles 2 a 4 son convertidores digital a análogo (DAC) de entrada paralela. Con 2 bits de entrada, son posibles cuatro voltajes de salida. El algoritmo para los

DAC es bastante sencillo. El bit I o Q determina la polaridad de la señal analógica de salida (*lógico* =  $+V$  y *Ológico* =  $-V$ ), mientras que la C o el bit  $\bar{C}$  determina la magnitud (*lógico* =  $1.307v$  y *Ológico* =  $0.541v$ ). En consecuencia, con dos magnitudes y dos polaridades, son posibles cuatro condiciones de salida diferentes.

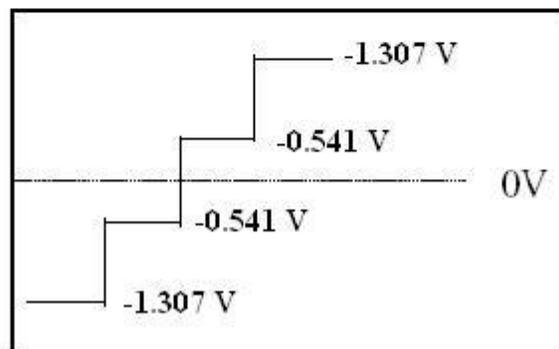
La figura 4.30 muestra las tablas de verdad para los canales I y Q, y los niveles de PAM.

Entrada Binaria		Salida
I	C	
0	0	-0.541 V
0	1	-1.307 V
1	0	+0.541 V
1	1	+1.307 V

(a) Tabla de Verdad Canal I

Entrada Binaria		Salida
Q	$\bar{C}$	
0	0	-1.307 V
0	1	-0.541 V
1	0	+1.307 V
1	1	+0.541 V

(b) Tabla de Verdad Canal Q



(c) Niveles PAM

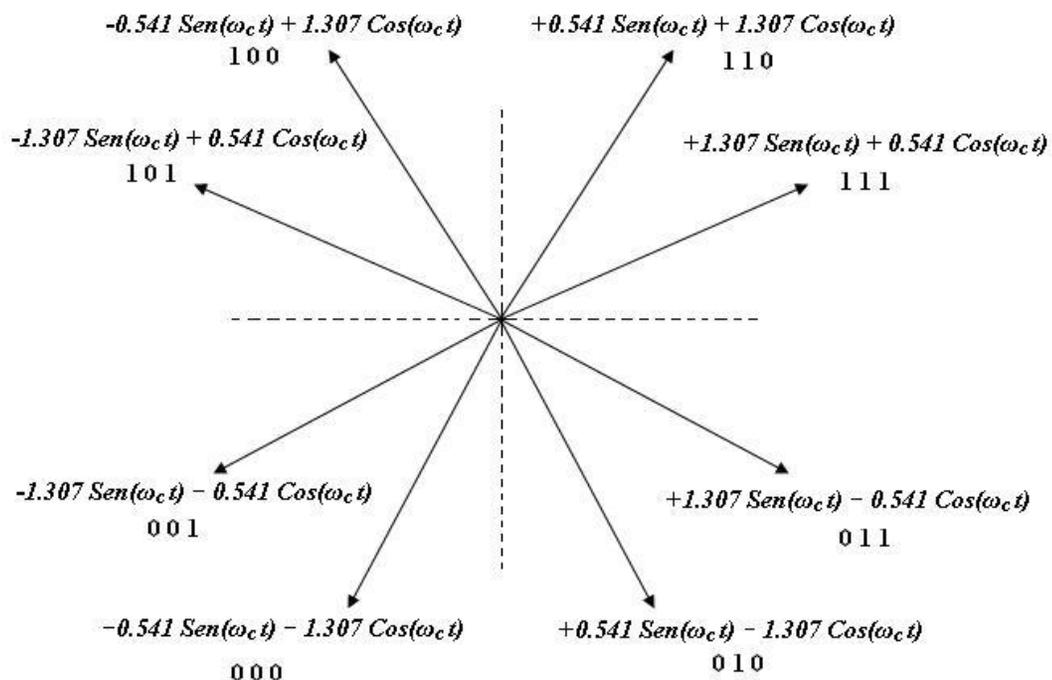
**Figura 4.30: Tablas de Verdad para los Canales I y Q, y Niveles de PAM.**

Las dos señales PAM obtenidas entran en sendos moduladores balanceados, que las multiplican por la portadora (la señal PAM del canal I-C por  $Sen\omega_c t$  y la del canal  $Q-\bar{C}$  por  $Cos\omega_c t$ ). Las salidas de los moduladores balanceados se suman linealmente, dando la señal modulada 8PSK. Los posibles valores que puede alcanzar esta señal aparecen en la Tabla 4.3.

Entrada Binaria			Fase de Salida de 8-PSK
Q	I	C	
0	0	0	-112.5°
0	0	1	-157.5°
0	1	0	-67.5°
0	1	1	-22.5°
1	0	0	+112.5°
1	0	1	+157.5°
1	1	0	+67.5°
1	1	1	+22.5°

**Tabla 4.3: Tabla de verdad para la salida del modulador 8-PSK**

La figura 4.31 muestra el diagrama fasorial para la modulación 8-PSK



**Figura 4.31: Diagrama Fasorial Modulación 8-PSK**

Ya que con el 8-PSK los datos se dividen en tres canales, la tasa de bits en el canal I, Q, o C, es igual a un tercio de la tasa de datos de entrada binarios ( $f_b/3$ ), (El derivador de bits estira los bits I, Q y C a tres veces su longitud de bit de entrada). Debido a que los bits I, Q y C tienen una salida simultánea y en paralelo, los convertidores de niveles de 2 a 4, también ven un cambio en sus entradas (y en consecuencia sus salidas) a una tasa igual a  $f_b/3$ .

### 4.5.2.1 Demodulación 8PSK

La figura 4.32 muestra un diagrama a bloques de un receptor de 8-PSK. El derivador de potencia dirige la señal de 8-PSK de entrada, a los detectores de producto I y Q, y al circuito de recuperación de la portadora. El circuito de recuperación de la portadora reproduce la señal original del oscilador de referencia. La señal de 8-PSK que está entrando se mezcla con la portadora recuperada en el detector de productos I, y con una portadora de cuadratura en el detector de producto Q. Las salidas de los detectores de producto son señales PAM, de nivel 4, que alimentan a los convertidores analógicos a digital (ADC), del nivel 4 a 2. Las salidas del convertidor de nivel 4 a 2, canal I, son los bits I y C, mientras que las salidas del convertidor de nivel 4 a 2, canal Q, son los bits Q y  $\bar{C}$ . El circuito lógico de paralelo a serial convierte los pares de bit, I/C y Q/ $\bar{C}$ , a flujos de datos de salida serial I, Q y C.

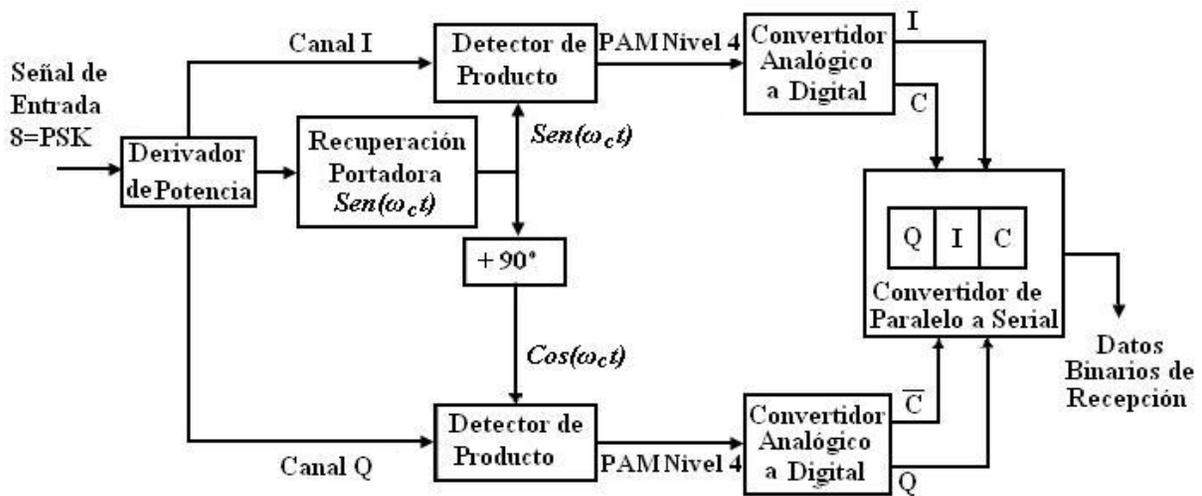


Figura 4.32: Demodulador 8-PSK

## 4.6 MODULACIÓN QAM

Modulación de amplitud en cuadratura QAM, es una técnica de modulación en la que la información va a ser modulada tanto en la amplitud como en fase.

QAM va a ser otro tipo de modulación M-aria en la que para grupos de  $k$  bits, podemos obtener  $M = 2^k$  salidas diferentes.

Estudiaremos las dos técnicas de modulación QAM:

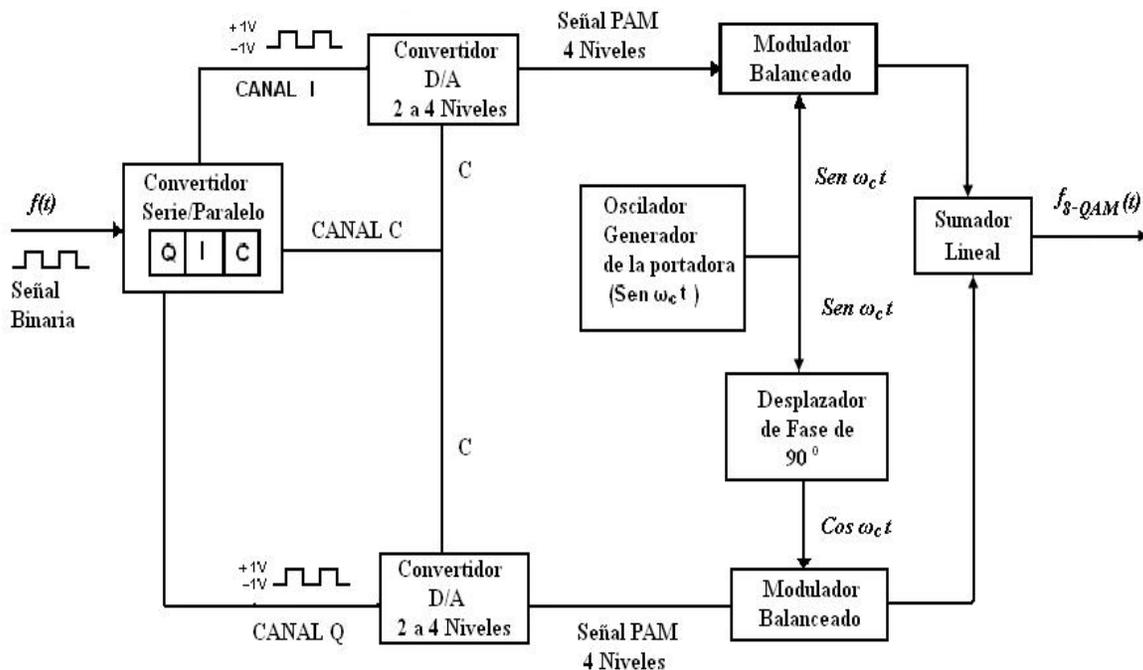
- La QAM de ocho (8-QAM)
- La QAM de dieciséis (16-QAM)

En la Modulación QAM, la señal portadora es modificada en amplitud y fase, conjuntamente, para dar lugar a la salida analógica QAM.

### 4.6.1 Modulación 8-QAM

La modulación QAM es un tipo de modulación en la que  $M = 8$  (4 fases, 2 amplitudes) y por consiguiente  $k = 3$  ( $2^3 = 8$ ). Entonces en 8-QAM, los datos de entrada binarios están compuestos por grupos de 3 bits que reciben el nombre de tribits. La tasa de bits en cada canal será  $f_b = 3$  y la tasa de baudios igualmente  $f_b = 3$ .

En la figura 4.33 aparece un circuito modulador 8-QAM. El convertidor D/A (digital/analógico) empleado, transforma 2 entradas digitales binarias en una señal analógica PAM de 4 niveles de tensión.



**Figura 4.33: Modulador 8-QAM**

La tabla de verdad del convertidor es la que es mostrada en la Tabla 4.4:

I/Q	C	Salida
0	0	-0.541V
0	1	-1.307V
1	0	+0.541V
1	1	+1.307V

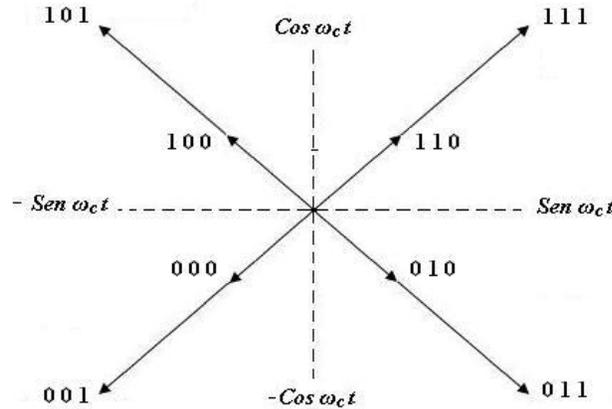
**Tabla 5.4: Tabla de verdad del convertidor de Nivel 2 a 4**

Los valores que puede tomar la señal modulada 8-QAM aparecen en la Tabla 4.5.

Tabla de Verdad			
Entrada Binaria			Amplitud y Fase de Salida de 8 QAM
Q	I	C	
0	0	0	0.765V -135°
0	1	1	1.848V -135°
0	1	0	0.765V -45°
0	1	1	1.848V -45°
1	0	0	0.765V +135°
1	0	1	1.848V +135°
1	1	0	0.765V +45°
1	1	1	1.848V +45°

**Tabla 4.5: Tabla de verdad para la salida del Modulador 8-QAM**

La figura 4.34 muestra el diagrama fasorial para 8-QAM. Esta figura comprueba que, en este caso, se ha modulado tanto en amplitud como en fase. Además, hemos conseguido que la separación angular entre dos fases de salida adyacentes sea de 90°.



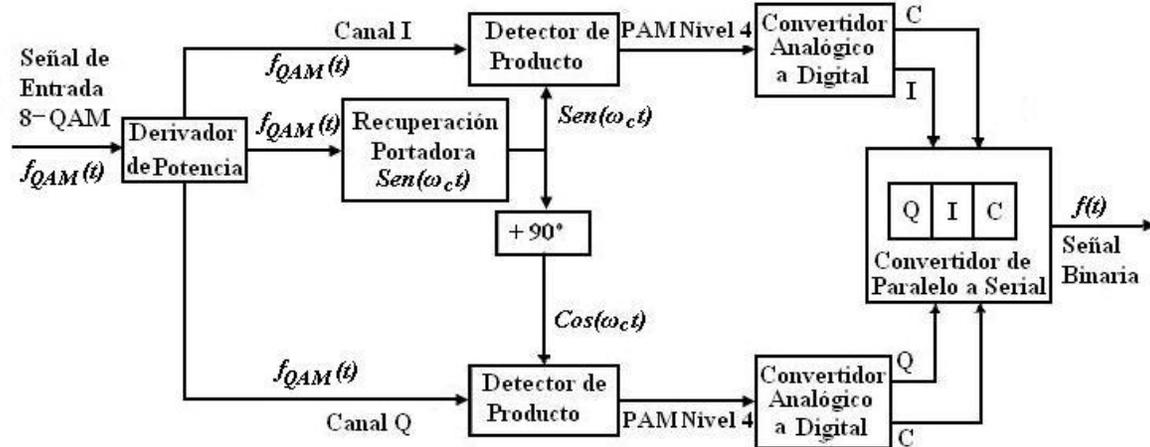
**Figura 4.34: Diagrama Fasorial 8-QAM**

Comparándola con la modulación 8-PSK, se observa un mejor comportamiento frente al ruido; esto se puede demostrar, ya que en 8-QAM al tener una separación angular entre fases adyacentes de  $90^\circ$ , permite un margen de confianza de  $\pm 45^\circ$ , en cambio para 8PSK la separación mínima entre dos fases posibles (fases adyacentes) es de  $45^\circ$ , por lo que su margen de confianza queda reducido a  $\pm 22'5''$ . De esta manera, la señal 8-QAM puede experimentar un desplazamiento de fase debido al ruido de casi  $\pm 45^\circ$  durante la transmisión y guardar todavía la integridad de la información, mientras que 8PSK sólo soportaría ruidos cuyos desplazamientos de fase no superaran los  $\pm 22'5''$ .

En el 8-QAM la tasa de bits en los canales I y Q es  $f_b/3$ . Como consecuencia, la frecuencia de modulación fundamental más alta es  $f_a = f_b/6$ , y al igual que en 8-PSK, el mínimo ancho de banda requerido es  $f_b/3$ . Igualmente la Tasa de Baudios es  $f_b/3$ .

### 4.6.1.1 Demodulación 8-QAM

En la figura 4.35 se muestra el diagrama de un demodulador de 8-QAM.



**Figura 4.35: Demodulador 8-QAM**

El demodulador mostrado en la figura 4.35 es casi idéntico al de 8-PSK. La primera de sus diferencias será los diferentes niveles de tensión que tiene la señal PAM a la salida de los multiplicadores, entonces el factor de conversión de los convertidores A/D cambiará respecto a los empleados en 8-PSK.

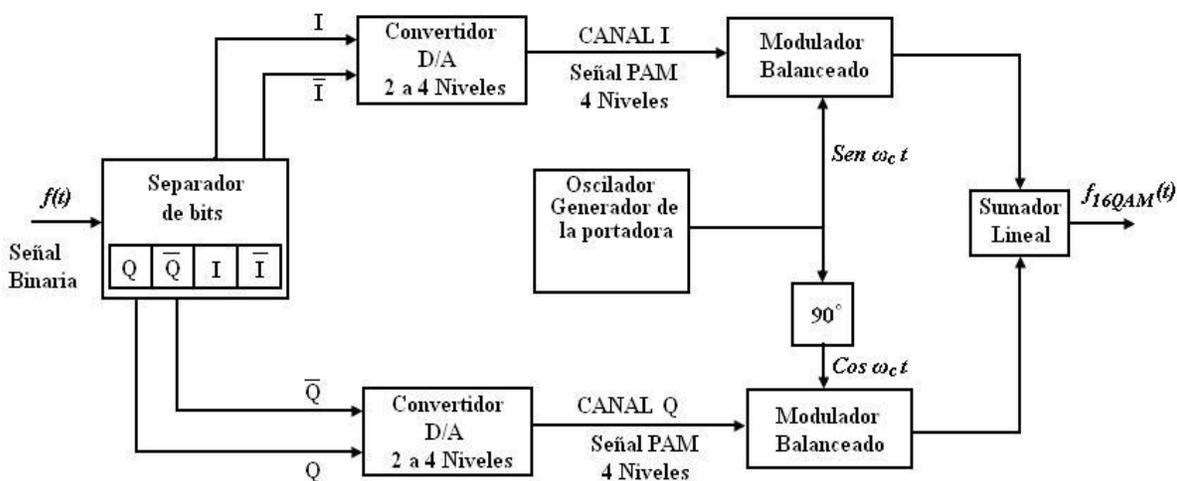
La otra diferencia va a ser las señales binarias que salen de los convertidores A/D, para el canal I las señales digitales son I y  $\bar{I}$ , en cambio para el canal Q las señales binarias Q y  $\bar{Q}$  (Para 8-PSK eran Q y  $\bar{C}$ ).

## 4.6.2 Modulación 16-QAM

Así como en 16-PSK, el 16QAM es un sistema M-ario, en donde  $M=16$ . La modulación 16-QAM actúa sobre los datos de entrada en grupos de cuatro ( $2^4 = 16$ ). Al igual que el 8-QAM, tanto la fase y la amplitud de la portadora transmisora son variados.

En la figura 4.36 se muestra el diagrama de bloques para un modulador de 16-QAM.

Los datos de entrada binaria se dividen en cuatro canales: El  $I, \bar{I}, Q$  y  $\bar{Q}$ . La tasa de bits de cada canal es igual a un cuarto de la tasa de bits de entrada ( $f_b/4$ ).



**Figura 4.36: Modulador 16-QAM**

Una vez que entran los 4 bits de información de la señal binaria, se separan en dos grupos de 2 bits cada uno como se muestra en el modulador de la figura 4.36. Estos bits entran en un convertidor D/A que transforma 2 entradas digitales en una señal analógica PAM de 4 niveles de tensión.

Los moduladores balanceados son multiplicadores analógicos, cuya salida es el producto de las señales de entrada.

El modulador de la parte superior multiplica la señal PAM del canal I por la portadora  $Sen\omega_c t$ , mientras que el de la parte inferior multiplica la señal PAM del canal Q por  $Cos\omega_c t$  (Portadora desplazada en fase  $90^\circ$ ).

Posteriormente ambas señales resultantes se suman linealmente para dar lugar a la señal de 16QAM. ( $f_{16QAM}(t)$ ).

La tabla 4.6 muestra la Tabla de verdad de los convertidores de Nivel del Modulador 16-QAM.

Tabla de Verdad Convertidores de Nivel		
I/Q	I'/Q'	Salida
0	0	-0.22V
0	1	-0.821V
1	0	+0.22V
1	1	+0.821V

**Tabla 4.6: Tabla de Verdad Convertidores de Nivel**

Las posibles salidas del Modulador 16 QAM mostrado en la figura 4.36, son mostradas en la Tabla 4.7.

Tabla de Verdad					
Entrada Binaria				Amplitud y Fase de Salida de 16 QAM	
Q	Q'	I	I'		
0	0	0	0	0.311V	-135°
0	0	0	1	0.850V	-165°
0	0	1	0	0.311V	-45°
0	0	1	1	0.850V	-15°
0	1	0	0	0.311V	-105°
1	1	1	1	1.161V	-135°
1	1	1	1	0.311V	-75°
1	1	1	1	1.161V	-45°
1	1	1	1	0.311V	+135°
1	1	1	1	0.850V	+165°
1	1	1	1	0.311V	+45°
1	1	1	1	0.850V	+15°
1	1	1	1	0.311V	+105°
1	1	1	1	1.161V	+135°
1	1	1	1	0.311V	+75°
1	1	1	1	1.161V	+45°

**Tabla 4.7: Tabla de Verdad de las salidas del modulador 16-QAM**

La figura 4.37 muestra el diagrama de fasores para 16-QAM, y como se puede observar, comprobamos que la separación angular entre dos fases de salida adyacentes es 30°, que frente a los 22'5" de la modulación 16PSK hacen que 16QAM presente una mayor inmunidad al ruido.

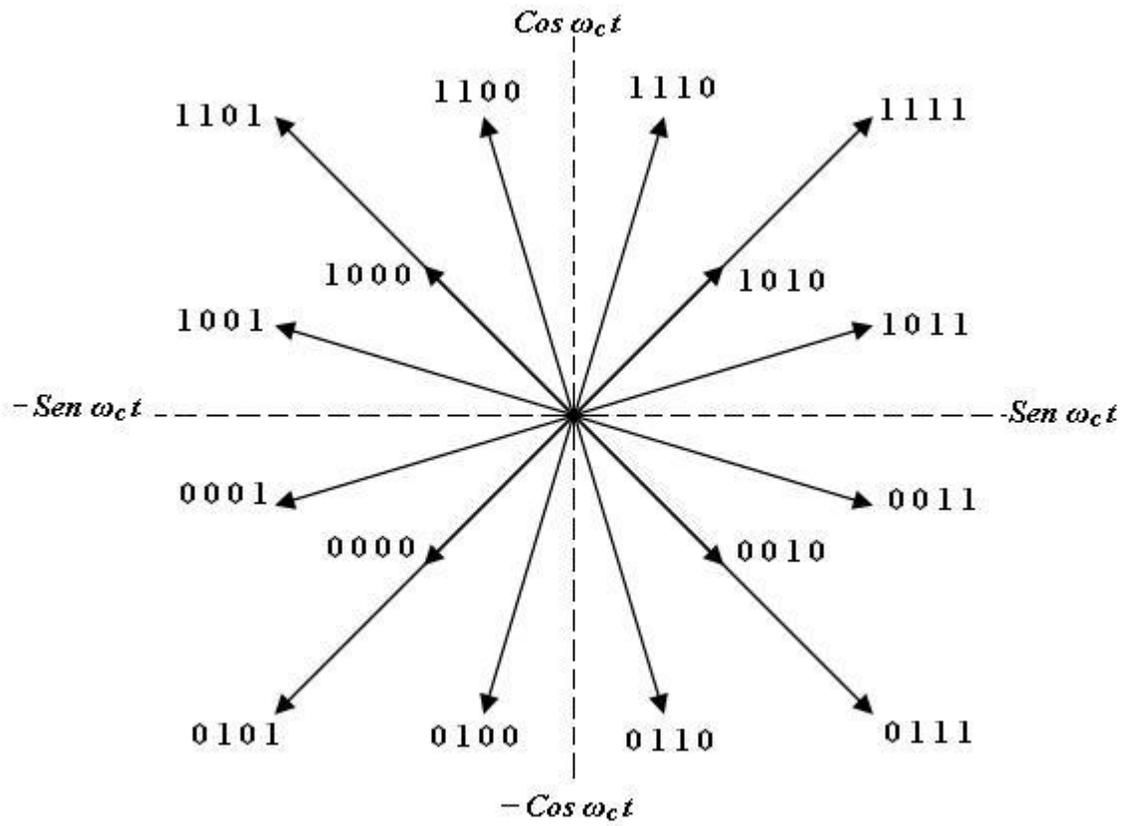


Figura 4.37: Diagrama Fasorial 16-QAM

## ACTIVIDADES

### 1. Para ASK y FSK.

Determinar:

- a) Diagrama de generación
  - b) Diagrama de demodulación coherente y no coherente.
  - c) Desarrollo analítico de la modulación.
  - d) Cálculo del ancho de banda espectral.
  - e) Desarrollo analítico de ambas detecciones.
2. Una transmisión FSK, se emplea para transmitir 1200 bits/seg, de señales digitales por un canal telefónico. Las señales FSK, deben cubrir el intervalo de 500 a 2900 Hz. Si se desea un índice de modulación  $mf = 0.7$ . Las dos frecuencias son 1200 y 2200 Hz, con conformación seno realizado.

Determinar:

- a) El ancho de banda base para transmitir dichas señales digitales.
- b) El valor del coeficiente del roll-off.

### 3. Para PSK.

Determinar:

- a) Diagrama de generación.
  - b) Desarrollo analítico de la modulación.
  - c) Cálculo del ancho de banda espectral.
  - d) Desarrollo de la detección coherente explicando por que no es posible por envuelta.
4. Explique brevemente, y dé un ejemplo del proceso de modulación y demodulación DBPSK de una señal binaria.
5. Realice un diagrama en bloques para obtener la demodulación de 8PSK y explique.
6. Desarrolle un breve diagrama para el proceso de modulación y demodulación 8 QAM.

# UNIDAD V

# TEORIA DE LA INFORMACIÓN

## INTRODUCCIÓN

En el año 1948 Claude E. Shannon sentó las bases de una teoría basada en una nueva forma de modelar la información, dándole a la misma el carácter de magnitud cuantificable. Esta teoría, universalmente reconocida bajo el nombre de “Teoría de la Información”, permitió abordar el procesamiento de datos mediante procedimientos íntegramente matemáticos, ateniéndose únicamente a su contenido de información, sin necesidad de adentrarse en la problemática de su implementación.

En este capítulo estudiaremos en que consiste la Teoría de Información de Shannon, la medición de la información, las características de la información y la codificación de la fuente según el método de Huffman.

## OBJETIVOS

- Estudiar y comprender en qué consiste la Teoría de Información de Shannon.
- Analizar el modelo de un sistema de comunicación y sus componentes.
- Interpretar el concepto de información y sus variantes.
- Sintetizar la medición de la información.
- Comprender en qué consiste la entropía como características de la información y la codificación de fuente según el código de Huffman.
- Aplicar los conceptos aprendidos para la resolución de problemas.



## **Transductor de Entrada**

El mensaje que produce la fuente no es de naturaleza eléctrica y, por lo tanto, es necesario un “transductor” ó “codificador” que convierta el mensaje en una “señal” de magnitud eléctrica variable en el tiempo (corriente o voltaje) compatible con el tipo particular de sistema de transmisión que se emplee.

Nótese entonces la diferencia entre información, mensaje y señal:

Información es la inteligencia o significado que se va a transmitir; es una entidad intangible.

- Mensaje es la materialización de la información en una cantidad mensurable: el mensaje es el soporte de la información.
- Señal es la magnitud eléctrica que resulta de la transformación de una magnitud no eléctrica portadora de información en una magnitud eléctrica variable en el tiempo. A este respecto, el número de elementos del conjunto de las señales de salida del transductor debe ser igual al número de elementos del conjunto de símbolos o mensajes de la fuente de información. La señal de salida del transductor se conoce también con el nombre de “señal mensaje”.

El transductor de salida o “descodificador”, efectúa la operación inversa del transductor de entrada; es decir, reconvierte las señales eléctricas recibidas en los símbolos o mensajes correspondientes, los cuales son presentados al destinatario para su interpretación.

## **Transmisor**

Aunque no deja de ser frecuente encontrar el transductor de entrada acoplado directamente al canal, como sucede, por ejemplo, en un sistema telefónico local, generalmente es necesario “modular” una señal sinusoidal con la señal del transductor de entrada, sobre todo para transmisión a gran distancia. La “modulación” es la variación sistemática de alguna característica de una señal, denominada “portadora”, en concordancia con la señal mensaje o “señal modulante”.

## **Canal**

El canal de transmisión es el enlace eléctrico entre el transmisor y el receptor. Puede ser un par de conductores, un cable coaxial, una fibra óptica o sencillamente el espacio libre en el cual la señal se propaga en forma de una onda electromagnética. Al propagarse a través del canal, la señal transmitida se distorsiona debido a las no linealidades y/o las imperfecciones en la respuesta de frecuencia del canal. Otras fuentes de degradación son el “ruido” y la “interferencia” que recoge la señal a su paso por el canal.

## **Receptor**

El objeto del receptor es el de extraer la señal deseada a partir de la señal degradada transmitida por el canal. Como las señales recibidas son en general débiles y plagadas de ruido, una primera operación del receptor es la amplificación y filtrado de dichas señales para poderlas procesar. Pero la operación fundamental del receptor es la “demodulación” o “detección”, que es el proceso inverso de la modulación en el transmisor. Debido a la degradación de la señal recibida, el receptor no puede reconstruir exactamente la señal original, aunque el tipo de degradación que resulta depende del sistema de modulación que se utilice.

## **Ruido**

Se utiliza el termino “Ruido” para denominar señales que perturban la transmisión y procesamiento de señales en los sistemas de comunicación y sobre las cuales no se tiene un control completo.

El ruido que afecta a un sistema de comunicación se clasifica en categorías dependiendo de su origen. Cuando el ruido proviene de los componentes del sistema tales como resistencias, tubos al vacío y dispositivos de estado sólido, se conoce como “ruido interno”. La segunda categoría de ruido resulta de fuentes externas al sistema de comunicación e incluye el ruido atmosférico, extraterrestre y el producido por el hombre; es el “ruido externo”.

El ruido externo lo podemos clasificar, someramente, en los siguientes tipos:

1. **Ruido Atmosférico.** Por descargas eléctricas asociadas a las tormentas. Se conoce como “estática”. Por debajo de los 100 MHz, la intensidad de campo es inversamente proporcional a la frecuencia. En el dominio del tiempo se caracteriza por impulsos de gran amplitud y poca duración; es un ruido de tipo impulsivo. Afecta más a la banda de frecuencias medias (radiodifusión) que a la banda de FM o TV. Para la transmisión de datos es de particular importancia.
2. **Ruido Extraterrestre.** Incluye el debido al sol y otros cuerpos calientes. Debido a su alta temperatura y proximidad a la tierra, el sol es una fuente intensa, pero afortunadamente localizada, de energía radiante en una amplia gama de frecuencias. Las estrellas son fuentes de energía radiante de banda ancha, que aunque más distantes y por ende menos intensas, por ser más numerosas son colectivamente importantes como fuentes de ruido. Radioestrellas, tales como cuasares y pulsares, también contribuyen al ruido cósmico que en conjunto se extiende desde unos cuantos MHz hasta unos cuantos GHz.
3. **Ruido producido por el hombre.** Descargas por efecto corona en líneas de alta tensión, el producido por motores eléctricos, sistemas de diatermia, ruido de conmutación, etc. El ruido de conmutación y de sistemas de ignición es del tipo impulsivo tal como el ruido atmosférico. El debido al alumbrado fluorescente es un ruido muy frecuente en nuestro medio ambiente.

## **Ancho de Banda y Potencia de Transmisión**

En los sistemas de transmisión existen dos parámetros de gran importancia: el ancho de banda del canal y la potencia transmitida. Los sistemas de comunicación deben diseñarse entonces para utilizar estos dos recursos en la forma más eficiente posible. Es difícil optimizar ambos recursos simultáneamente, pues en la mayoría de los canales de comunicación un recurso puede considerarse más importante o más escaso que otro. Se puede, por lo tanto, clasificar los canales como “limitados en potencia” o “limitados en ancho de banda”. Por ejemplo, los canales telefónicos son canales limitados en ancho de banda, mientras que un canal de microondas lo es en potencia. La meta ideal en el diseño de un sistema de comunicación es la de transmitir información a la máxima velocidad con el mínimo de potencia y ancho de banda. La utilización óptima y eficiente de estos recursos es el principal objetivo en el diseño de los sistemas de comunicación prácticos.

## 5.1.2 Información

El concepto de información es definido en términos estrictamente estadísticos, bajo el supuesto, que puede ser tratado de manera semejante a como son tratadas las cantidades físicas como la masa y la energía. La palabra "información" no está relacionada con lo que decimos, sino más bien, con lo que podríamos decir. El concepto de información se relaciona con la libertad de elección que tenemos para seleccionar un mensaje determinado de un conjunto de posibles mensajes. Si nos encontramos en una situación en la que tenemos que elegir entre dos únicos mensajes posibles, se dice, de un modo arbitrario, que la información correspondiente a esta situación es la unidad. La Teoría de la Información, entonces, conceptualiza el término información como el grado de libertad de una fuente para elegir un mensaje de un conjunto de posibles mensajes.

El concepto de información supone la existencia de duda o incertidumbre. La incertidumbre implica que existen diferentes alternativas que deberán ser elegidas, seleccionadas o discriminadas. Las alternativas se refieren a cualquier conjunto de signos construidos para comunicarse, sean estas letras, palabras, números, ondas, etc. En este contexto, las señales contienen información en virtud de su potencial para hacer elecciones. Estas señales operan sobre las alternativas que conforman la incertidumbre del receptor y proporcionan el poder para seleccionar o discriminar entre algunas de estas alternativas.

Se asume que en los dos extremos del canal de comunicación -fuente y receptor- se maneja el mismo código o conjunto de signos. La función de la fuente de información será seleccionar sucesivamente aquellas señales que constituyen el mensaje y luego transmitir las al receptor mediante un determinado canal.

Existen diversos tipos de situaciones de elección. Las más sencillas son aquellas en que la fuente escoge entre un número de mensajes concretos. Por ejemplo, elegir una entre varias postales para enviarle a un amigo. Otras situaciones más complejas son aquellas en que la fuente realiza una serie de elecciones sucesivas de un conjunto de símbolos elementales tales como letras o palabras. En este caso, el mensaje estará constituido por la sucesión de símbolos elegidos.

Al medir cuánta información proporciona la fuente al receptor al enviar un mensaje, se parte del supuesto que cada elección está asociada a cierta probabilidad, siendo algunos mensajes más probables que otros. Uno de los objetivos de esta teoría es determinar la cantidad de información que proporciona un mensaje, la cual puede ser calculada a partir de su probabilidad de ser enviada.

El tipo de elección más simple es el que existe entre dos posibilidades, en que cada una tiene una probabilidad de  $1/2$  (0,5). Por ejemplo, al tirar una moneda al aire ambas posibilidades -cara y sello- tienen la misma probabilidad de salir.

## 5.2 MEDICIÓN DE LA INFORMACIÓN

Se demostrará que, el tiempo que se requiere para transmitir un mensaje con probabilidad de ocurrencia  $P$  es naturalmente proporcional a  $\log(1/P)$ .

Comencemos con el caso de los mensajes binarios  $m_1$  y  $m_2$ , donde tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Se usan dígitos binarios para codificar estos mensajes. Los mensajes  $m_1$  y  $m_2$  se representan mediante los dígitos **0** y **1**, respectivamente. Debemos tener un mínimo de un dígito binario (puede tomar dos valores) para representar cada uno de los dos mensajes igualmente probables.

Consideremos ahora el caso de cuatro mensajes probables  $m_1, m_2, m_3$  y  $m_4$ . Al codificarlos en forma binaria, se necesitaría un mínimo de 2 dígitos binarios por mensaje. Cada dígito binario puede tomar dos valores. Entonces, una combinación de dos dígitos binarios puede formar las cuatro palabras de código **00, 01, 10, 11**, que se asignan a los cuatro mensajes equiprobables  $m_1, m_2, m_3$  y  $m_4$ , respectivamente. Es claro que cada uno de los cuatro mensajes requiere un tiempo doble de transmisión que el que requiere cada uno de los dos mensajes equiprobables y en consecuencia, contienen el doble de información. En virtud de que todos los mensajes son equiprobables,  $P$ , la probabilidad que ocurra uno cualquiera de los mensajes, es  $1/n$ , donde  $n$  es el número de mensajes equiprobables. Por lo tanto cada mensaje (con probabilidad  $P$ ) necesita  $\log_2(1/P)$  dígitos binarios para su codificación. Es evidente entonces que la información  $I$  contenida en un mensaje con probabilidad de ocurrencia  $P$  es proporcional a  $\log_2(1/P)$ .

$$I = k \log_2 \frac{1}{P} \quad (5.1)$$

Se definirá ahora la información que conduce un mensaje conforme a la ecuación (4.1). La constante de proporcionalidad se toma como la unidad, por conveniencia, y la información resulta entonces en términos de unidades binarias, que se abrevian como bit (Unidad Binaria).

$$I = \log_2 \frac{1}{P} \text{ bits} \quad (5.2)$$

Según esta definición “ $I$ ” en un mensaje puede interpretarse como el número mínimo de dígitos para codificar el mensaje, y se calcula mediante  $\log_2(1/P)$ , en donde  $P$  es la probabilidad de ocurrencia del mensaje.

Consideremos los dígitos *r-arios* en lugar de binarios para la codificación. Cada uno de los dígitos *r-arios* puede tomar  $r$  valores (0, 1, 2, ...  $r-1$ ). Cada uno de  $n$  mensajes (codificados mediante dígitos *r-arios*) puede ser transmitido entonces mediante una sucesión particular de señales *r-arias*.

Ya que cada dígito *r-arios* puede tomar  $r$  valores,  $k$  dígitos *r-arios* pueden formar un máximo de  $r^k$  palabras de código distintas. En consecuencia, para codificar cada uno de los  $n$  mensajes equiprobables, se necesita un mínimo de  $\log_r n$  dígitos *r-arios*. Pero  $n = \frac{1}{P}$ . Obviamente, se

Los mensajes que ocurren con mayor frecuencia (mayor probabilidad de ocurrencia) necesitan un tiempo más corto para su transmisión en comparación con los de menor probabilidad de ocurrencia.

necesita un mínimo de  $\log_r(1/P)$  dígitos *r-arios*. La información *I* por mensaje puede considerarse como:

$$I = \log_r \frac{1}{P} \text{ unidades } r\text{-arias} \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) es una definición general de la información, y la ecuación (5.2) es el caso especial de  $r = 2$ .

## 5.3 CARACTERIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

### 5.3.1 Entropía

La cantidad de información definida en la ecuación (5.2) ha sido obtenida para un solo mensaje y no es apropiada para describir una fuente que produce un conjunto de diferentes mensajes. Un sistema de comunicación no está diseñado para la transmisión de un mensaje particular sino para la transmisión de todos los mensajes posibles producidos por una fuente. En este contexto, la cantidad de información definida en (5.2) es inadecuada excepto en las circunstancias más simples.

Tomemos por ejemplo tres mensajes A, B y C posibles; si los dos primeros fueran utilizados en promedio 10 veces por hora, y si el tercer mensaje se usara solamente una vez a la semana, entonces la cantidad de información asociada con los mensajes sería más cercana a  $\log_2 2$  bits que a  $\log_2 3$  bits. Es decir, el “número efectivo” de mensajes disponible es más cercano a 2 que a 3. Por consiguiente, cuando el flujo instantáneo de información producido por una fuente es aleatorio, es mejor describir la fuente en términos de la “información promedio” producida.

Consideremos una fuente “m” sin memoria que emite los mensajes  $m_1, m_2, \dots, m_n$  con probabilidades  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , respectivamente ( $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$ ). Una *fuente sin memoria* implica que cada mensaje que se emite es independiente del (de los) mensaje(s) anterior(es). Por la definición de la ecuación (5.2), el contenido de la información de un mensaje  $m_i$  es  $I_i$  que resulta de:

$$I_i = \log_2 \frac{1}{P_i} \text{ bits} \quad (5.4)$$

La probabilidad de ocurrencia de  $m_i$  es  $P_i$ . En consecuencia, la información media o promedio, por mensaje que emite la fuente es  $\sum_{i=1}^n P_i I_i$  bits. La información promedio por mensaje de una fuente m se le llama **entropía**, que se representa como  $H(m)$ . De donde,

$$\begin{aligned} H(m) &= \sum_{i=1}^n P_i I_i \text{ Bits} \\ &= \sum_{i=1}^n P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \end{aligned} \quad (5.5a)$$

$$= -\sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i \quad (5.5b)$$

En los terrenos cualitativos, se espera que la entropía sea máxima cuando todos los mensajes sean equiprobables. Se demostrara enseguida que esto es realmente cierto.

La entropía de una fuente es una función de las probabilidades del mensaje (medida de la incertidumbre), la distribución de la probabilidad que genera la máxima incertidumbre tendrá la máxima entropía.

Ya que  $H(m)$  es una función de  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , el máximo valor de  $H(m)$  se encuentra mediante la ecuación  $dH(m)/dP_i = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , con la restricción de que:  $P_n = 1 - (P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1})$

Ya que

$$H(m) = -\sum_{i=1}^n P_i \log P_i \quad (5.6)$$

Se puede advertir que al calcular  $dH(m)/dP_i$  de la ecuación (5.6) es necesario considerar solamente los términos  $-P_i \log P_i$  y  $-P_n \log P_n$  [ya que  $P_n$  es una función de  $P_i$ , como se vio en la ecuación (5.5)]. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dH(m)}{dP_i} &= \frac{d}{dP_i} [-P_i \log P_i - P_n \log P_n] \\ &= \log \frac{P_n}{P_i} \end{aligned}$$

Que es igual a cero si  $P_i = P_n$ . Ya que esto es cierto para todo valor de  $i$ , se tiene

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{n} \quad (5.7)$$

Para demostrar que la ecuación (5.7) da por resultado  $[H(m)]_{\text{máx}}$  y no  $[H(m)]_{\text{mín}}$ , observe que cuando  $P_1 = 1$  y  $P_2 = P_3 = \dots = P_n = 0$ ,  $H(m) = 0$ , mientras que las probabilidades en la ecuación (4.7) producen

$$\begin{aligned} H(m) &= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} \\ &= \log_2 n \end{aligned} \quad (5.8)$$

### **Ejemplo 5.1**

Al considerar una información producida por una máquina de escribir de 26 letras y el espacio entre letras; en otras palabras, la fuente produce 27 símbolos. Determinar la máxima información que la maquina pueda generar. Explique.

### **Solución.**

Si todos los elementos tuvieran la misma probabilidad,  $H_{\text{MAX}} = \log_2 27 = 4,755$  bits/letra.

Esta es la máxima información que la máquina de escribir puede generar. Pero en el idioma español las letras tienen diferentes probabilidades de ocurrencia en un texto. Por ejemplo, la letra E es la que ocurre con más frecuencia. Se ha determinado experimentalmente que la información promedio asociada con una letra es de aproximadamente 4,2 bits. Asimismo, una palabra tiene, en promedio, 5 letras y un contenido de información de 9,3 bits.

### 5.3.2 Velocidad de Información

En los sistemas de comunicación es de especial importancia conocer la cantidad de información que se produce o se transfiere por unidad de tiempo, es decir, la velocidad de la información.

Sea una fuente que produce  $N$  símbolos distintos e independientes a una velocidad de  $V_s$  símbolos por segundo. Si suponemos que los símbolos tienen toda la misma duración  $T$ , entonces

$$V_s = \frac{1}{T} \text{ Símbolos / segundo} \quad (5.9)$$

La velocidad de información será:

$$V_i = V_s H = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N P_j \log_2 \frac{1}{P_j} \text{ bits / seg (bps)} \quad (5.10)$$

Y los símbolos son equiprobables,

$$V_i = V_s \log_2 N = \frac{1}{T} \log_2 N \text{ (bps)} \quad (5.11)$$

A la velocidad de información le es llamada también “rata o tasa de información” (del Inglés “rate”); pero, en este contexto, la palabra “rata” en español significa “porcentaje” o “parte proporcional”. Emplearemos los términos “velocidad de información” ó “velocidad de transmisión” indistintamente.

### 5.3.3 Velocidad de Modulación

Los codificadores son dispositivos comandados por un reloj, de modo que los impulsos tienen toda la misma duración  $T$ . De  $T = n\tau$  y la expresión ( $V_{ic} = \frac{n \log_2 m}{T} = \frac{1}{T} \log_2 m^n$  (bps) ) queda en la forma siguiente:

$$V_i = \frac{1}{\tau} \log_2 m = V_b \log_2 m \text{ (bps)} \quad (5.12)$$

$$\text{Donde } V_b = \frac{1}{\tau} \quad (5.13)$$

$V_b$  es el número de impulsos por segundo; se conoce con el nombre de “velocidad de modulación” ó “velocidad de señalización”, y se expresa en baudios.

En un sistema binario,  $m=2$  y la expresión (5.12) queda  $V_i=V_b$

Con lo cual se concluye que en un sistema binario la velocidad de información y la velocidad de modulación son numéricamente iguales.

#### **Ejemplo 5.2**

Se puede ahora calcular la velocidad de modulación de las muestras  $n = 4$ ,  $n = 8$ .

$$V_s = 100 \text{ simb/seg} = \frac{1}{\tau} \quad ; T = 10\text{ms}$$

$$\text{Para } n = 4, \tau_2 = \frac{T}{4} = 2,5ms; \quad V_{b2} = \frac{1}{\tau_2} = 400\text{baudios}$$

$$\text{Para } n = 8, \tau_1 = \frac{T}{8} = 1,25ms; \quad V_{b1} = \frac{1}{\tau_1} = 800\text{baudios}$$

### 5.3.4 Codificación de Canal

Para que los símbolos puedan ser transmitidos por un canal dado, es necesario efectuar una conversión o adaptación de los mismos, en formas compatibles con el medio de transmisión; ésta es la codificación de canal, denominada también “codificación de fuente”. Hay muchos métodos de codificación digital de canal. En un sistema de codificación digital de canal, cada símbolo o mensaje se transforma en una secuencia particular de “n” impulsos con “m” amplitudes, secuencia que denominaremos “muestra codificada o palabra codificada” y el conjunto de palabras codificadas forman una secuencia aleatoria binaria. Esta transformación se denomina comúnmente “conversión” o “codificación” y el dispositivo que la efectúa, “convertidor” o “codificador”. Como se considera que el codificador no tiene memoria, la duración de la muestra codificada debe ser, como máximo, igual a la duración de cada símbolo a fin de no perder información.

En sistemas de procesamiento y transmisión de señales digitales, se utilizan secuencias binarias ( $m = 2$ ) que contienen 8 impulsos ( $n = 8$ ). Esta secuencia binaria de 8 impulsos se denomina comúnmente “byte” u “octeto” (En la práctica 1 Kbyte = 1024 bytes, para diferenciarlo de 1 kbyte = 1000 bytes).

#### *Ejemplo 5.3*

Una fuente de información produce 256 símbolos, que suponemos independientes y equiprobables, a una velocidad de 100 símbolos por segundo. Si cada símbolo se codifica en secuencias de n impulsos con m amplitudes, vamos a determinar la velocidad de información y los valores posibles de m y n.

#### **Solución:**

La velocidad de información es  $V_i = 100 \log_2 256 = 800$  bps. Las combinaciones de m y n que satisfacen la expresión ( $N = m^n$ ), es decir,  $256 = m^n$ , son  $m = 2$  y  $n = 8$  (caso binario);  $m = 4$  y  $n = 4$ .

## 5.4 CODIFICACIÓN DE LA FUENTE

Como ya se demostró, el número mínimo de dígitos binarios que se requiere para codificar un mensaje es igual a la entropía de la fuente ( $\log(1/P)$ ) si todos los mensajes de la fuente son equiprobables (la probabilidad de cada mensaje es  $P$ ). Ahora se generalizara este resultado para el caso de mensajes no equiprobables. Se demostrará que el número promedio de dígitos binarios que se requiere para la codificación resulta de  $H(m)$  [en bits] para una distribución de probabilidad arbitraria de los mensajes.

Consideremos una sucesión de  $N$  mensajes con  $N \rightarrow \infty$ . Sea  $k_i$  el número de veces que el mensaje  $m_i$  se presenta en esta sucesión; entonces de acuerdo con la interpretación de la frecuencia relativa,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_i}{N} = P_i$$

De esta forma, el mensaje  $m_i$  se presenta  $NP_i$  veces en toda la sucesión de  $N$  mensajes (siempre que  $N \rightarrow \infty$ ). Por lo tanto, en una sucesión típica de  $N$  mensajes,  $m_1$  ocurrirá  $NP_1$  veces,  $m_2$  ocurrirá  $NP_2$  veces, ...,  $m_n$  ocurrirá  $NP_n$  veces. Todas las demás composiciones es extremadamente poco probable que ocurran ( $P \rightarrow 0$ ). De esta manera cualquier sucesión típica (en la que  $N \rightarrow \infty$ ) tiene la misma proporción de los  $n$  mensajes, aunque, en general, el orden será diferente. Se supondrá una fuente de memoria cero, o sea, el mensaje se emite de la fuente independiente de los mensajes anteriores.

Consideremos ahora una sucesión típica  $S_N$  de  $N$  mensajes provenientes de la fuente. Puesto que los  $n$  mensajes (de probabilidades  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ) ocurren  $NP_1, NP_2, \dots, NP_n$  veces, respectivamente, y ya que cada uno de los mensajes es independiente, la probabilidad de ocurrencia de una sucesión típica es  $S_N$  es:

$$P(S_N) = (P_1)^{NP_1} (P_2)^{NP_2} \dots (P_n)^{NP_n} \quad (5.14)$$

Como todas las sucesiones posibles de  $N$  mensajes de esta fuente tienen la misma composición, entonces todas las sucesiones (de  $N$  mensajes) son equiprobables, con probabilidad  $P(S_N)$ . Se pueden considerar estas sucesiones como nuevos mensajes (que ahora son equiprobables). Para codificar una de tales sucesiones, se necesitan  $L_N$  dígitos binarios, donde

$$L_N = \log \left( \frac{1}{P(S_N)} \right) \text{ dígitos binarios} \quad (5.15)$$

Se sustituye la ecuación (5.9) en (5.10) y se obtiene

$$\begin{aligned} L_N &= N \sum_{i=1}^n P_i \log \frac{1}{P_i} \\ &= NH(m) \text{ dígitos binarios} \end{aligned}$$

El objetivo básico de la codificación de fuente es eliminar la redundancia en una fuente. El origen de codificación, por lo tanto, logra la compresión de datos y reduce la tasa de transmisión. Una reducción de la tasa de transmisión puede reducir el costo de un vínculo más, y permite a los usuarios compartir el

Observe que  $L_N$  es la longitud (número de dígitos binarios) de la palabra de código que se requiere para codificar  $N$  mensajes en secuencia. Por lo tanto  $L$ , el promedio de dígitos que se requiere por mensaje, es  $L_N/N$  y resulta de

$$L_N = \frac{L_N}{N} = H(m) \text{ dígitos binarios} \quad (5.16)$$

Este es el resultado que se deseaba y establece que es posible codificar los mensajes que emite una fuente usando, en promedio,  $H(m)$  número de dígitos binarios por mensaje, donde  $H(m)$  es la entropía de la fuente (en bits). Aunque esto no prueba que, en promedio, este es el número mínimo de dígitos que se requiere, es posible, es posible demostrar que  $H(m)$  es en realidad el mínimo. No es posible encontrar algún código unívocamente decodificable cuya longitud media sea menor que  $H(m)$ .

### 5.4.1 Códigos Compactos “Código Huffman”

El teorema de codificación de una fuente dice que para codificar una fuente con entropía  $H(m)$  se necesita, en promedio, un mínimo de  $H(m)$  dígitos binarios por mensajes o bien  $H_r(m)$  dígitos r-arios por mensaje, donde  $H_r(m)$  es la entropía en la ecuación (5.6) que se calcula utilizando a  $r$  como la base del logaritmo. El número de dígitos en la palabra de código es la longitud de la palabra. De esta forma, la longitud media de palabra de un código óptimo es  $H(m)$ . Desafortunadamente, para lograr esta longitud, en general se tiene que codificar una sucesión de  $N$  mensajes ( $N \rightarrow \infty$ ) a la vez. Si se desea codificar cada mensaje directamente sin usar sucesiones más largas entonces, en general, la longitud media de la palabra código por mensaje será mayor que  $H(m)$ . en la practica, no conviene usar sucesiones largas, ya que ocasionan retardo en la transmisión y son factor de complejidad en el equipo.

En consecuencia, es preferible codificar mensajes directamente, aun si el precio a pagar es la longitud incrementada de las palabras. En la mayoría de los casos, el precio se vuelve reducido. Las ventajas de codificar largas sucesiones son sólo marginales. El siguiente es un procedimiento, dado sin demostración, para encontrar el código de fuente óptimo (llamado código Huffman).

Codificación de Huffman es un eficiente método de codificación sin pérdidas de fuente para eliminar la redundancia. Se trata de una longitud variable de esquema de codificación.

Se ilustrará el procedimiento con un ejemplo utilizando el código binario. En primer lugar, se dispondrán los mensajes en orden de probabilidad descendente como se muestra en la tabla 5.1. Se tienen aquí seis mensajes con probabilidades 0.30, 0.25, 0.15, 0.12, 0.10 y 0.08, respectivamente.

Fuente Original		Fuentes Reducidas			
Mensajes	Probabilidades	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>
<i>m</i> <sub>1</sub>	0.03	0.30	0.30	0.43	0.57
<i>m</i> <sub>2</sub>	0.25	0.25	0.27	0.30	0.43
<i>m</i> <sub>3</sub>	0.15	0.18	0.25	0.27	
<i>m</i> <sub>4</sub>	0.12	0.15	0.18		
<i>m</i> <sub>5</sub>	0.10	0.12			
<i>m</i> <sub>6</sub>	0.08				

**Tabla 5.1: Proceso de Codificación Huffman**

Se combinan ahora los últimos dos mensajes en un mensaje con probabilidad  $P_5 + P_6 = 0.18$ . Esto deja a cinco mensajes con probabilidades, 0.30, 0.25, 0.15, 0.12 y 0.18. Estos mensajes ahora se colocan en la segunda columna en orden de probabilidad descendente. Se repite este procedimiento combinando los dos últimos mensajes de la segunda columna y colocan en orden de probabilidad descendente. Se hace esto hasta que el número de mensajes se reduce a 2. A estos dos mensajes (reducidos) se asignan **0** y **1** como primeros dígitos en la sucesión del código. Ahora, se asignan los números 0 y 1 al segundo dígito de los dos mensajes que se combinaron en el paso anterior. Se sigue en esta forma hasta que se llega a la primera columna. Se puede demostrar que el código que se obtiene finalmente (para la primera columna) es el óptimo. El procedimiento completo se incluye en las tablas 5.1 y 5.2.

Fuente Original			Fuentes Reducidas							
Mensajes	Probabilidades	Código	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>				
<i>m</i> <sub>1</sub>	0.30	<b>00</b>	0.30	<b>00</b>	0.30	<b>00</b>	0.43	<b>1</b>	0.57	<b>0</b>
<i>m</i> <sub>2</sub>	0.25	<b>10</b>	0.25	<b>10</b>	0.27	<b>01</b>	0.30	<b>00</b>	0.43	<b>1</b>
<i>m</i> <sub>3</sub>	0.15	<b>010</b>	0.18	<b>11</b>	0.25	<b>10</b>	0.27	<b>01</b>		
<i>m</i> <sub>4</sub>	0.12	<b>011</b>	0.15	<b>010</b>	0.18	<b>11</b>				
<i>m</i> <sub>5</sub>	0.10	<b>110</b>	0.12	<b>011</b>						
<i>m</i> <sub>6</sub>	0.08	<b>111</b>								

**Tabla 5.2: Proceso de Codificación de Huffman**

El código óptimo (Huffman) que se obtienen de este modo se llama también código compacto. La longitud media del *código compacto* en este caso es:

$$L = \sum_{i=1}^n P_i L_i = 0.60 + 0.50 + 0.45 + 0.36 + 0.30 + 0.24$$

$$= 2.45 \text{ dígitos binarios}$$

La entropía  $H(m)$  de la fuente es:

$$H(m) = \sum_{i=1}^n P_i \log_2 \frac{1}{P_i} = 2.418 \text{ bits}$$

Por lo tanto, la mínima longitud posible (que alcanza una sucesión infinitivamente larga de mensajes) es igual a 2.418 bits. Utilizando codificación directa (el código Huffman), es posible lograr una longitud media de 2.45 bits en el ejemplo dado. Esta es una aproximación muy cercana al comportamiento óptimo que se puede alcanzar. De esta manera, poco se gana mediante la codificación compleja usando largas sucesiones de mensajes. Se puede probar que el código Huffman es unívocamente decodificable; esto es, una sucesión de mensajes codificados puede ser decodificada en forma no ambigua.

El merito de cualquier código se mide mediante su longitud media en comparación con  $H(m)$  [la mínima longitud media posible]. Se define la eficiencia de código  $\eta$  como

$$\eta = \frac{H(m)}{L} \quad (5.17)$$

En donde  $L$  es la longitud media del código. En el presente ejemplo;

$$\eta = \frac{2.418}{2.45} = 0.976$$

La redundancia  $\gamma$  se define como:

$$\gamma = 1 - \eta = 0.024$$

Se usa un procedimiento similar para encontrar un código compacto  $r$ -ario. En este caso se arreglan los mensajes en orden de probabilidad descendente, se combinan los  $r$  últimos mensajes en un mensaje, y se vuelve a ordenar el nuevo conjunto (conjunto reducido) en orden de probabilidad descendente. Se repite el procedimiento hasta que el conjunto final se reduce a  $r$  mensajes; a cada uno de estos mensajes se le asigna ahora uno de los  $r$  números  $0, 1, 2, \dots, r-1$ . Se regresa ahora exactamente de la misma forma que en el caso binario hasta que cada uno de los mensajes originales tenga un código asignado.

Para un código  $r$ -ario, se tendrán exactamente  $r$  mensajes en el último conjunto reducido sí y sólo si el número total de mensajes originales es igual a  $r + k(r-1)$ , en donde  $k$  es un entero. Esto es obvio, ya que cada reducción hace decrecer el número de mensajes en  $r-1$ . En consecuencia, si hay un total de  $k$  reducciones, el número total de mensajes originales debe ser  $r + k(r-1)$ . En caso que los mensajes originales no satisfagan esta condición, se deben agregar algunos mensajes apócrifos con probabilidad cero de ocurrencia hasta que se cumpla la condición.

Con un ejemplo, si  $r = 4$  y el número de mensajes  $n$  es 6, entonces se debe agregar un mensaje apócrifo con probabilidad cero de ocurrencia para hacer el número total de mensajes igual a 7, esto es,  $[4 + 1(4-1)]$  y se procede en la forma usual. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 4.1.

**Ejemplo 5.4**

Una fuente de memoria cero emite seis mensajes con probabilidades 0.3, 0.25, 0.15, 0.12, 0.1 y 0.08, respectivamente. Encontrar el código 4-ario (cuaternario) Huffman. Determinar su longitud media de palabra, la eficiencia y la redundancia.

El código Huffman se encuentra en la tabla 5.3. La longitud L de este código es:

$$L = 0.3(1) + 0.25(1) + 0.15(1) + 0.12(2) + 0.1(2) + 0.08(2)$$

$$= 1.3 \text{ Unidades 4-arias}$$

Y

$$H_4(m) = -\sum_{i=1}^6 P_i \log_4 P_i$$

$$= 1.209 \text{ Unidades 4-arias}$$

Fuente Original			Fuentes Reducidas	
Mensajes	Probabilidades	Código		
$m_1$	0.30	0	0.30	0
$m_2$	0.25	2	0.30	1
$m_3$	0.15	3	0.25	2
$m_4$	0.12	10	0.15	3
$m_5$	0.10	11		
$m_6$	0.08	12		
$m_7$	0.00	13		

**Tabla 5.3: Código Huffman para ejemplo 5.4**

La eficiencia del código  $\eta$  se calcula mediante:

$$\eta = \frac{H(m)}{L} = \frac{1.209}{1.3} = 0.93$$

La redundancia es:

$$\gamma = 1 - \eta = 0.07$$

Para lograr una eficiencia de código  $\eta \rightarrow 1$ , se necesita que  $N \rightarrow \infty$ . El código Huffman usa  $N = 1$  pero su eficiencia es, en general, menor que 1. Existe un compromiso entre estos extremos de  $N = 1$  y  $N = \infty$ . Se puede usar  $N = 2$  o 3. En la mayoría de los casos, el uso de  $N = 2$  o 3 pueden dar por resultado una eficiencia cercana a 1.

**Ejemplo 5.5**

Una fuente de memoria cero emite los mensajes  $m_1$  y  $m_2$  con probabilidades 0.8 y 0.2, respectivamente. Encontrar el código binario óptimo para esta fuente así como para sus extensiones de segundo y tercer orden (esto es, para  $N = 2$  y 3). Determinar las eficiencias del código en cada caso.

El código Huffman para la fuente es simplemente **0** y **1**, dando  $L = 1$ , y

$$H(m) = -(0.8 \log 0.8 + 0.2 \log 0.2) = 0.72 \text{ bits}$$

De donde

$$\eta = 0.72$$

Para la extensión de segundo orden de la fuente ( $N = 2$ ), existen mensajes compuestos posibles,  $m_1m_1$ ,  $m_1m_2$ ,  $m_2m_1$ ,  $m_2m_2$ , con las probabilidades 0.64, 0.16, 0.16 y 0.04, respectivamente. El código Huffman se obtiene de la tabla 5.4.

Fuente Original			Fuentes Reducidas		
Mensajes	Probabilidades	Código			
$m_1 m_1$	0.64	<b>0</b>	0.64	<b>0</b>	0.64
$m_1 m_2$	0.16	<b>11</b>	0.20	<b>10</b>	0.36
$m_2 m_1$	0.16	<b>100</b>	0.16	<b>11</b>	0.36
$m_2 m_2$	0.04	<b>101</b>			

**Tabla 5.4: Código Huffman**

En este caso la longitud media de palabra  $L'$  es:

$$L' = 0.64 + 2(0.16) + 3(0.16 + 0.04) = 1.56$$

Esta es la longitud de palabra para dos mensajes de la fuente original. Por lo tanto  $L$ , la longitud de palabra por mensaje, es:

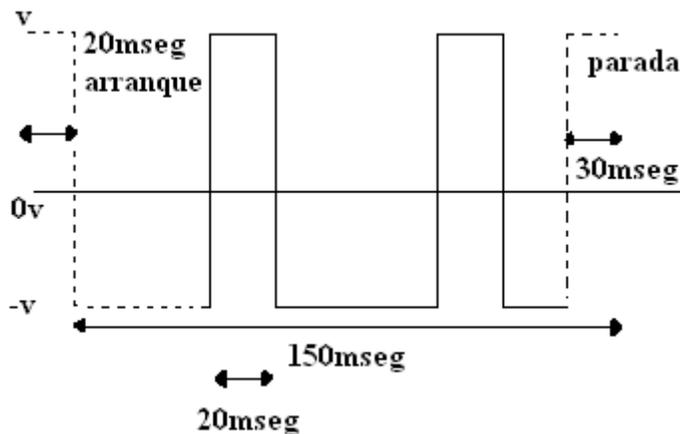
$$L = \frac{L'}{2} = 0.78$$

Así como:

$$\eta = \frac{0.72}{0.78} = 0.923$$

## ACTIVIDADES

1. Una fuente de datos tiene 16 símbolos equiprobables posibles, cada uno de 1mseg de duración. Los símbolos se emiten en bloques de a 15, separados por un pulso de sincronización de 5mseg. Calcular la **Tasa de Información R**.
2. Se transmiten pulsos de 1mseg de duración los cuales pueden tomar los niveles 1; 2; 3 ó 4 volt con probabilidades  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ , y  $1/8$ . Determinar la **Tasa de Información R**.
3. Una máquina teleimpresora da una vuelta cada 150 mseg produciendo un carácter ó letra de acuerdo al código de la fig. El primer (arranque) y último pulso (parada) se utilizan para sincronización y los cinco restantes para información. Una misma codificación puede significar 2 caracteres distintos de acuerdo a si se le antepuso cifras o letras



*Fig. Señal Telegráfica*

- Determinar cuántas palabras por minuto se pueden transmitir si en promedio tengo 6 caracteres por palabra (incluido el espacio).
  - Calcular la velocidad de señalización de la señal telegráfica.
4. Al tener una fuente binaria de datos tiene  $P(0) = 3/8$  y  $P(1) = 5/8$  existiendo la influencia entre símbolos sobre grupos de dos símbolos sucesivos tal que  $P(1/0) = 3/4$  y  $P(0/1) = 1/16$ . Calcular la Entropía  $H$  y compare con  $H_{\max}$ .
  5. Calcular la probabilidad de que aparezcan tres caras consecutivas en la tirada de una moneda y su información asociada.
  6. De un mazo de 40 barajas españolas se extrae una carta. Si me informan que es de oro. ¿Cuántos bits de información he recibido? Y ¿Qué información adicional es necesaria para especificar la carta?

# UNIDAD VI

## RUIDO EN LAS TELECOMUNICACIONES

### INTRODUCCIÓN

El ruido eléctrico, puede definirse como una señal indeseable que se encuentra presente siempre en los sistemas de comunicaciones. Lo cual significa que empeora la calidad de la señal que se recibe, siendo un factor primordial que limita la detección de la misma.

En el desarrollo de esta unidad se estudiarán los tipos de ruidos existentes, sus características más importantes y los efectos que causan esos ruidos en los sistemas de comunicaciones en general.

### OBJETIVOS

- Interpretar la definición de ruido y sus diversos tipos en los sistemas de comunicación.
- Comprender los efectos del ruido térmico en los sistemas de comunicaciones.
- Interpretar el espectro de potencia, ancho de banda equivalente del ruido.
- Comprender los métodos de generación de ruido internos en dispositivos.
- Aplicar dichos conceptos en la resolución de problemas.

## 6.1 CLASIFICACIÓN DEL RUIDO

Hay una variedad de diferentes tipos y fuentes de ruido eléctrico y pueden ser categorizados de diferentes formas; sin embargo una forma más sencilla de clasificar el ruido es en Ruido Externo y Ruido Interno.

### 6.1.1 Ruido Externo

El ruido externo representa todas las diferentes categorías de ruido que surgen fuera de los componentes de un sistema de comunicaciones e incluye ruido atmosférico, ruido galáctico, ruido producido por el hombre e interferencias por otras fuentes de comunicaciones.

Mientras que es posible reducir los efectos del ruido externo por filtrado, así como la limitación de amplitud y el cambio de la frecuencia de operación, no se puede hacer nada dentro de un sistema de comunicaciones para eliminar por completo estas fuentes de ruido, ya que todos provienen de la parte externa del sistema. A continuación cada una de las categorías se explicara brevemente.

- **Ruido atmosférico:** El ruido atmosférico es producido principalmente por descargas de rayos debido a:
  - ✓ Tormentas
  - ✓ Por choque de las moléculas de vapor de agua
  - ✓ Nieve, etc.

La fuente de ruido externo dominante se encuentra usualmente a 20 MHz. Sin embargo, el espectro de potencias de ruido atmosférico disminuye rápidamente con los aumentos de frecuencia de modo que este efecto se hace relativamente insignificante en frecuencias bien arriba de este valor.

El nivel de ruido atmosférico también se disminuye con el incremento de la latitud sobre la superficie del globo, y es en particular severo durante la estación lluviosa en regiones cerca del ecuador.

- **Ruido Galáctico:** El ruido galáctico es causado por perturbaciones originadas fuera de la atmósfera de la tierra. Comprenden en general la mayoría de las radiaciones electromagnéticas que proceden de fuentes galácticas y solares. La principal fuente de ruido galáctico son:
  - ✓ El sol
  - ✓ la radiación a lo largo de la galaxia
  - ✓ Los rayos cósmicos

El principal rango de frecuencias en las que el ruido galáctico es significativo está entre los 15 MHz a 500 Mhz, y su espectro de potencia disminuye al aumentar la frecuencia.

El efecto más significativo en el funcionamiento general y el rango de utilidad de un sistema de comunicación es causado por la presencia del ruido, que distorsiona o interfiere con la señal deseada y puede hacerla totalmente ininteligible.

- **Ruido producido por el hombre:** Este ruido es el producido por cualquier fuente de ruido eléctrico resultante de un dispositivo o sistema fabricado por este. Entre los principales dispositivos o sistemas en esta categoría están los motores eléctricos, sistema de encendido de automóviles, señales de neón, y las líneas de energía.

### 6.1.2 Ruido Interno

Este ruido representa a todos los diferentes tipos de ruido que surgen dentro de los componentes del sistema de comunicaciones e incluye:

- ✓ El ruido térmico
  - ✓ El ruido de disparo
  - ✓ El ruido de granalla ó de fluctuación.
- 
- **Ruido Térmico:** El ruido térmico se origina por el movimiento aleatorio de las partículas cargadas, (usualmente electrones) en un medio tal como una resistencia. El espectro de potencia de ruido térmico es bastante amplio y es esencialmente uniforme sobre el espectro de RF de mayor interés en la mayoría de las aplicaciones de comunicaciones.
  - **Ruido de Disparo(Shot noise) :** Este tipo de ruido esta relacionado con la naturaleza discreta de la corriente eléctrica en los dispositivos electrónicos.  
Por ejemplo, los electrones o huecos atravesando una juntura semiconductoras presentan una variación aleatoria en el tiempo correspondiente al tiempo de difusión, el cual provoca una fluctuación.  
  
El espectro de potencia del ruido de disparo es similar al del ruido térmico y los dos efectos son usualmente agrupados para el análisis de los sistemas.
  - **Ruido de Fluctuación (flicker noise):** Este ruido es llamado así porque su densidad espectral crece por debajo del kilohertz, al disminuir la frecuencia. Es producido por los procesos aleatorios de generación-recombinación de pares electrón-hueco.

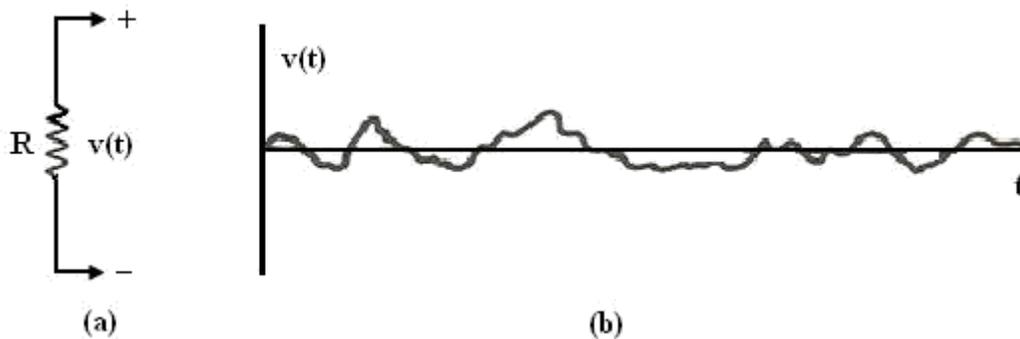
## 6.2 RUIDO TÉRMICO

Un conductor metálico o una resistencia, contiene un gran número de electrones libres que debido a la agitación térmica se mueven continuamente de un lado para otro dentro del conductor, por lo que se producen colisiones con los átomos y se realiza un continuo intercambio de energía. Este fenómeno sucede a causa de la propiedad eléctrica de la resistencia del conductor y aún cuando no hay corriente circulante en circuito abierto, se produce una tensión de ruido en bornes.

El ruido térmico es el resultado de las fluctuaciones aleatorias del flujo de carga en todo medio conductor y depende de la temperatura. Como la temperatura física del conductor aumenta, el movimiento del flujo de carga es mayor, y el nivel de ruido.

Para comprender mejor, consideremos un simple valor de la resistencia  $R$  como se muestra en la figura 6.1(a). En la teoría de circuitos básicos, la resistencia es considerada como un dispositivo pasivo sin energía actual, a menos que, por supuesto, una fuente externa esté conectada a ella. El movimiento de los electrones en el interior de la resistencia se traduce en la presencia de una pequeña cantidad de energía, lo que a su vez puede ser representada como una pequeña tensión o corriente.

Para muchas aplicaciones, los niveles de señal son suficientemente grandes comparados con los niveles de ruido térmico, pero en aplicaciones de comunicaciones en las que los niveles de señal recibida están a menudo en el rango de microvoltio ( $\mu\text{V}$ ), estos voltajes térmicos pueden ser muy importantes y significativos y en muchos casos pueden enmascarar la señal completamente.



**Figura 6.1:** (a) Resistencia  $R$ ; (b) Voltaje de ruido térmico que aparece a través de la resistencia

El voltaje de ruido  $v(t)$  que aparece a través de una resistencia es una función aleatoria, como se ilustra en la figura 6.1(b), y es asumido como una función ergódica. Hay tres propiedades generales de este ruido térmico:

- La amplitud instantánea de la tensión de ruido puede ser representada por un función de densidad de probabilidad Gaussiana  $f(v)$  con una media de  $v = 0$ .
- La potencia espectral del ruido (antes de la filtración) es esencialmente constante para un determinado conjunto de condiciones sobre un amplio rango de frecuencias que abarca prácticamente todo el rango de frecuencias utilizadas en las comunicaciones convencionales de RF. Por esta razón también se le conoce al ruido térmico como ruido blanco.

- Si el ruido gaussiano distribuido de banda ancha es pasado por un filtro lineal, la salida filtrada es también una distribución gaussiana.

La tensión de ruido que se produce dentro de un conductor metálico o una resistencia como se explicaba al inicio, tiene un valor medio cuadrático que fue desarrollada experimentalmente por Jonson, en sus investigaciones realizadas en la Bell entre 1935 y 1930 y corresponde a:

$$\bar{v}^2 = 4kTBR \quad (6.1)$$

Donde:

k = Constante de Boltzmann =  $1.38 \times 10^{-23}$  joules/kelvin (J/K)

T = Temperatura absoluta en °K.

B = Ancho de banda del sistema en Hertz.

R = Resistencia del conductor en Ohms.

El voltaje rms (o la desviación estándar  $\sigma_v$  del voltaje) es la raíz cuadrada de  $\bar{v}^2$ .

$$v_{RMS} = \sigma_v = \sqrt{\bar{v}^2} \quad (6.2)$$

Unos cálculos representativos serán hechos en este punto para ayudar a comprender el desarrollo de magnitud típica de voltaje de ruido. Asuma una resistencia la  $R = 10k\Omega$ , la temperatura estándar  $T=290$  °K, y asuma una unidad de ganancia ideal rectangular de ancho de banda  $B = 10$  kHz sobre el cual el ruido debe ser medido.

Utilizando la ecuación 6.1 tenemos que:

$$\bar{v}^2 = 4 * 1.38 \times 10^{-23} * 290 * 10 \times 10^4 * 10 \times 10^4$$

$$\bar{v}^2 = 1.6 \times 10^{-12} V^2 \quad (6.3)$$

El voltaje rms ó desviación estándar se calcula a partir de la ecuación 6.2, para lo que tenemos:

$$v_{RMS} = \sigma_v = \sqrt{\bar{v}^2} = 1.265 \mu V \quad (6.4)$$

Este voltaje es obviamente bastante pequeño y sería insignificante para usos en los cuales el nivel de señal estaba sobre la orden de voltios o aún milivoltios. Sin embargo, el nivel de señal en la entrada de un receptor de comunicaciones es a menudo de la orden de microvoltios, entonces este voltaje ruidoso podría ser bastante significativo en tales casos.

### ***Ejemplo 6.1***

Considere el primer voltaje de ruido calculado en la sección anterior, cuya media cuadrática y valor de rms se explican en las ecuaciones (6.3) y (6.4), respectivamente. Suponga que este voltaje de ruido se aplica a la entrada de un hipotético amplificador ideal libre de ruido con una ganancia de voltaje de  $10^6$  y cuyo ancho de banda es exactamente el mismo que en el cálculo (10KHz).

Determine:

- a) El valor rms del voltaje de ruido de la salida en circuito abierto
- b) El valor de la media cuadrática del voltaje de ruido de salida.

Solución:

- a)  $v_o(t)$  representa el voltaje de ruido instantáneo a la salida del amplificador ideal. El voltaje de salida rms se denominara como  $v_{oRMS}$  y la salida de la media cuadrática del voltaje se denominara como  $\bar{v}_{oRMS}^2$ . El voltaje de ruido rms de salida es simplemente el voltaje de ruido rms de entrada por la ganancia de voltaje. Así:

$$v_{oRMS} = 10^6 \times 1.265 \mu V = 1.265 V$$

- b) La media cuadrática del voltaje de salida es el voltaje rms de salida al cuadrado:

$$\bar{v}_{oRMS}^2 = (1.265 V)^2 = 1.6 V^2$$

O bien, la media cuadrática del voltaje de salida puede ser multiplicada por el cuadrado de la ganancia:

$$\bar{v}_{oRMS}^2 = 1.6 \times 10^{12} \times (10^6)^2 = 1.6 V^2$$

De estos resultados se puede inferir que el nivel de voltaje rms en la entrada se multiplica por la ganancia de voltaje, mientras que la media cuadrática de tensión se multiplica por la ganancia de voltaje al cuadrado.

### 6.2.1 Espectro de Potencia del Ruido

El ruido térmico posee una característica distintiva adicional aparte de las conocidas hasta el momento, su densidad espectral de potencia es plana sobre las bandas de interés de los sistemas de telecomunicaciones.

Para analizar los efectos causados por ruido en los sistemas, el concepto de la densidad espectral de potencia es a menudo más apropiado. En esta sección, algunas variaciones útiles de este concepto serán desarrolladas. En un sentido colectivo, todas las distintas formas en esta sección serán consideradas como *densidad espectral de potencia*.

En primer lugar, consideremos de nuevo la expresión para la potencia promedio del voltaje (valor eficaz al cuadrado) a través de una resistencia R. Ecuación (6.1).

$$\bar{v}^2 = 4kTBR$$

Y con referencia a la corriente térmica tenemos que:

$$\bar{i}^2 = 4kTGB \quad (6.5)$$

Donde  $G = 1/R$ .

La correspondiente densidad espectral de potencia del ruido térmico es:

$$S_v(f) = \frac{\bar{v}^2}{2B} = 2kTR \quad V^2/Hz \quad (6.6)$$

Para las frecuencias normales en comunicaciones, exceptuando la gama de transmisión óptica (fibras y lasers), la densidad espectral de ruido se puede considerar constante e independiente de la frecuencia. Por otro lado, como el ruido térmico es el resultado de un gran número de interacciones esencialmente independientes, su distribución tiende a ser gaussiana. El ruido térmico es, pues, un ruido gaussiano de valor promedio cero.

## 6.2.2 Potencia de Ruido Disponible

Algunas veces es deseable describir el ruido térmico mediante el concepto de “potencia disponible”. La potencia disponible es la potencia máxima que se puede entregar a una carga desde una fuente con una resistencia interna constante.

De acuerdo con el “teorema de la máxima transferencia de potencia”, se transfiere el máximo posible de potencia desde una fuente de resistencia interna  $R_i$  a una carga de resistencia  $R_L$  cuando  $R_L = R_i$ . En este caso se dice que la carga está acoplada a la fuente, y la potencia que produce la fuente se divide por igual entre su resistencia interna  $R_i$  y la resistencia de carga  $R_L$ ; la potencia que se entrega a la carga es la potencia disponible.

Con referencia a la Figura 6.2, en condiciones de acoplamiento la fuente ve una resistencia de  $2R$  y la densidad espectral será  $S_v(f)/2R$ ; la densidad espectral correspondiente a la potencia entregada a la carga será la mitad, es decir,  $S_v(f)/4R$ . Esta es entonces la máxima densidad espectral de potencia que se puede extraer de la fuente  $V_{rms}$ . Por esta razón, esta densidad se denomina “densidad espectral disponible,  $S_d(f)$ ”.

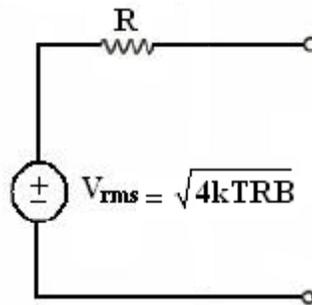


Figura 6.2: Circuito equivalente a ruido térmico

Entonces;

$$S_d(f) = \frac{S_v(f)}{4R} = \frac{kT}{2} W / Hz \quad (6.7)$$

La potencia de ruido disponible en una resistencia ruidosa  $R$  dentro de un ancho de banda arbitrario  $B$  será entonces  $N$ :

$$N = \int_{-B}^B S_d(f) df = kTB \quad W \quad (6.8)$$

Nótese que en una resistencia ruidosa  $R$  la densidad espectral disponible y la potencia promedio disponible son independientes de  $R$ , pero son proporcionales al ancho de banda  $B$ . Cuanto más alto es el ancho de banda en un sistema, más alta será la potencia de ruido presente en el mismo; debido a esto, uno de los objetivos en el diseño de sistemas de comunicación es el de minimizar u optimizar el ancho de banda  $B$ .

### 6.2.3 Ruido Blanco

Además de las fuentes de ruido térmico, hay otros tipos de fuentes de ruido que son gaussianas, de valor promedio cero y que tienen una densidad espectral de potencia que es constante dentro de una extensa gama de frecuencias. El ruido que tenga una densidad espectral de este tipo se denomina “Ruido Blanco”.

La densidad espectral del ruido blanco gaussiano se representa así:

$$S_v(f) = \frac{\eta}{2} \text{ para toda } f \quad (6.9)$$

Supongamos ahora que  $H(f)$  es la función de transferencia de un filtro dado al cual se le aplica ruido blanco, la salida del filtro será ruido cuya densidad espectral será:

$$S_{vf}(f) = |H(f)|^2 S_v(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2 \quad (6.10)$$

La potencia disponible a la entrada del sistema será entonces, de (6.6) y (6.9):

$$N_i = \bar{v}^2 = \eta B = 4kTRB \quad (6.11)$$

De donde  $\eta = 4kTR = kT_e$

El término  $T_e$  se conoce con el nombre de **“temperatura efectiva o temperatura equivalente de ruido”** del sistema, y se define mediante la expresión;

$$T_e = 4RT \quad (6.12)$$

La temperatura equivalente de ruido especifica la potencia de ruido térmico disipada en una resistencia acoplada, y es la **“temperatura efectiva de una fuente de ruido térmico blanco a la entrada de un sistema con ruido que se requeriría para producir la misma potencia de ruido a la salida de un sistema equivalente sin ruido”**. Obsérvese que la temperatura equivalente de ruido no es la temperatura ambiente del sistema, pero sí es proporcional a ella. Asimismo, en una red que contiene solamente elementos R, L y C, la temperatura efectiva  $T_e$  es igual a la temperatura ambiente  $T$  de la red. En lo sucesivo, hablaremos siempre en términos de “temperatura efectiva”, excepto cuando se exprese directamente la temperatura física.

La potencia disponible de ruido blanco generada en el sistema dentro de un ancho de banda arbitrario  $B$ , será entonces:

$$N_i = kT_e B \quad (6.13)$$

Esta sería la potencia disponible a la entrada si el sistema fuera sin ruido.

## 6.2.4 Ancho de Banda Equivalente

Algunas veces es conveniente definir el “ancho de banda equivalente del ruido” de un sistema pasabanda. En un sistema cuya función de transferencia es  $H(f)$  y cuya densidad espectral de potencia de ruido a la entrada es  $S_v(f)$  la potencia promedio de ruido a la salida viene dada por:

$$N_o = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_v(f) df \quad (6.14)$$

En la mayoría de los sistemas el ancho de banda es de un orden tal que nos permite suponer que el ruido a la entrada es blanco de densidad espectral constante  $\eta / 2$ . En estas condiciones;

$$N_o = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (6.15)$$

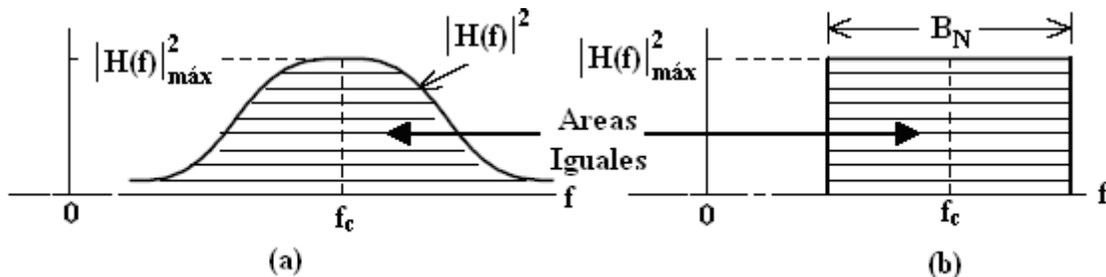
Consideremos ahora un sistema ideal pasabanda de ganancia de potencia  $|H(f)|_{m\acute{a}x}^2$  y de ancho de banda  $B_N$ , como se muestra en la figura. 6.3(b). La potencia de ruido a su salida será:

$$N_o = \eta B_N |H(f)|_{m\acute{a}x}^2 \quad (6.16)$$

Si estas potencias son iguales, entonces  $B_N$  será, por definición, el “ancho de banda equivalente del ruido” y vendrá dado por:

$$B_N = \frac{1}{2|H(f)|_{m\acute{a}x}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (6.17)$$

Estas definiciones se ilustran en la Fig. 6.3 (a) y (b).



**Figura 6.3: Definición del ancho de banda equivalente de ruido**

$B_N$  es el ancho de banda de un sistema ideal pasabanda de ganancia de potencia  $|H(f)|_{m\acute{a}x}^2$  que dejará pasar la misma potencia de ruido blanco que el sistema en cuestión, es decir, *el ancho de banda de ruido de un filtro ideal es el ancho de banda de un filtro real.*

## 6.3 MODELOS DE RUIDO GENERADO INTERNAMENTE

El énfasis en esta sección está dirigido al desarrollo y la discusión de los medios por el cual los efectos totales de ruido generado dentro de un amplificador u otro dispositivo lineal pueden ser representados. El ruido procedente de una combinación compleja de las etapas de amplificación (como un receptor) se deriva de una variedad de diferentes mecanismos, entre ellos el ruido térmico, ruido de disparo, y tipos especiales de ruido de los dispositivos activos.

Diferentes maneras han sido desarrolladas para representar el ruido producido dentro de un amplificador o receptor. Los métodos más ampliamente usados son:

- El método de la temperatura de ruido eficaz.
- El método de la figura de ruido.

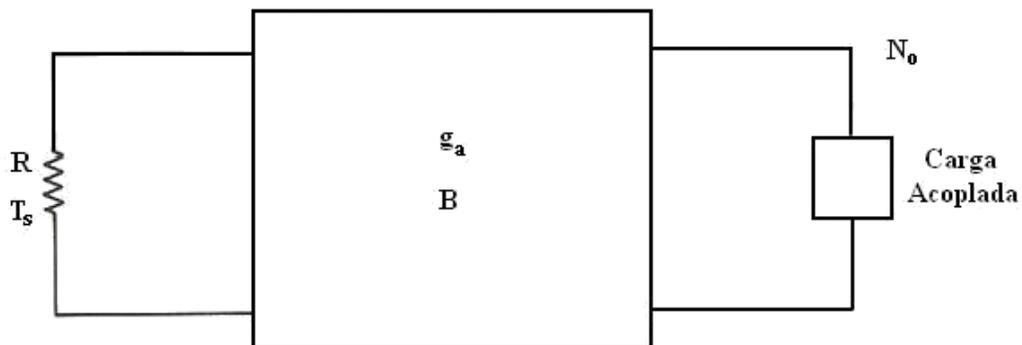
Mientras que cualquiera de los métodos por sí solo sería suficiente, en la práctica los fabricantes suelen mezclar el análisis del ruido de los componentes del receptor.

### 6.3.1 Método de Temperatura de Ruido Eficaz

El concepto de la temperatura de ruido eficaz será ilustrado según el diagrama de bloque del amplificador mostrado en la figura 6.4. En muchos de los niveles de los sistemas se trabaja los efectos del ruido en general, la potencia de salida disponible, la potencia de entrada disponible, y la ganancia de potencia disponible se utilizan casi exclusivamente. La ganancia de potencia disponible  $g_a$  se define como:

$$g_a = \frac{\text{Potencia de salida suministrada}}{\text{Potencia de entrada suministrada}} \quad (6.18)$$

Recuerde que si la impedancia es acoplada tanto en la entrada como en la salida, la potencia disponible de entrada es la potencia de entrada real, la potencia disponible de salida es la potencia de salida real, y La ganancia de potencia disponible es la ganancia de potencia real.



*Figura 6.4: Diagrama de Bloque usado para definir la temperatura de ruido*

Asuma que la entrada del amplificador termina en una resistencia acoplada  $R$ . Esta resistencia representa una resistencia externa "de la fuente", y su temperatura se asume que es  $T_r$ . La densidad espectral es simplemente  $kT_s$  W/Hz. Si el amplificador no contribuyera con ningún ruido en absoluto, la potencia de ruido de salida  $N'_0$  simplemente sería:

$$N'_0 = g_a k T_s B \quad (6.19)$$

Donde  $B$  es el ancho de banda equivalente de ruido del amplificador. Sin embargo, la potencia de salida de ruido real  $N_0$  es siempre mayor que la  $N'_0$  debido al ruido adicional introducido por el amplificador. Por lo tanto:

$$N_0 = N'_0 + N_{add} \quad (6.20)$$

Donde  $N_{add}$  es el ruido adicional que surge en el amplificador. Este ruido adicional se supone originado por una fuente ficticia de resistencia acoplada a la entrada teniendo una *temperatura equivalente de ruido*  $T_e$  tal que:

$$N_{add} = g_a k T_e B \quad (6.21)$$

Lo que significa que  $T_e$  puede definirse como:

$$T_e = \frac{N_{add}}{g_a k B} \quad (6.22)$$

Remplazando las ecuaciones (6.19) y (6.21) en la ecuación (6.20), la potencia de ruido de salida total puede ser expresada como:

$$N_0 = g_a k (T_s + T_e) B \quad (6.23)$$

El resultado de la ecuación (6.23) representa la forma práctica como la mayor parte de las interpretaciones de temperatura de ruido se utilizan. Si la temperatura ruido eficaz de un amplificador es conocida, es añadida a la temperatura de entrada de la fuente en la entrada del amplificador para determinar la temperatura de entrada total eficaz. Esta temperatura de entrada combinada neta será denotada como  $T_i$ , y es:

$$T_i = T_s + T_e \quad (6.24)$$

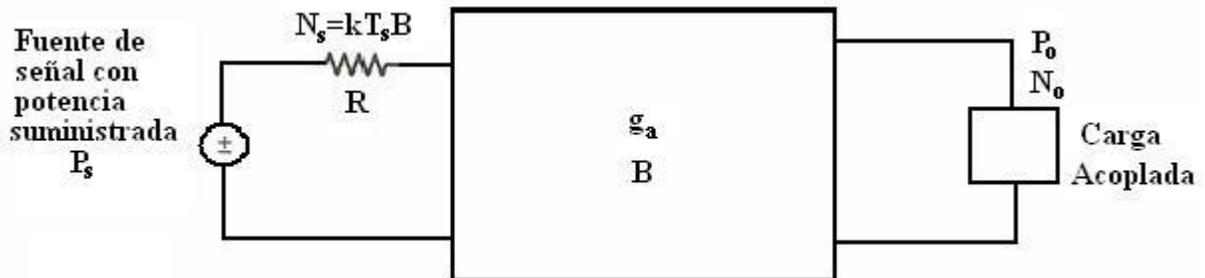
La temperatura de entrada neta  $T_i$  es entonces tratada de la misma manera como fue tratada la temperatura de entrada procedente de una fuente cuando el amplificador fue considerado libre de ruido.

Se debe resaltar un punto antes de continuar. La temperatura efectiva de ruido  $T_e$  no es una temperatura física. De hecho, algunos amplificadores ruidosos exponen las temperaturas de ruido eficaces de varios miles de Kelvins, y tales temperaturas físicas serian absurdas. En cambio, la temperatura eficaz de ruido puede ser pensada como temperatura hipotética física que una resistencia ficticia tendría que asumir en la entrada para producir la misma potencia de ruido de salida que el amplificador dado.

En realidad, aún la temperatura de entrada de la fuente  $T_s$  no tiene que ser necesariamente una temperatura física. Para las fuentes que contribuyen a un ruido superior al ruido térmico correspondiente a la temperatura física, el valor de  $T_s$  puede ser ajustado para representar los efectos combinados. Por ejemplo, una antena correctamente diseñada en la entrada de un receptor actúa como una resistencia constante durante el paso de banda de interés, y este posee una cierta temperatura física. Sin embargo, dependiendo de su orientación y ancho de haz, este puede proporcionar más ruido a la entrada del receptor, y entonces su temperatura eficaz de la fuente  $T_s$  puede ser muy diferente de la temperatura física.

### 6.3.2 Método de Figura de Ruido

Consideremos ahora el concepto de *figura de ruido*  $F$  (también llamado *factor de ruido*). Existen distintas definiciones acerca de la figura de ruido, dependiendo de si se define sobre una base de frecuencia dependiente o sobre una base promedio general. Conforme a la mayor parte de datos específicos de fabricación, consideraremos sólo la representación de base media. Refiérase a figura 6.5.



*Figura 6.5: Diagrama de bloque usado para definir la figura de ruido*

Junto con la fuente de señal de entrada, se asume también una fuente de ruido de entrada. La potencia disponible correspondiente a la fuente de señal de entrada se denota como  $P_s$  y la potencia disponible de salida es denominada como  $P_o$ . La potencia de ruido de salida  $N_o$  es la misma que con la temperatura de ruido desarrollada, y  $N_s = kT_s B$  es la potencia de ruido suministrada a la entrada de la fuente definido sobre el ancho de banda equivalente de ruido.  $P_s / N_s$  representa la relación de potencia de ruido para la señal de entrada, y  $P_o / N_o$  representa la relación de potencia de ruido para la señal de potencia de salida.

La figura de ruido  $F$  esta definida como:

$$F = \left. \frac{P_s / N_s}{P_o / N_o} \right|_{T_s = T_0} \quad (6.25)$$

Expresado en palabras, la figura de ruido es la relación señal a ruido de entrada dividido por la relación señal a ruido de salida determinada en la referencia estándar de temperatura  $T_0 = 290^\circ\text{K}$ . Algunas de las dificultades que muchas personas experimentan interpretando y usando la definición de figura de ruido están relacionada a esta supuesta temperatura fija.

Puesto que todas las cantidades en la ecuación (6.25) se definen en el mismo ancho de banda B, el ruido de salida nunca será inferior al ruido de entrada y por lo general, será mayor por la cantidad aportada por el amplificador. Por consiguiente, la relación señal a ruido de salida será menor o igual a la relación señal a ruido de entrada, y  $F$  esta limitada por  $1 < F < \infty$ . Un amplificador ideal tendría una  $F = 1$ . Cuanto mayor sea el valor de  $F$ , más degradada será la relación señal a ruido del amplificador. De este modo, el amplificador con menor figura de ruido sería el más deseable si todos los demás factores son iguales.

En muchas especificaciones, la figura de ruido esta dada en decibeles.  $F_{dB}$  representa este valor, y esta definida por:

$$F_{dB} = 10 \log_{10} F \quad (6.26)$$

En esta forma, el amplificador ideal libre de ruido tendría  $F_{dB} = 0dB$ .

Ahora vamos a desarrollar una relación entre la temperatura de ruido y la figura de ruido tal que si uno de los dos se conoce el otro puede ser fácilmente determinado.

Empecemos con la ecuación (6.25) y reescribamos como:

$$F = \left. \frac{P_s / N_s}{P_0 / N_0} \right]_{T_s=T_0} = \frac{N_0}{g_a k T_0 B} \quad (6.27)$$

Donde la relación  $P_0 / P_s = g_a$  y el valor  $T_s = T_0$  han sido sustituidos. Luego sustituyamos la expresión (6.23) para  $N_0$  en (6.27) con  $T_s = T_0$ . El resultado es:

$$F = \frac{g_a k T_0 B + g_a k T_e B}{g_a k T_0 B} \quad (6.28)$$

Después de simplificar, obtenemos:

$$F = \frac{T_0 + T_e}{T_0} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad (6.29)$$

La relación inversa es fácilmente determinada como:

$$T_e = (F - 1)T_0 \quad (6.30)$$

Por lo tanto, (6.29), permite la determinación de la figura de ruido a partir de la temperatura efectiva de ruido, y (6.30), permite la determinación de la temperatura efectiva de ruido a partir de la figura de ruido. Estas relaciones son muy útiles en el análisis de ruido y debe ser cuidadosamente observadas.

### **Ejemplo 6.2**

Un amplificador de alta ganancia tiene una figura de ruido de 9.03dB, una ganancia disponible de 50dB, y un ancho de banda equivalente de ruido de un lado de 10kHz.

- a) Determinar la temperatura de ruido eficaz.

Determine la Potencia disponible a la salida cuando la entrada esta determinada por una resistencia acoplada a la fuente cuya temperatura de ruido es:

- b)  $T_s = T_0$   
 c)  $T_s = 10T_0$   
 d)  $T_s = 100T_0$

Solución:

- a) Inicialmente, la figura de ruido y la ganancia están dados en decibeles, deben ser convertidos en valores absolutos. Obteniendo así  $F = 8$  y  $g_a = 10^5$  como valores absolutos. La temperatura de ruido eficaz (equivalente)  $T_e$  para el amplificador se calcula para  $F$  usando la ecuación (6.30). Donde obtenemos:

$$T_e = (F - 1)T_0 = (8 - 1) \times 290^\circ K = 2030^\circ K$$

- b) La potencia de ruido disponible de salida  $N_0$  para cualquier temperatura de fuente  $T_s$  puede ser calculada por medio de la ecuación (6.23). Para  $T_s = T_0 = 290^\circ K$ , tenemos:

$$N_0 = g_a k (T_s + T_e) B$$

$$N_0 = 10^5 \times 1.38 \times 10^{-23} (290 + 2030) \times 10^4$$

$$N_0 = 32 \mu W$$

- c) Cuando  $T_s = 10T_0 = 2900^\circ K$ , tenemos:

$$N_0 = g_a k (T_s + T_e) B$$

$$N_0 = 10^5 \times 1.38 \times 10^{-23} (2900 + 2030) \times 10^4$$

$$N_0 = 68 \mu W$$

Comparemos la respuesta del punto (b) y el (c); mientras la temperatura de la fuente incrementa a un factor de 10, la potencia de ruido de salida es un poco más del doble. La razón fue que la mayor parte del ruido del inciso (a) ha sido producido por el propio amplificador de modo que el ruido interno depende del incremento sustancial de la temperatura de ruido en la fuente.

- d) Cuando  $T_s = 100T_0 = 29000^\circ K$ , tenemos:

$$N_0 = g_a k (T_s + T_e) B$$

$$N_0 = 10^5 \times 1.38 \times 10^{-23} (29000 + 2030) \times 10^4$$

$$N_0 = 428.2 \mu W$$

En este rango, el ruido producido por la fuente de entrada es significativamente mayor que el ruido producido por el amplificador en sí.

## ACTIVIDADES

1. Explique brevemente los diferentes tipos de ruido y los efectos que causan en los sistemas de comunicaciones.
2.
  - a) Determinar el voltaje rms de ruido producido por una resistencia de  $47\text{ k}\Omega$  en un ancho de banda de  $60\text{kHz}$  en condiciones normalizadas de temperatura  $T=T_0=290^\circ\text{K}$ .
  - b) Determinar el voltaje rms de ruido si la resistencia es cambiada por  $470\text{k}\Omega$ .
  - c) Determinar el voltaje rms de ruido si la resistencia es cambiada a  $4.7\text{ k}\Omega$ .
  - d) Con  $R=4.7\text{ M}\Omega$ , determinar el voltaje rms de ruido si el ancho de banda es cambiado a  $600\text{kHz}$ .
  - e) Con  $R=4.7\text{ M}\Omega$ , determinar el voltaje rms de ruido si el ancho de banda es cambiado a  $6\text{ MHz}$ .
  - f) Con los valores de  $R$  y  $B$  de la parte (e), determinar el voltaje rms de ruido si la temperatura es incrementada a  $310^\circ\text{K}$ .

Supongamos que la resistencia de  $4.7\text{ M}\Omega$  del problema (1-e) se conecta a un amplificador ideal (sin ruido) teniendo una ganancia de voltaje de  $10^4$  y un ancho de banda de ruido equivalente de  $6\text{ MHz}$ .

Determinar:

- a) El valor rms del voltaje de ruido de salida.
  - b) El valor medio cuadrático del voltaje de ruido de salida.
  - c) La probabilidad de que una sola muestra aleatoria del voltaje de ruido de salida exceda  $10\text{V}$ .
3. Para una resistencia  $R=10\text{k}\Omega$  con  $T=T_0=290^\circ\text{K}$ , determinar una expresión y un esquema para la función de densidad espectral de potencia.
  4. Calcular la potencia de ruido *disponible* para una resistencia de  $10\text{k}\Omega$  a una temperatura  $T=T_0=290^\circ\text{K}$  y un ancho de banda de  $10\text{ kHz}$ . ¿Cómo cambia el resultado si se cambia la resistencia a  $100\text{k}\Omega$ ? Explique.
  5. Considere un filtro pasabajo cuya función de transferencia es  $H(f) = \frac{10^4}{10^3 + j2\pi f}$  de un sistema. Encontrar el ancho de banda equivalente del ruido y relaciónelo con un ancho de banda  $3\text{dB}$ .
  6. Un amplificador tiene una figura de ruido  $F=9.031\text{dB}$ , una ganancia de potencia  $g_a=40\text{dB}$  y un ancho de banda equivalente de ruido  $B=10\text{kHz}$ .  
Determinar: La temperatura efectiva del ruido y la potencia disponible a la salida cuando el amplificador está acoplado a una resistencia de entrada cuya  $T_s=2900\text{ kelvins}$ .

## BIBLIOGRAFIA

- B. P. LATHI. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Tercera Edición. Oxford University Press. New Cork 1998.
- HAYKIN. *Communication Sístems*. Cuarta Edición. Ed. John Wiley & Sons. 2001.
- RODDY. D & COOLEN J. *Electronic Communications*. Cuarta Edición. Prentice Hall. Inc. 1995.
- JOSÉ E. BRICEÑO MÁRQUEZ. *Principios de las Comunicaciones*. Tercera edición. Publicaciones de la Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Eléctrica.
- ÁLVARO RENDÓN GALLÓN. *Conmutación Digital: Modulación por Impulsos Codificados*. Universidad del Cauca. Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones. Popayán, Noviembre de 1999.
- ROY BLAKE. *Sistemas Electrónicos de Comunicaciones*. Segunda Edición. Editorial Thomson.
- TOMASI, W. *Sistemas de Comunicaciones Electrónicas*. Cuarta Edición. Edit. Prentice Hall.
- SCHAUM'S. *Analog and Digital Communications*. Edit. Mc. Graw Hill.
- PEDRO DANIZIO. *Teoría de las Comunicaciones*. Edit. Científica Universitaria.
- ENRRIQUE HERRERA PERÉZ. *Comunicaciones I: Señales , Modulación y Transmisión* . Editorial RIMUSA, 2006.
- RUBEN O LUSTRA, OSVALDO TUJSNAIDER. *Principios de Comunicaciones Digitales*. Colección Tecnica AHCJET-ICI. Volumen I y II.
- B. P. LATHI. *Ingeniería Electrónica*. Nueva Editorial Interamericana. México, D.F. 1988.
- WILLIAM D. STANLEY. *Electronic Communications Systems*. Edit. Reston.
- ÁNGEL DE LA TORRE. *Transmisión de Datos*. TSTC-VGR.
- BIGHAM, J. A. *The Theory and Practice of MODEM design*. Ed. John Wiley, 1998.
- TAUB, H. y SCHILLING, D. L. *Principles of Communication Systems*. Ed. McGraw-Hill,1986.
- ENRRIQUE NAVARRO. *Sistemas de Telecomunicaciones*.
- KENNEDY, G. *Electronic Communication Systems*. 3<sup>rd</sup> Edition. McGraw-Hill Book Company, 1985.
- DUNLOP. J. AND SMITH, D.G. *Telecommunications Engineering*. 3<sup>rd</sup> Ed. Chapman and Hall, 1994.
- TAUD y SHILLING. *Pulse Code Modulation*.
- JHON BELLAMY. *Digital Telephony*. 2<sup>nd</sup> Edition. Jhon Wiley & Sons. 1991.
- CCITT. *Definición del código HDB3*. Rec. 703.

- H.P Hsu. *Analog and Digital Communications*, McGraw-Hill, 1993.
- M. SCHWARTZ. *Information Transmission, Modulation, and Noise*. 4<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1990.
- L. W. COUCH II. *Analog and Digital Communication Systems*. 6<sup>th</sup> Edition. Prentice Hall, 2001.
- ROQUE SAENZ PEÑA. *Comunicación de Datos. Bernal*. Buenos Aires – Argentina.
- SIMON HAYKIN. *Communication Systems*. John Wiley & Sons, Inc, New York. 4<sup>th</sup> Ed. 2001.
- JOHN G. PROAKIS & MASOUD SALEHI. *Communication Systems Engineering*. Prentice – Hall International. USA, 1994.
- JOAQUIN LUQUE RODRIGUEZ y SEBASTIAN CLAVIJO. *Modulación de Señales Digitales*, Universidad de Sevilla. España. 1995.

## **PÁGINAS WEB**

- [http://es.wikipedia.org/wiki/codificaci%C3%B3n\\_Manchester\\_Diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/codificaci%C3%B3n_Manchester_Diferencial)
- [www.textoscientificos.com/resdes/señales/codigos](http://www.textoscientificos.com/resdes/señales/codigos)
- [www.teleco.upot.es/Docencia/Asignatura/103113008/Tema3/Documento/PDH.pdf](http://www.teleco.upot.es/Docencia/Asignatura/103113008/Tema3/Documento/PDH.pdf)