

**IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL NO LINEAL EN
LABVIEW A UN SISTEMA DE NIVEL DE TANQUES**

JAVIER EDUARDO GONZÁLEZ RENTAL

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR

FACULTAD DE INGENERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

CARTAGENA DE INDIAS, D. T. Y C.

2012

**IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL NO LINEAL EN
LABVIEW A UN SISTEMA DE NIVEL DE TANQUES**

JAVIER EDUARDO GONZÁLEZ RENTAL

**Trabajo de grado presentado como requisito
para optar el título de Ingeniero Electrónico**

Director

JOSÉ LUIS VILLA RAMÍREZ, PhD.

Doctor en Ingeniería

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR

FACULTAD DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

CARTAGENA DE INDIAS, D. T. Y C.

2012

Dedico este trabajo al único que puede hacer todo posible, Dios.
A mi madre Yeni Rental Ledesma por su invaluable apoyo y motivación.
A mi padre Calixto González Lares por hacerme una persona capaz.
Y a Daris Barreto García por su incondicional amor y compañía.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer al director de este trabajo de grado Dr. JOSÉ LUIS VILLA RAMÍREZ, gracias a sus incalculables aportes y consejos se hizo factible la realización de este trabajo.

De igual modo deseo mostrar mi gratitud al Ing. EDGARD MULFORD GARCÍA por su colaboración y sus acertados consejos.

Por último quiero agradecer a todas aquellas personas que siempre me han apoyado dándome ánimo y buenos deseos.

CONTENIDO

| | |
|--|----|
| RESUMEN | 11 |
| INTRODUCCION | 12 |
| 1 CONCEPTOS PRELIMINARES | 14 |
| 1.1 SISTEMAS DE CONTROL REALIMENTADO | 14 |
| 1.1.1 Sistemas de control en lazo cerrado y en lazo abierto..... | 14 |
| 1.1.2 Tipos de sistemas de control realimentado..... | 15 |
| 1.1.3 Sistemas de control lineal y no lineal | 15 |
| 1.2 MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS | 16 |
| 1.2.1 Diagramas de bloques | 17 |
| 1.2.2 Modelos en el espacio de estados..... | 18 |
| 1.2.3 Modelado de sistemas de nivel de líquido | 19 |
| 1.3 ACCIONES DE CONTROL | 25 |
| 1.3.1 Acción proporcional P | 25 |
| 1.3.2 Acción proporcional-integral PI | 25 |
| 1.3.3 Acción proporcional-derivativa PD | 26 |
| 1.3.4 Acción de control PID | 26 |
| 1.4 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LYAPUNOV | 27 |
| 1.4.1 Definiciones de estabilidad | 29 |
| 1.4.2 Método directo de Lyapunov..... | 30 |
| 2 DESCRIPCION DEL SISTEMA DE NIVEL Y ESTRATEGIA DE CONTROL ... | 32 |
| 2.1 PARÁMETROS DEL SISTEMA | 33 |
| 2.2 ESTRATEGIA DE CONTROL..... | 34 |
| 2.2.1 Actuadores (Bombas B_1 y B_2)..... | 35 |
| 2.2.2 Controlador | 35 |
| 3 LINEALIZACION POR REALIMENTACION | 36 |
| 3.1 FORMULACIÓN TEÓRICA..... | 36 |
| 3.2 LINEALIZACION DE SISTEMA DE NIVEL DE LIQUIDOS | 42 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 3.3 | CONTROL POR MODELO INTERNO | 47 |
| 3.4 | DISEÑO DE CONTROL IMC PARA MODELO LINEALIZADO | 52 |
| 4 | CONTROL POR MODO DESLIZANTE | 58 |
| 4.1 | CONTROL POR MODOS DESLIZANTE DE SISTEMA DE NIVEL DE LIQUIDOS | 69 |
| 5 | CONTROL ADAPTATIVO | 76 |
| 5.1 | Control Adaptativo con modelo de referencia MRAC | 78 |
| 5.1.1 | Elección de la ley de control | 78 |
| 5.1.2 | Elección de la ley de adaptación | 80 |
| 5.2 | CONTROL ADAPTATIVO CON MODELO DE REFERENCIA EXTENDIDO A SISTEMAS NO LINEALES | 83 |
| 5.2.1 | Ley de control | 84 |
| 5.2.2 | Ley de adaptación | 84 |
| 5.3 | REGULADORES AUTOAJUSTABLES STR | 86 |
| 5.4 | DISEÑO DE CONTROL MRAC DE UN SISTEMA DE NIVEL DE LÍQUIDOS | 87 |
| 5.4.1 | Diseño de control adaptativo con modelo de referencia de sistema sin linealizar | 87 |
| 5.4.2 | Diseño de control adaptativo con modelo de referencia de sistema obtenido con linealización por realimentación | 93 |
| 6 | IMPLEMENTACION DE CONTROL NO LINEAL EN LABVIEW Y ADQUISICION DE DATOS | 100 |
| 6.1 | LABVIEW, LABORATORY VIRTUAL INSTRUMENT ENGINEERING WORKBENCH | 100 |
| 6.2 | IMPLEMENTACIÓN DE SISTEMA DE NIVEL DE LÍQUIDOS EN LABVIEW | 100 |
| 6.3 | IMPLEMENTACIÓN DE CONTROL CON LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN EN LABVIEW | 103 |
| 6.3.1 | Control PID con Linealización por Realimentación | 106 |
| 6.4 | IMPLEMENTACION DE CONTROL POR MODO DESLIZANTE EN LABVIEW | 107 |
| 6.5 | IMPLEMENTACION DE CONTROL ADAPTATIVO CON MODELO DE REFERENCIA | 108 |
| 6.6 | ADQUISICION DE DATOS | 110 |

| | |
|---|-----|
| 5.6.1 Adquisición y control LPR..... | 114 |
| 6.6.2 Adquisición y control SC..... | 117 |
| 6.6.3 Adquisición y control MRAC | 120 |
| 6.7 RESPUESTA DEL SISTEMA ANTE CAMBIOS EN LA REFERENCIA ... | 123 |
| 6.8 RESPUESTA DE SISTEMA ANTE PERTURBACIONES EN LA SALIDA | 126 |
| CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS | 130 |
| BIBLIOGRAFIA | 132 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1. Diagrama de bloques en lazo abierto. Diagrama de bloque en lazo cerrado. | 18 |
| Figura 2. Representación en diagrama de bloques de sistema en variables de estado. | 19 |
| Figura 3. Sistema de nivel de líquidos con flujo de entrada u y flujo de salida Q . .. | 20 |
| Figura 4. Sistema de tanques interconectados en paralelo. | 21 |
| Figura 5. Sistema de nivel con altura H | 22 |
| Figura 6. Sistema de nivel de tanques interconectados en paralelo con configuración de válvulas cerradas y/o abiertas. | 23 |
| Figura 7. Diagrama de bloques de sistema no lineal. | 25 |
| Figura 8. Definición de estabilidad según Lyapunov. | 29 |
| Figura 9. Sistema de nivel de líquido. | 32 |
| Figura 10. Parámetros característicos del sistema de nivel. | 34 |
| Figura 11. Sistema de control realimentado para sistema de nivel. | 34 |
| Figura 12. Sistema de nivel de primer orden. | 37 |
| Figura 13. Sistema de tanques de segundo orden. | 42 |
| Figura 14. Sistema de nivel de líquido interconectado en paralelo real. | 43 |
| Figura 15. Diagrama de bloques de modelo no lineal de sistema de nivel de líquidos. | 46 |
| Figura 17. Diagrama de bloque equivalente. | 47 |
| Figura 16. Diagrama de bloques con linealización por realimentación. | 47 |
| Figura 18. Diagrama de bloques de sistema controlado con compensación en serie o cascada. | 48 |
| Figura 19. Configuración para control por modelo interno. | 49 |
| Figura 20. Reestructuración de configuración de control por modelo interno. | 49 |
| Figura 21. Simplificación a configuración en serie o cascada. | 50 |
| Figura 22. Modelo para diseño de control por modelo interno. | 52 |
| Figura 23. Señal de control para valores de beta. (a) $\beta = 0.5$. (b) $\beta = 0.25$. (c) $\beta = 0.125$ | 56 |
| Figura 24. Simulación en Matlab de control con linealización por realimentación. | 56 |
| Figura 25. Diagrama de bloques con control por modo deslizante. | 60 |
| Figura 26. Plano de fase para sistema controlado. | 60 |
| Figura 27. Dinámica ideal de superficie de deslizamiento. | 63 |
| Figura 28. Límites de superficie de deslizamiento y acción de control. | 67 |
| Figura 29. Función signo. | 68 |
| Figura 30. Sistema de nivel real. | 70 |
| Figura 31. Sistema linealizado por realimentación lineal. | 71 |
| Figura 32. Diagrama de bloques con control por modos deslizantes. | 74 |
| Figura 33. Simulación en Matlab de sistema con control por modos deslizantes. .. | 75 |

| | |
|--|-----|
| Figura 34. Sistema de control adaptativo propuesto en 1974. | 77 |
| Figura 35. Sistema de control adaptativo con modelo de referencia..... | 80 |
| Figura 36. Control MRAC para sistema de primer orden. | 83 |
| Figura 37. Control adaptativo autoajustable..... | 86 |
| Figura 38. Diagrama de bloques de sistema controlado para sistema no lineal.... | 92 |
| Figura 39. Simulación en matlab de sistema no lineal controlado. Señal de salida. | 92 |
| Figura 40. Señal de control adaptativo MRAC. | 93 |
| Figura 41. Diagrama de bloques de sistema de nivel no lineal. | 93 |
| Figura 42. Sistema de nivel linealizado. | 94 |
| Figura 43. Control MRAC para sistema lineal equivalente. | 97 |
| Figura 44. Diagrama de bloques equivalente con parámetro equivalente η | 97 |
| Figura 45 Diagrama de bloques de modelo de referencia..... | 98 |
| Figura 46. Simulación en Matlab Control MRAC. Señal de salida y referencia. | 98 |
| Figura 47. Señal de control adaptativo MRAC. | 99 |
| Figura 48. Diagrama de bloques de sistema en lazo abierto. | 101 |
| Figura 49. Panel Frontal de sistema de nivel. | 102 |
| Figura 50. Altura en tanque 2 H2t ante una entrada de referencia..... | 102 |
| Figura 51. Diagrama de bloques de sistema con Linealización por Realimentación. | 103 |
| Figura 52. Case Structure False..... | 104 |
| Figura 53. Case Structure True..... | 105 |
| Figura 54. Comparación modelo no lineal y modelo linealizado..... | 105 |
| Figura 55. Diagrama de bloques de sistema controlado. | 107 |
| Figura 56. Diagrama de bloques de sistema de control por modo deslizante. | 108 |
| Figura 57. Diagrama de bloques de Control adaptativo con modelo de referencia MRAC..... | 109 |
| Figura 58. Transmisores de presión ROSEMOUNT. a) Modelo 1151. b) Modelo 3151. | 111 |
| Figura 59. Bomba RULE de 1100 GPH..... | 112 |
| Figura 60. Tarjeta de adquisición de datos NI USB 6009..... | 113 |
| Figura 61. Diagrama de bloques para guardar un dato adquirido por segundo. . | 113 |
| Figura 62. Panel frontal de control con linealización por realimentación LPR. | 114 |
| Figura 63. Diagrama de Bloques de sistema de control LPR y adquisición de datos. | 114 |
| Figura 64. Señal de salida y referencia con LPR. | 115 |
| Figura 65. Señal de control LPR. | 115 |
| Figura 66. Señal de error LPR..... | 116 |
| Figura 67. Panel frontal de control por modo deslizante SC. | 117 |
| Figura 68. Diagrama de bloques de control SC..... | 117 |
| Figura 69. Señal de salida y referencia con SC. | 118 |

| | |
|---|-----|
| Figura 70. Señal de control SC. | 119 |
| Figura 71. Señal de error con SC. | 119 |
| Figura 72. Panel frontal de control adaptativo con modelo de referencia MRAC. | 120 |
| Figura 73. Diagrama de bloques de control MRAC. | 121 |
| Figura 74. Señal de salida y referencia con MRAC. | 122 |
| Figura 75. Señal de control MRAC. | 122 |
| Figura 76. Señal de error con MRAC. | 123 |
| Figura 77. Comparación de respuestas de sistema LPR ante diferentes referencias. | 124 |
| Figura 78. Comparación de respuestas de sistema SC ante diferentes referencias. | 124 |
| Figura 79. Comparación de respuestas de sistema MRAC ante diferentes referencias. | 124 |
| Figura 80. a) Comparación de respuestas de sistema LPR ante cambios en referencia. b) Comparación de respuestas de sistema SC ante cambios en referencia. c) Comparación de respuestas de sistema MRAC ante cambios en referencia. | 125 |
| Figura 81. Vista frontal del panel de control. | 127 |
| Figura 82. Comparación de respuestas ante una perturbación en la salida del sistema. | 127 |
| Figura 83. Comparación de señales de error ante perturbación en la salida. | 128 |
| Figura 84. Comparación de señales de control ante perturbación en la salida. ... | 129 |

RESUMEN

TITULO DEL TRABAJO: IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL NO LINEAL EN LABVIEW A UN SISTEMA DE NIVEL DE TANQUES.

AUTOR: JAVIER EDUARDO GONZALEZ RENTAL

OBJETIVO GENERAL: Estudiar tres de las técnicas de control no lineal más relevantes a nivel industrial, aplicarlas a un proceso real, y de esta forma lograr cualificar comparativamente el desempeño de cada uno de los reguladores diseñados a partir de las técnicas de control desarrolladas.

METODOLOGIA: Se estableció el estado del arte de la temática mediante la búsqueda bibliográfica en la Biblioteca de la Universidad Tecnológica de Bolívar, en conjunto con documentación obtenida en internet y bases de datos científicas.

Se desarrollo detalladamente cada una de las técnicas de interés partiendo de un modelo matemático no lineal obtenido previamente para luego ser implementadas sobre el sistema dinámico real, el sistema de nivel de líquido de tanques interconectados en paralelo ubicado en el Laboratorio de Control Automático de la Universidad Tecnológica de Bolívar.

Se obtuvo la respuesta del sistema controlado para cada una de las tres técnicas de control no lineal y se analizó la estabilidad y rapidez de respuesta de cada uno.

RESULTADOS: Analizar el desempeño de cada una de las técnicas de control no lineal implementadas.

Definir cuál de las técnicas presenta mejor desempeño.

PERSPECTIVAS: Por el grado de complejidad de la temática, existe la posibilidad que el diseño de los controladores resulte relativamente complejo, pese a esto, se espera obtener resultados favorables para un adecuado análisis y comprensión.

DIRECTOR: JOSE LUIS VILLA RAMIREZ, PhD.

Doctor en Ingeniería.

Director de Maestría en Ingeniería.

INTRODUCCION

Desde hace varias décadas se viene desarrollando numerosos métodos para controlar procesos industriales, los métodos más utilizados están basados en la teoría de control lineal, siendo los controladores PID en sus diversas formas, ajuste manual o automático (selftunnig), sistemas de adelanto-atraso (lead-lag) por reasignación de polos y ceros, control digital discreto (utilizando PLC's), entre otros, los mas implementados gracias a la sencillez de su estructura y a la facilidad a la hora de ser sintonizados. En general, estas estrategias podrían denominarse de parámetros óptimos pues, partiendo de una estructura algorítmica fija, se modifican sus parámetros con el objeto de lograr la respuesta del proceso que mejor se adecue a las necesidades del mismo. Habitualmente, este tipo de controladores presentan buenas condiciones de desempeño para la mayoría de procesos industriales tradicionales. Por todo lo anterior, estos han ido asegurando su permanencia a lo largo del tiempo. Sin embargo, debido a su naturaleza lineal, su desempeño se ve afectado en el control de procesos relativamente complejos, como lo son aquellos procesos en los que las constantes de tiempo son cortas, presentan no linealidades y/o dinámicas de orden superior, un claro ejemplo es el control de nivel de líquidos. [\[Aström, K. J. & Östberg, A. B.\]](#)

En los años 50s, comenzaron a surgir novedosas herramientas capaces de resolver problemas verdaderamente interesantes desde el punto de vista de control, herramientas no lineales que intentaban extender resultados de la teoría de sistemas lineales a sistemas no lineales, resultados tales como los que se refieren a la controlabilidad y observabilidad del sistema, convirtiéndose así en una importante alternativa al control lineal clásico. Los métodos para diseño y análisis de sistemas de control para procesos no lineales surgen de la necesidad de ampliar el conocimiento del comportamiento de los sistemas dinámicos reales, ya que, al obtener un modelo que describa las dinámicas del sistema, con frecuencia se omiten algunos aspectos con el fin de reducir inconvenientes presentados al momento de aplicar alguna técnica de control clásico, sea para analizar un proceso o para diseñar un sistema que lo controle. En el camino del diseño de sistemas de control, nos enfrentamos en primera instancia a la forma de cómo debemos representar matemáticamente las dinámicas del proceso a controlar, he aquí donde podría surgir el primer obstáculo, como ya es sabido la gran mayoría de sistemas de la vida real poseen características no lineales, optar por una linealización del sistema alrededor de un punto de equilibrio sería la solución más obvia, pero obtendríamos conocimientos limitados del sistema real, pues solo estaríamos analizando el sistema alrededor de un punto de operación, pero resulta que los sistemas no lineales presentan múltiples puntos de equilibrio aislados. Una solución fue propuesta por Alexander Mikhailovich Lyapunov en la Teoría de

Estabilidad de Lyapunov, basándose en esta teoría surgen técnicas de control no lineal para sistemas lineales y no lineales, *Control por Modo Deslizante (Sliding Mode Control)* y *Control Adaptativo (Adaptive Control)* son dos de las más relevantes técnicas de control, con ellas se es posible partir de un modelo no lineal del proceso para diseñar un controlador no lineal. [Khalil, H. K.], [Slotine, J. J. E., 1991]

Sumado a estas técnicas, en los años 80s Isidori demostró que no solo era posible extender los resultados de la teoría de sistemas lineales a sistemas no lineales, sino también logro demostrar la posibilidad de extender la teoría de control geométrico de sistemas lineales bajo la utilización de un juego de herramientas útiles en el tratamiento de sistemas lineales, una de estas herramientas de mayor importancia es la *Linealización por Realimentación (Feedback Linearization)*. [Isidori, A.]

El presente estudio se basa fundamentalmente en el desarrollo de estas tres herramientas de control no lineal (*Feedback Linearization, Sliding Mode Control y Adaptive Control*) y en la posterior implementación sobre un sistema de nivel de líquido a través del lenguaje de programación para el diseño de sistemas de adquisición de datos, instrumentación y control llamado *Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench "LabVIEW"*, el cual nos permitirá acelerar el desarrollo de aplicaciones de medidas sobre el proceso, logrando obtener datos necesarios para el análisis de las técnicas ya mencionadas.

Este documento consta de 6 capítulos, en el capítulo 1 se expone conceptos previos y necesarios para el desarrollo de posteriores capítulos; en el capítulo 2 se realiza una descripción general del proceso a controlar; en los capítulos 3, 4 y 5 se desarrolla las técnicas de control no lineal y el diseño de cada uno de los sistemas de control no lineal para el sistema de nivel de líquido; en el capítulo 3 se implementa la herramienta de Linealización por Realimentación y al momento de diseñar el sistema de control se utiliza la técnica de control robusto llamada control por modelo interno (IMC Internal Model Control). Por último, en el capítulo 6 se analiza la estabilidad y desempeño de cada uno de los sistemas de control diseñados para definir cuál de las tres herramientas resulta más eficiente.

1 CONCEPTOS PRELIMINARES

Previo al desarrollo y análisis de los sistemas de control no lineal, se es necesario tratar algunos conceptos de la teoría de control que permitan establecer una base para el claro entendimiento de posteriores planteamientos, por tal razón, en el trascurso del presente capítulo se hará énfasis en conceptos que se utilizarán en este trabajo [Ogata, 1987], [Ogata, 1998], [Kuo, Benjamín], [Dorf, Richard C.].

1.1 SISTEMAS DE CONTROL REALIMENTADO

De forma clara podríamos decir que la realimentación tiene como finalidad reducir el error producido al comparar la señal de referencia con la salida de un sistema, este sería uno de tantos fines, una ventaja que se logra con un sistema de control realimentado es la capacidad de compensar las posibles perturbaciones que presente el sistema, de igual forma, una desventaja tiene que ver con que el sistema solo puede compensar una perturbación hasta que la variable a controlar se ha desviado del punto de control [Smith, Carlos A. & Corripio, Armando B.]. Sumado a esto, con la realimentación se hace posible la estabilización de sistemas inestables y el mejoramiento de la robustez ante elementos de dinámicas inmodeladas y perturbaciones, aunque en algunas instancias, la realimentación más que ofrecer beneficios, puede ocasionar inconvenientes, lo que conlleva a afirmar que esta a veces resulta injustificable, pues para sistemas no perturbados un control sin realimentación podría producir iguales o probablemente mejores resultados.

1.1.1 Sistemas de control en lazo cerrado y en lazo abierto

En la ingeniería de control, siempre que utilicemos la expresión control en lazo cerrado, nos referimos a la implementación de una acción de control que reduce el error del sistema. Mientras que un sistema de control en lazo abierto es un sistema directo donde se genera directamente la salida en respuesta a una señal de entrada, estos últimos son fáciles de encontrar en sistemas que operan con una base de tiempo, y gracias a su simplicidad y a su bajo costo es frecuente verlos en muchas aplicaciones, aplicaciones en las que una acción de control realimentada no es necesaria, como cuando se conoce la relación entre la entrada y la salida del sistema. Por otro lado, mientras que un sistema de control en lazo cerrado se requiere la utilidad de diversos componentes, en lazo abierto se requiere una cantidad menor de componentes, pero aun así, un sistema realimentado resulta más ventajoso, por lo que es común ver una combinación de controles en lazo abierto y lazo cerrado reduciendo de esta forma costos y brindando un satisfactorio desempeño de sistema.

1.1.2 Tipos de sistemas de control realimentado

Resulta evidentemente variable la clasificación de los sistemas de control realimentado, pues esta depende de las funciones particulares del sistema, esto quiere decir que la clasificación podría ser en función de la aplicación del sistema de control, si se desea controlar la velocidad de un motor o la temperatura de un fluido, tendríamos un sistema de control de velocidad y un sistema de control de temperatura, así se podría tener una clasificación de la manera más evidente; si nos enfocamos en las características de las señales usadas en el sistemas, tendríamos sistemas continuos y sistemas discretos, ahora bien, si el objetivo de clasificarlos es diferenciarlos entre los métodos de análisis y diseño, estos pueden ser sistemas de control lineales y *sistemas de control no lineales*, esta última clasificación abarca un sin número de sistemas, pues la gran mayoría de los métodos de análisis y diseño de controladores están basados en la teoría dentro de sistemas lineales, pero también se ha desarrollado novedosas herramientas que permiten extender esta teoría a sistemas que presentan no linealidades.

1.1.3 Sistemas de control lineal y no lineal

Partiendo del hecho que la gran mayoría de los sistemas de la vida real tienen características no lineales, podríamos afirmar que en la práctica no existen sistemas lineales, lo que comúnmente llamamos sistema lineal resulta ser un sistema de características lineales limitantes, por consiguiente un sistema de control lineal no es más que un modelo ideal obtenido con el fin de simplificar el análisis de estos, a pesar de lo anterior, las técnicas de diseño y análisis de sistemas de control lineal han tenido gran éxito debido a que el control lineal permite una solución analítica y no requiere de complicados medios computacionales para su solución, técnicas que han resuelto innumerables problemas de control, pero que se ven limitadas en algunos casos específicos, como lo es en los sistemas de control de nivel de líquidos para tanques, donde se hace claro la evidencia de dinámicas no lineales, he aquí donde aparecen diversos métodos que tratan de mitigar estos inconvenientes. Siendo el aspecto no lineal un problema relevante, hace mucho tiempo surgió la idea de la linealización como respuesta, en ese entonces, a la carencia de métodos para resolver una amplia clase de sistemas no lineales, la técnica permitía aplicar métodos de análisis lineal que proporcionen información alguna con respecto al comportamiento de los sistemas no lineales, luego era posible tratar de controlar un proceso con dinámica no lineal siempre y cuando se mantuvieran constantes ciertas condiciones de operación, pues si se tiene una amplia variación de dichas condiciones, la técnica se volvía ineficiente.

El control no lineal hace referencia al análisis y diseño de sistemas de control no lineales, y decimos que un sistema es no lineal cuando no es posible aplicar el principio de superposición entre las magnitudes de sus señales. Las no linealidades de un sistema pueden ser proporcionadas por elementos de hardware como sensores y elementos finales de carrera, por las características propias del proceso o por el tipo de controlador. Hoy en día, existen muchas técnicas para el diseño y el análisis de sistemas de control no lineal entre ellas está *Linealización por Realimentación*, *Control por Modos Deslizantes* y *Control Adaptativo*, estas tres novedosas técnicas son la base de este trabajo y por tanto se desarrollaran más adelante.

1.2 MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS

Un modelo está definido como una aproximación matemática que representa la dinámica de un sistema. En base a esta definición, puede surgir la siguiente afirmación, debido a que es una aproximación, el modelo podría tomar diversas formas, por lo que el sistema tendrá múltiples representaciones y por ende no existe un modelo matemático único para cada sistema. La forma representativa de muchos sistemas dinámicos, sean mecánicos, eléctricos, neumáticos, hidráulicos, entre otros, son las ecuaciones diferenciales. El debido planteamiento de estas ecuaciones juega un papel de vital importancia al momento de diseñar un sistema de control.

La forma clásica de modelar sistemas dinámicos lineales es a través de funciones de transferencia, las cuales representan la relación entre la variable de salida y la de entrada. Una función de transferencia se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero [Ogata, 1987]. La idea de la utilización de la transformada de Laplace es sustituir las ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas que permitan una fácil solución. Ahora bien, decimos que una función lineal $f(t)$ es transformable cuando se cumple la siguiente condición

$$\int_{0-}^{\infty} |f(t)| e^{\sigma_1 t} dt < \infty$$

y la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Luego de haber identificado las variables del sistema, obtenemos la transformada de Laplace o la equivalencia de las ecuaciones diferenciales en el dominio de la frecuencia y podemos establecer la relación entrada-salida como

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(\text{salida})}{\mathcal{L}(\text{entrada})} \Big|_{\text{con condiciones iniciales cero}}$$

Si se tiene un sistema descrito con la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = au(t)$$

donde $y(t)$ es la salida del sistema y $u(t)$ es la entrada, si transformamos la ecuación diferencial

$$sY(s) = aU(s)$$

Es claro notar que al transformar la ecuación se reduce el problema de solución de ecuaciones.

Definimos la función de transferencia como

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{as}$$

En el momento que se tiene una función de transferencia $G(s)$ es posible establecer de manera experimental el comportamiento de la salida ante señales de entrada conocidas.

1.2.1 Diagramas de bloques

Además de la función de transferencia, un sistema puede ser expresado gráficamente por medio de un diagrama de bloques, que resulta ser una serie de bloques operacionales y unidireccionales que representan la función de transferencia de las variables de interés del sistema. Y de igual forma que los modelos matemáticos, un sistema dinámico no posee un único diagrama de bloques. Las figuras 1a y 1b son un claro ejemplo de un diagrama de bloques, el primero representa un diagrama de bloques en lazo abierto, mientras que el segundo representa un diagrama de bloques en lazo cerrado, con entrada $U(s)$ y salida $Y(s)$, la señal $E(s)$ es la señal de error de las variables.

$$E(s) = U(s) - Y(s)$$

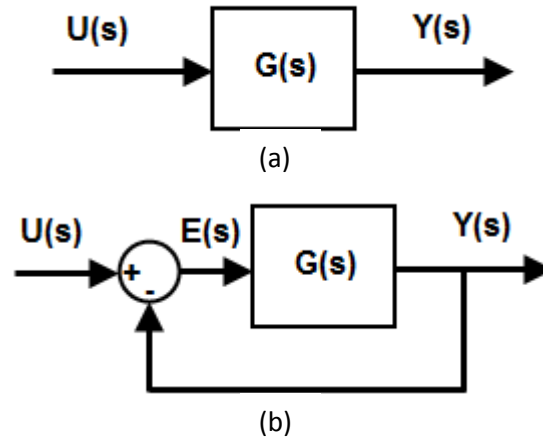


Figura 1. Diagrama de bloques en lazo abierto. Diagrama de bloque en lazo cerrado.

1.2.2 Modelos en el espacio de estados

La teoría clásica basada en la transformada de Laplace resulta limitante, pues en general es aplicada a sistemas lineales e invariantes en el tiempo con una entrada y una salida, ante esto en los años 60s se desarrolla una técnica basada en variables de estado aplicable a sistemas lineales o no lineales, invariantes en el tiempo o variantes en el tiempo, con una o múltiples entradas y con una o múltiples salidas. Sin embargo, el término estado se viene utilizando desde hace muchos años en el campo de la dinámica clásica, y lo definimos a continuación al igual que otros términos utilizados en la teoría de variables de estados como

Estado: condiciones pasadas, presentes y futuras de un sistema, que puede ser descrito por un conjunto de variables.

Variables de estado: conjunto mínimo de variables $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, tales que su conocimiento en cualquier tiempo t_0 y la información con respecto a la señal de entrada aplicada posteriormente al tiempo t_0 bastan para determinar el estado del sistema para cualquier tiempo $t_0 \geq 0$.

Estado inicial: definido por las variables de estado $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ para cualquier tiempo inicial $t = t_0$.

Vector de estado: contiene como componentes las n variables de estado necesarias para describir el comportamiento de un sistema dinámico.

Espacio de estados: espacio n -dimensional con ejes de coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n .

Salidas del sistema: variables medibles y controlables y se representan como la combinación lineal de variables de estado.

Ecuaciones de estado: ecuaciones diferenciales de primer orden usadas para modelar sistemas dinámicos.

De forma general se puede representar un sistema en sus variables de estado como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Con A como matriz de estado, B matriz de entrada, C matriz de salida y D como la matriz de transmisión directa. Y con un diagrama de bloques como se muestra en la figura 2.

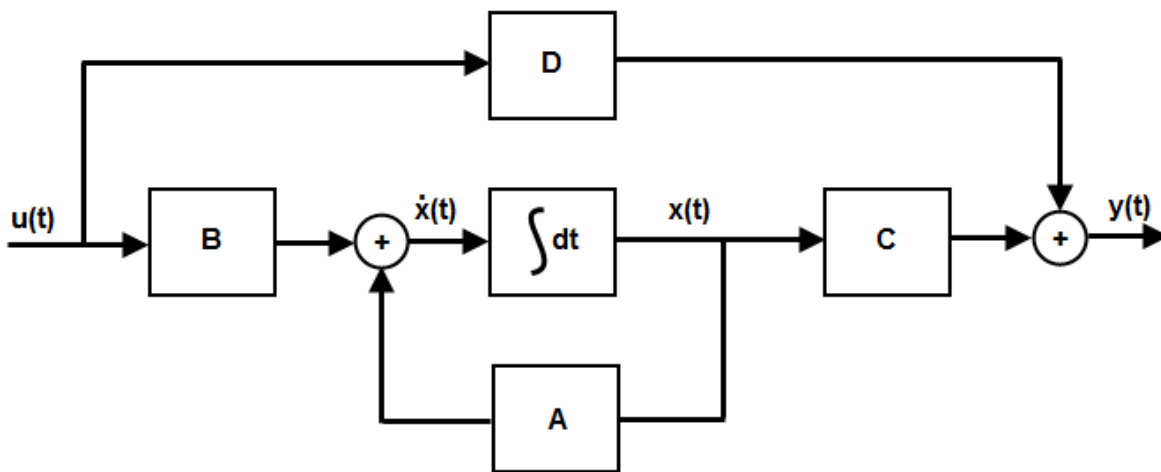


Figura 2. Representación en diagrama de bloques de sistema en variables de estado.

1.2.3 Modelado de sistemas de nivel de líquido

Uno de los sistemas dinámicos caracterizados por su naturaleza no lineal, son los sistemas hidráulicos, estos ocupan un gran campo a nivel industrial lo que motiva su análisis y estudio. Para iniciar el modelado de este tipo de sistemas, consideremos un tanque que contiene un líquido de densidad ρ , tiene un orificio en un lado a una altura h_1 del fondo, y el aire por encima del líquido se mantiene a una presión p como se muestra en la figura 3.

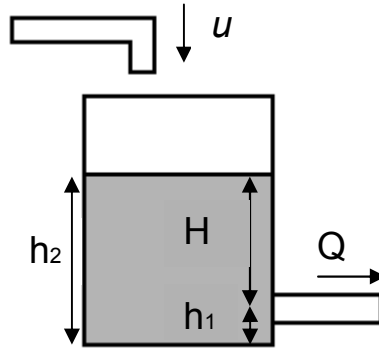


Figura 3. Sistema de nivel de líquidos con flujo de entrada u y flujo de salida Q .

Donde u es el flujo de entrada, Q el flujo de salida y H la altura del nivel del líquido en el tanque, si aplicamos la ecuación de Bernoulli teniendo en cuenta que el área del orificio es mucho menor que el área transversal del tanque, se tiene que

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho Q^2 + \rho g h_1 = p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g h_2$$

siendo p_1 la presión en la salida del flujo y puede ser considerada como la presión atmosférica p_0 , si consideramos que el flujo de entrada es mucho menor al flujo de salida, $u \ll Q$, y $H = h_2 - h_1$

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho Q^2 = p + \rho g(h_2 - h_1)$$

entonces

$$Q = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho} + 2gH}$$

Esta última expresión es conocida como Ley de Torricelli

Al definir la presión sobre el líquido p como la presión atmosférica p_0 obtenemos una expresión para el flujo de salida en función de la altura del nivel del líquido al centro del orificio

$$Q = \sqrt{2gH}$$

Pese a esto, esta expresión resulta ideal, pues si se es consciente de la fricción del líquido en el orificio la expresión cambiaría a

$$Q = \beta\sqrt{2gH}$$

con β tomando valores entre 0.99 y 0.98, de tal forma que el flujo de salida real corresponde a entre 1 y 2% menos del flujo ideal. El flujo de salida real generalmente se escribe como [Ogata, 1987]

$$Q = cA_0\sqrt{2gH}$$

donde c es una constante adimensional conocida como coeficiente de descarga y A_0 es el área del orificio, el coeficiente de descarga es el producto entre el coeficiente de velocidad de flujo C_v y el coeficiente de contracción C_c

$$c = C_v C_c$$

con $C_c = \frac{A_1}{A_0}$, donde A_1 es el área del chorro, entonces

$$Q = C_v C_c A_0 \sqrt{2gH} = cA_0\sqrt{2gH}$$

Consideremos ahora un sistema de tanques interconectados como lo muestra la figura

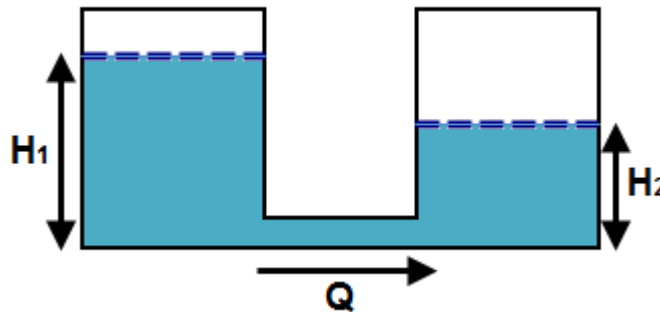


Figura 4. Sistema de tanques interconectados en paralelo.

El flujo de líquido Q estará definido en función de la altura del nivel en el tanque 1, H_1 , y la altura del nivel en el tanque 2, H_2

$$Q = cA_0\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$$

En el caso de la existencia de algún objeto que restrinja (por ejemplo una válvula) el paso del flujo del tanque 1 al tanque 2, podríamos considerar los conceptos de resistencia y capacitancia, la resistencia está definida como el cambio de la diferencia de nivel necesaria para producir un cambio de una unidad del flujo, lo que es

$$R = \frac{d(H_1 - H_2)}{dQ}$$

Esta resistencia depende de las condiciones del flujo, si se tiene un flujo laminar el flujo esta dado por

$$Q = K_l(H_1 - H_2)$$

donde K_l es la constante de proporcionalidad para flujo laminar, y la resistencia de flujo laminar estará dada por

$$R_l = \frac{d(H_1 - H_2)}{dQ} = \frac{1}{K_l} \quad \left[\frac{s}{m^2} \right]$$

Pero para un flujo turbulento

$$Q = K_t \sqrt{(H_1 - H_2)}$$

La resistencia de flujo turbulento es

$$R_t = \frac{d(H_1 - H_2)}{dQ} = \frac{2(H_1 - H_2)}{Q}$$

Nótese que si se considera el flujo como laminar, resultará un modelo lineal, mientras si el flujo es turbulento se tendrá un modelo no lineal.

La capacitancia C es el cambio en la cantidad de líquido almacenado necesario para producir un cambio unitario de potencial, con este concepto podemos expresar para flujo laminar de la figura 5.

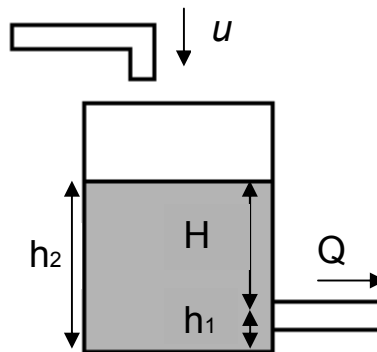


Figura 5. Sistema de nivel con altura H .

$$C \frac{dh}{dt} = (u - q)$$

con $q = \frac{h}{R}$, entonces

$$C \frac{dh}{dt} = u - \frac{h}{R}$$

Si aplicamos la transformada de Laplace

$$CsH(s) = U(s) - \frac{H(s)}{R} \Rightarrow RCsH(s) = RU(s) - H(s)$$

la función de transferencia de este sistema es

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

De igual forma se puede realizar lo anterior para el flujo turbulento y obtendremos una función de transferencia teniendo en cuenta que $q = \frac{2h}{R}$

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{R}{RCs + 2}$$

Si se tiene un sistema de nivel de líquido donde dos tanques de dimensiones diferentes estas interconectados como muestra la figura 6.

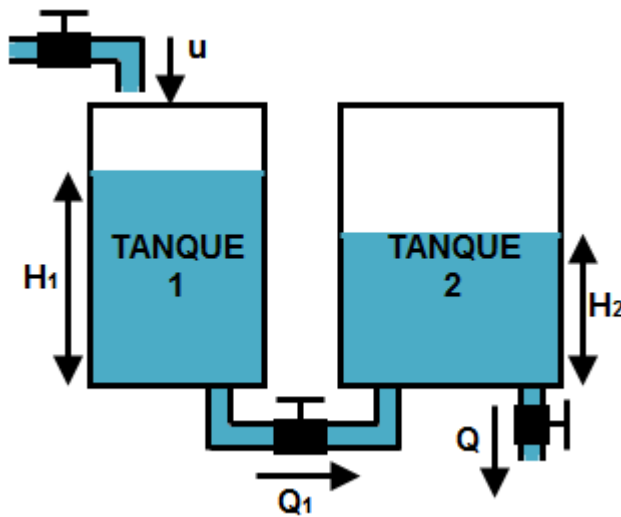


Figura 6. Sistema de nivel de tanques interconectados en paralelo con configuración de válvulas cerradas y/o abiertas.

Con un flujo turbulento entre las tuberías, una presión atmosférica sobre el líquido en ambos tanques, siendo u el flujo de entrada, Q_1 el flujo del tanque 1 al tanque 2, Q el flujo de salida, y H_1 y H_2 las alturas del nivel del líquido en los tanques 1 y 2 respectivamente, podemos definir las siguientes ecuaciones diferenciales:

TANQUE 1

$$A_1 \frac{dH_1}{dt} = u - Q_1$$

si $Q_1 = cA_0\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ la ecuación queda

$$A_1 \frac{dH_1}{dt} = u - cA_0\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$$

o

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{cA_0\sqrt{2g}}{A_1}\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{1}{A_1}u$$

Esta sería la primera ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema de nivel.

TANQUE 2

$$A_2 \frac{dH_2}{dt} = Q_1 - Q$$

si $Q_1 = cA_0\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$ y $Q = cA_0\sqrt{2gH_2}$ la ecuación queda la ecuación queda

$$A_2 \frac{dH_2}{dt} = cA_0\sqrt{2g(H_1 - H_2)} - cA_0\sqrt{2gH_2}$$

o

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{cA_0\sqrt{2g}}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{cA_0\sqrt{2g}}{A_2}\sqrt{H_2}$$

Con las dos ecuaciones tenemos el modelo matemático del sistema de nivel de tanques interconectados en paralelo considerando un flujo turbulento escrito como

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{1}{A_1}u$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2}$$

Donde la constante $K = cA_0\sqrt{2g}$

La representación del sistema en espacio de estados y el diagrama de bloques del mismo se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{A_1} & 0 \\ \frac{K}{A_2} & -\frac{K}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{H_1 - H_2} \\ \sqrt{H_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

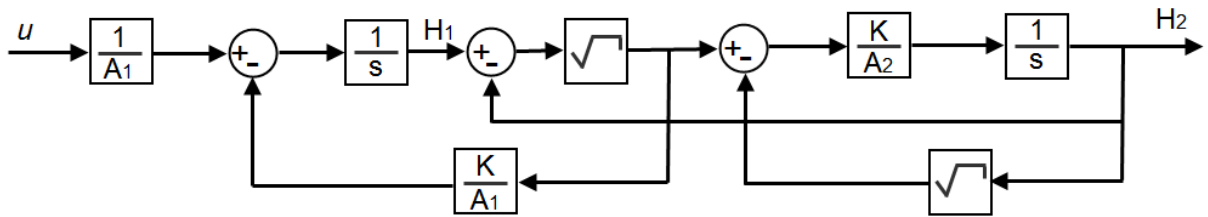


Figura 7. Diagrama de bloques de sistema no lineal.

Como es lógico, debido a la dinámica no lineal del sistema no es posible que dicho sistema se pueda transformar al dominio de la frecuencia, y por tanto no se puede definir una función de transferencia.

1.3 ACCIONES DE CONTROL

La función de un controlador es mantener un comportamiento deseado a través de un punto de control, esto es logrado gracias a un cálculo basado en la comparación entre la variable a controlar y el punto de control. Dependiendo del tipo de controlador se realizará una acción determinada sobre el proceso.

Los controladores más comunes a nivel industrial se clasifican en función de las formas de las ecuaciones que describen su operación, proporcional P, proporcional-integral PI, proporcional-derivativo PD y proporcional-integral-derivativo PID.

1.3.1 Acción proporcional P

La acción del controlador proporcional se define como

$$u(t) = K_p e(t)$$

siendo $e(t)$ la señal de error. La relación entre la salida del controlador $u(t)$ y el error $e(t)$ en el dominio de la frecuencia establece la función de transferencia del controlador

$$G_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

generalmente, K_p es conocida como ganancia proporcional.

1.3.2 Acción proporcional-integral PI

La acción de este tipo de controlador está definida por la ecuación

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

Donde el término $\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$ corresponde a la acción integral, entonces la acción PI equivale a la acción proporcional mas la acción integral. La función de transferencia de la acción PI es

$$G_{PI}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

siendo T_i el tiempo integral.

Con la acción de control proporcional-integral, mientras exista una señal de error, se integrara el error tantas veces sea necesario hasta que el error sea cero.

1.3.3 Acción proporcional-derivativa PD

La acción de control PD se define como

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Y función de transferencia

$$G_{PD}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

donde T_d es el tiempo derivativo, este tipo de controlador es comúnmente llamado control anticipativo, pues predice el sobrepaso que podría tener la respuesta del sistema y trata de corregir para evitar un sobrepaso excesivo.

1.3.4 Acción de control PID

La ecuación que describe la operación de la acción PID es

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Y la función de transferencia

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

El controlador PID posee una combinación de características de las acciones ya mencionadas, puede mejorar la estabilidad y el error en estado estable.

Idealmente un controlador PID se puede definir como

$$G_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

pero el termino derivativo puro $T_d s$ puede ser cambiado por la expresión

$$\frac{T_d}{1 + \gamma T_d s}$$

para obtener un PID real

$$G_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d}{1 + \gamma T_d s} \right)$$

Donde la constante γ puede tomar cualquier valor alrededor de 0.1 [Ogata, 1998].

1.4 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Una de las características más importantes de los sistemas dinámicos es la estabilidad, ya que sin ella el resto de especificaciones carecen de sentido; para sistemas lineales invariantes en el tiempo, existe muchos métodos de análisis de estabilidad, como el criterio de estabilidad de Routh y el criterio de estabilidad de Nyquist, sin embargo, cuando se tratan sistemas no lineales o variantes en el tiempo, tales criterios de estabilidad no tienen validez.

Entre las técnicas de análisis de estabilidad de sistemas no lineales, la teoría basada en Lyapunov se destaca claramente, con esta técnica se es capaz de determinar la estabilidad de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales desde dos perspectivas, una basándose en la solución de las ecuaciones diferenciales, y otra por el contrario, sin necesidad de tener la solución de las ecuaciones diferenciales.

En el primer método de Lyapunov se tiene las siguientes premisas:

Al linealizar un sistema no lineal

- Si el sistema linealizado es asintóticamente estable entonces, el sistema no lineal es asintóticamente estable.
- Si el sistema linealizado es asintóticamente inestable, entonces el sistema no lineal es inestable.

- Si el sistema linealizado es críticamente estable entonces, no se puede afirmar si el sistema no lineal es estable o inestable.

El segundo método de Lyapunov tiene como objetivo dar respuesta a aspectos de estabilidad de ecuaciones diferenciales, utilizando la forma dada de las ecuaciones pero sin el conocimiento explícito de las soluciones. **[Gordillo F.], [Ogata, 1998]**

Definición positiva de funciones escalares

Se dice que una función escalar $V(x)$ es definida positiva en una región que incluye el origen del espacio de estado Ω , si $V(x) > 0$ para todos los valores de x diferentes de cero de la región Ω y si $V(0) = 0$.

Definición negativa de funciones escalares

Una función escalar $V(x)$ se define negativa si $-V(x)$ es definida positiva.

Semidefinición positiva de funciones escalares

Una función escalar $V(x)$ es semidefinida positiva si es positiva en todos los estados en la región Ω excepto en el origen.

Semidefinición negativa de funciones escalares

Una función escalar $V(x)$ es semidefinida negativa si $-V(x)$ es semidefinida positiva.

Indefinición de funciones escalares

Una función escalar $V(x)$ es indefinida si en la región Ω toma tanto valores positivos como negativos.

La idea del segundo método se deduce con el siguiente planteamiento físico:

Si un sistema físico tiene una razón de cambio de energía $\frac{dE(x)}{dt}$ negativa para todo posible estado excepto para un punto de equilibrio x_e , entonces la energía decrecerá hasta tomar su mínimo valor $E(x_e)$.

Pese a que no siempre es posible definir una función de energía en un sistema a partir de su forma puramente matemática, puede interpretarse la función de Lyapunov $V(x)$ como una función de distancia con respecto a punto de equilibrio, ya que la función de distancia, a diferencia de la energía, puede admitir múltiples formas para ser definida.

Las funciones del Lyapunov se expresan en términos de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t$, es decir $V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t)$ o $V(x, t)$, cuando las funciones no incluyen explícitamente t , se pueden escribir como $V(x)$. El signo de la función y el de su derivada, determina la estabilidad del sistema, con lo que se puede definir si un sistema es estable, asintóticamente estable o inestable.

1.4.1 Definiciones de estabilidad

Consideremos el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x)$$

que tiene un equilibrio en $x = 0$, es decir, $f(0) = 0$.

Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Se dice que el equilibrio en $x = 0$ del sistema es localmente estable en el sentido de Lyapunov, o sencillamente estable, cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un valor $\delta > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

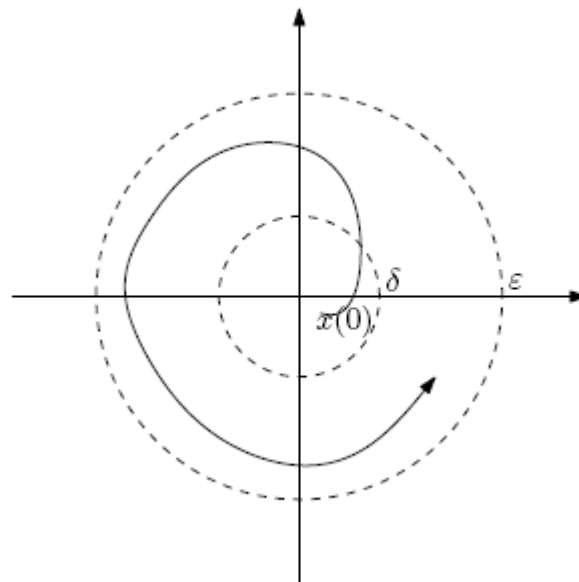


Figura 8. Definición de estabilidad según Lyapunov.

En la figura 8 podemos observar la trayectoria parte del círculo de radio δ y no sale del círculo de radio ε . Si el sistema estable, esta trayectoria no debe salir del círculo de radio ε , ni ninguna otra trayectoria que parta de del círculo de radio δ .

Estabilidad asintótica

Se dice que el equilibrio $x = 0$ del sistema es asintóticamente estable si es localmente estable o estable en el sentido de Lyapunov y si existe un valor de $\delta > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Estabilidad exponencial

Se dice que el equilibrio $x = 0$ del sistema es exponencialmente estable si existen constantes positivas α , β y δ tales que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \forall t \geq 0$$

La estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica, mientras que lo contrario no es posible.

En los conceptos de estabilidad asintótica y exponencial, el carácter de estable o no estable depende única y exclusivamente de las trayectorias cuyas condiciones iniciales están arbitrariamente cerca de $x = 0$.

Estabilidad asintótica global

Se dice que el equilibrio $x = 0$ del sistema es global y asintóticamente estable si es estable en el sentido de Lyapunov y si se tiene que para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Estabilidad exponencial global

Se dice que el equilibrio $x = 0$ del sistema es global y exponencialmente estable si existen constantes positivas α y β tales que $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}$, $t \geq 0$ para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

1.4.2 Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov está definido por el siguiente teorema:

Considérese el sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

y supóngase que existe una función continuamente diferenciable $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0, x \in \mathcal{D}, x \neq 0$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0, x \in \mathcal{D}$$

entonces el equilibrio $x = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov.

Si además de lo anterior se cumple

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0, x \in \mathcal{D}, x \neq 0$$

entonces, el equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable.

Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y la función V es radialmente no acotada, es decir, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, el equilibrio $x = 0$ es global y asintóticamente estable.

Si existen escalares positivos α , β y γ , y $p \geq 1$ tales que

$$\alpha \|x\|^p \leq V(x) \leq \beta \|x\|^p, \quad x \in \mathcal{D}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq \gamma V(x), \quad x \in \mathcal{D}$$

entonces, el equilibrio $x = 0$ exponencialmente estable. Y si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y la función V es radialmente no acotada, entonces es global y exponencialmente estable.

2 DESCRIPCION DEL SISTEMA DE NIVEL Y ESTRATEGIA DE CONTROL

El sistema ha controlar (Figura 9) consta de dos tanques (Tanques 1 y 2) de 44 y 26 litros de capacidad respectivamente, interconectados a través de una válvula de paso.

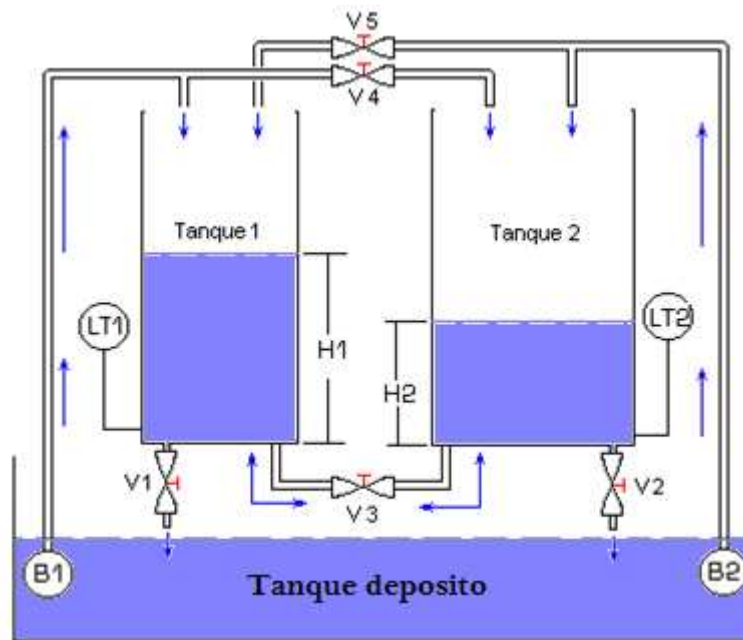


Figura 9. Sistema de nivel de líquido.

Ambos tanques podrían verter el agua en un tercer tanque (Tanque depósito) de 75 litros de capacidad, situado por debajo de ellos, a través de las válvulas de paso V1 y V2. El llenado de los dos tanques puede ser realizado mediante dos bombas sumergibles en agua y de velocidad variable, con caudal máximo de 1100 GPH (4165 Litros por Hora), ubicadas en el Tanque depósito.

El nivel de ambos tanques, (Tanque 1 y 2) es sentido por Transmisores de Presión Diferencial (LT1 y LT2) ubicados en la parte inferior de cada tanque. Las señales de los transmisores son llevadas a un sistema de adquisición de datos.

El sistema en conjunto puede ser configurado como un proceso de control Multivariable ya que puede tener como entradas los flujos de alimentación Q1 y Q2 y como salidas los niveles de agua H1 y H2 respectivos, con una interrelación entre los tanques debido al flujo a través de la válvula de paso V3. De igual forma, el sistema puede ser configurado como un sistema Monovariable donde habría que definir una entrada y una salida, la entrada puede ser el flujo entregado por la

bomba B1 o por la bomba B2, y la salida la altura del líquido en el tanque 1 H_1 o la altura en el tanque 2 H_2 .

Para la implementación de las técnicas de control no lineal, se optó por considerar el sistema en configuración Monovariante, siendo la entrada el flujo debido a la bomba B1 y la salida del sistema la altura del líquido en el tanque 2 H_2 . Es importante hacer notar que debido a las características físicas de los tanques, este tipo de configuración tiene algunas limitantes. Al observar el sistema de tanques se puede observar que el volumen del tanque 2 es superior al del tanque 1, he aquí donde surge la principal limitante, puesto que la capacidad del tanque 1 no es suficiente para hacer incrementar de manera considerable la altura del líquido en el tanque 2.

Para la configuración como sistema Monovariante, se hace necesario tener las siguientes consideraciones:

- Solo debe ser activada la bomba B1, por lo tanto la bomba B2 deberá permanecer inactiva, con el fin que solo exista una única entrada.
- Las válvulas V1, V4 y V5 deberán permanecer totalmente cerradas y la válvula V2 deberá permanecer abierta o semiabierta si se desea reducir el flujo de salida con el fin de incrementar la altura del líquido en el tanque 2.

2.1 PARÁMETROS DEL SISTEMA

De acuerdo al modelo matemático del sistema de nivel

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{1}{A_1}u$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2}$$

los parámetros característicos de este son el área transversal del tanque 1, A_1 , el área transversal del tanque 2, A_2 , y la constante K^1 , esta última está definida como

$$K = cA_0\sqrt{2g}$$

donde

$$c = 0,61$$

¹ Ver sección 1.2.3.

$$A_0 = 0,002827 \text{ m}^2$$

entonces

$$K = 0,61(0,002827\text{m}^2)\sqrt{2(9,8\text{m/s}^2)}$$

| PARAMETROS DEL SISTEMA | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| AREA TANQUE 1 (m ²) | AREA TANQUE 2 (m ²) | AREA DE ORIFICIOS (m ²) | CONSTANTE DE DESCARGA | COEFICIENTE DE DESCARGA |
| 0,0325 | 0,055 | 0,002827 | 0,00763455 | 0,61 |

Figura 10. Parámetros característicos del sistema de nivel.

2.2 ESTRATEGIA DE CONTROL

Para el sistema en configuración Monovariante, se pretende controlar la altura del líquido en el tanque 2, H_2 , actuando únicamente sobre la bomba B_1 . El sistema de control realimentado, ver figura 11, consta de:

Proceso: Tanques conectados en paralelo.

Actuador: Bombas de 1100 GPH, B_1 y B_2 .

Sensor: Transmisores de presión diferencial, LT_1 y LT_2 .

Perturbación: Activación manual de la bomba B_2 , para análisis de respuesta ante perturbaciones.

Controlador: Computador – Tarjeta de adquisición de datos – Control no lineal.

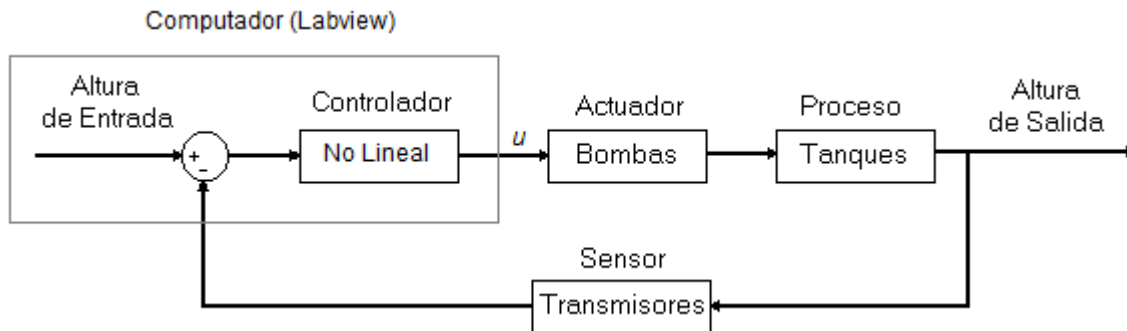


Figura 11. Sistema de control realimentado para sistema de nivel.

2.2.1 Actuadores (Bombas B₁ y B₂)

Para el control del flujo de la bomba B₁ se tuvo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las bombas operan en un rango de 0 a 12 Vdc.
- El rango en las terminales de salida de la tarjeta de adquisición es de 0 a 5 Vdc.

Por lo anterior, se hizo necesario realizar una escala para el control del flujo, u , de la bomba, esto sabiendo de las características no lineales de este tipo de actuador. Para ello se definió en Labview lo siguiente:

- Si $u \leq 0$, entonces la señal que activara a B₁ tomara un valor de cero.
- Si $u \geq 12$, entonces la señal que activara a B₁ tomara un valor de 12 Vdc.
- Si $0 < u < 12$, entonces la señal que activara a B₁ tomara el valor de u .

Con esto se logra tener un adecuado control del flujo de la bomba B₁, es importante aclarar que no es conveniente tratar de establecer una correlación entre al rango de operación de las bombas y el rango de salida de la tarjeta de adquisición debido al comportamiento no lineal de los actuadores.

Por otra parte, la bomba B₂ permanecerá apagada y solo se activara de manera manual en el instante en que se desee simular una perturbación en la salida del sistema.

2.2.2 Controlador

El controlador estará compuesto de una acción de control capaz de linealizar el sistema por una realimentación de estados y otra capaz de hacer que la variable a controlar (H₂) siga al punto de referencia, todo esto a través del software Labview, que se encargara no solo de la parte de control sino también de la visualización de los datos.

3 LINEALIZACION POR REALIMENTACION

La linealización por realimentación es una herramienta que consiste en plantear cuales serian las condiciones necesarias para lograr llegar a una realimentación de estados a partir de un sistema no lineal, condiciones que transformarían algebraicamente las dinámicas del sistema, simplificándolo de esta forma a un sistema de dinámicas lineales.

3.1 FORMULACIÓN TEÓRICA.

Esta herramienta, ha sido utilizada desde hace algunos años con gran éxito a la hora de tratar de dar solución a los cotidianos problemas de control concernientes a dinámicas no lineales de procesos reales, como por ejemplo el control de helicópteros, robots industriales y el control de aparatos en la electromedicina; pero aun así, la aplicación de esta técnica podría ser ampliamente extendida a un sin número de procesos, puesto que, es inevitable enfrentarse con no linealidades cuando se desea diseñar un determinado sistema de control. Además, esta herramienta sería una interesante alternativa a las convencionales técnicas de linealización, y aunque en ambas el objetivo es obtener un sistema lineal equivalente que permita aplicar numerosos métodos de análisis lineal que nos proporcionen información alguna referente al comportamiento de sistemas no lineales, la linealización por realimentación es lograda por la transformación exacta y realimentación de los estados, mientras la linealización convencional nos brinda una limitante aproximación lineal de las dinámicas del sistema [Slotine, Jean-Jacques E., 1991].

Básicamente, la idea de la linealización por realimentación es cancelar o eliminar las no linealidades de un sistema para obtener dinámicas en lazo cerrado en forma lineal, para mayor claridad lo anterior se desarrollara en el siguiente ejemplo:

Consideremos el sistema de nivel de liquido de primer orden como se muestra en la figura 12 en el cual se tiene un flujo de entrada u y un flujo de salida Q , sumado a esto encontramos la altura H que depende tanto del flujo que ingresa al recipiente como de la cantidad de flujo que sale de él.

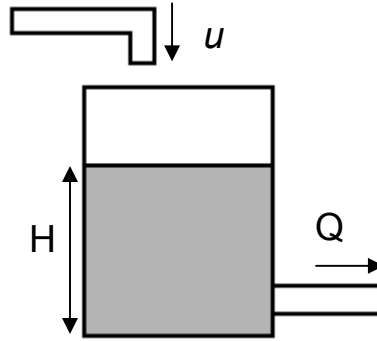


Figura 12. Sistema de nivel de primer orden.

Si modelamos matemáticamente el comportamiento del sistema, tendríamos la ecuación

$$A \frac{dH}{dt} = u - Q$$

Antes de continuar, sería de vital importancia definir nuestras variables de estado, pues de esta forma podemos saber cuáles son las variables a transformar. En este caso, definamos como variable de entrada el flujo de entrada u y como variable de salida la altura del nivel de líquido en el recipiente H . Luego de definir nuestra variable de entrada y salida, es conveniente expresar la ecuación en términos de dichas variables, esto es

$$A \frac{dH(t)}{dt} = u(t) - K\sqrt{H(t)}$$

Donde A es el área transversal del recipiente y K es una constante dada por la expresión

$$K = cA_0\sqrt{2g}$$

en donde c = coeficiente de descarga, este varía dependiendo el orificio² [Ogata, 1987]

A_0 = área del orificio de desagüe

g = gravedad

El modelo en variables de estado es

² El orificio estándar para propósito de medición o regulación es el orificio de borde afilado u orificio de placa delgada. El valor del coeficiente de descarga para estos orificios es 0,61.

$$\dot{H} = -\frac{K}{A}\sqrt{H} + \frac{1}{A}u$$

Como se puede observar en la expresión anterior, encontramos que la variación de la altura H no es de forma lineal, más bien presenta una dinámica no lineal que implicaría problemas a la hora de aplicar las tradicionales técnicas de diseño de reguladores, por lo que sería recomendable tratar de simplificar el sistema a un modelo lineal equivalente. Como se menciono anteriormente, debemos eliminar o cancelar de manera alguna las expresiones que representen dinámicas no lineales del sistema, en primera instancia podríamos elegir u como

$$u = \sqrt{H} + \frac{A}{K}v$$

siendo v la entrada equivalente del sistema, y el sistema resultante luego de la realimentación es

$$\dot{H} = v$$

Finalmente logramos conseguir un sistema lineal equivalente con una nueva variable de estado v y una función de transferencia

$$\frac{V(s)}{H(s)} = \frac{1}{s}$$

Luego de obtener este sistema equivalente, hemos solucionado los problemas de no linealidades y por tanto resultaría sencillo elegir una adecuada acción de control v para regular el sistema modelado.

Todo esto de cancelar o eliminar las no linealidades de un sistema para simplificarlo a otro con dinámicas lineales no siempre resulta tan fácil, de tal manera que es necesario aclarar que para aplicar esta herramienta es vital que el sistema no lineal este expresado en la forma canónica controlable [Slotine, Jean-Jacques E., 1991]. Para ello el sistema debe tener la forma

$$\dot{x}^n = f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})u$$

donde u y x son escalares y representan la entrada y la salida del sistema respectivamente, el vector de estado \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = [x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{n-1}]^T$$

y las expresiones $f(\mathbf{X})$ y $g(\mathbf{X})$ son funciones no lineales.

Lo anterior representado en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(\mathbf{X}) + b(\mathbf{X})u \end{bmatrix}$$

Ahora bien, analicemos el sistema no lineal en su forma general

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

Para que exista una realimentación de estados la acción u debe ser de la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

y debe existir un cambio de variables que logren transformar el sistema no lineal en una forma lineal equivalente

$$z = T(x)$$

Para mayor claridad apliquemos la idea anterior en el siguiente sistema³ [Khalil, Hassan K.]

Ejemplo 3.1

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a[\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen}\delta] - bx_2 + cu$$

Si queremos cancelar o eliminar las no linealidades del sistema, $\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen}\delta$, podemos elegir

$$u = \frac{a}{c}[\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen}\delta] + \frac{v}{c}$$

Al aplicar la acción u y realimentar el sistema tenemos el modelo lineal equivalente

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + v$$

Donde se ha logrado solucionar el problema de linealidad, y el siguiente paso sería elegir v de tal forma que pueda controlar el nuevo modelo lineal equivalente, para el diseño de v se podría utilizar cualquiera de las técnicas conocidas para el diseño de controladores.

³ Representación en espacio de estado de la ecuación del péndulo.

Hasta el momento, es lógico pensar lo fácil y sencillo que resulta implementar la herramienta de linealización por realimentación, aunque para poder mantener la anterior afirmación es importante conocer algunas propiedades estructurales que nos permitan realizar la cancelación o eliminación de las no linealidades de un sistema determinado, pues en algunas ocasiones no podemos cancelar cualquier tipo de no linealidad. Estas propiedades son dos, la sustracción y la división [Khalil, Hassan K.]:

- Para cancelar un término no lineal $\alpha(x)$ por sustracción, el control u y el término no lineal $\alpha(x)$ siempre deben aparecer juntos en forma de suma, $u + \alpha(x)$.
- Para cancelar un término no lineal $\gamma(x)$ por división, el control u y el término no lineal $\gamma(x)$ siempre deben aparecer juntos en forma de producto $\gamma(x)u$, y puede cancelarse con $u = \beta(x)v$, donde $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$.

Por tanto, para lograr convertir una ecuación de estado no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \text{ (donde } f(x) \text{ y/o } g(x) \text{ son funciones no lineales)}$$

en una lineal controlable cancelando no linealidades, se requiere que la ecuación no lineal tenga la forma

$$\dot{x} = Ax + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)]$$

donde $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times p}$, (A, B) es controlable, $\alpha : R^n \rightarrow R^p$, $\beta : R^n \rightarrow R^{p \times p}$, están definidas en un dominio $D_x \in R^n$ que contiene al origen. Asumimos que la matriz $\beta(x)$ es no singular $\forall x \in D_x$.

Entonces, la transformación sería:

Si el sistema tiene la estructura anterior, podríamos usar el control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

para obtener así la ecuación lineal

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

Por otro lado, si el sistema no tiene la forma, es necesario realizar un cambio adecuado de variables para facilitar la utilización de las propiedades, para extender la idea, desarrollaremos el presente ejemplo.

Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = a \operatorname{sen} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

Al ver el modelo, podríamos pensar en una acción de control

$$u = x_1^2 + v$$

tal que cancele la no linealidad, pero inmediatamente notamos que aunque logramos cancelar el término no lineal en la segunda ecuación, la primera ecuación sigue intacta, por lo que es conveniente realizar un cambio de variables para llevar el sistema a la forma $\dot{x} = Ax + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)]$. Si hacemos

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = a \operatorname{sen} x_2$$

y derivamos ambas ecuaciones para obtener el sistema

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1$$

$$\dot{z}_2 = a \cos x_2 (\dot{x}_2)$$

como $\dot{x}_1 = a \operatorname{sen} \dot{x}_2 = z_2$ y $\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$, podemos reescribir el sistema

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = a \cos x_2 (-x_1^2 + u)$$

Como se puede observar el sistema tiene la forma requerida para poder utilizar las propiedades de sustracción y división, en el que $\alpha(x) = x_1^2$ y $\beta(x)^{-1} = a \cos x_2$, entonces la acción de control u debe ser

$$u = \alpha(x) + \beta(x) = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

para que el sistema quede linealizado en las nuevas variables. La ecuación de estados en las nuevas variables se obtiene invirtiendo la transformación, esto es,

$$x_1 = z_1$$

$$x_2 = \operatorname{arcsen} \frac{z_2}{a}$$

definida para $-a < z_2 < a$. Y se llega a la ecuación de estados transformada reemplazando x_1 y x_2 en el nuevo modelo

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \text{acos}\left(\text{arcsen}\frac{z_2}{a}\right)(-z_1^2 + u)$$

de igual forma

$$u = z_1^2 + \frac{1}{\text{acos}\left(\text{arcsen}\frac{z_2}{a}\right)}v$$

Al efectuar la anterior acción se tiene

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

Nótese que finalmente se logró transformar el modelo inicial a uno simplificado lineal gracias a un cambio de variables T , tal que $z = T(x)$ está definido en un dominio D_z , y una transformación inversa $x = T^{-1}(z)$ que está definida en $D_x = T^{-1}(D_z)$, y tanto T como T^{-1} son mapeos continuamente diferenciables en D_x y D_z , respectivamente [Khalil, Hassan K.].

3.2 LINEALIZACION DE SISTEMA DE NIVEL DE LIQUIDOS

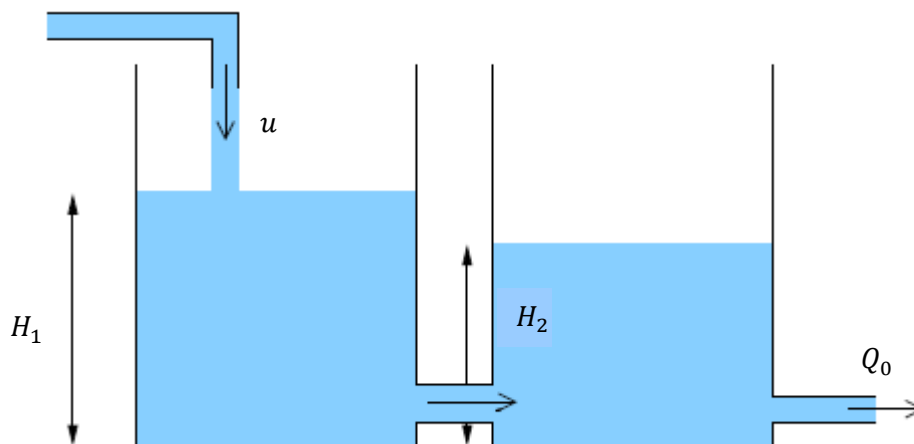


Figura 13. Sistema de tanques de segundo orden.

Se tiene un sistema de tanques interconectados como se muestra en la figura 13, donde u es el flujo de entrada, Q_0 es el flujo de salida, y H_1 y H_2 son las alturas del nivel de líquidos en los tanques 1 y 2 respectivamente. Antes de realizar el modelo matemático del sistema se debe plantear cual será la variable de entrada, que puede ser u , y la variable de salida, la cual podría ser o el flujo de salida Q_0 o la altura del nivel ya sea en el tanque 1, H_1 , o en el tanque 2, H_2 . Si elegimos como variable de salida H_2 , nuestro modelo será

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{K}{A_1} \sqrt{H_1 - H_2} + \frac{1}{A_1} u$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{K}{A_2} \sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2} \sqrt{H_2}$$

o también

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{A_1} & 0 \\ \frac{K}{A_2} & -\frac{K}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{H_1 - H_2} \\ \sqrt{H_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

Se puede notar que las dimensiones físicas de cada uno de los tanques difieren el uno con el otro, pues el área del tanque 1, A_1 , no es igual al área del tanque 2, A_2 , lo anterior se evidencia en la figura 14.

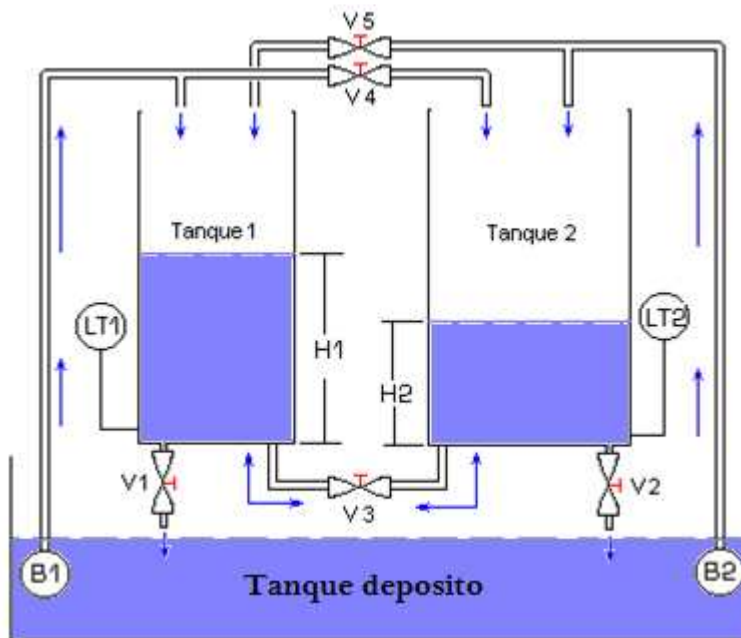


Figura 14. Sistema de nivel de líquido interconectado en paralelo real.

Para nuestro estudio las válvulas de paso V1, V4 y V5 deben estar cerradas, mientras que las válvulas de paso V2 y V3 deben estar abiertas y la bomba B2 debe permanecer apagada.

Retomando el modelo matemático no lineal obtenido \dot{H} , evidenciamos que la estructura de este, no es semejante a la estructura $\dot{x} = Ax + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)]$, que permitiría efectuar la linealización, pero aun así, cuando el sistema no tenga esta estructura, es posible realizar un cambio de variables para poder llegar a la forma deseada, la forma canónica controlable.

Si para el modelo

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{1}{A_1}u$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2}$$

elegimos

$$z_1 = H_2$$

$$z_2 = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2}$$

entonces

$$\dot{z}_1 = \dot{H}_2 = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2} = z_2$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \frac{K}{2A_2\sqrt{H_1 - H_2}} \left[-\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{1}{A_1}u - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2} \right] \\ & - \frac{K}{2A_2\sqrt{H_2}} \left[\frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2} \right] \end{aligned}$$

Luego de agrupar términos llegamos a la expresión

$$\dot{z}_2 = \frac{K}{2A_1A_2\sqrt{H_1 - H_2}} \left[u - K\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{KA_1\sqrt{H_2}}{A_2} - \frac{KA_1(H_1 - H_2)}{A_2\sqrt{H_2}} \right]$$

Así finalmente logramos llegar a la estructura deseada

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \frac{K}{2A_1A_2\sqrt{H_1-H_2}} \left[u - K\sqrt{H_1-H_2} + \frac{KA_1\sqrt{H_2}}{A_2} - \frac{KA_1(H_1-H_2)}{A_2\sqrt{H_2}} \right]$$

Ahora si podemos utilizar la ley de control para eliminar los términos no lineales del modelo $u = \alpha(H) + \beta(H)v$, y llegar a un modelo lineal equivalente donde nuestras nuevas variables de estado son Z_1 y Z_2 . Siendo

$$\alpha(H) = K\sqrt{H_1-H_2} - \frac{KA_1\sqrt{H_2}}{A_2} + \frac{KA_1(H_1-H_2)}{A_2\sqrt{H_2}}$$

$$\beta(H) = \frac{2A_1A_2\sqrt{H_1-H_2}}{K}$$

Invirtiendo la transformación se obtiene la ecuación de estados en las nuevas variables

$$H_2 = z_1$$

$$H_1 = \left(\frac{A_2z_2 + K\sqrt{z_1}}{K} \right)^2 + z_1^4$$

Modelo en función de las variables z_1 y z_2

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \frac{K^2}{2A_1A_2(A_2z_2 + K\sqrt{z_1})} \left[u - A_2z_2 + K\sqrt{z_1} + \frac{KA_1\sqrt{z_1}}{A_2} - \frac{A_1(A_2z_2 + K\sqrt{z_1})^2}{KA_2\sqrt{z_1}} \right]$$

La forma canónica controlable

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ f(\mathbf{Z}) + b(\mathbf{Z})u \end{bmatrix}$$

es

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K^3\sqrt{z_1}}{2A_2(A_2z_2 + K\sqrt{z_1})} - \frac{K(A_2z_2 + K\sqrt{z_1})}{2A_2^2\sqrt{z_1}} - \frac{K^2}{2A_1A_2} + \frac{K^2}{2A_1A_2(A_2z_2 + K\sqrt{z_1})} u \end{bmatrix}$$

⁴ H_1 se calcula despejándolo de la ecuación z_2 .

donde

$$f(\mathbf{Z}) = \frac{K^3\sqrt{z_1}}{2A_2(A_2z_2 + K\sqrt{z_1})} - \frac{K(A_2z_2 + K\sqrt{z_1})}{2A_2^2\sqrt{z_1}} - \frac{K^2}{2A_1A_2}$$

$$b(\mathbf{Z}) = \frac{K^2}{2A_1A_2(A_2z_2 + K\sqrt{z_1})}$$

Efectuando la acción de control u se linealiza el modelo \dot{z} , se cancelarían las no linealidades y nos encontramos con el modelo equivalente

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

siendo v la nueva variable de entrada del sistema, y con función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{Z_1(s)}{V(s)} = \frac{1}{s^2}$$

Esta función de transferencia equivale al modelo original del proceso, es un modelo lineal con el que se puede analizar e implementar las distintas técnicas de análisis y de diseño tradicionales, un modelo simplificado y practico. Todo este proceso de linealización, también puede ser visto elaborando una representación gráfica en diagrama de bloques, donde se hace más claro la acción de cada una de las señales del sistema.

El diagrama de bloques del modelo no lineal es

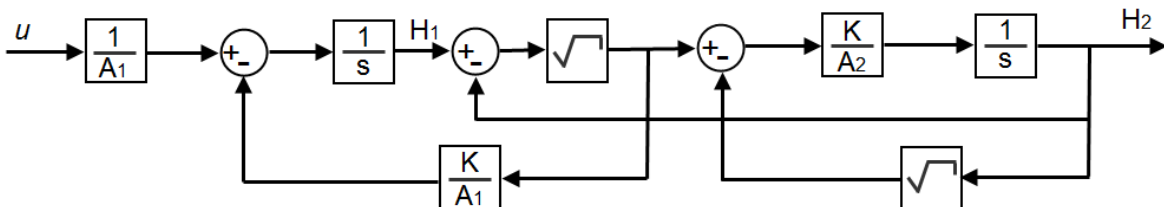


Figura 15. Diagrama de bloques de modelo no lineal de sistema de nivel de líquidos.

Pero cuando hacemos

$$u = K\sqrt{(H_1 - H_2)} - \frac{KA_1\sqrt{H_2}}{A_2} + \frac{KA_1(H_1 - H_2)}{A_2\sqrt{H_2}} + \frac{2A_1A_2\sqrt{H_1 - H_2}}{K}v$$

el diagrama de bloques en lazo cerrado se muestra en la figura 16.

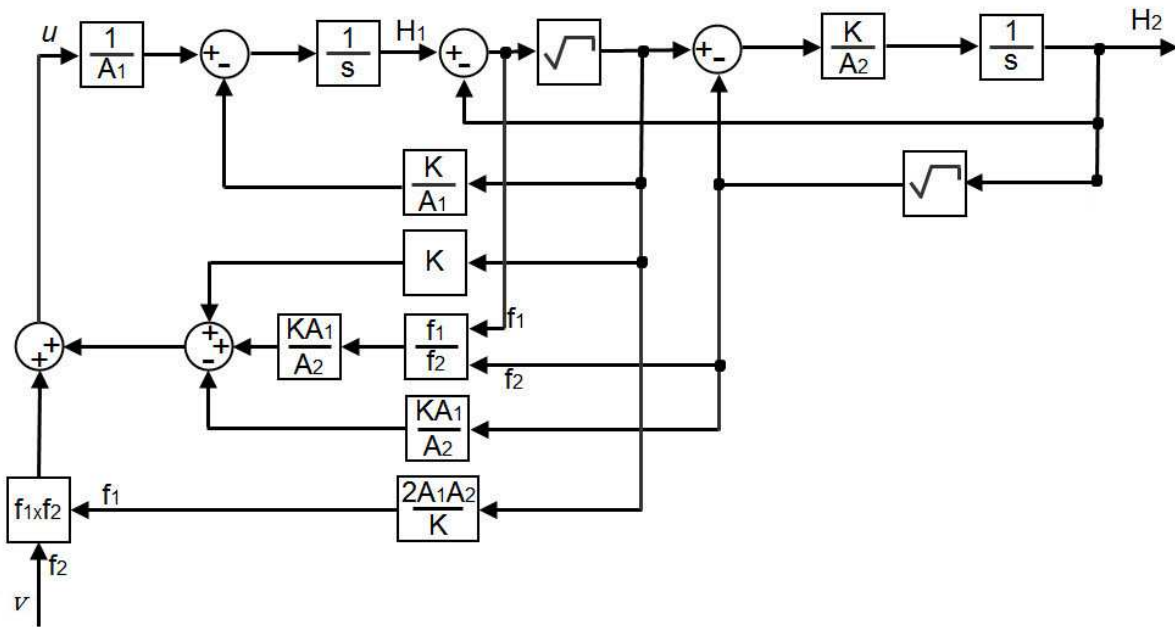


Figura 16. Diagrama de bloques con linealización por realimentación.

o lo que equivale a la figura 17.

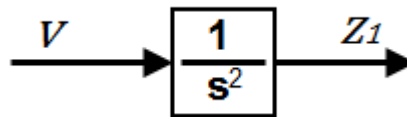


Figura 17. Diagrama de bloque equivalente.

Seguido a esto, nos dedicaremos a diseñar una ley para controlar el sistema linealizado resultante $G_p(s)$, la técnica a utilizar es el IMC (Internal Model Control) o Control por Modelo Interno, desarrollada en 1986 por Rivera, Morari y Skogestad; este sistema de control incorpora un modelo matemático de la planta que logra compensar la dinámica modelable y no modelable de la planta, siendo de esta forma un sistema de control robusto de buen desempeño independientemente de las perturbaciones a las que la planta este expuesta. El controlador diseñado a través de esta técnica, podrá en última instancia, asimilarse a un controlador PID.

3.3 CONTROL POR MODELO INTERNO

Alrededor del año 1986 se implemento el primer controlador IMC (Internal Model Control) sobre un sistema de destilación, los resultados favorables del IMC fueron

comparados con un controlador PI y el análisis arrojó un mejor desempeño por parte del IMC. Luego de este resultado se implemento la técnica sobre sistemas de temperatura, lo que reafirmo su superioridad sobre las herramientas tradicionales de diseño de reguladores. A estos estudios se le sumaron la implementación sobre sistemas de nivel y sistemas neumáticos y se llego a conclusiones similares, un controlador IMC es capaz de dar respuestas rápidas y presenta características de robustez considerablemente altas en comparación con un controlador PI [Morari, Manfred & Zafiriou, Evangelhos].

Consideremos el sistema que se muestra en la figura 18.

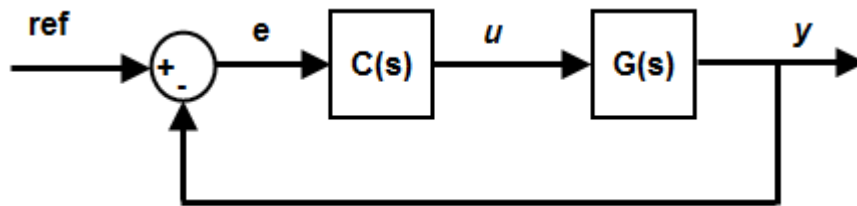


Figura 18. Diagrama de bloques de sistema controlado con compensación en serie o cascada.

Generalmente ajustamos $C(s)$ sin necesidad de tener un gran conocimiento de $G(s)$, en el desarrollo del controlador IMC aunque no se conozca ampliamente las características de $G(s)$ si se conoce exactamente el modelo de $G(s)$, por tanto, encontramos dos expresiones, una concerniente a la función de transferencia de la planta y otra a la función de transferencia del modelo de la planta.

$$G(s) \rightarrow \text{Planta o proceso}$$

$$\bar{G}(s) \rightarrow \text{Modelo de la planta}$$

Se puede plantear el esquema de la figura 19.

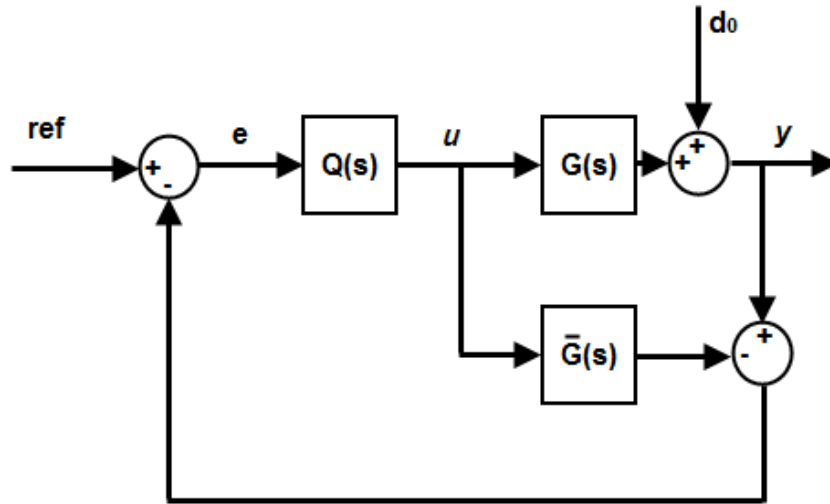


Figura 19. Configuración para control por modelo interno.

la salida es

$$y = \frac{Q(s)G(s)}{1 + Q(s)[G(s) - \bar{G}(s)]} ref + \frac{1 - Q(s)\bar{G}(s)}{1 + Q(s)[G(s) - \bar{G}(s)]} d_o$$

Si el modelo es perfecto, es decir, si $\bar{G}(s) \cong G(s)$

$$y = Q(s)G(s)ref + [1 - Q(s)\bar{G}(s)]d_o$$

lo que permite reestructurar el esquema anterior tal como se muestra en la figura 20.

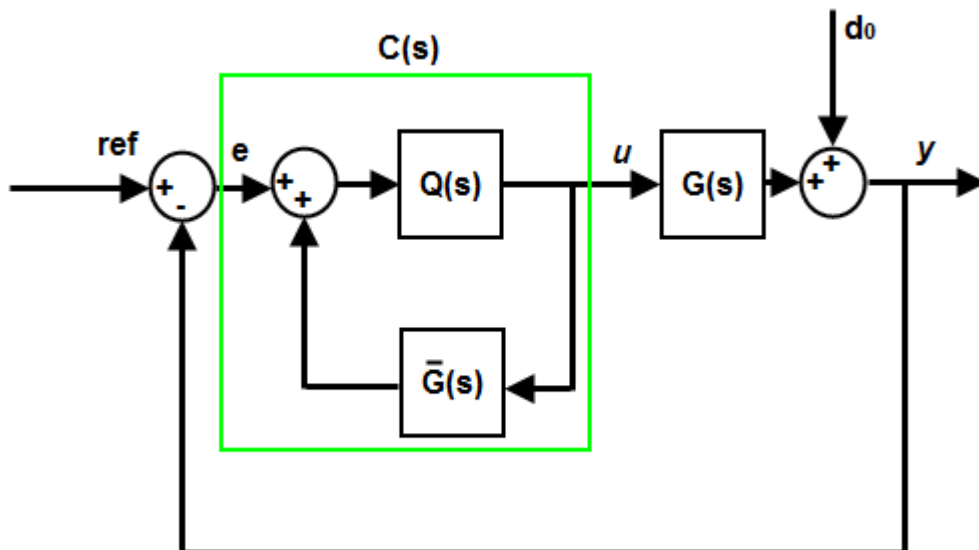


Figura 20. Reestructuración de configuración de control por modelo interno.

En la figura reestructurada, el controlador con realimentación $C(s)$ es una función del modelo de la planta, $\bar{G}(s)$, y del controlador con modelo interno, $Q(s)$, esto es

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)\bar{G}(s)}$$

Esta última expresión es denominada como la relación PID basada en IMC, debido a que la estructura de $C(s)$ muchas veces es como la de un controlador PID, lo que implica afirmar que al utilizar esta técnica de diseño, seguramente obtendremos un controlador de la forma PID.

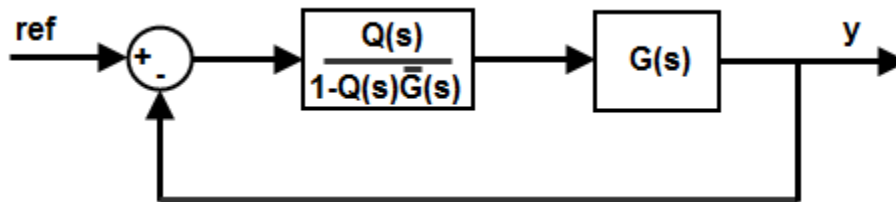


Figura 21. Simplificación a configuración en serie o cascada.

En teoría solo basta con elegir $Q(s)$ para tener una expresión para el controlador $C(s)$, que ocurriría si elegimos

$$Q(s) = \bar{G}^{-1}(s)$$

la salida del sistema es

$$y = Q(s)G(s)ref + [1 - Q(s)\bar{G}(s)]d_o$$

Reemplazamos $Q(s)$ en y

$$y = \bar{G}(s)^{-1}G(s)ref + [1 - \bar{G}(s)^{-1}\bar{G}(s)]d_o$$

$$y = \frac{G(s)}{\bar{G}(s)}ref + \left[1 - \frac{G(s)}{\bar{G}(s)}\right]d_o$$

Si el modelo de la planta es aproximadamente igual a la planta

$$\frac{G(s)}{\bar{G}(s)} \approx 1$$

entonces la salida será

$$y \approx ref$$

Cuando elegimos $Q(s)$ como el inverso del modelo de la planta, podríamos decir que se obtiene un control perfecto, pues el control logra que la salida sea

aproximadamente igual a la entrada de referencia. A pesar de esta demostración, es importante tener en cuenta que nunca el modelo matemático que se elige será perfecto, siempre habrá algunos inconvenientes matemáticos con la inversión y habrá problemas cuando la planta sea inestable, ya que el diagrama de bloques IMC convencional no puede ser usado para sistemas inestables.

Ahora bien, que ocurriría si elegimos

$$Q(s) = F(s)\bar{G}(s)_{inv}$$

siendo $\bar{G}(s)_{inv}$ una aproximación estable del inverso de $\bar{G}(s)$ y $F(s)$ una condición de diseño (filtro) para lograr determinadas propiedades en lazo cerrado, como los ya antes mencionados.

Si se toma esta condición de diseño se obtiene

$$y = \frac{F(s)\bar{G}(s)_{inv}G(s)}{1 + F(s)\bar{G}(s)_{inv}[G(s) - \bar{G}(s)]}ref + \frac{1 - F(s)\bar{G}(s)_{inv}G(s)}{1 + F(s)\bar{G}(s)_{inv}[G(s) - \bar{G}(s)]}d_o$$

Suponiendo que $\bar{G}(s)_{inv}G(s) \approx \bar{G}(s)_{inv}\bar{G}(s) \approx 1$, resulta

$$y \approx F(s)ref + (1 - F(s))$$

donde $F(s)$ generalmente se elige de la forma $F(s) = \frac{1}{(\beta s + 1)^n}$, se agrega el exponente n de modo que la función $Q(s)$ sea bipropia o tenga igual números de polos y ceros. $F(s)$ será la respuesta deseada del sistema, por lo tanto, con un filtro rápido, se tendrá una respuesta rápida y buen rechazo de perturbaciones, mientras que con un filtro lento, se tendrá una respuesta lenta y un pobre rechazo de perturbaciones, aunque con este último se podría reducir efectos negativos relacionados con la incertidumbre en el modelo, limitaciones de los actuadores y ruido de medición. La elección apropiada de $F(s)$ conlleva a una regulación eficiente. Si se desea un filtro rápido o lento se debe elegir el valor β , con valores pequeños tendremos un filtro rápido, y con valores grandes tendremos un filtro lento.

3.4 DISEÑO DE CONTROL IMC PARA MODELO LINEALIZADO

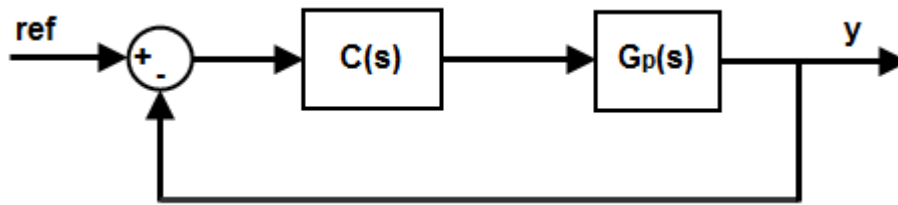


Figura 22. Modelo para diseño de control por modelo interno.

Para diseñar un controlador PID basado en IMC debemos seguir los siguientes pasos:

1. Encontrar la función de transferencia del controlador IMC utilizando la expresión

$$Q(s) = F(s)\bar{G}_p(s)_{inv}$$

El modelo de la planta es

$$G_p(s) \approx \bar{G}_p(s) = \frac{1}{s^2}$$

podemos decir que

$$\bar{G}_p(s)_{inv} = s^2$$

En la obtención de $F(s)$ se debe elegir un valor para n y para β para lograr un buen seguimiento de la referencia. Por el momento solo se elegirá $n = 2$, y luego escogeremos el valor de β . De lo anterior se tiene

$$F(s) = \frac{1}{(\beta s + 1)^2}$$

y

$$Q(s) = \frac{1}{(\beta s + 1)^2} s^2$$

2. Encontrar el controlador PID basado en IMC utilizando la expresión

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)\bar{G}_p(s)}$$

Reemplazamos $Q(s)$ en $C(s)$ y se tiene

$$C(s) = \frac{\frac{s^2}{(\beta s + 1)^2}}{1 - \left(\frac{s^2}{(\beta s + 1)^2}\right) \left(\frac{1}{s^2}\right)}$$

Simplificando lo anterior se puede llegar a una expresión final de $C(s)$ como sigue

$$C(s) = \frac{s^2}{\beta^2 s^2 + 2\beta s}$$

3. Expresar la función de control PID paralelo de la forma

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d}{1 + \gamma T_d s} \right)$$

o también

$$C(s) = K_p^p + K_i^p \frac{1}{s} + K_d^p \frac{s}{1 + \gamma^p s}$$

Donde K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral, T_d el tiempo derivativo y γ puede tomar valores alrededor de 0,1. Y además

$$K_p^p = K_p$$

$$K_i^p = \frac{K_p}{T_i}$$

$$K_d^p = K_p T_d$$

$$\gamma^p = \gamma T_d$$

Sea el controlador

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s}$$

se puede interpretar como un PID paralelo si se hace

$$K_p^p = \frac{b_1 a_1 - a_2 b_0}{a_1^2}$$

$$K_i^p = \frac{b_0}{a_1}$$

$$K_d^p = \frac{a_1^2 b_2 - b_1 a_1 a_2 + a_2^2 b_0}{a_1^3}$$

$$\gamma^p = \frac{a_2}{a_1}$$

Si igualamos

$$\frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s} = \frac{s^2}{\beta^2s^2 + 2\beta s}$$

podemos obtener cada uno de los valores de las constantes del controlador PID, así es que

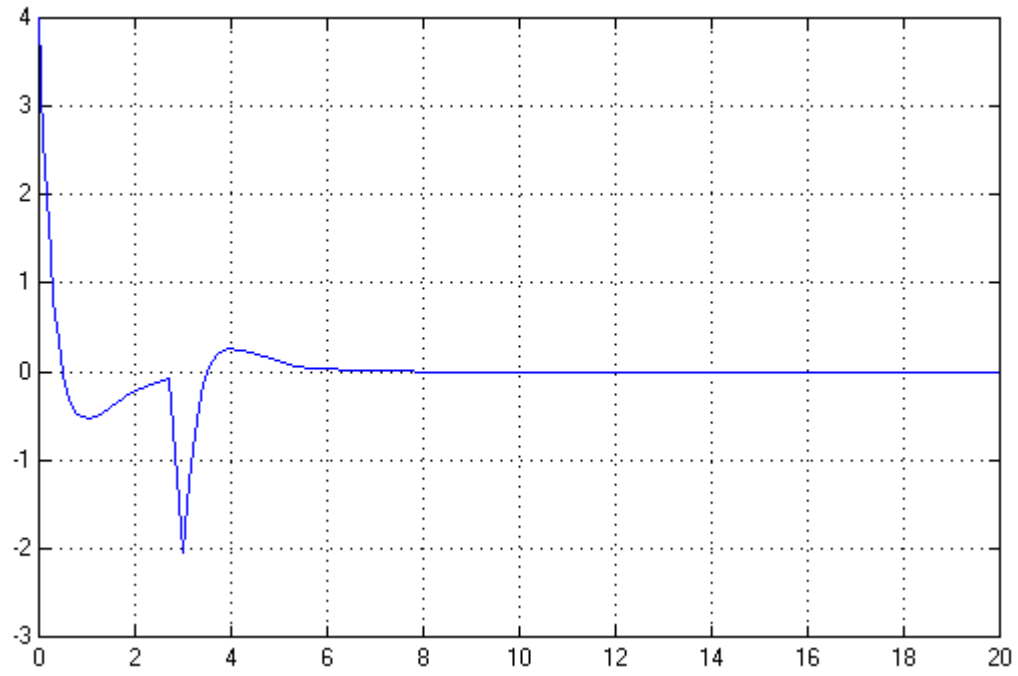
$$\begin{aligned}a_1 &= 2\beta \\a_2 &= \beta^2 \\b_0 &= b_1 = 0 \\b_2 &= 1\end{aligned}$$

El controlador PID es

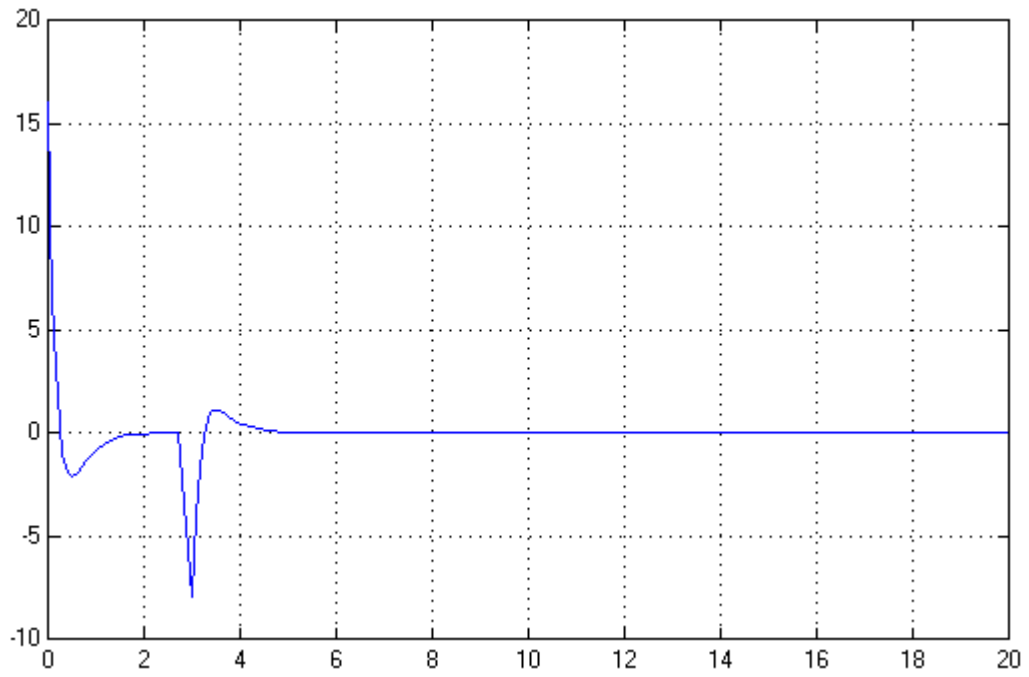
$$C_{PID}(s) = \frac{1}{2\beta} \frac{s}{\frac{\beta}{2}s + 1}$$

4. Definir un valor para β , y realizar simulaciones en lazo cerrado.

Para elegir el valor de β hay que tener en cuenta que en la medida que sea menor, la señal del control tomara picos cada vez más elevados, lo que afectaría la buena operación de los actuadores. La figura 23 muestra lo anterior con valores de 0.5, 0.25 y 0.125 para β .



(a)



(b)

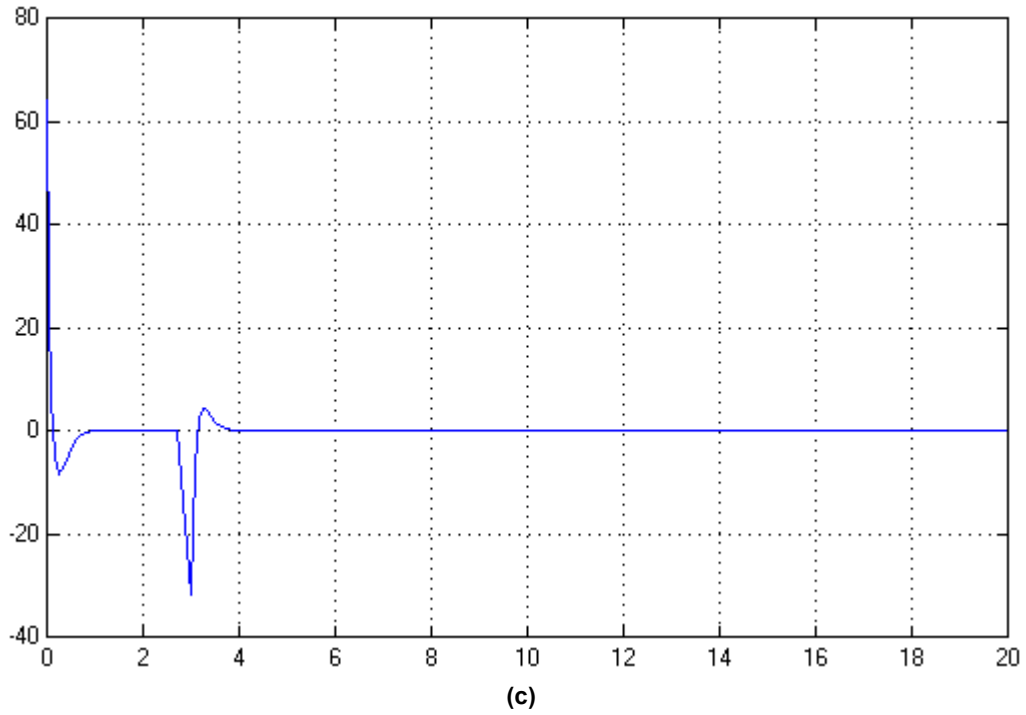


Figura 23. Señal de control para valores de beta. (a) $\beta = 0.5$. (b) $\beta = 0.25$. (c) $\beta = 0.125$.

Simulación en Matlab

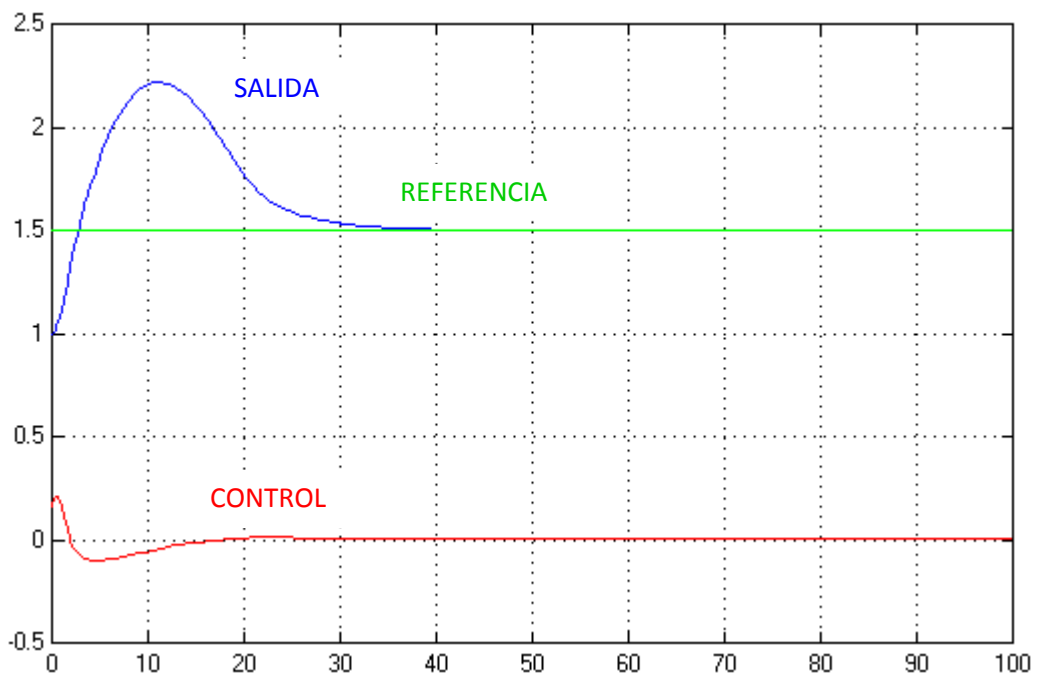


Figura 24. Simulación en Matlab de control con linealización por realimentación.

La figura 24 corresponde a la simulación del proceso controlado en Matlab con un β de 2, esta muestra la salida del sistema controlado ante una señal de referencia, y la acción de control necesaria para que la salida logre un asentamiento sobre la referencia. Evidentemente al iniciar el proceso, la salida incrementa hasta llegar a ser igual que la referencia, justo cuando sobrepasa la salida deseada, la señal de control actúa de tal forma que la salida se estabilice alrededor de la referencia. La velocidad de respuesta del controlador, varía dependiendo del valor que pueda tomar β , para valores relativamente pequeños de β se obtiene rápidos seguimientos de referencias y mejor rechazo a perturbaciones, pero también menor robustez ante posibles errores en el modelo de la planta y la señal de control toma valores elevados; por lo que se eligió este valor tal que, aunque la salida no tuviera un corto tiempo de asentamiento, el control no tuviera fluctuaciones con picos elevados.

4 CONTROL POR MODO DESLIZANTE

En los últimos treinta años, las estrategias para el diseño de controles avanzados por estructura variable VSC (*Variable Structure Control*), han encontrado gran evolución, entre los que se encuentra el Control por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control*) y el Control Predictivo basado en Modelo (*Model Predictive Control*). Los sistemas VSC se caracterizan por tener dos o más leyes de control y una regla de decisión, la regla de decisión es comúnmente llamada función de conmutación, la cual tiene como entrada alguna medida del comportamiento del sistema en el instante actual, y su salida corresponde a la ley de control que se aplicaría en ese mismo instante de tiempo. Al aplicar esta ley de control, obtenemos un sistema de estructura variable o una combinación de subsistemas con leyes de control fijas e individuales, cada una de estas leyes es válida en determinada región del comportamiento del sistema. Por otra parte, las propiedades de cada una de las estructuras del sistema pueden ser combinadas, logrando así que se pueda diseñar una estructura con diversas propiedades. En los años 50s se iniciaron los primeros estudios concernientes a VSC en la USSR, los cuales fueron publicados por [Itkis V.] en 1976⁵, [Utkin V. I.] en 1977⁶ y [Slotine, Jean-Jacques E., 1984] en 1984⁷

El método de modos deslizantes consiste en aplicar una señal de control conmutando a alta frecuencia, la cual logra llevar el estado del sistema a una superficie denominada superficie de deslizamiento $\sigma = 0$, gracias a esto se puede obtener un comportamiento dinámico concreto del sistema en lazo cerrado, dicho comportamiento se vuelve completamente insensible a un tipo particular de incertidumbre debido al modelo; una vez se encuentre en la superficie, la acción de control deberá mantenerlo en la superficie ante posibles perturbaciones externas; por lo que la principal ventaja del control por modos deslizantes es que aporta robustez ante perturbaciones, tanto internas como externas. La superficie de deslizamiento será diseñada con el fin de que el estado cumpla las especificaciones deseadas.

El control por modo deslizante se caracteriza por dos comportamientos en lazo cerrado denominados *modo de alcance* y *modo deslizante o de deslizamiento*. El primero hace referencia a cuando el sistema entra a este modo gracias a la acción de una ley de control llamada ley de alcanzabilidad, con el fin de forzar el alcance de la superficie de deslizamiento; cuando el sistema este en la superficie o en su cercanía, se pasa al siguiente modo de control. El segundo, es el comportamiento

⁵ *Control Systems of Variable Structure*

⁶ *Variable Structure Systems with Sliding Mode*

⁷ *Sliding controller design for nonlinear systems*

en el que la trayectoria del estado se desliza sobre la superficie y converge a un atractor estable incluido en la superficie, debido a la acción de una ley de control llamada control equivalente que satisface la condición de deslizamiento

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

A comienzos de 1962, B. Hamel inicio estudios relacionados con controladores no lineales con el fin de acabar con las limitantes existentes hasta el momento, y propuso una expresión que actuaría sobre la señal de error de un sistema realimentado, esta expresión está definida por la relación **[Perruquetti, Wilfrid & Barbot, Jean Pierre] [Hamel B.]**

$$u = |F_1(x, \dot{x}, \dots)| \operatorname{sgn}(F_2(x, \dot{x}, \dots))$$

donde $| \cdot |$ se refiere al valor absoluto y las funciones F_1 y F_2 son filtros lineales, al implementar esta acción de control, se tendría una salida discontinua pero modulada por una función de una variable de estado x y sus derivadas. Dado lo anterior, se consideró elegir u como

$$u = -|x| \operatorname{sgn}(x + k\dot{x})$$

siendo $F_1(x, \dot{x}, \dots) = x$ y $F_2(x, \dot{x}, \dots) = (x + k\dot{x})$

Para llegar a la expresión anterior, es conveniente desarrollar el siguiente ejemplo, consideremos un sistema de la forma

$$G(s) = \frac{a^2}{s^2}$$

y representándolo en variables de estado

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = a^2 u$$

Si tomamos como ley de control la expresión

$$u = -|F(x)| \operatorname{sgn}(\sigma(x))$$

donde $\sigma(x)$ es la superficie de deslizamiento, sería necesario contar con una expresión que defina la superficie de deslizamiento. Eligiendo

$$\sigma(x) = x_1 + kx_2$$

y $F(x)$ es la variable a controlar, x_1 , entonces

$$u = -|x_1| \operatorname{sgn}(x_1 + k\dot{x}_2)$$

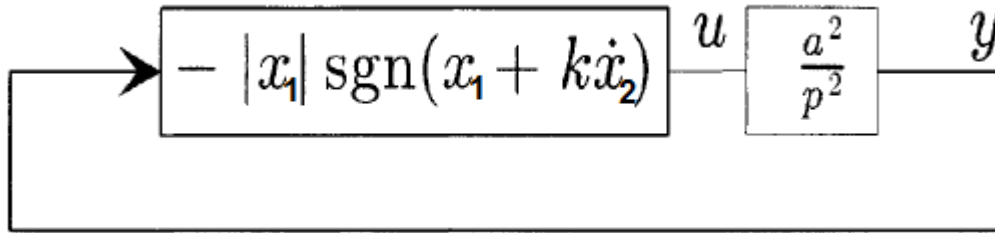


Figura 25. Diagrama de bloques con control por modo deslizante.

La figura 25 muestra el diagrama de bloque del sistema controlado. Y a continuación el esquema del comportamiento del sistema en la superficie de deslizamiento.

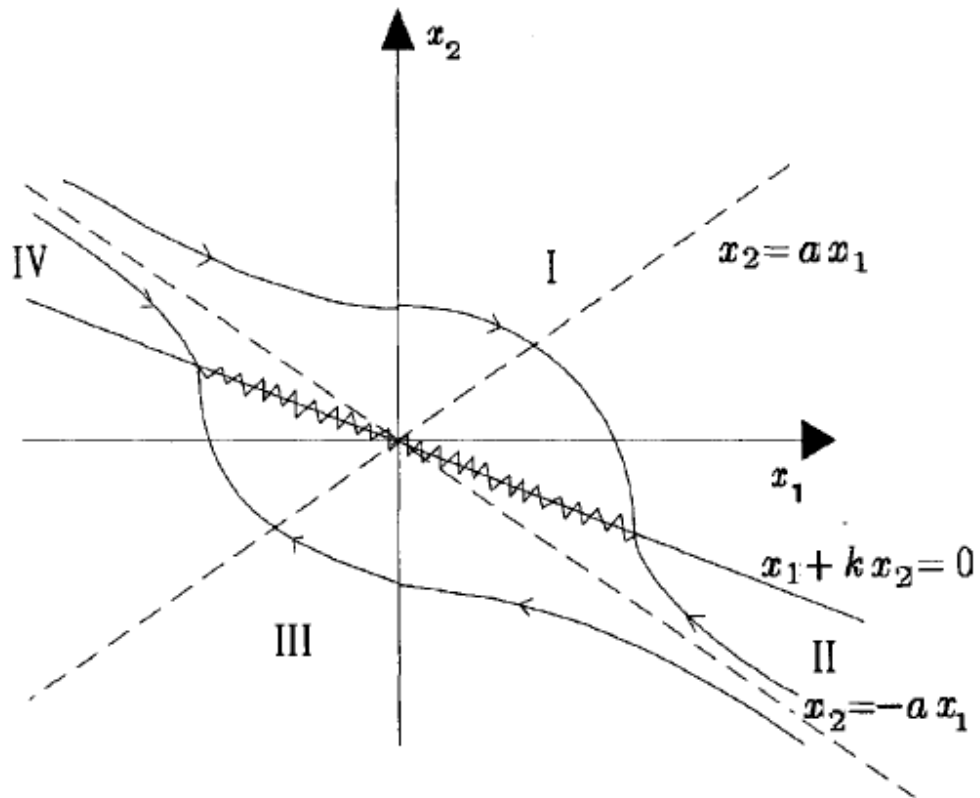


Figura 26. Plano de fase para sistema controlado.

El plano de fase es dividido en cuatro regiones, ver figura 26, en las regiones I y III, donde $x_1 \operatorname{sgn}(x_1 + k\dot{x}_2) > 0$, las trayectorias son elipses. En la II y IV, donde $x_1 \operatorname{sgn}(x_1 + k\dot{x}_2) < 0$, las trayectorias son hipérbolas con asíntota $x_2 = \pm ax_1$. El control solo conmuta en la frontera de la superficie $\sigma(x) = x_1 + kx_2$. La debida

elección de la constante k direccionaría a todas las trayectorias hacia la superficie independientemente del lugar en que se encuentren.

Ahora analicemos de manera generalizada el desarrollo del ejemplo anterior. Consideremos el sistema lineal definido por la expresión

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde $x \in R^n$, $u \in R^m$ y B es un vector de orden $(m \times 1)$, si definimos la superficie de deslizamiento mediante una función lineal escalar de la forma

$$\sigma = \{x \in R^n: \sigma(x) = Cx = 0\}$$

donde C es una matriz de orden $(m \times n)$. En el modo deslizante o de deslizamiento $\sigma \equiv 0$ y la derivada de σ , $\dot{\sigma} = C\dot{x}$, o también

$$\dot{\sigma} = CAx + CBu = 0$$

lo que nos lleva a una acción de control llamada control equivalente, definido por la expresión

$$u_{eq} = -(CB)^{-1}CAx$$

Esta expresión solo es válida si y solo si el producto vectorial entre las matrices C y B es invertible. Al aplicar esta acción de control equivalente sobre el modelo tenemos la siguiente dinámica equivalente

$$\dot{x}_{eq} = Ax_{eq} + B[-(CB)^{-1}CAx_{eq}]$$

Factorizando la expresión

$$\dot{x}_{eq} = [I - B(CB)^{-1}C]Ax_{eq}$$

siendo I una matriz identidad de igual orden que la matriz resultante del producto vectorial $B(CB)^{-1}C$.

Sin embargo, este control equivalente no será la única acción que actúe sobre el sistema, la acción de control necesaria para hacer que el sistema entre a una superficie de deslizamiento deseada u consta de dos términos, el primero es una componente de alta frecuencia, u_{hf} , y una segunda componente de baja frecuencia, u_s , es decir que la acción de control es

$$u = u_{hf} + u_s$$

donde $u_s \approx u_{eq}$ el valor medio de u , y también podría ser definido por

$$u = \tau \dot{u}_s + u_s \approx \tau \dot{u}_{eq} + u_{eq}$$

con $\tau \ll 1$

Realicemos ahora el análisis de la técnica considerando un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

donde $x \in D$ de R^n , y es un vector de estado y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son campos vectoriales suaves con $g(x) \neq 0$ para todo x . Si asumimos que el estado x es medible y que puede ser escrito en el campo escalar $S(x)$ representado por una función suave en el dominio D , definida como superficie de deslizamiento de la forma

$$\sigma = \{(x, t) \in D_x R, S(x) = 0\}$$

se puede sintetizar un control discontinuo u para lograr que $x(t)$ tienda a la superficie σ . Este control puede ser obtenido teniendo dos consideraciones, con lo que obtendríamos dos expresiones de control, u_1 y u_2 , una para $S(x) > 0$ y otra para $s(x) < 0$, esto con el fin de que cuando el sistema este fuera de la superficie el movimiento del sistema con respecto al tiempo, $\frac{dS(x)}{dt}$, sea en tal dirección que dirija el sistema hacia la superficie. [\[Sira-Ramírez, 2004\]](#)

Para comprobar si se cumple las condiciones

$$\frac{dS(x)}{dt} < 0 \text{ cuando } S(x) > 0$$

$$\frac{dS(x)}{dt} > 0 \text{ cuando } S(x) < 0$$

es recomendable llevar el sistema a la forma bilineal

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u = Ax + \delta + u(Bx + \gamma)$$

Matemáticamente de podría decir que la condición necesaria para alcanzar la superficie está dada por

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0^+} \frac{dS(x)}{dt} < 0 \text{ es decir, } \lim_{s(x) \rightarrow 0^+} \langle \nabla S \cdot f(x) + g(x)u_1 \rangle < 0$$

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0^-} \frac{dS(x)}{dt} > 0 \text{ es decir, } \lim_{s(x) \rightarrow 0^-} \langle \nabla S \cdot f(x) + g(x)u_2 \rangle > 0$$

De lo anterior se puede deducir que existe un modo deslizante si las proyecciones de $f(x) + g(x)u_1$ y $f(x) + g(x)u_2$ sobre el gradiente de S son de signo opuesto y están direccionadas hacia la superficie, esto se evidencia en el siguiente esquema

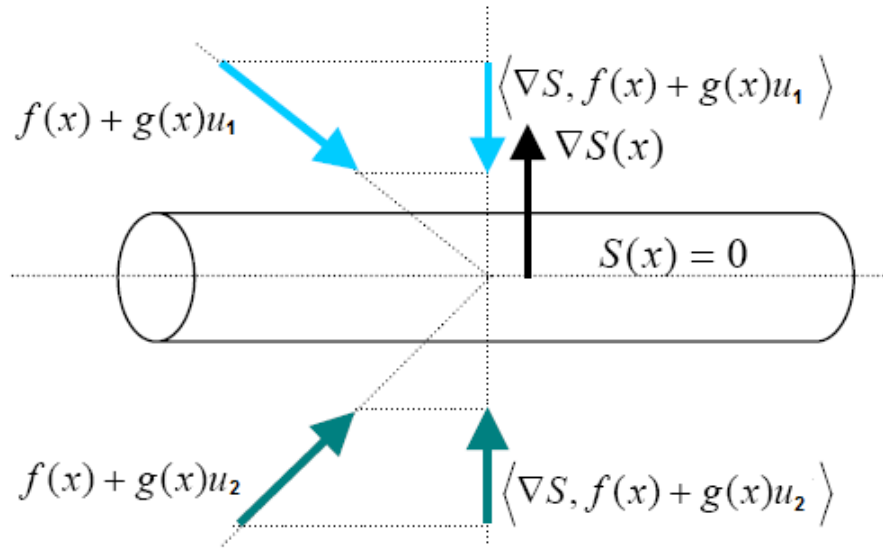


Figura 27. Dinámica ideal de superficie de deslizamiento.

Gracias a lo anterior, se logra determinar que la dinámica ideal de deslizamiento se caracteriza por las condiciones de invarianza, ver figura 27.

$$S(x) = 0$$

$$\frac{dS(x)}{dt} = \frac{\partial S(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u_{eq}) = 0$$

Estas condiciones muestran la evolución de las trayectorias de estado sobre la superficie de deslizamiento, este comportamiento se conoce como dinámica ideal de deslizamiento, donde se hace notar la existencia de una acción de control equivalente con la capacidad de mantener el sistema dentro de la superficie de deslizamiento, en otras palabras, hace que el movimiento del sistema sea tangente a la superficie de deslizamiento.

Si hacemos $f(x) = (Ax + \delta)$ y $g(x) = (Bx + \gamma)$ entonces

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x} ((Ax + \delta) + (Bx + \gamma)u_{eq}) = 0$$

sabiendo que

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x}(Ax + \delta) = \nabla S \cdot (Ax + \delta)$$

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x}(Bx + \gamma) = \nabla S \cdot (Bx + \gamma)$$

podríamos decir que

$$u_{eq} = -\frac{\nabla S \cdot (Ax + \delta)}{\nabla S \cdot (Bx + \gamma)}$$

Esta última expresión conlleva a una condición necesaria para que exista un modo deslizante o de deslizamiento, pues

$$\nabla S \cdot (Bx + \gamma) \neq 0$$

ya que para que el control equivalente este definido, el termino $(Bx + \gamma)$ no puede ser tangente a $S(x)$. Esta expresión se denomina *condición de transversalidad*. Si es condición no se cumple, el sistema no lograra alcanzar el régimen de deslizamiento.

Antes de llegar a concluir si se cumple o no la condición de transversalidad, es inevitable y necesario determinar las premisas que debe satisfacer el sistema para que esta condición tenga validez. Hasta este punto, se tiene claro cuál es la variable a controlar, pero resta aclarar o definir qué tipo de control se utilizara, es decir, si se desea que se controle la variable de forma directa o tal vez, que se haga de forma indirecta, esta elección juega un papel importante, pues esto plantearía si es posible lograr alcanzar o no el régimen de deslizamiento.

Si un sistema tiene como variables de estado x_1 y x_2 , y la variable a controlar es x_2 , es importante tener en cuenta que

Para un control directo, el objetivo es hacer que la variable x_2 adopte un valor deseado X_2 , por tanto, se debe elegir una superficie de deslizamiento

$$S(x) = f(x_2) - X_2 = 0$$

lo que quiere decir que al hacer cero la expresión, $f(x_2)$ tomará el valor deseado.

Para un control indirecto, el objetivo es manipular la variable x_1 de tal forma que la variable x_2 adopte un valor deseado, por tanto, se debe elegir una superficie de deslizamiento

$$S(x) = f(x_1) - X_1 = 0$$

Nótese que se controlará la variable x_1 para que adopte un valor determinado, pero a la vez este valor adoptado permitirá que la variable x_2 tome el valor deseado X_2 .

Ahora bien, existe la posibilidad que se elija una superficie de deslizamiento tal que se pueda manipular de alguna manera, ambas variables de estado, esto es

$$S(x) = f(x_1, x_2) = 0$$

Luego de elegir la superficie de deslizamiento, solo basta calcular

$$\nabla S \cdot (Bx + \gamma)$$

y esta operación, como ya lo es sabido, debe resultar diferente de cero, para el cumplimiento de la condición de transversalidad.

Por otra parte, existe una técnica que aunque no refuta todo lo anterior si podría abrir nuevos caminos para el análisis y el diseño de controladores por modos deslizantes o también, como método para simplificar algunos planteamientos, el método es basado en la linealización de sistemas no lineales, desarrollada en los años 1986 y 1987 por parte de Baumann W. T. y Rugh W. J., la idea consiste en extender la linealización al campo del diseño de control de sistemas no lineales [\[Baumann, W. T. & Rugh, W. J.\]](#).

Consideremos un sistema de la forma

$$\dot{x} = Af(x) + Bu$$

donde A es una matriz de orden $(m \times n)$, $f(x)$ es una función no lineal definida por el vector columna

$$f(x) = \begin{bmatrix} f(x)_{11} \\ f(x)_{21} \\ \vdots \\ f(x)_{n1} \end{bmatrix}_{(n \times 1)}$$

y B es un vector columna de orden $(m \times 1)$, con lo podríamos reescribir el sistema como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x)_{11} \\ f(x)_{21} \\ \vdots \\ f(x)_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} u$$

Como la idea consiste en lograr linealizar el sistema, debemos elegir una acción de control que logre simplificar el sistema a un modelo lineal equivalente. Si elegimos un control

$$u = \varphi(x)$$

donde $\varphi(x)$ es una función no lineal, y u debe ser capaz de transformar el sistema a la forma

$$\dot{x}_L = \begin{bmatrix} \dot{x}_{L1} \\ \dot{x}_{L2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{Ln-1} \\ \dot{x}_{Ln} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{L1} \\ x_{L2} \\ \vdots \\ x_{Ln-1} \\ x_{Ln} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

La denotación L hace referencia a la linealización del sistema, y v es nuestra nueva referencia. El sistema también puede ser escrito como

$$\dot{x}_L = A_L x_L + B_L v$$

Luego de obtener un sistema lineal equivalente, lo siguiente sería definir la superficie de deslizamiento

$$S(x_L) = \{x_L \in R^n, s(x_L) = 0\}$$

la cual se debe elegir según los criterios ya planteados para tener un modo deslizante. Como ya lo es sabido, teniendo la superficie de deslizamiento podríamos definir la acción de control necesaria para direccionar nuestro sistema a la región deslizante y posterior a ello mantener el sistema dentro de la región. Para claridad de lo planteado, analicemos el esquema de la figura 28.

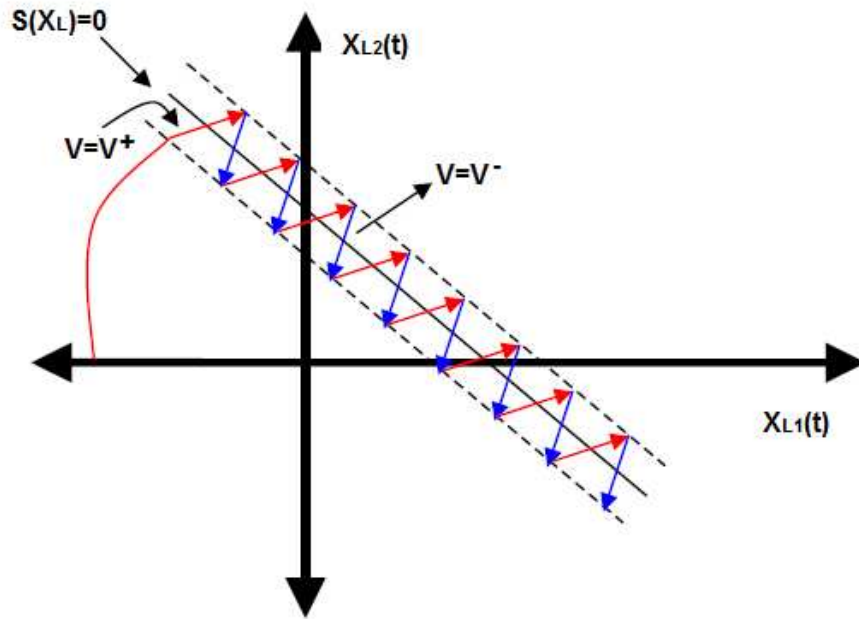


Figura 28. Límites de superficie de deslizamiento y acción de control.

Como se logra observar, la acción de control está constituida por dos expresiones, v^+ y v^- , las cuales limitan la región donde nuestro sistema se debe mantener, estas dos componentes se pueden expresar como sigue [Sira-Ramírez, 1992]

$$v = \begin{cases} v^+ & \text{para } S(x_L) < 0 \\ v^- & \text{para } S(x_L) > 0 \end{cases}$$

donde es claro que

$$v^+ \neq v^-$$

Si se analiza la expresión de v se puede observar que esta presenta semejanza con la definición de la función signo, recordemos

La función signo sgn de una variable x está dado por

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

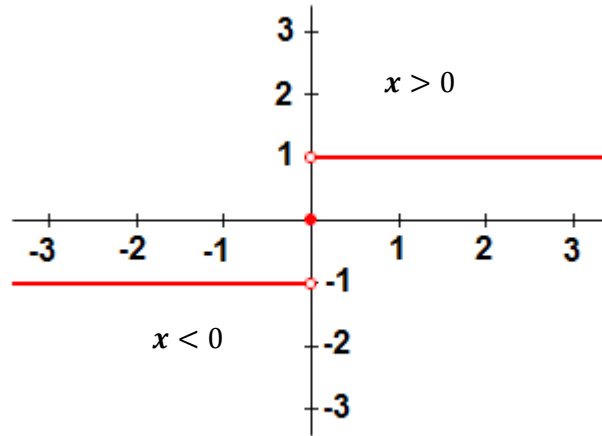


Figura 29. Función signo.

Si comparamos estas dos expresiones podemos definir la acción de control v como

$$v = -\text{sgn}(S(x_L))$$

Esta forma de definir la ley de control nos resultaría mucho mas practica, pues si es sabido que se requiere dos acciones de control, una para alta frecuencia, u_{hf} , y otra para baja frecuencia, u_s , con la función signo simplificamos las dos acciones en solo una.

De este mismo método se deriva otra técnica que propone una extensión a lo analizado anteriormente. Esta técnica basada en la siguiente consideración:

Si recordamos que

$$u_{eq} = -\frac{\nabla S \cdot (Ax + \delta)}{\nabla S \cdot (Bx + \gamma)}$$

Cuando $u^+ > u^-$, el control equivalente u_{eq} debe estar acotado de la forma

$$u^- < u_{eq} < u^+$$

Mientras que cuando $u^+ < u^-$, el control equivalente u_{eq} debe estar acotado de la forma

$$u^- > u_{eq} > u^+$$

Por lo que podríamos afirmar que el control equivalente esta acotado como

$$\min (u^-, u^+) < u_{eq} < \max (u^-, u^+)$$

de tal modo que u_{eq} queda definido en una banda alrededor de la superficie de deslizamiento.

Por lo anterior, V. I. Utkin propone una ley de control capaz primero dirigir el sistema a una región S y posteriormente mantenerlo en ella, de la forma

$$u = k|u_{eq}(x)|\text{sgn}(S(x))$$

donde $k \geq 1$

De forma resumida, podríamos especificar cuál sería la estrategia para la aplicación del control por modos deslizantes, o bien sea dicho, enumerar cada una de las tareas a realizar para el diseño de un controlador por modos deslizantes, por lo que a continuación estableceremos la pautas necesarias para el diseño del sistema de control teniendo en cuenta las herramientas disponibles, debido a lo anterior, los pasos a seguir son los siguientes:

1. Modelar matemáticamente el sistema a controlar, este modelo deberá ser lo más aproximado posible a las dinámicas del sistema real, con el fin de reducir al máximo efectos debidos a la incertidumbre en el modelo.
2. Extender la técnica de *Linealización por Realimentación* al diseño del control por modos deslizantes.
3. Elegir una acción de control tal que logre llevar el modelo original a un modelo equivalente.
4. Definir la superficie de deslizamiento en función de las variables de estado.
5. Determinar si se cumple con la condición de transversalidad y determinar las premisas que debe satisfacer el sistema para que dicha condición sea tenga validez.
6. Obtener una acción de control que sea capaz de dirigir el sistema a la región deslizante y mantenerlo sobre ella, siempre y cuando se cumpla la condición de transversalidad.
7. Simular el sistema en lazo cerrado.

Ahora, se aplicara esta técnica al sistema de nivel de líquidos ya planteado.

4.1 CONTROL POR MODOS DESLIZANTE DE SISTEMA DE NIVEL DE LIQUIDOS

En primera instancia recordemos el esquema del sistema a controlar, el cual es como lo muestra la figura 30.

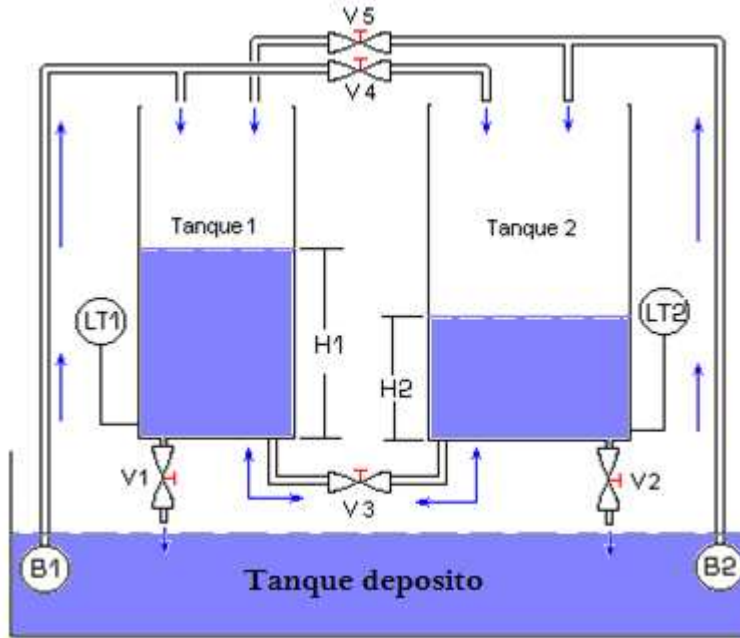


Figura 30. Sistema de nivel real.

Sabiendo que modelo matemático del sistema mostrado es

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{1}{A_1}u$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2}$$

donde u es la entrada de referencia y H_2 es nuestra variable a controlar

Si expresamos el sistema en el espacio de estados tenemos

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{A_1} & 0 \\ \frac{K}{A_2} & -\frac{K}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{H_1 - H_2} \\ \sqrt{H_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Cabe aclarar que se requiere dos acciones de control, una para linealizar el sistema, la cual llamaremos u_l , y otra para llevar el sistema a un régimen deslizante, la cual llamaremos u_s . Entonces tendríamos una acción de control resultante definida como

$$u(H) = f(u_l(H), u_s(H))$$

En el desarrollo de la técnica de *Linealización por Realimentación* se definió u_l como

$$u_l = K\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{KA_1\sqrt{H_2}}{A_2} + \frac{KA_1(H_1 - H_2)}{A_2\sqrt{H_2}} + \frac{2A_1A_2\sqrt{H_1 - H_2}}{K}v$$

Al aplicar esta acción de control y realimentar el sistema, se puede llegar al sistema equivalente

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

con función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{Z_1(s)}{V(s)} = \frac{1}{s^2}$$

donde

$$z_1 = H_2$$

$$z_2 = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2}$$

y tiene un diagrama de bloques como se ve en la figura 31.

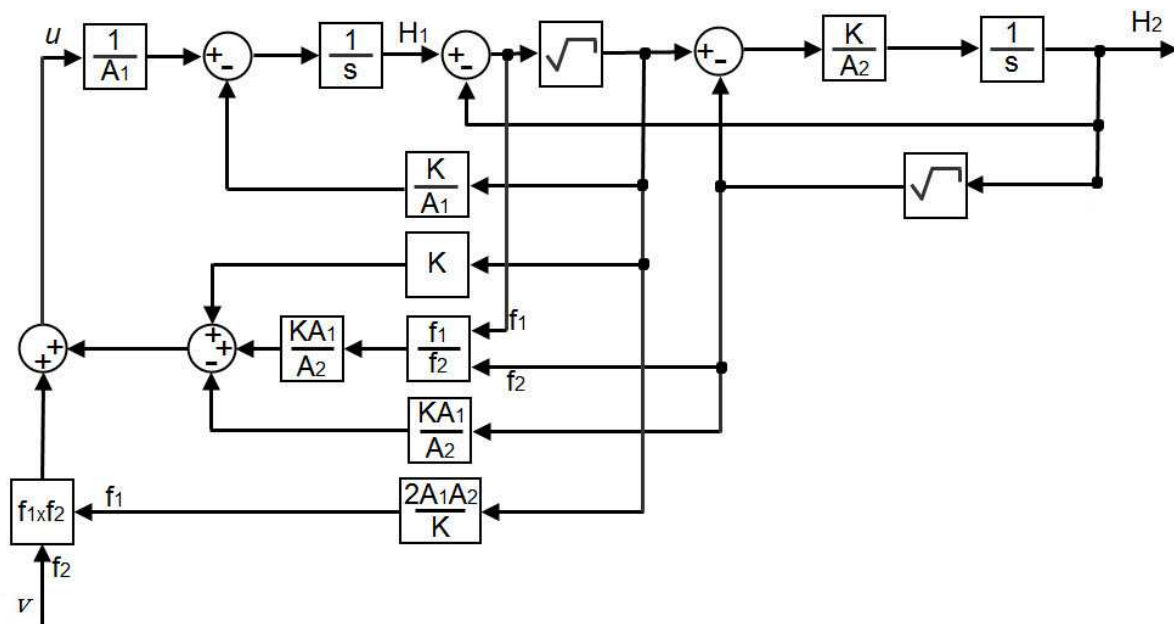


Figura 31. Sistema linealizado por realimentación lineal.

Ahora definamos la acción de control deslizante u_s (que en este caso $u_s = v$) para forzar a nuestro sistema equivalente que se dirija a la superficie de deslizamiento $S(z)$. Consideremos la acción de control deslizante propuesta por B. Hamel

$$u_s = -|F(z)|\text{sgn}(S(z))$$

siendo

$$F(z) = z_1$$

y la superficie de deslizamiento podría definirse como

$$S(z) = z_1 + K_S z_2$$

donde $K_S > 0$

Si reemplazamos estas dos últimas expresiones en la acción de control deslizante u_s , podríamos reescribir una expresión final

$$u_s = -|z_1|\text{sgn}(z_1 + K_S z_2)$$

Aunque ya hemos logrado establecer una acción de control que debería llevar al sistema a un régimen deslizante, es necesario comprobar si se cumple la condición de transversalidad. Para ello se requiere expresar el sistema en la forma

$$\dot{z} = Az + \delta + v(Bz + \gamma)$$

Entonces nuestro modelo quedaría

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La condición de transversalidad plantea que para que esta sea válida se debe cumplir la expresión

$$\nabla S(z) \cdot (Bz + \gamma) \neq 0$$

El termino $Bz + \gamma$ del sistema está dado por

$$Bz + \gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mientras que el gradiente de la superficie de deslizamiento es

$$\nabla S(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial S(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial S(z)}{\partial z_2} \end{bmatrix}$$

Al derivar $S(z)$ tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial z_1} (z_1 + K_S z_2) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2} (z_1 + K_S z_2) = K_S$$

De ser así, el gradiente de la superficie de deslizamiento resultaría un vector fila como sigue

$$\nabla S(z) = [1 \quad K_S]$$

Analizando la validez de la condición de transversalidad

$$\nabla S(z) \cdot (Bz + \gamma) = [1 \quad K_S] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = K_S$$

logramos comprobar que si se cumple con la condición, pues $K_S \neq 0$

Hasta este punto tenemos una acción de control para linealizar el sistema y otra para control deslizante, y con ellas podemos obtener la acción de control resultante, pero antes de esto, no debemos olvidar que las variables de estado del modelo original son H_1 y H_2 , por lo tanto debemos invertir la transformación que se hizo a la hora de linealizar el sistema, si

$$z_1 = H_2$$

$$z_2 = \frac{K}{A_2} \sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2} \sqrt{H_2}$$

entonces la superficie de deslizamiento es

$$S(z) = H_2 + K_S \left[\frac{K}{A_2} \sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2} \sqrt{H_2} \right]$$

y la acción de control deslizante en función de H_1 y H_2 es

$$u_s = -|H_2| \operatorname{sgn} \left[H_2 + K_s \left[\frac{K}{A_2} \sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2} \sqrt{H_2} \right] \right]$$

La acción de control resultante es

$$u = K\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{KA_1\sqrt{H_2}}{A_2} + \frac{KA_1(H_1 - H_2)}{A_2\sqrt{H_2}} + \frac{2A_1A_2\sqrt{H_1 - H_2}}{K} \left[-|H_2| \operatorname{sgn} \left[H_2 + K_s \left[\frac{K}{A_2} \sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2} \sqrt{H_2} \right] \right] \right]$$

El diagrama de bloque que representa el sistema de nivel controlado se muestra en la figura 32.

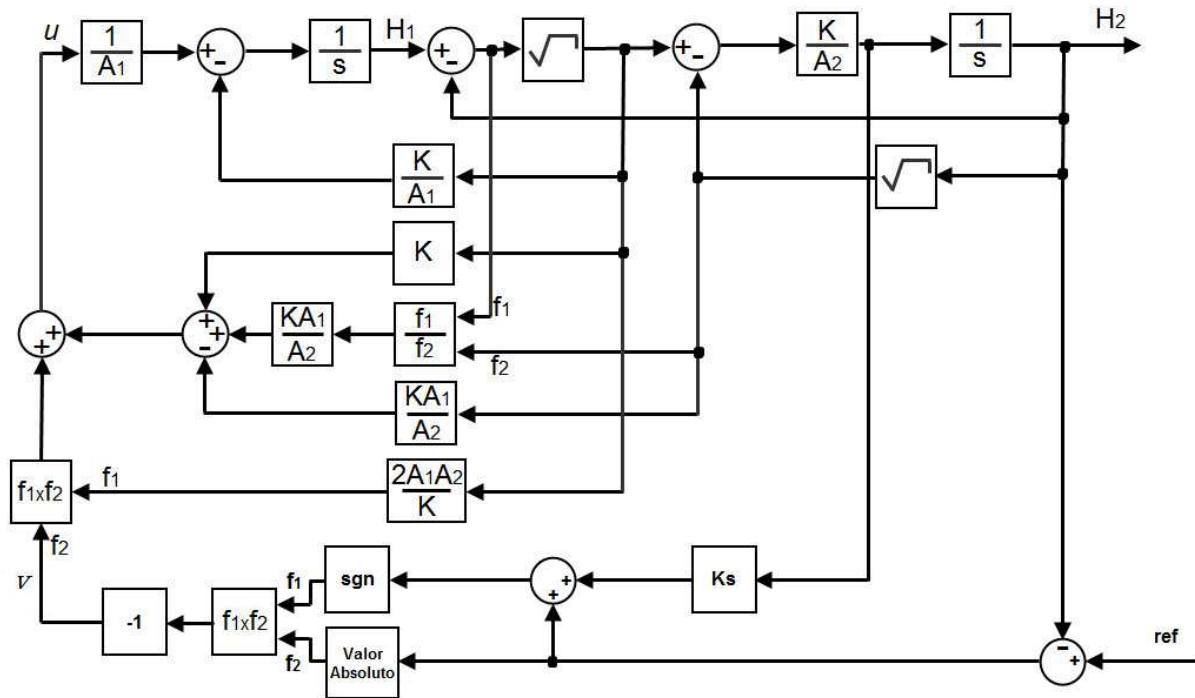


Figura 32. Diagrama de bloques con control por modos deslizantes.

Simulación en Matlab

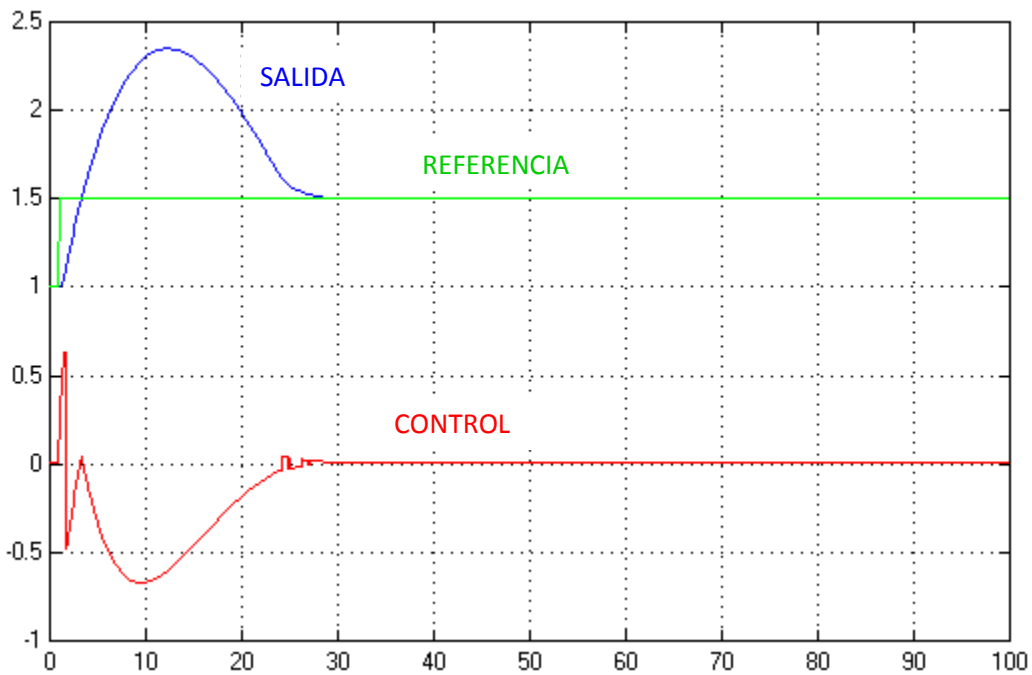


Figura 33. Simulación en Matlab de sistema con control por modos deslizantes.

Como se observa en la figura 33, la acción de control es capaz de hacer que la salida siga la entrada de referencia, permite que la salida presente un sobrepaso para luego forzarla a que se estabilice alrededor de la referencia, logrando así un tiempo asentamiento no tan corto pero si un tiempo de levantamiento relativamente rápido, llegando al 100% del valor final en muy corto tiempo.

5 CONTROL ADAPTATIVO

En los años 50s, con algunos intentos fallidos al diseñar pilotos automáticos para aeronaves y embarcaciones marítimas, empieza a desarrollarse el control adaptativo, pero solo hasta inicio de los 60s con el desarrollo de la teoría de control se logra un mejor entendimiento de esta técnica de control, aun así, tocó esperar una década más para que se iniciara el auge de esta cuando muchos investigadores se dieron a la tarea crear suficiente documentación teórica lo que influyó a que se comenzara a presentar las primeras aplicaciones con exitosos resultados.

El termino adaptativo, adaptivo o adaptable tiene que ver con un cambio del comportamiento conforme a nuevas circunstancias, por tanto, podríamos decir que un controlador adaptativo, adaptivo o adaptable es un regulador que posee la capacidad de modificar su comportamiento como respuesta a cambios en la dinámica del sistema y a las perturbaciones. De una manera más técnica, también definimos control adaptativo como una herramienta de control no lineal en el que el estado del proceso puede ser separado en una escala de tiempo lenta que corresponde a los cambios de los parámetros del sistema y a la velocidad con que son cambiados los parámetros en el regulador, y otra escala de tiempo más rápida que corresponde a la dinámica del efecto de realimentación.

Una de las primeras aplicaciones de esta técnica, se dio en el campo de la Ingeniería Aeronáutica, y surgió como solución por parte de H. P. Whitaker entre 1958 y 1961 ante los problemas de rendimiento que presentaban las aeronaves cuando eran sometidas a cambios drásticos durante el vuelo. La solución hacía referencia a un sofisticado controlador capaz de aprender y adaptarse a los cambios en la dinámica de las aeronaves, el control adaptativo con modelo de referencia, el diseño de este se basaba en la utilización de la regla del MIT. De forma paralela a estos estudios, a finales de los 50s Kalman desarrolla un controlador capaz de autoajustarse para controlar un proceso, este sistema de control se denominó Controlador Auto-sintonizado STC.

Un sistema de control adaptativo mide de forma continua y automática las características dinámicas de un proceso determinado, luego estas características son comparadas con las características deseadas y la diferencia es usada para variar los parámetros ajustables del sistema o para señal que mantenga el funcionamiento óptimo independientemente de las variaciones ambientales. La siguiente figura muestra el diagrama de bloques que define un sistema adaptativo. [\[Rodríguez, F. & López, M.\]](#), [\[Petros, A. & Ioannou, Jing Sun\]](#), [\[Sastry, Shanka\]](#).

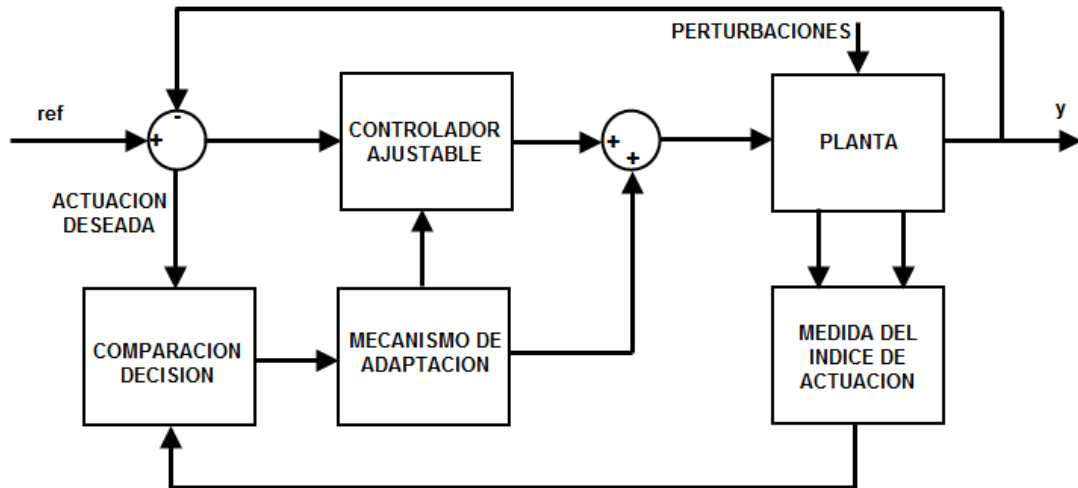


Figura 34. Sistema de control adaptativo propuesto en 1974.

El esquema de la figura 34, propuesto por I. D. Landau en 1974, está compuesto por un lazo de realimentación negativa, en el que actúa un controlador y por otro lazo en el que se mide un índice de funcionamiento para ser comparado con el índice deseado y el error se procesa en el mecanismo de adaptación para luego ajustar los parámetros del controlador. [Landau I. D.]

La ventaja que se tiene de esta técnica, es que aunque pueda resultar compleja, un mismo diseño podría ser utilizado para diversas aplicaciones, lo que conduce a la reducción de costos en el desarrollo del sistema de control. Sin embargo, siempre es indispensable analizar cada proceso de manera detallada para determinar si es o no necesario la implementación de un control adaptativo, en general podemos decir, que se debe aplicar un control adaptativo cuando resulta ineficiente un controlador convencional fijo, por ejemplo, en sistemas no lineales en que se requiere un ajuste constante de parámetros. Un claro ejemplo de la aplicación de este tipo de sistemas de control, sería cuando se trabaja con actuadores no lineales los cuales son linealizados entorno a un punto de operación estacionario logrando un buen funcionamiento solo en un punto de operación. Posterior a la decisión si se implementa o no la técnica, se debe elegir qué tipo de control adaptativo se desea. Existen dos grandes grupos, los *controladores adaptativos con modelo de referencia MRAC* y *reguladores autoajustables STR*. Cabe anotar que, no analizaremos a fondo los STRs, solo plantearemos algunos conceptos y características básicas, con el fin de dar una mayor dedicación a los MRACs para luego implementarlos sobre un sistema real.

5.1 Control Adaptativo con modelo de referencia MRAC

Este tipo de controlador se caracteriza por intentar alcanzar un comportamiento en lazo cerrado dado por un modelo de referencia ante una entrada dada. Fueron diseñados en primera instancia como ya se mencionó, para sistemas continuos mediante minimización de un índice de actuación, donde este índice está dado por la integral del error al cuadrado, este método es conocido como la regla del MIT. Este es caracterizado por tomar un modelo como referencia para que nuestro proceso a controlar, se comporte como él. Para el entendimiento y desarrollo de este tipo de control, consideremos el siguiente par de modelos:

$$\dot{x} = -ax + bu \rightarrow \text{Modelo de la Planta}$$

donde a y b son los parámetros de la planta.

y

$$\dot{x}_m = -a_m x_m + b_m r \rightarrow \text{Modelo de Referencia}$$

donde a_m y b_m son los parámetros del modelo de referencia y r es la entrada de referencia del modelo.

La idea consiste en obtener una acción o *ley de control* y una *ley de adaptación* que logre que la diferencia entre el modelo de la planta y el modelo de referencia tienda a cero.

5.1.1 Elección de la ley de control

Para esto elijamos una ley de control

$$u = \bar{a}_r(t)r + \bar{a}_x(t)x$$

siendo \bar{a}_r y \bar{a}_x son parámetros variables del controlador.

Si aplicamos la ley de control u sobre el modelo de la planta, la dinámica del sistema en lazo cerrado es

$$\dot{x} = -ax + b(\bar{a}_r(t)r + \bar{a}_x(t)x)$$

$$\dot{x} = -ax + \bar{a}_r(t)br + \bar{a}_x(t)bx$$

reordenando la expresión anterior llegamos a

$$\dot{x} = -[a - \bar{a}_x(t)b]x + \bar{a}_r(t)br$$

Como mencionamos con anterioridad, la diferencia entre el modelo de la planta y el modelo de referencia debe ser cero, para se pueda cumplir esta condición

$$\dot{x} = \dot{x}_m$$

Si hacemos $\dot{x} = \dot{x}_m$

$$-[a - \bar{a}_x(t)b]x + \bar{a}_r(t)br = -a_mx_m + b_mr$$

entonces, si $\dot{x} = \dot{x}_m$, $x = x_m$, lo que implicaría decir que

$$a - \bar{a}_x(t)b = a_m$$

$$\bar{a}_r(t)b = b_m$$

Si los parámetros de la planta son conocidos, de estas últimas expresiones podríamos definir cuales serian los parámetros para el control como sigue

$$a_x^* = \frac{a - a_m}{b}$$

$$a_r^* = \frac{b_m}{b}$$

De esta forma tendríamos un control capaz de hacer que el modelo de planta siga a nuestro modelo de referencia

$$u = \frac{b_m}{b} r + \frac{a - a_m}{b} x$$

capaz de hacer que el modelo de planta siga a nuestro modelo de referencia.

Ahora bien, podríamos decir que esta acción de control es válida en un instante de tiempo $\tau = 0$, pero para un instante de tiempo $\tau > 0$, donde los parámetros de la planta han cambiado, este control no sería efectivo, ya que tendríamos nuevos valores para los parámetros a y b , y por tanto los parámetros del controlador deben cambiar también para lograr una acción de control efectiva. De acuerdo a esto, decimos que a_x^* y a_r^* son valores estimados o ideales de \bar{a}_x y \bar{a}_r respectivamente.

La solución ante este problema es elegir una ley *de adaptación* que detecte los cambios en los parámetros de la planta y actúe directamente sobre el control de tal forma que adapte constantemente los parámetros del controlador.

5.1.2 Elección de la ley de adaptación

Al momento de elegir la ley de control, definimos un control con la capacidad de llevar el modelo de la planta a un modelo de referencia, esto gracias a la constante comparación entre la planta y el modelo de referencia, la comparación la definiremos como el error e entre ambos modelos

$$e = x - x_m$$

En el instante que error sea cero ambos modelos serán iguales. La figura 35 muestra lo anterior.

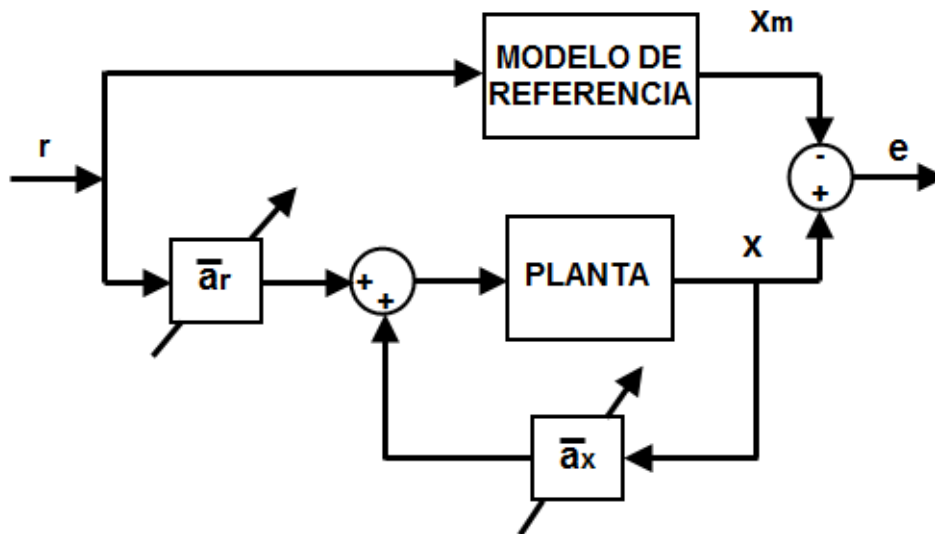


Figura 35. Sistema de control adaptativo con modelo de referencia.

En la figura 35 se puede observar que los parámetros \bar{a}_x y \bar{a}_r presentan variaciones, y de igual forma que existe un error entre los modelos, existe un error entre los parámetros del control, quiere decir que

$$\tilde{a}_x = \bar{a}_x - a_x^*$$

$$\tilde{a}_r = \bar{a}_r - a_r^*$$

Con lo que decimos que el error de los parámetros $\tilde{a}(t)$ es

$$\tilde{a}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_x - a_x^* \\ \bar{a}_r - a_r^* \end{bmatrix}$$

donde \bar{a}_x y \bar{a}_r son los parámetros de adaptación y, a_x^* y a_r^* , son los parámetros estimados [Slotine, Jean-Jacques E., 1991].

Para obtener la ley de adaptación recordemos que el error de los modelos esta dado por

$$e = x - x_m$$

si derivamos tenemos que

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_m$$

entonces

$$\dot{e} = -(a - \bar{a}_x b)x + \bar{a}_r br + a_m x_m - b_m r$$

$$\dot{e} = -ax + \bar{a}_x bx + \bar{a}_r br + a_m x_m - b_m r$$

Si sumamos y restamos el término $a_m x$ en la última expresión

$$\dot{e} = -ax + \bar{a}_x bx + \bar{a}_r br + a_m x_m - b_m r + a_m x - a_m x$$

y agrupamos de tal forma que

$$\dot{e} = -a_m(x - x_m) + (a_m - a + \bar{a}_x b)x + (\bar{a}_r b - b_m)r$$

o también

$$\dot{e} = -a_m e + (a_m - a + \bar{a}_x b)x + (\bar{a}_r b - b_m)r$$

Sabiendo que

$$\tilde{a}_x = \bar{a}_x - a_x^*$$

$$\tilde{a}_r = \bar{a}_r - a_r^*$$

$$a_x^* = \frac{a - a_m}{b}$$

$$a_r^* = \frac{b_m}{b}$$

podemos decir que

$$\tilde{a}_x b = \bar{a}_x b - a + a_m$$

$$\tilde{a}_r b = \bar{a}_r b - b_m$$

con lo que finalmente podríamos reescribir

$$\dot{e} = -a_m e + \tilde{a}_x bx + \tilde{a}_r br$$

$$\dot{e} = -a_m e + (\tilde{a}_x x + \tilde{a}_r r) b$$

y en dominio de la frecuencia es

$$e = \frac{1}{s + a_m} b(\tilde{a}_x x + \tilde{a}_r r)$$

El objetivo de llegar a esta ecuación es encontrar una función con características particulares, esta forma de la ecuación es frecuentemente llamada función de Lyapunov y la forma podría ser escrita como

$$e(t) = H(s)\{k\varphi^T(t)V(t)\}$$

que satisface

$$\begin{aligned} e(t) &> 0 \text{ para } t \neq 0 \\ \dot{e}(t) &< 0 \text{ para } t \neq 0 \\ e(t) &\rightarrow \infty \text{ para } \|t\| \rightarrow \infty \\ e(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde es una señal de salida escalar, $H(s)$ es una función de transferencia positiva, k es una constante desconocida de signo conocido, $\varphi(t)$ es una función vectorial de $(m \times 1)$ y $v(t)$ es un vector $(m \times 1)$.

La función en el dominio de la frecuencia obtenida posee forma similar a la función de Lyapunov, y la llamaremos función de Lyapunov en términos del error entre las señales del sistema y el error de los parámetros. Entonces, si de

$$e(t) = H(s)\{k\varphi^T(t)v(t)\}$$

podemos decir que

$$\dot{\varphi}(t) = -\text{sgn}(k)\gamma e v(t)$$

con $\gamma > 0$, de igual modo de

$$e = \frac{1}{s + a_m} b(\tilde{a}_x x + \tilde{a}_r r)$$

podemos decir que

$$\dot{\tilde{a}}_x = -\text{sgn}(b)\gamma e x$$

$$\dot{\tilde{a}}_r = -\text{sgn}(b)\gamma e r$$

con una ganancia de adaptación $\gamma > 0$.

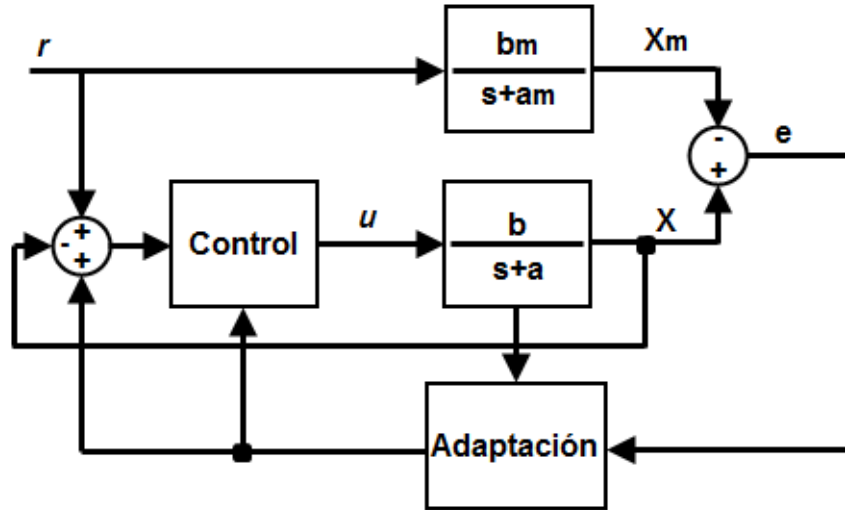


Figura 36. Control MRAC para sistema de primer orden.

La figura 36 muestra representativamente el sistema de control a través de un sistema de adaptación, donde en el bloque de adaptación encontramos los términos \bar{a}_x , \bar{a}_r y γ .

De acuerdo a lo desarrollado, podríamos afirmar que un sistema de control adaptativo está conformado por un modelo de referencia, un controlador primario y una ley de adaptación que actúa sobre el controlador. Para diseñar un sistema de control adaptativo con modelo de referencia existen tres técnicas, el primero conocido como *enfoque de sensibilidad*, el cual está basado en el uso de modelos de sensibilidad para adaptar los parámetros del controlador, con este método si no se elige de forma adecuada el modelo de referencia o si la ganancia de adaptación se escoge demasiado grande, el sistema se podría volver inestable y por tanto no garantiza la estabilidad del sistema de control. Una segunda técnica, es el *método de hiperestabilidad* en el que sí se logra obtener una ley de adaptación estable y se basa en el criterio de Popov. Por último, el *método de Lyapunov*, el cual desarrollamos en el diseño del control adaptativo, en el que se establece que un sistema tiene un equilibrio $x = 0$ asintóticamente estable.

5.2 CONTROL ADAPTATIVO CON MODELO DE REFERENCIA EXTENDIDO A SISTEMAS NO LINEALES

Consideremos ahora un sistema de la forma

$$\dot{x} = Af(x) + Bu$$

donde $f(x)$ es una función no lineal.

Como se desea diseñar un control adaptativo por modelo de referencia, es necesario definir el modelo de referencia que la planta debe seguir, elijamos un modelo

$$\dot{x}_m = -A_m x_m + B_m r$$

5.2.1 Ley de control

Si la ley de control es

$$u = \hat{A}_x x + \hat{A}_f f(x) + \hat{a}_r r$$

la dinámica del sistema en lazo cerrado es

$$\dot{x} = Af(x) + B(\hat{A}_x x + \hat{A}_f f(x) + \hat{a}_r r)$$

Recordemos que la idea consiste en que el modelo de la planta siga al modelo de referencia, es decir

$$\dot{x} = \dot{x}_m$$

Si cumplimos con lo anterior

$$Af(x) + B(\hat{A}_x x + \hat{A}_f f(x) + \hat{a}_r r) = -A_m x_m + B_m r$$

entonces podríamos decir que

$$A + B\hat{A}_f = 0, \text{ entonces } A_f^* = -\frac{A}{B}$$

$$B\hat{A}_x = -A_m, \text{ entonces } A_x^* = -\frac{A_m}{B}$$

$$B\hat{a}_r = B_m, \text{ entonces } a_r^* = \frac{B_m}{B}$$

donde A_f^* , A_x^* y a_r^* son los valores estimados de $\hat{A}_x(t)$, $\hat{A}_f(t)$ y $\hat{a}_r(t)$ respectivamente. Entonces la ley de control es

$$u = \hat{A}_x(t)x + \hat{A}_f(t)f(x) + \hat{a}_r(t)r$$

5.2.2 Ley de adaptación

Si sumamos y restamos el término $B(\hat{A}_x x + \hat{A}_f f(x) + \hat{a}_r r)$ al modelo de la planta

$$\dot{x} = Af(x) + Bu$$

se obtiene

$$\dot{x} = -A_m x + B_m r + B(-\hat{A}_x x - \hat{A}_f f(x) - \hat{a}_r r + u)$$

Si decimos que el error de los parámetros esta dado por

$$\tilde{a}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_f \\ \tilde{a}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_x - A_x^* \\ \hat{A}_f - A_f^* \\ \hat{a}_r - a_r^* \end{bmatrix}$$

y que

$$e = x - x_m$$

podemos escribir la función

$$\dot{e} = -A_m e + (-\tilde{A}_x x - \tilde{A}_f f(x) - \tilde{a}_r r + u)$$

Con lo que llegaríamos a una ley de adaptación

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{A}}_x \\ \dot{\hat{A}}_f \\ \dot{\hat{a}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sgn}(B)\gamma e x \\ -\text{sgn}(B)\gamma e f \\ -\text{sgn}(B)\gamma e r \end{bmatrix}$$

Aparte de esto, una opción interesante para el diseño de un control adaptativo con modelo de referencia de un sistema no lineal sería, extender la teoría de *Linealización por Realimentación* al diseño de MRAC, donde necesitaríamos entonces, una ley de control para linealizar el sistema, una ley de control que actuaría sobre sistema linealizado y una ley de adaptación que actuaría sobre la segunda ley de control. Por lo anterior, definamos los pasos a seguir en el diseño de un sistema de control adaptativo utilizando el Método de Lyapunov.

1. Modelar matemáticamente el sistema a controlar.
2. Obtener un modelo lineal equivalente a través de la linealización por realimentación, si se desea.
3. Definir un modelo de referencia.
4. Obtener la ecuación de error entre las variables de estado del modelo de la planta y el modelo de referencia.
5. Encontrar una función de Lyapunov en términos del error entre las variables de estado y del error en los parámetros.

$$e(t) = H(s)\{k\varphi^T(t)v(t)\}$$

6. Calcular la derivada de la función de Lyapunov para obtener la ley de adaptación.

5.3 REGULADORES AUTOAJUSTABLES STR

Los reguladores STR constituyen un tipo de control adaptativo en el que en función de las características que se conocen de la dinámica del proceso a controlar son capaces de ajustarse a si mismos.

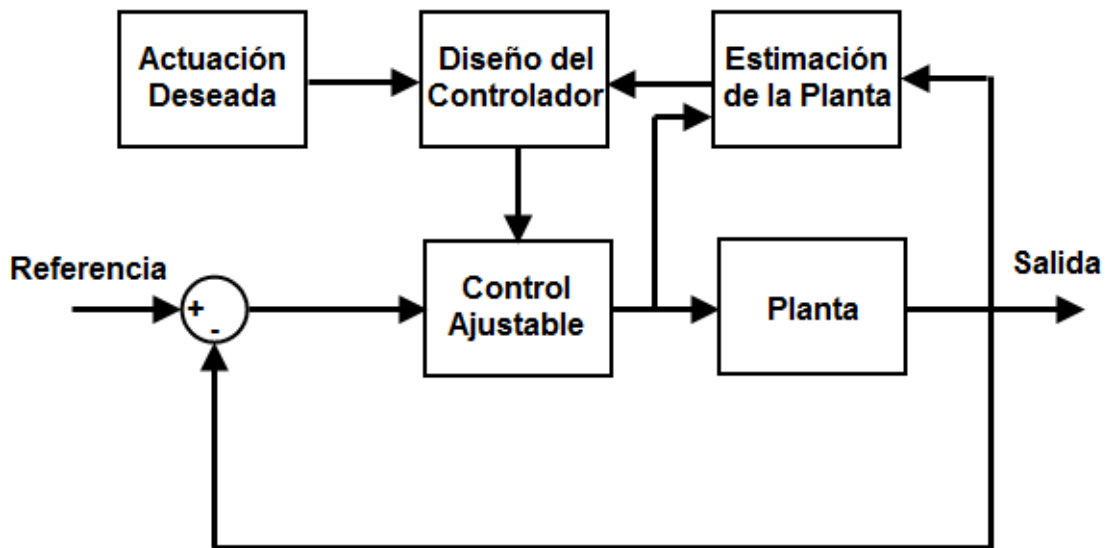


Figura 37. Control adaptativo autoajustable.

La figura 37 muestra el diagrama de bloques característico de un regulador autoajustable que consta de un algoritmo para la estimación de parámetros, un mecanismo de adaptación que se encarga de desarrollar la tarea de diseño del controlador y un controlador con parámetros ajustables. El funcionamiento de los STR se basa en el principio de separación de las tareas de control e identificación, con lo que se puede diseñar muchas clases de reguladores autoajustables combinando varios métodos de diseño e identificación, y en el principio de equivalencia cierta, donde se supone que los parámetros identificados coinciden con los reales.

Una diferencia clara entre los controladores adaptativos con modelo de referencia y los reguladores autoajustables es que en los primeros el mecanismo de adaptación actualiza directamente los parámetros del controlador, por lo que se pueden considerar como controladores adaptivos directos; mientras que en los segundos el mecanismo de adaptación primero estima los parámetros de la planta y luego diseña el controlador usando los parámetros estimados, por lo que se consideran como controladores adaptivos indirectos [Petros, A. & Ioannou, Jing Sun], [Rodríguez, F. & López, M.], [Sastry, Shankar].

5.4 DISEÑO DE CONTROL MRAC DE UN SISTEMA DE NIVEL DE LÍQUIDOS

Siendo nuestra planta un sistema de nivel de líquidos de segundo orden con modelo

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1 - H_2} + \frac{1}{A_1}u$$
$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2}$$

En primera instancia, es conveniente definir si utilizaremos la herramienta de linealización para luego aplicar el método de Lyapunov, por lo tanto, separaremos el desarrollo del diseño del sistema de control en:

- Diseño de control adaptativo con modelo de referencia de sistema obtenido por linealización.
- Diseño de control adaptativo con modelo de referencia de sistema sin linealizar.

5.4.1 Diseño de control adaptativo con modelo de referencia de sistema sin linealizar

Iniciemos definiendo el modelo de la planta como

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K}{A_1} & 0 \\ \frac{K}{A_2} & \frac{-K}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{H_1 - H_2} \\ \sqrt{H_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Este modelo si lo llevamos a una expresión tal que

$$\dot{H} = AH + Cf(H) + Bu$$

donde A y C son matrices de orden (2×2) , H es el vector de las variables de estado con orden (2×1) , $f(H)$ es una función vectorial no lineal de orden (2×1) y el vector B con orden (2×1) . Extendiendo la expresión a nuestro modelo tenemos que

$$A = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

$$f(H) = \begin{bmatrix} \sqrt{H_1 - H_2} \\ \sqrt{H_2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{-K}{A_1} & 0 \\ \frac{K}{A_2} & \frac{-K}{A_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a esto, podemos escribir el modelo del sistema de nivel de líquidos como $\dot{H} = Cf(H) + Bu$.

Lo seguido sería elegir un modelo de referencia para especificar el comportamiento deseado en lazo cerrado, este modelo debe ser tal que el conjunto controlador ajustable y planta pueda reproducir dicho modelo. Consideremos el modelo de referencia

$$\dot{H}_m = -A_m H_m + B_m r$$

siendo A_m una matriz de orden (2×2) y, H_m y B_m de orden (2×1) .

Ley de control

En la elección de la ley de control u , se puede pensar en una estructura de control lineal, pero si la elegimos con base en el modelo de la planta se hace evidente la necesidad de pensar en una estructura no lineal. Sumado a esto, el control debe ser una función de los parámetros, los cuales serán ajustados gracias a una ley de adaptación.

Si tomamos la ley de control como

$$u = \hat{A}_H H + \hat{A}_f f(H) + \hat{a}_r r$$

con $[\hat{A}_H]_{1 \times 2}$, $[\hat{A}_f]_{1 \times 2}$ y $[\hat{a}_r]_{1 \times 1}$

cuando aplicamos la ley de control sobre el modelo, la dinámica de este en lazo cerrado es

$$\dot{H} = Cf(H) + B(\hat{A}_H H + \hat{A}_f f(H) + \hat{a}_r r)$$

La eficiencia del sistema de control adaptivo se logra cuando el modelo de la planta logre seguir el modelo de referencia, lo que quiere decir que en un instante

de tiempo determinado el modelo de la planta será igual al modelo de referencia, cuando esto suceda se puede afirmar que error entre las variables de estado del modelo de la planta y el modelo de referencia es cero. En el instante en que el error se hace cero

$$e = H - H_m = 0$$

entonces la derivada del erro será

$$\dot{e} = \dot{H} - \dot{H}_m = 0$$

$$\dot{H} = \dot{H}_m$$

Teniendo en cuenta esta última expresión, se tiene que

$$Cf(H) + B(\hat{A}_H H + \hat{A}_f f(H) + \hat{a}_r r) = -A_m H_m + B_m r$$

Al realizar esta igualdad se puede determinar los parámetros necesarios para que ambos modelos sean iguales. Si la matriz B es invertible decimos que

$$C + B\hat{A}_f = [0] \text{ entonces } A_f^* = \frac{C}{B}$$

$$B\hat{A}_H = -A_m \text{ entonces } A_H^* = -\frac{A_m}{B}$$

$$B\hat{a}_r = B_m \text{ entonces } a_r^* = \frac{B_m}{B}$$

donde A_f^* , A_H^* y a_r^* son los valores estimados de los parámetros \hat{A}_f , \hat{A}_H y \hat{a}_r respectivamente. La expresión para la ley de control es

$$u = \hat{A}_H(t)H + \hat{A}_f(t)f(H) + \hat{a}_r(t)r$$

Como se puede observar, los parámetros del controlador ahora están expresados en función del tiempo, esto debido a que si en un instante de tiempo tomaran valores estimados, en un instante de tiempo futuro tendrán otro valor, entonces pasaron de ser un parámetro constante a uno variable.

Ley de adaptación

Para llegar a la ley de adaptación, realizamos el siguiente artificio matemático, tomemos el modelo de la planta y sumémosle y restémosle la expresión $B(\hat{A}_H H + \hat{A}_f f(H) + \hat{a}_r r)$, lo que es

$$\dot{H} = Cf(H) + Bu + B(\hat{A}_H H + \hat{A}_f f(H) + \hat{a}_r r) - B(\hat{A}_H H + \hat{A}_f f(H) + \hat{a}_r r)$$

Si extendemos la expresión multiplicando cada paréntesis por su factor común tenemos

$$\dot{H} = Cf(H) + Bu + B\hat{A}_H H + B\hat{A}_f f(H) + B\hat{a}_r r - B\hat{A}_H H - B\hat{A}_f f(H) - B\hat{a}_r r$$

sabiendo que $C = -B\hat{A}_f$, $B\hat{a}_r = B_m$ y $B\hat{A}_H = -A_m$

$$\dot{H} = -B\hat{A}_f f(H) + Bu - A_m H + B\hat{A}_f f(H) + B_m r - B\hat{A}_H H - B\hat{A}_f f(H) - B\hat{a}_r r$$

Simplificando la expresión

$$\dot{H} = -A_m H + B_m r + B(-\hat{A}_H H - \hat{A}_f f(H) - \hat{a}_r r + u)$$

Si recordamos que el error de las variables de estado esta dado por

$$e = H - H_m$$

$$\dot{e} = \dot{H} - \dot{H}_m$$

entonces,

$$\dot{e} = -A_m H + B_m r + B(-\hat{A}_H H - \hat{A}_f f(H) - \hat{a}_r r + u) + A_m H_m - B_m r$$

o lo que es igual

$$\dot{e} = -A_m e + B(-\tilde{A}_H H - \tilde{A}_f f(H) - \tilde{a}_r r + u)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_H \\ \tilde{A}_f \\ \tilde{a}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_H - A_H^* \\ \hat{A}_f - A_f^* \\ \hat{a}_r - a_r^* \end{bmatrix}$$

como $a_r^* = \frac{B_m}{B}$, podemos decir que $B = B_m a_r^{*-1}$, la expresión del error entre los modelos y los parámetros llega a ser

$$\dot{e} = -A_m e + B_m a_r^{*-1} (-\tilde{A}_H H - \tilde{A}_f f(H) - \tilde{a}_r r + u)$$

La cual sería la función de Lyapunov necesaria para definir la ley de adaptación con forma

$$V(e, \tilde{A}_H, \tilde{A}_f, \tilde{a}_r) = e^T P e + \phi^T \Gamma^{-1} \phi$$

siendo ϕ el error en los parámetros, P y Γ^{-1} matrices definidas positivas.

$$\Gamma^{-1} = a_r^* \text{sgn}(A_r)$$

donde A_r tomara el valor de 1 si a_r^* es positivo, y tomara un valor de -1 si a_r^* es negativo. La ley de adaptación que actuara sobre el control está dada por

$$\hat{A}_H = -B_m P e H \operatorname{sgn}(A_r)$$

$$\hat{A}_f = -B_m P e f(H) \operatorname{sgn}(A_r)$$

$$\hat{a}_r = -B_m P e r \operatorname{sgn}(A_r)$$

El producto vectorial entre las matrices B_m y P da como resultado una matriz de orden (2×1) que llamaremos matriz de ganancia adaptativa γ .

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{A}}_H \\ \dot{\hat{A}}_f \\ \dot{\hat{a}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma e H \operatorname{sgn}(A_r) \\ -\gamma e f(H) \operatorname{sgn}(A_r) \\ -\gamma e r \operatorname{sgn}(A_r) \end{bmatrix}$$

Para obtener la respuesta del sistema controlado, definamos primero el modelo de referencia, podemos elegir un modelo H_m

$$\dot{H}_m = \begin{bmatrix} \dot{H}_{m1} \\ \dot{H}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{m1} \\ H_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

y reescribimos la ley de adaptación en función de la variable a controlar H_2 y H_2 como

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{A}}_H \\ \dot{\hat{A}}_f \\ \dot{\hat{a}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma e H_2 \operatorname{sgn}(A_r) \\ -\gamma e (\sqrt{H_1 - H_2}) \operatorname{sgn}(A_r) \\ -\gamma e r \operatorname{sgn}(A_r) \end{bmatrix}$$

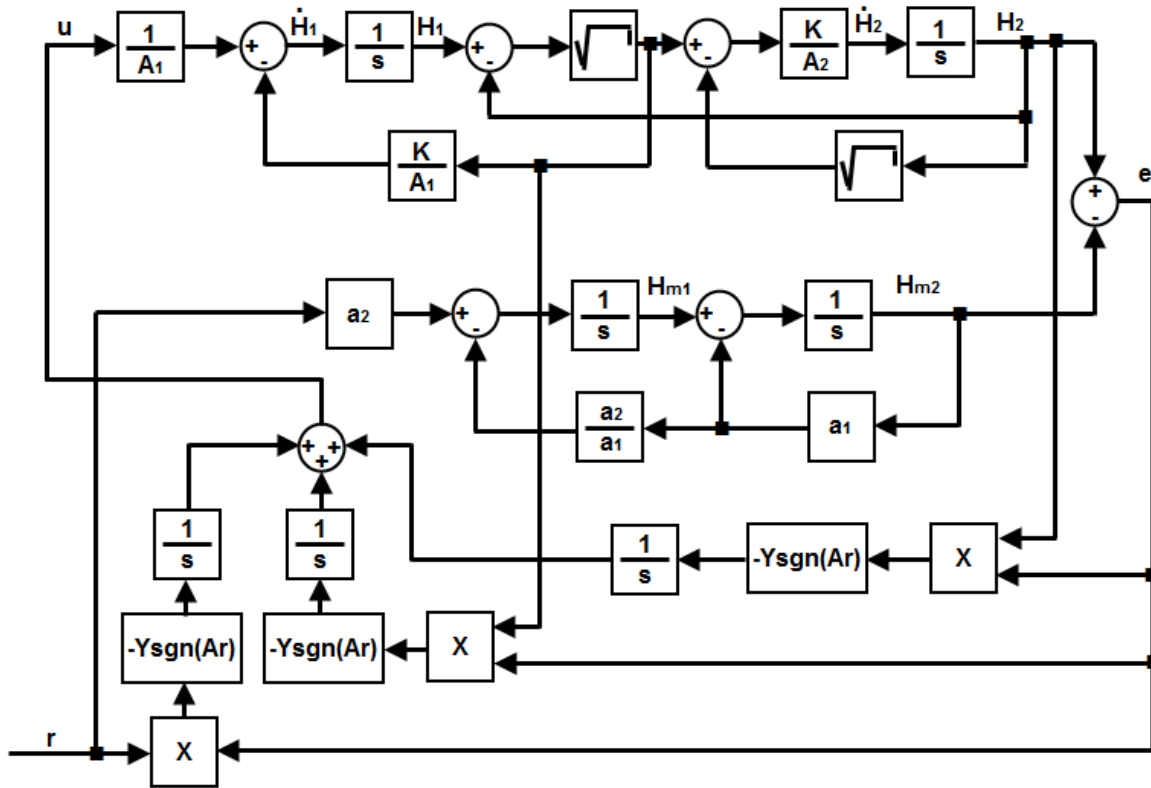


Figura 38. Diagrama de bloques de sistema controlado para sistema no lineal.

Simulación

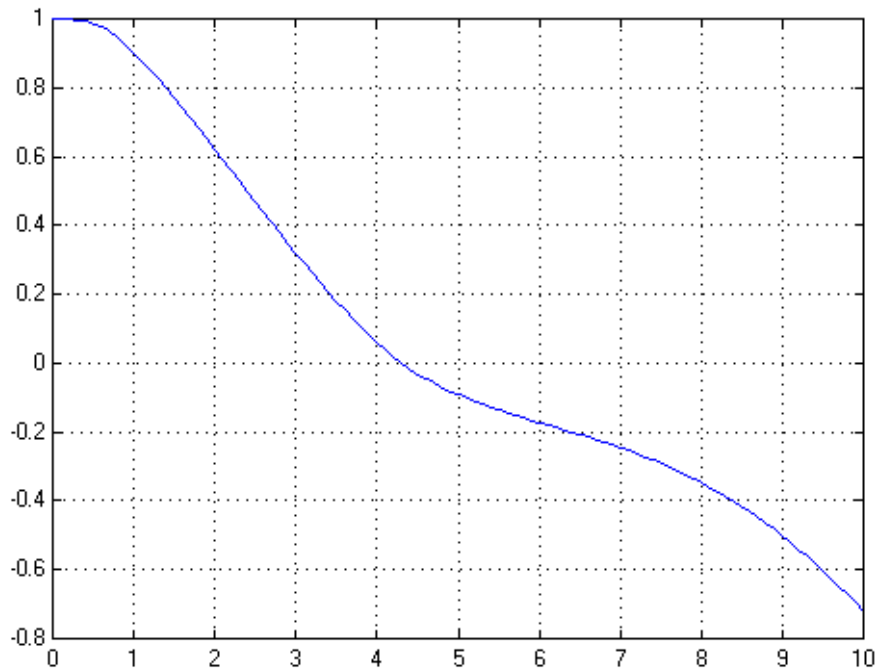


Figura 39. Simulación en matlab de sistema no lineal controlado. Señal de salida.

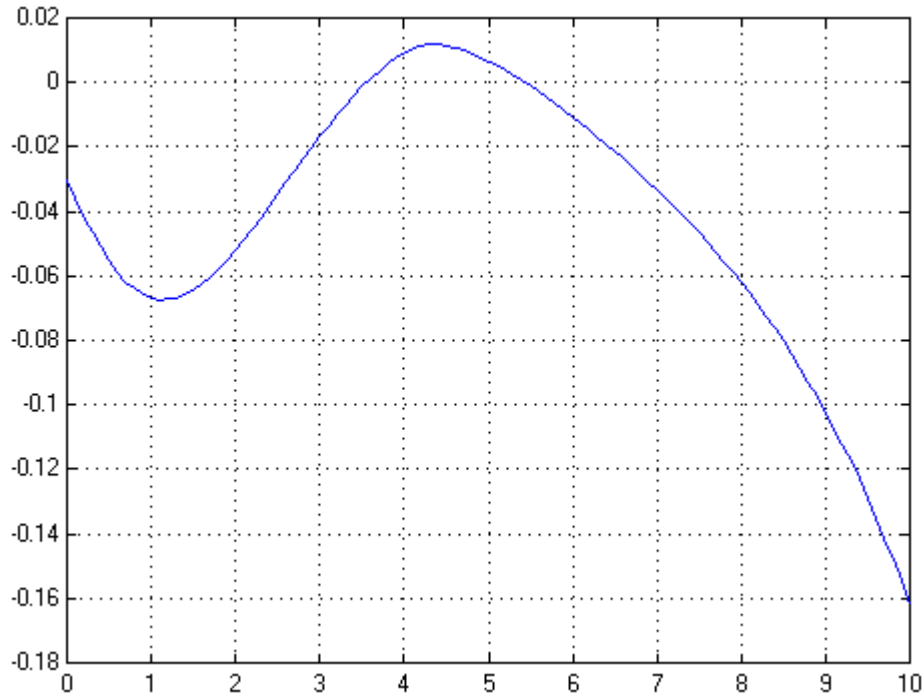


Figura 40. Señal de control adaptativo MRAC.

En las figuras 39 y 40 se muestra la salida del sistema ante una entrada escalón y la señal de control adaptativo. En este caso la salida en un pequeño instante intenta seguir a la referencia y el control realiza un par de cambios alrededor de cero, cuando la salida comienza a perderse con respecto a la referencia, el control trata de forzarla pero no es capaz, perdiendo de esta forma el control sobre esta y teniendo un incremento ilimitado del error entre la referencia y la salida.

5.4.2 Diseño de control adaptativo con modelo de referencia de sistema obtenido con linealización por realimentación

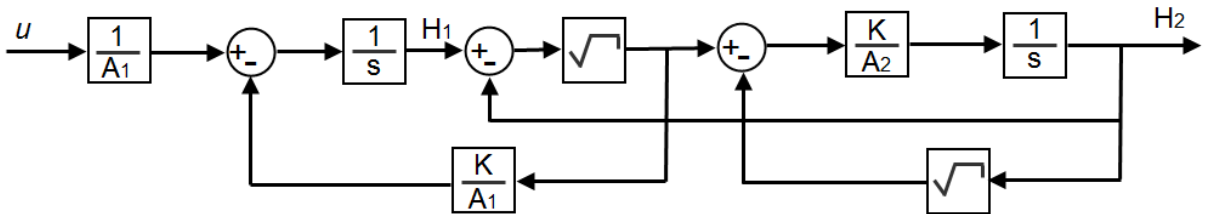


Figura 41. Diagrama de bloques de sistema de nivel no lineal.

La figura 41 muestra el diagrama de bloques del sistema de nivel de líquido. Al hacer actuar sobre él un control u , logramos llevarlo a un modelo equivalente

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$G_m(s) = \frac{Z_{m1}(s)}{R(s)} = \frac{a_2}{s^2 + a_1s + a_2}$$

con a_1 y a_2 como constantes positivas.

Ley de control

Como primera medida, consideremos que η es conocida y que la señal de control en función del error en los modelos es [\[Slotine, Jean-Jacques E., 1991\]](#)

$$v = \eta(\dot{z}_{m2} - 2k\dot{e} - k^2e)$$

donde $e = z - z_m$ y k es una constante positiva. Si hacemos actuar el control sobre la planta obtendremos la siguiente dinámica en lazo cerrado

$$\ddot{z}_1 = \frac{1}{\eta}[\eta(\ddot{z}_{m1} - 2k\dot{e} - k^2e)]$$

$$\ddot{z}_1 = \ddot{z}_{m1} - 2k\dot{e} - k^2e$$

Logramos llegar a esta expresión gracias a que $z_{m2} = \dot{z}_{m1}$, y por lo tanto,

$$\dot{z}_{m2} = \ddot{z}_{m1}$$

Reacomodando algunos términos

$$(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_{m1}) + 2k(\dot{z}_1 - \dot{z}_{m1}) + k^2(z_1 - z_{m1}) = 0$$

Con esta ecuación podemos notar que el sistema llegara a una dinámica deseada cuando ambos modelos, el de la planta y el de referencia, sean idealmente iguales, ya que, como es obvio, si $z = z_m$ entonces, $\dot{z} = \dot{z}_m$ y $\ddot{z} = \ddot{z}_m$.

Ahora consideremos el instante en que el parámetro η no es conocido, como no sabemos qué valores podría tomar este parámetro, definámoslo como una función del tiempo $\hat{\eta}(t)$, entonces la ley de control cambiara a

$$v = \hat{\eta}(t)(\dot{z}_{m2} - 2k\dot{e} - k^2e)$$

Ley de adaptación

Lo siguiente es obtener una ley que ajuste el parámetro del controlador, $\hat{\eta}(t)$, teniendo a la mano la acción de control v y sabiendo que el error en los parámetros esta dado por

$$\tilde{\eta} = \hat{\eta} - \eta$$

podríamos encontrar una función característica de Lyapunov que nos conduzca a la ley de adaptación para el controlador. Para ello, reemplacemos la nueva ley de control v en el modelo de la planta y expresemos la dinámica en lazo cerrado en función de las variables z_1 y z_{m1}

$$\ddot{z}_1 = \frac{\hat{\eta}(t)}{\eta} (\dot{z}_{m2} - 2k\dot{e} - k^2e)$$

en función de z_{m1} es

$$\ddot{z}_1 = \frac{\hat{\eta}(t)}{\eta} (\dot{z}_{m1} - 2k\dot{e} - k^2e)$$

Si $\ddot{e} = \ddot{z}_1 - \ddot{z}_{m1}$, y el modelo de referencia puede ser expresado como

$$\ddot{z}_{m1} = -a_1\dot{z}_{m1} - a_2z_{m1} + a_2r$$

entonces,

$$\ddot{e} = \frac{\hat{\eta}(t)}{\eta} (\dot{z}_{m1} - 2k\dot{e} - k^2e) + a_1\dot{z}_{m1} + a_2z_{m1} - a_2r$$

o también

$$\eta\ddot{e} = \hat{\eta}(t)(\dot{z}_{m1} - 2k\dot{e} - k^2e) + \eta(a_1\dot{z}_{m1} + a_2z_{m1} - a_2r)$$

Después de haber efectuado las operaciones pertinentes, agrupado términos y realizado algunas sustituciones, llegamos a la función

$$\eta(\ddot{e} + k\dot{e}) + k\eta(\dot{e} + ke) = \tilde{\eta}(\dot{z}_{m1} - 2k\dot{e} - k^2e)$$

Eligiendo una función de Lyapunov de la forma

$$V = e^T P e + \phi^T \Gamma^{-1} \phi$$

Ajustando la función a la forma adecuada tendremos

$$V = \frac{1}{2}\eta(\ddot{e} + k\dot{e})^2 + \frac{1}{2}\gamma^{-1}\tilde{\eta}^2$$

cuya solución es la ley de adaptación

$$\dot{\hat{\eta}} = -\gamma(\dot{e} + ke)(\dot{z}_{m2} - 2k\dot{e} - k^2e)$$

La figura 43 corresponde al diagrama de bloques simplificado del sistema de nivel de líquidos linealizado, con un control adaptativo con modelo de referencia.

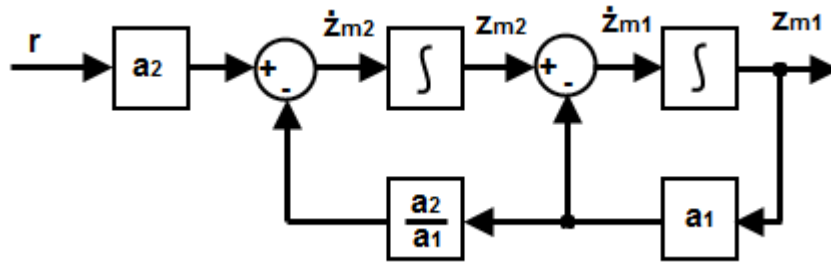


Figura 45 Diagrama de bloques de modelo de referencia.

Simulación

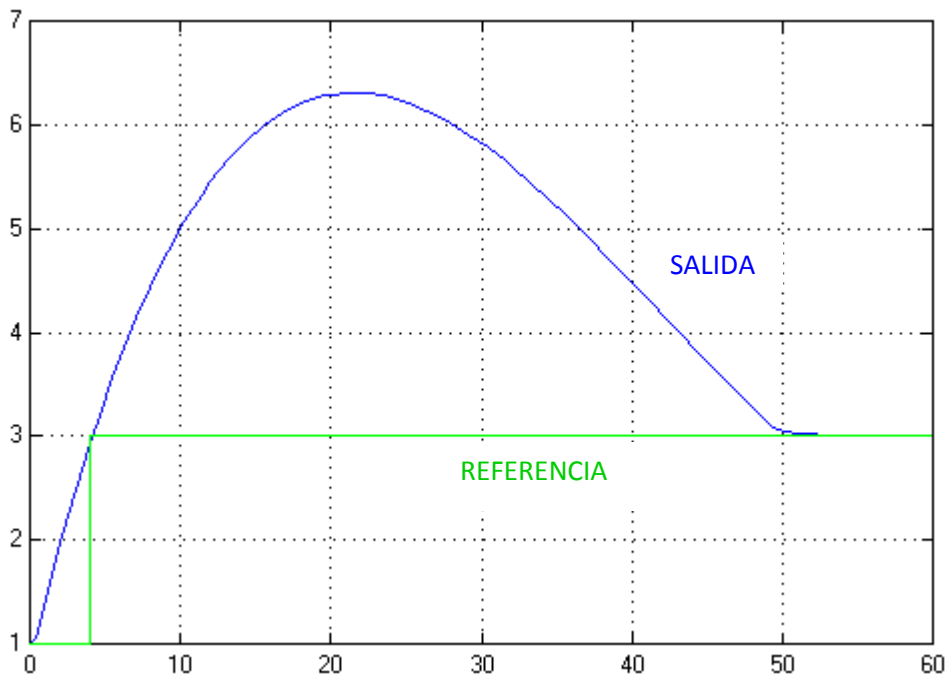


Figura 46. Simulación en Matlab Control MRAC. Señal de salida y referencia.

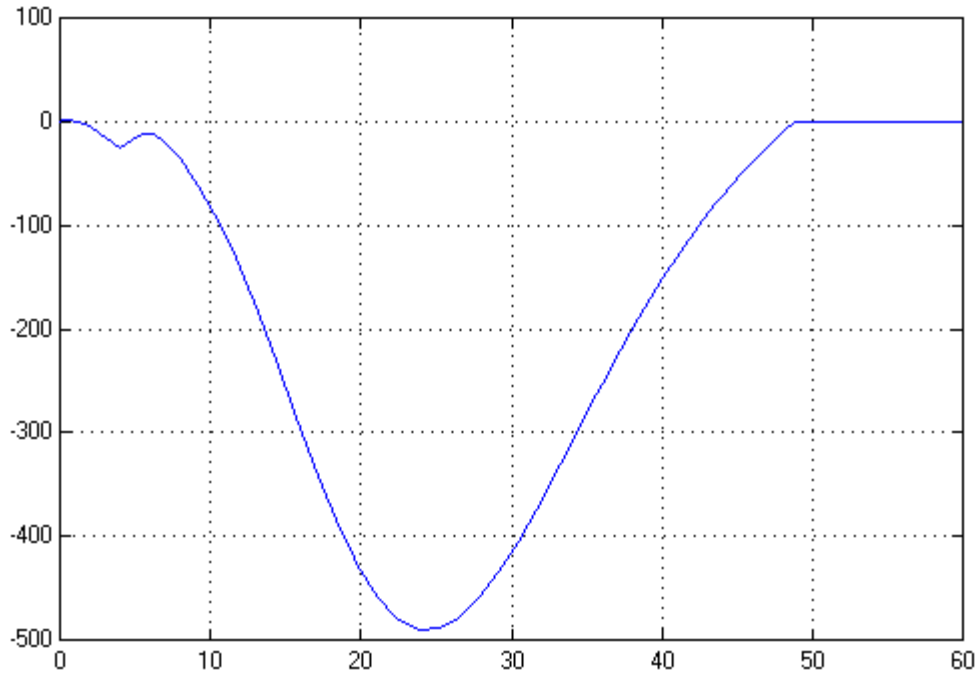


Figura 47. Señal de control adaptativo MRAC.

Claramente se nota que la salida del sistema presenta un sobrepaso con más de un 50% del valor final (ver figura 46), pero aun así logra un asentamiento, de igual manera el control para tratar de que la salida no continúe con este incremento hace un esfuerzo considerable para evitarlo, tanto así que muestra un pico exageradamente alto hasta que logra que la salida se estabilice.

6 IMPLEMENTACION DE CONTROL NO LINEAL EN LABVIEW Y ADQUISICION DE DATOS

6.1 LABVIEW, LABORATORY VIRTUAL INSTRUMENT ENGINEERING WORKBENCH

Labview es un sistema de programación gráfico útil para el diseño de sistema de adquisición de datos, instrumentación y control suministrado por la empresa National Instruments. En los últimos 20 años se ha convertido en un estándar en el desarrollo de aplicaciones de medida, control de instrumentación y sistemas de adquisición de datos, por lo que ha logrado una gran expansión en la comunidad educativa y científica.

Esta herramienta consta de dos paneles, el panel frontal y el panel de programación o diagrama de bloques; el panel frontal se diseña la interfaz con el usuario y en el panel de programación se relacionan los elementos utilizados en la interfaz a través de operaciones que establecen como funciona el programa o sistema.

6.2 IMPLEMENTACIÓN DE SISTEMA DE NIVEL DE LÍQUIDOS EN LABVIEW.

Al momento de iniciar la programación en Labview, es importante definir las ecuaciones que rigen el sistema a controlar, la dinámica del sistema de nivel de tanques interconectados en paralelo está definida por:

$$\frac{dH_1(t)}{dt} = -\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1(t) - H_2(t)} + \frac{1}{A_1}u(t)$$

$$\frac{dH_2(t)}{dt} = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1(t) - H_2(t)} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2(t)}$$

Discretizando las ecuaciones tenemos

$$\frac{H_1(t) - H_1(t-1)}{\Delta t} = -\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1(t-1) - H_2(t-1)} + \frac{1}{A_1}u(t)$$

$$\frac{H_2(t) - H_2(t-1)}{\Delta t} = \frac{K}{A_2}\sqrt{H_1(t-1) - H_2(t-1)} - \frac{K}{A_2}\sqrt{H_2(t-1)}$$

Con estas dos últimas ecuaciones, se hace posible la implementación de la dinámica del proceso en Labview. Siendo $u(t)$ la entrada de referencia al sistema y $H_2(t)$ la salida,

$$H_1(t) = \left[-\frac{K}{A_1}\sqrt{H_1(t-1) - H_2(t-1)} + \frac{1}{A_1}u(t) \right] \Delta t + H_1(t-1)$$

$$H_2(t) = \left[\frac{K}{A_2} \sqrt{H_1(t-1) - H_2(t-1)} - \frac{K}{A_2} \sqrt{H_2(t-1)} \right] \Delta t + H_2(t-1)$$

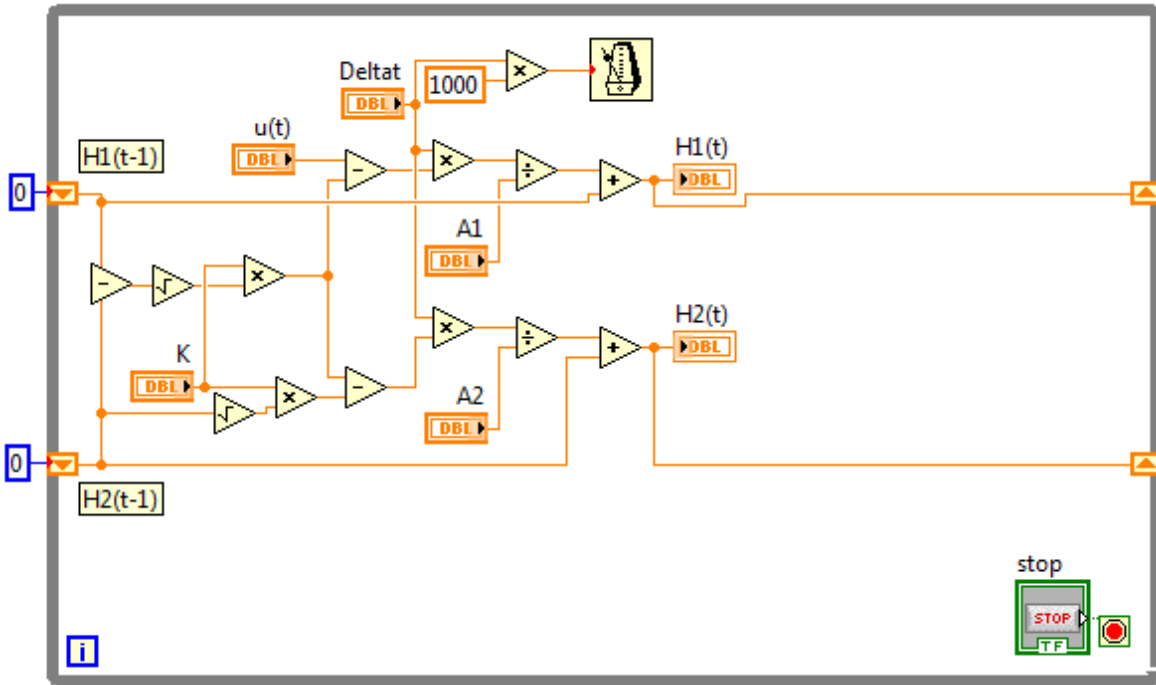


Figura 48. Diagrama de bloques de sistema en lazo abierto.

La figura 48 muestra el diagrama de bloques del sistema de nivel de líquidos en lazo abierto, los bloques se encuentran en el interior de la estructura *While Loop*, el cual permite que se efectúe las operaciones internas de manera repetitiva hasta que se active el botón stop, además se cuenta con dos *shift registers* para tener disponible los datos obtenidos en iteraciones anteriores ($H_1(t-1)$ y $H_2(t-1)$), estos tiene condiciones iniciales cero.

En la figura 49 se puede observar el panel frontal referente al diagrama de bloques del sistema en lazo abierto, compuesto por los indicadores en forma de tanques $H_1(t)$ y $H_2(t)$, los controles $u(t)$, A_1 , A_2 , K y $Deltat$, y el botón stop. La figura 50 muestra la respuesta del sistema ante una referencia $u(t)$, la salida $H_2(t)$ incrementa de manera ilimitada que no existe mecanismo alguno que la obligue a mantenerse cerca de la referencia.

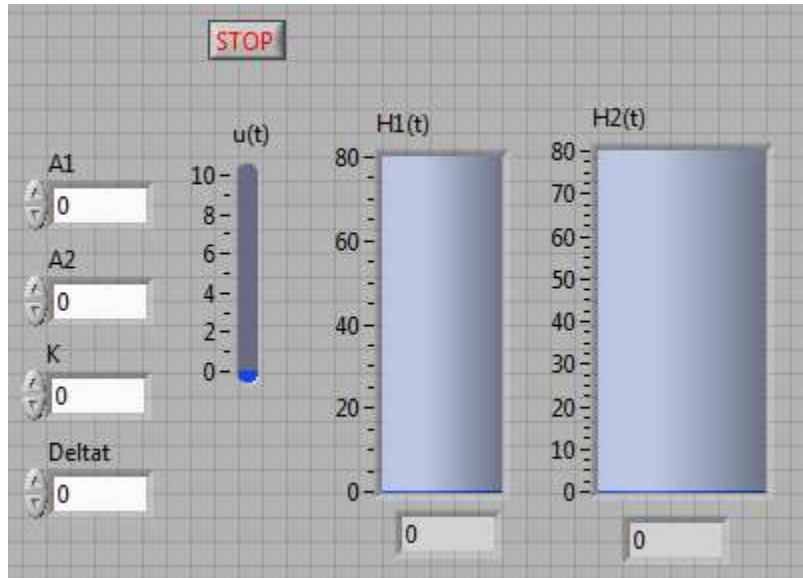


Figura 49. Panel Frontal de sistema de nivel.

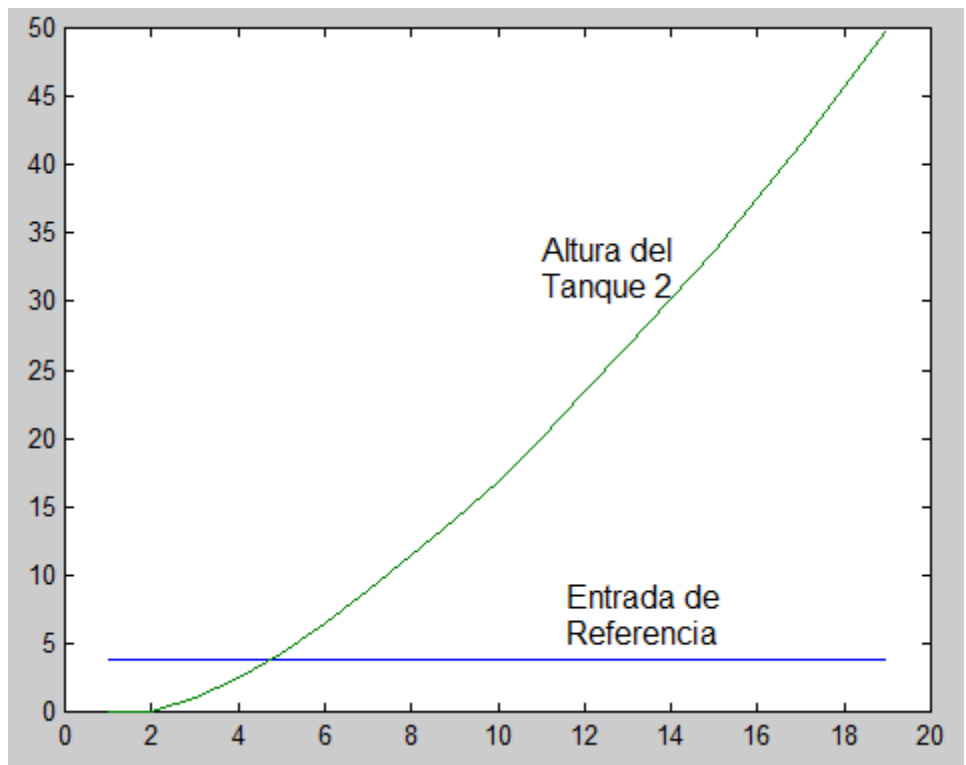


Figura 50. Altura en tanque 2 $H_2(t)$ ante una entrada de referencia.

6.3 IMPLEMENTACIÓN DE CONTROL CON LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN EN LABVIEW

Luego de definir el diagrama de bloques característico del sistema de nivel de líquidos, seguimos a implementar primero, la acción que logre simplificar el sistema no lineal a uno lineal equivalente a través de la realimentación

$$u = K\sqrt{(H_1 - H_2)} - \frac{KA_1\sqrt{H_2}}{A_2} + \frac{KA_1(H_1 - H_2)}{A_2\sqrt{H_2}} + \frac{2A_1A_2\sqrt{H_1 - H_2}}{K}v$$

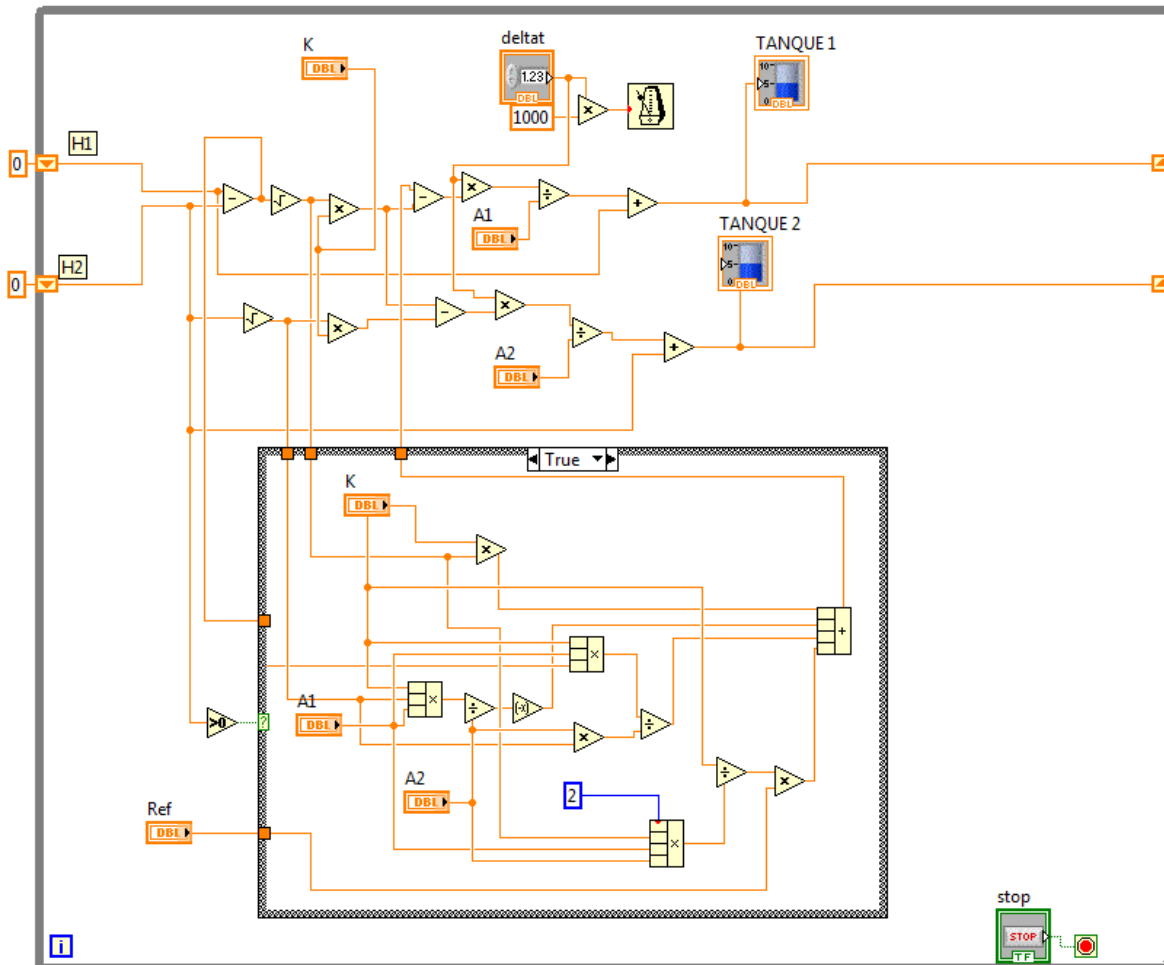


Figura 51. Diagrama de bloques de sistema con Linealización por Realimentación.

Para aplicar la anterior acción, al diagrama de bloque se le debe adicionar la estructura *Case Structure* con el fin de condicionar la acción u , pues en el instante en que el nivel del líquido en el tanque 2 es cero la acción toma un valor indeterminado debido al término

$$\frac{KA_1(H_1 - H_2)}{A_2\sqrt{H_2}}$$

Con el *Case Structure*, se puede tener dos subrutinas, es decir, un condición para instantes en que el nivel es cero (condición False) como lo muestra la figura 48, y otra para instantes en que el nivel es mayor que cero (condición True) como lo muestra la figura 53. Estas dos condiciones las podemos definir comparando continuamente el nivel inicial del tanque 2 con cero.

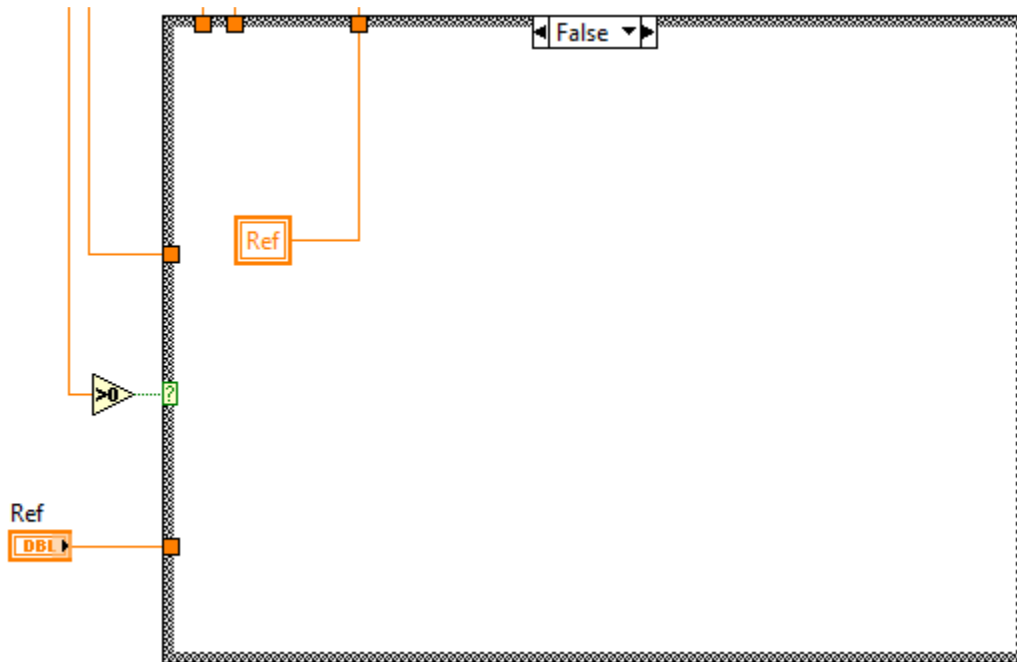


Figura 52. Case Structure False.

Además, con el comparador > 0 se garantiza que no habrá valores indeterminados si en algún momento los valores entregados por el sensor son menores que cero.

Como se puede ver en la figura 54 a pesar que el nivel de liquido en tanque 2 para el modelo no lineal incrementa con mayor rapidez que en el modelo linealizado por realimentación, las respuestas son muy similares y por tal razón es correcto determinar una equivalencia entre ambos. El modelo equivalente al no lineal obtenido es

$$\text{Modelo Lineal Equivalente} = \frac{1}{s^2}$$

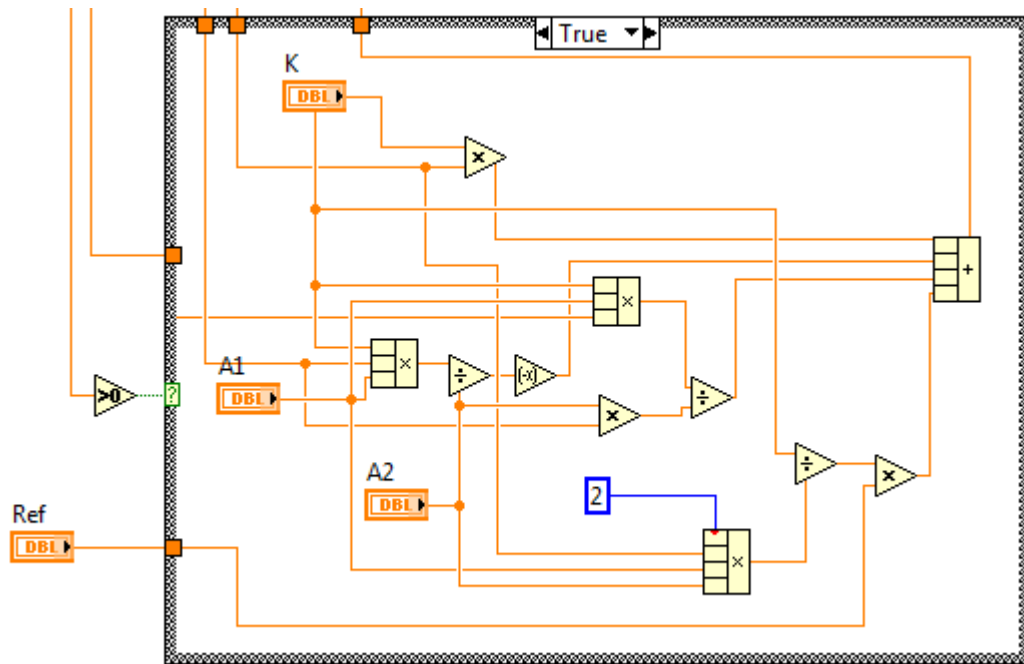


Figura 53. Case Structure True.

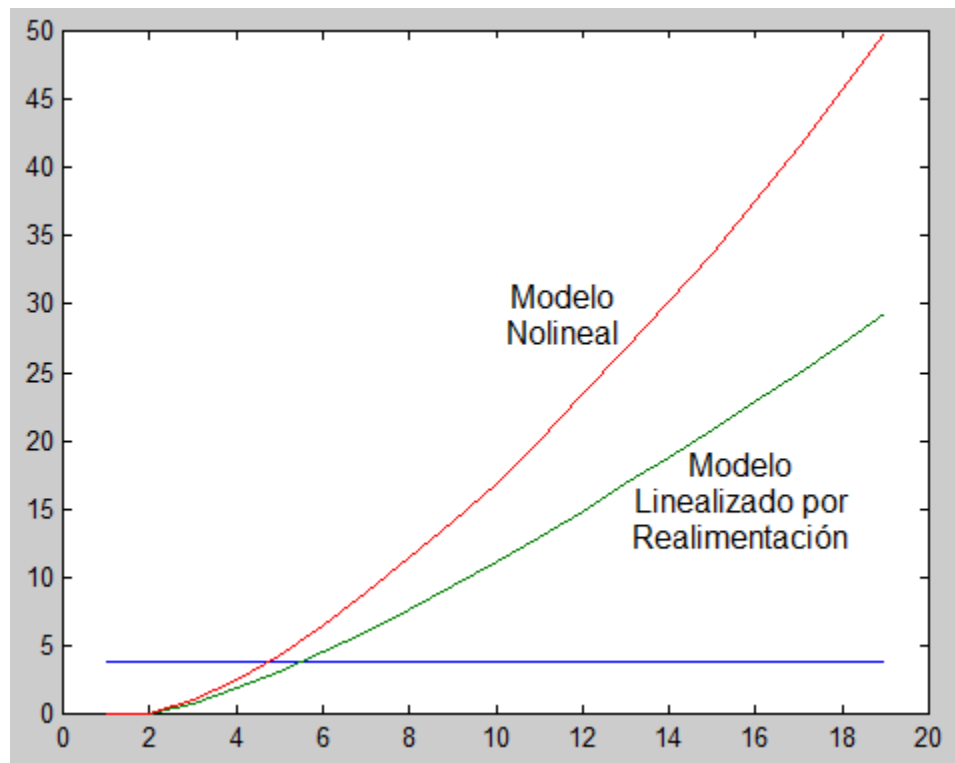


Figura 54. Comparación modelo no lineal y modelo linealizado.

6.3.1 Control PID con Linealización por Realimentación

Adicionando al diagrama de bloques el modulo PID ubicado en la función Control Design & Simulation, se obtiene el sistema de nivel de líquidos controlado tal como se ve en la figura 55. Los parámetros del controlador PID se eligen de acuerdo con las condiciones establecidas en secciones anteriores. Sin embargo, los parámetros han sido modificados con el fin de mejorar la velocidad de respuesta del sistema y reducir el error en estado estable. De acuerdo a lo anterior, estos parámetros se obtuvieron por prueba y error hasta obtener un resultado satisfactorio en relación a las características de control deseadas.

Los resultados obtenidos de la sintonización por prueba y error se pueden resumir de la siguiente manera:

- **Ganancia proporcional:** Para valores superiores a 7 se incrementa considerablemente el sobrepaso máximo, hasta un 73% del valor final. Con valores inferiores a 6 se ve incrementado el tiempo de asentamiento.
- **Tiempo integral:** Para valores superiores 6 se genera picos exagerados en la acción de control, lo que afectaría el desempeño de los actuadores.
- **Tiempo derivativo:** Con valores relativamente altos la acción de control presenta fuertes oscilaciones y el error nunca será cero debido a que la salida nunca presentara un asentamiento sobre el valor final. Entre más pequeño sea esta constante (valores entre 0.1 y 0.6), se reducirá no solo las oscilación de la acción de control, sino también el error llegara a ser cero.

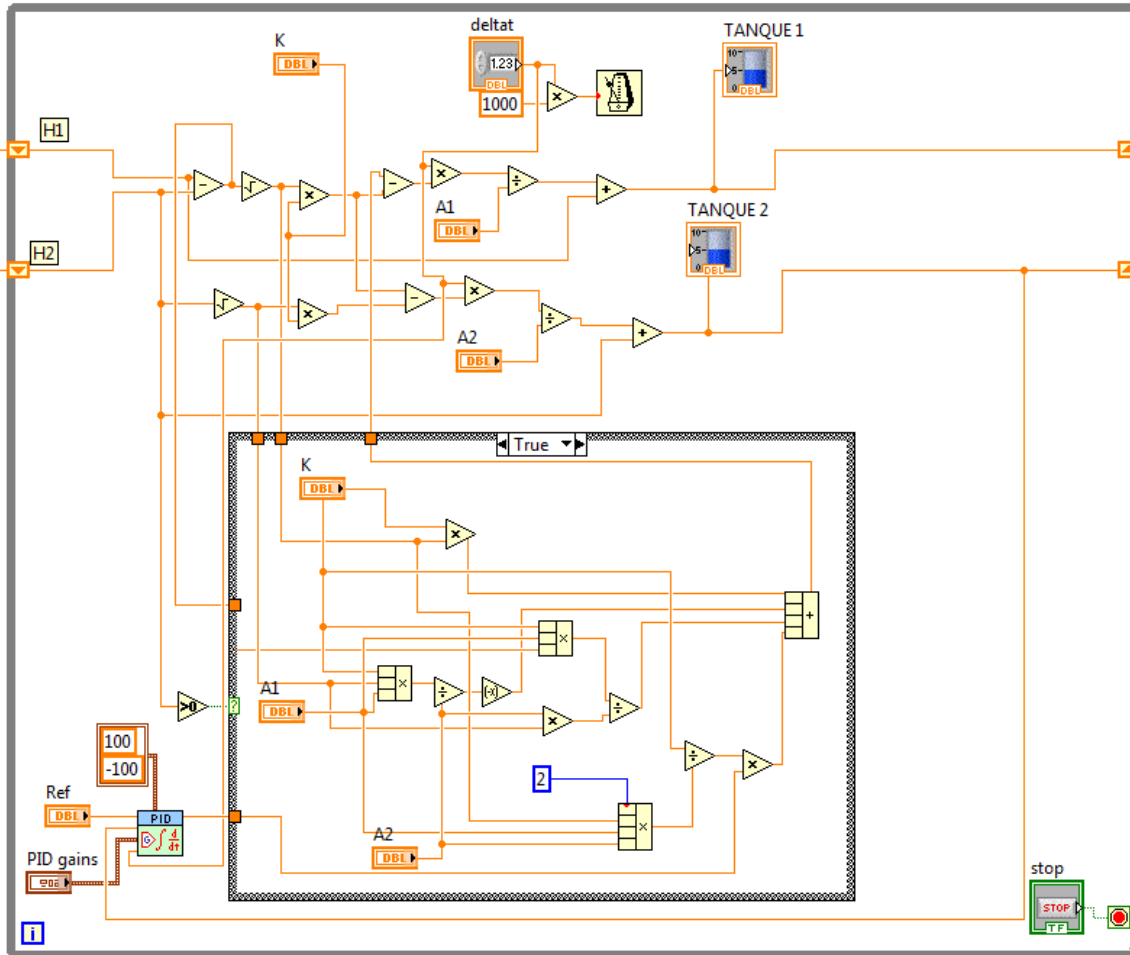


Figura 55. Diagrama de bloques de sistema controlado.

La acción de control compuesta por, primero una acción capaz de eliminar las no linealidades del modelo del sistema y segundo por una acción capaz de forzar a la salida del sistema para que siga a la entrada de referencia puede ser escrita como

$$\text{Control} = f(LPR^8, PID)$$

6.4 IMPLEMENTACION DE CONTROL POR MODO DESLIZANTE EN LABVIEW

La acción de control por modo deslizante diseñada en secciones anteriores está definida como

⁸ Linealización por realimentación.

$$u = K\sqrt{H_1 - H_2} - \frac{KA_1\sqrt{H_2}}{A_2} + \frac{KA_1(H_1 - H_2)}{A_2\sqrt{H_2}} + \frac{2A_1A_2\sqrt{H_1 - H_2}}{K} \left[-|H_2| \operatorname{sgn} \left[H_2 + K_S \left[\frac{K}{A_2} \sqrt{H_1 - H_2} - \frac{K}{A_2} \sqrt{H_2} \right] \right] \right]$$

Esta expresión es aplicada en el diagrama de bloques del sistema de nivel (Ver figura 51) sobre la entrada del sistema y la señal de entrada al control deslizante será el resultado de la comparación entre el Set Point (SP) o Referencia y la salida del sistema como se es mostrado en la figura 56.

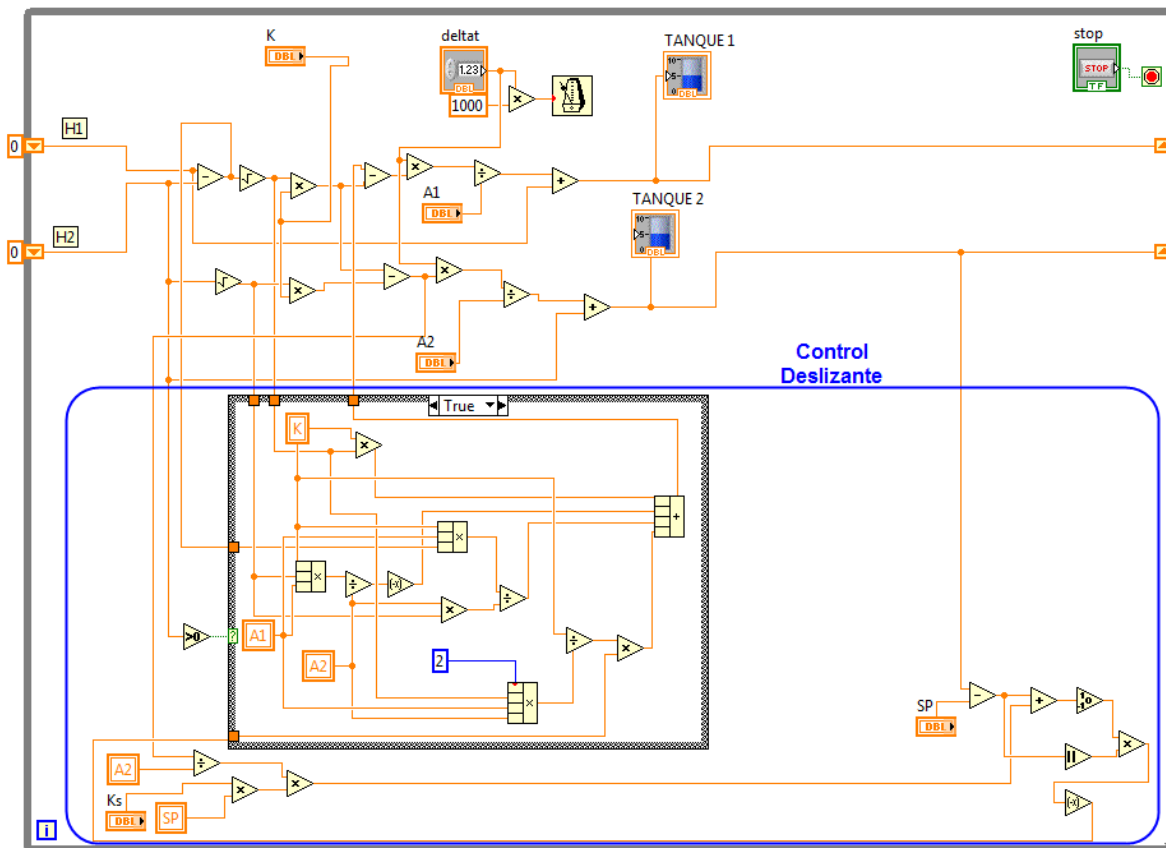


Figura 56. Diagrama de bloques de sistema de control por modo deslizante.

6.5 IMPLEMENTACION DE CONTROL ADAPTATIVO CON MODELO DE REFERENCIA

La acción de control adaptativo diseñada está definida como

$$v = \hat{\eta}(t)(\dot{z}_{m2} - 2k\dot{e} - k^2e)$$

Con $\hat{\eta}(t)$ como una función referente a los parámetros de la planta, e como el error entre las variables de salida de la planta equivalente y el modelo de referencia, y k es una constante mayor que cero.

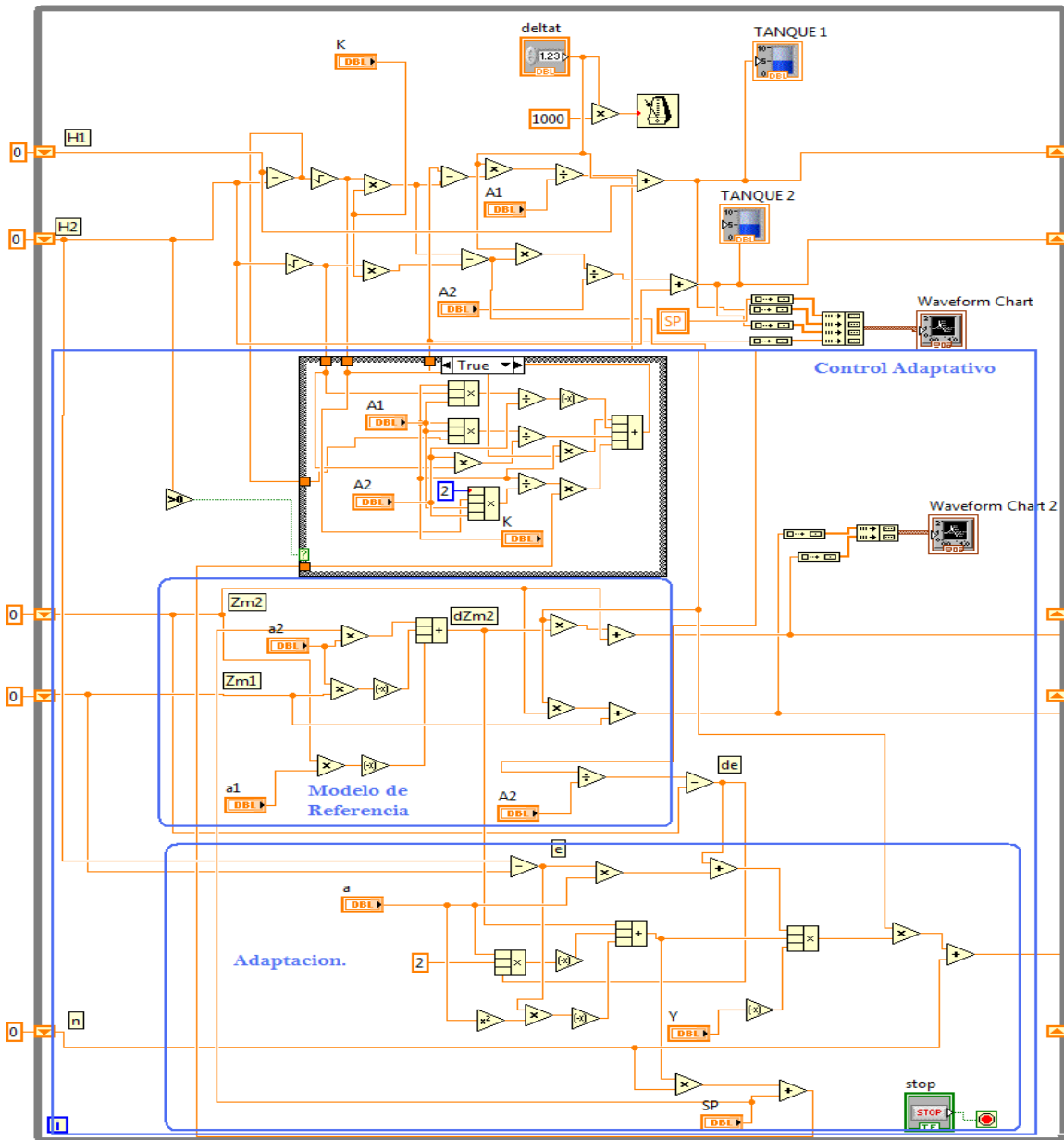


Figura 57. Diagrama de bloques de Control adaptativo con modelo de referencia MRAC.

La ley de control se encarga de forzar la señal de salida a que siga a la entrada de referencia (Set Point SP), mientras que la ley de adaptación

$$\dot{\hat{\eta}} = -\gamma(\dot{e} + ke)(\dot{z}_{m2} - 2k\dot{e} - k^2e)$$

tiene como objetivo lograr que los parámetros del control se ajusten a medida que haya cambios en los parámetros del modelo de la planta.

6.6 ADQUISICION DE DATOS

Para la adquisición de datos es importante definir cada uno de los elementos necesarios para el desarrollo de actividades tales como medición y control, estos elementos o instrumentos son los siguientes:

➤ Sensores de Nivel:

Se utilizan dos transmisores de presión diferencial ROSEMOUNT modelo 1151 y 3051 (figura 58 (a) y (b)) para los tanques 1 y 2 respectivamente, con rangos de presión entre 0 y 28,8 pulgadas de columna de agua que corresponden al nivel cero y nivel de 0,6 metros.



(a)



(b)

Figura 58. Transmisores de presión ROSEMOUNT. a) Modelo 1151. b) Modelo 3151.

La señal de salida que se obtiene de los transmisores es proporcional a la altura del nivel de líquido en los tanques, esta señal que tiene un rango de 4 a 20 mA, se acondiciona de tal modo que se pueda alimentar la tarjeta de adquisición de datos con una tensión entre 1 y 5 voltios.

➤ **Bombas:**

B1 y B2 son bombas centrifugas sumergibles de velocidad variables marca RULE, con velocidad de 1100 Galones por Hora (GPH) y un rango de operación de 0 a 12 voltios dc. Ver figura 59.



Figura 59. Bomba RULE de 1100 GPH.

Las bombas pueden ser activadas a través de señales de PWM, en modo manual con PWM controlado por voltaje o en modo automático con PWM a través de un PLC. Para la aplicación de cada una de las técnicas de control es necesaria la operación en modo manual con señales de voltaje provenientes de la tarjeta de adquisición de datos.

➤ **Adquisición de señal y programación:**

Cada uno de los diagramas de bloques relacionados con los controladores no lineales diseñados fue modificado de tal forma que se pueda utilizar las señales de salida de los transmisores. Para ello se adiciono el modulo *DAQ Assistant*, este modulo se encarga de capturar las señales a través de la tarjeta de adquisición de datos NI USB 6009 (ver figura 60), con el modulo se puede modificar la frecuencia de muestreo, el tipo de señal que se desea medir y los canales de entrada y salida de la tarjeta.



Figura 60. Tarjeta de adquisición de datos NI USB 6009.

La figura 61 muestra la estrategia utilizada para la creación de un archivo el cual contiene las muestras obtenidas por la tarjeta de adquisición de la señal de referencia, señal de salida controlada, señal de control y señal de error.

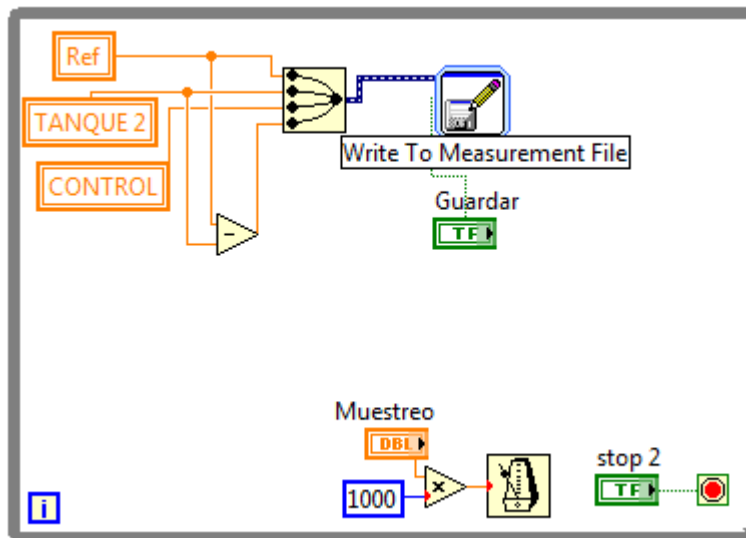


Figura 61. Diagrama de bloques para guardar un dato adquirido por segundo.

5.6.1 Adquisición y control LPR

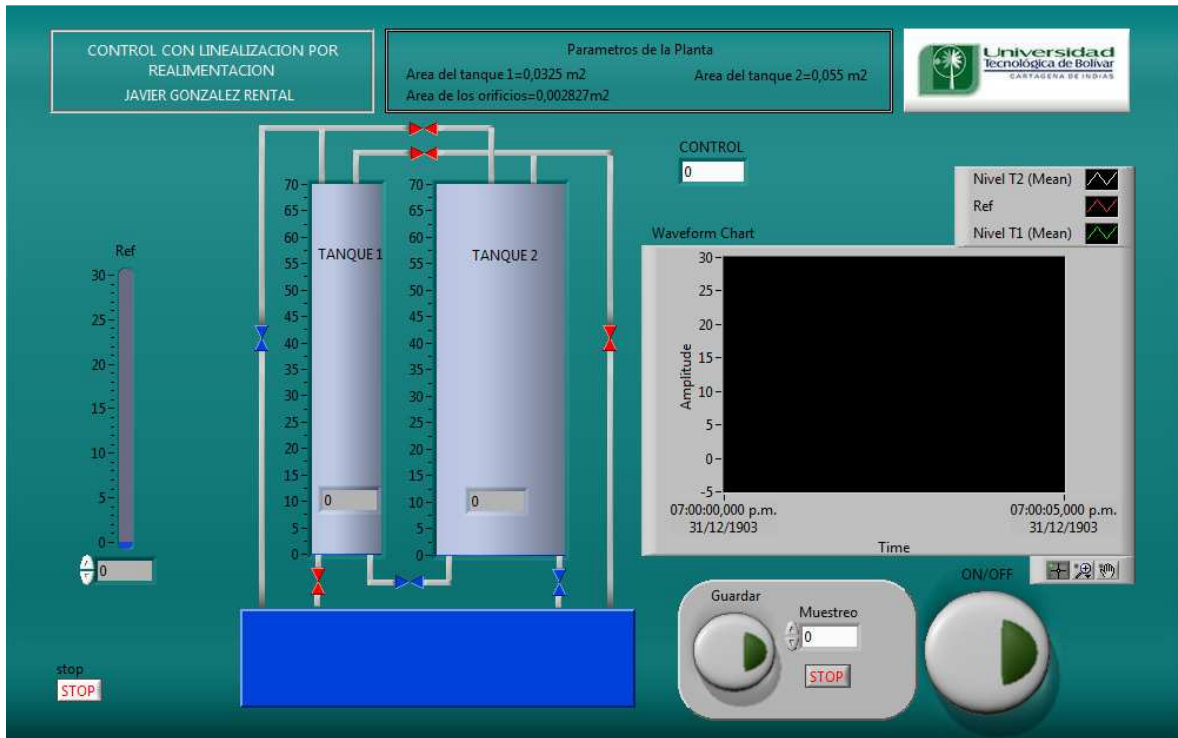


Figura 62. Panel frontal de control con linealización por realimentación LPR.

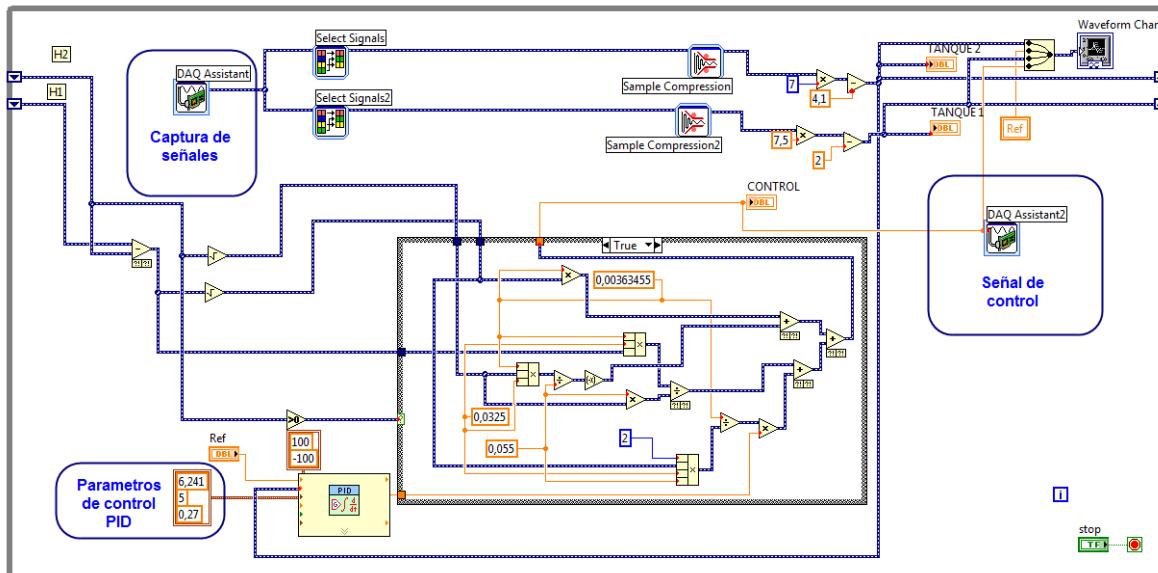


Figura 63. Diagrama de Bloques de sistema de control LPR y adquisición de datos.

Las figuras 62 y 63 muestran el panel frontal y diagrama de bloques de control LPR y el sistema de adquisición de datos.

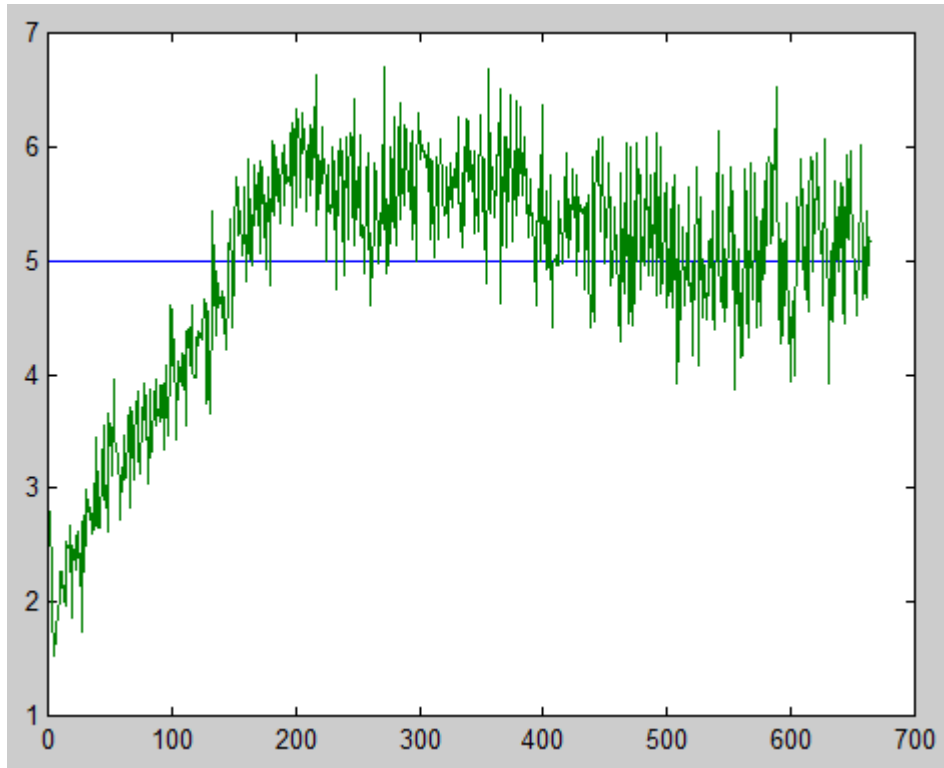


Figura 64. Señal de salida y referencia con LPR.

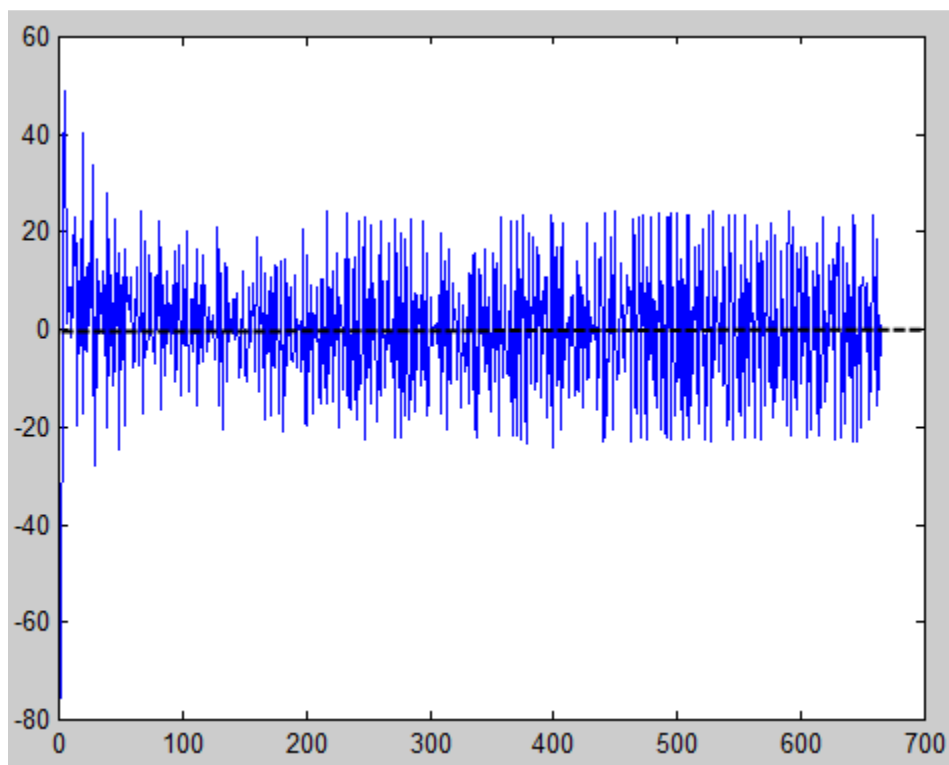


Figura 65. Señal de control LPR.

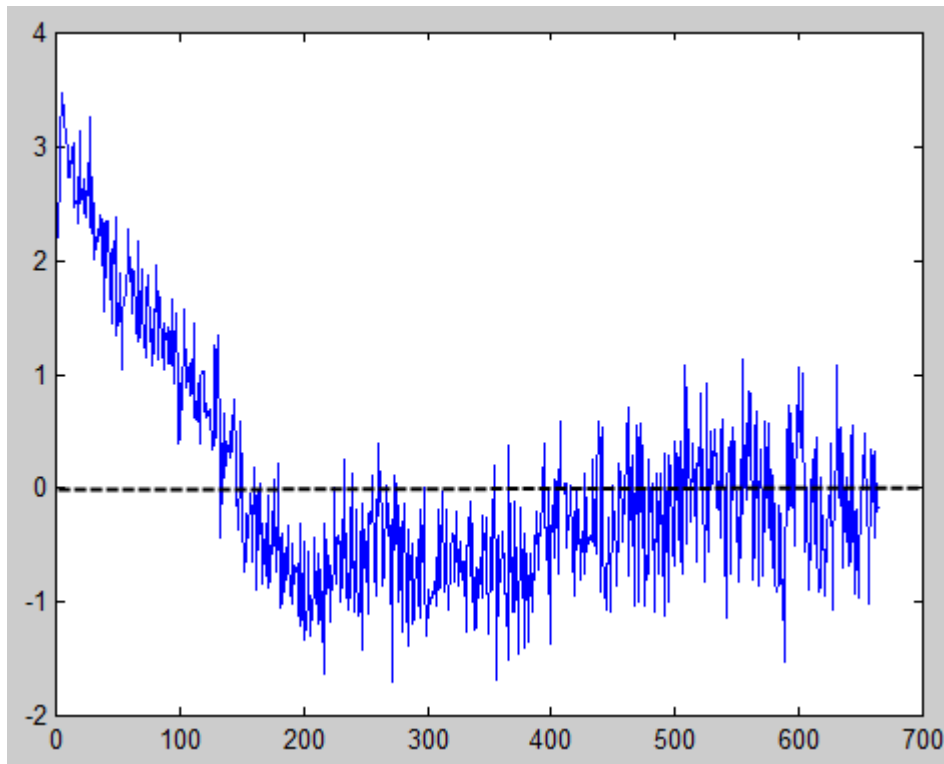


Figura 66. Señal de error LPR.

Este control permite que la salida del sistema logre un asentamiento sobre la referencia como lo evidencia la figura 64, tiene un sobrepaso de aproximadamente 20% de la referencia en 210 segundos, y presenta oscilaciones alrededor del valor final logrando un tiempo de asentamiento entre 500 y 600 segundos. La salida alcanza por primera vez la mitad del valor final (2,5 cm) en aproximadamente 36 segundos, además de un tiempo de levantamiento entre 140 y 150 segundos.

Con respecto a la señal de control (figura 65), toma un valor máximo y a medida que la salida se acerca a la referencia, va decreciendo hasta presentar oscilaciones constantes en un valor próximo a cero, lo que mantiene a la altura en tanque 2 en las proximidades del valor final. De igual manera, la señal del error (figura 66) toma un valor máximo cercano a la entrada de referencia, esto es en el momento en que la altura en el tanque 2 es cero, decrece hasta que llega por primera vez a cero justo cuando la salida es igual a la entrada de referencia, sigue disminuyendo y toma un mínimo valor en el instante en que la salida toma su máximo valor, seguido a esto incrementa su valor lográndose estabilizar en valores cercanos a cero.

6.6.2 Adquisición y control SC

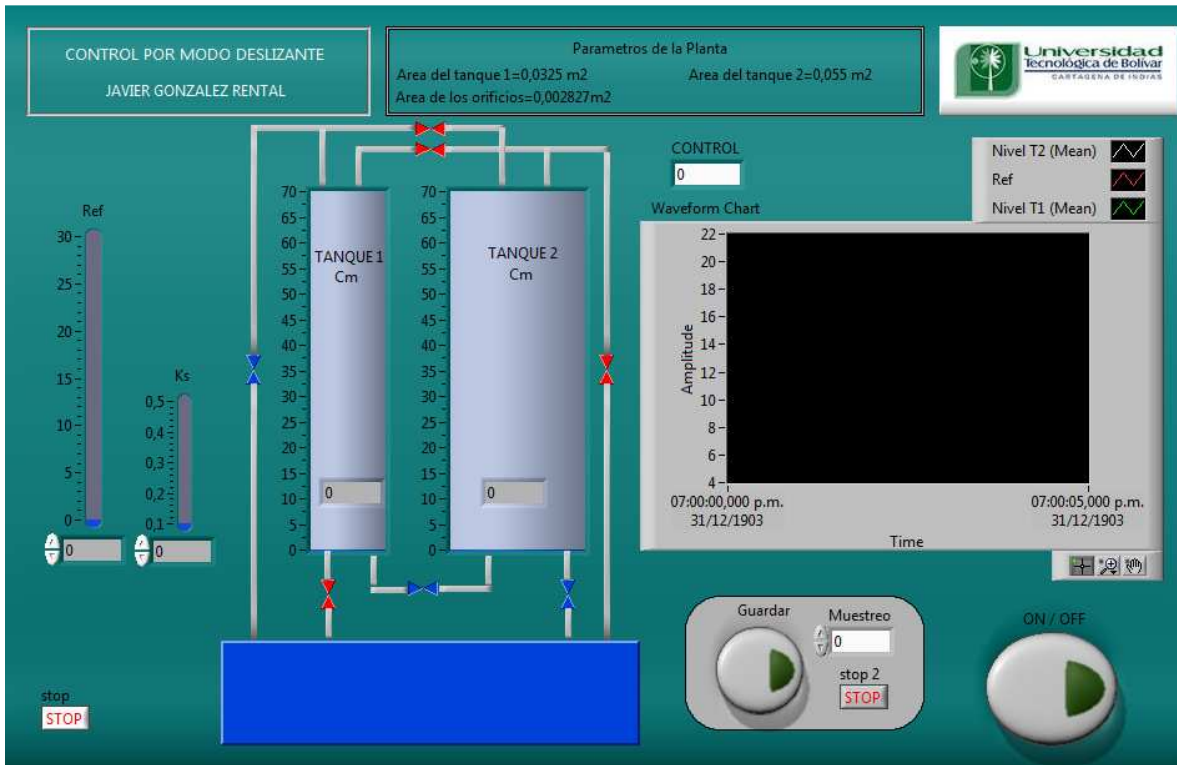


Figura 67. Panel frontal de control por modo deslizante SC.

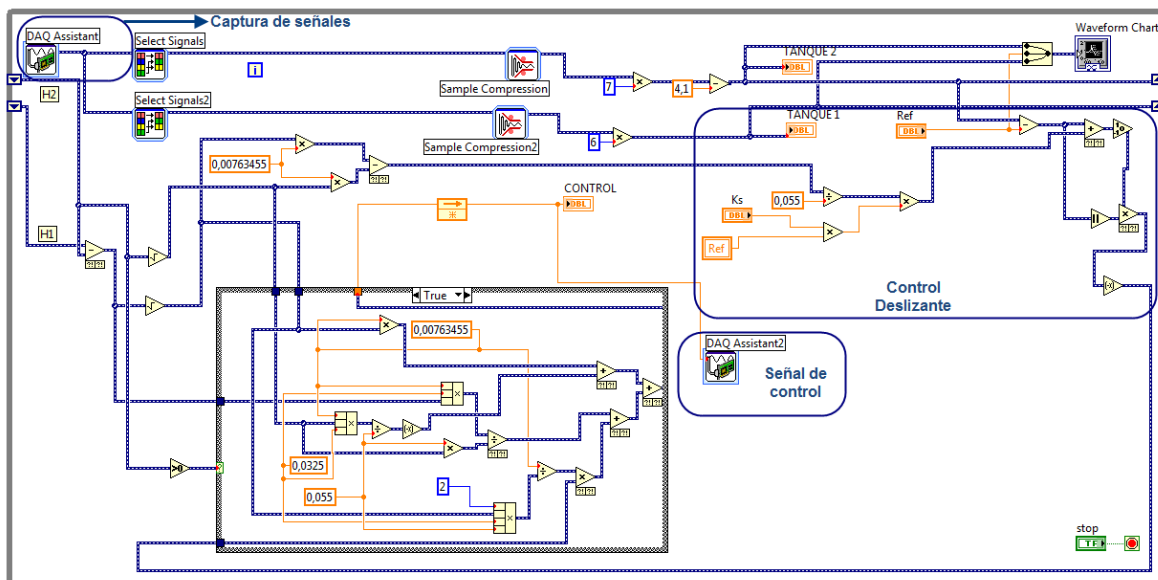


Figura 68. Diagrama de bloques de control SC.

En las figuras 67 y 68 se muestra el panel frontal con cada uno de los controladores e indicadores referentes al sistema de control por modo deslizante, y el diagrama de bloques en el que se implementa la acción de control deslizante.

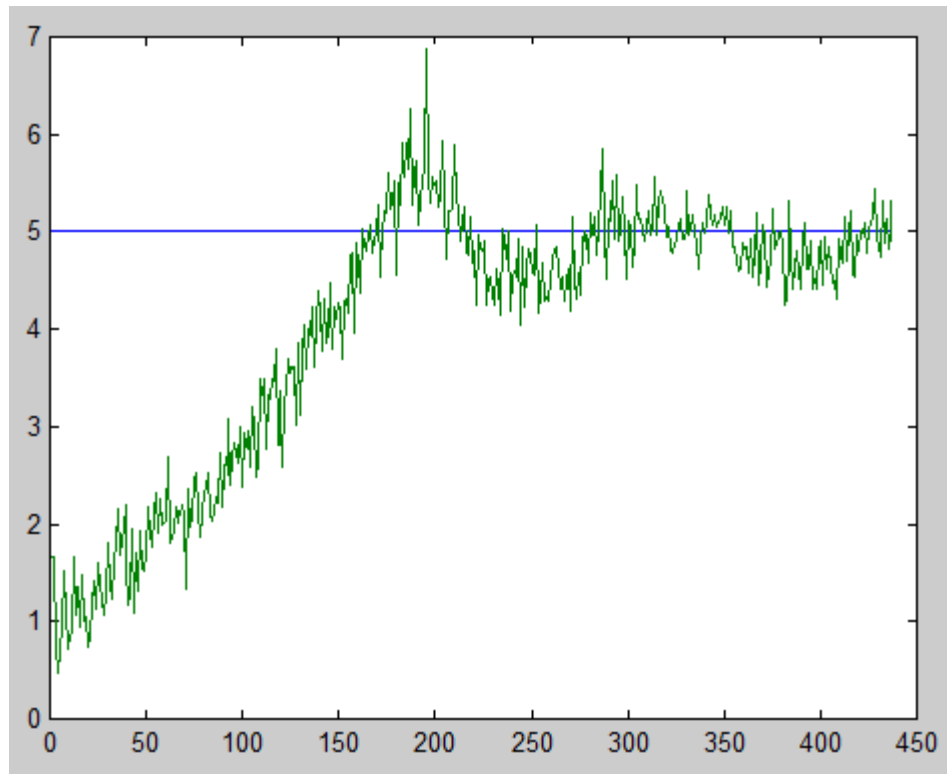


Figura 69. Señal de salida y referencia con SC.

En la figura 69 se puede ver la respuesta del sistema de nivel ante la señal de control por modo deslizante; logra un rápido asentamiento sobre la salida deseada con un tiempo entre 300 y 325 segundos, y presenta un sobrepaso de 6,9 cm en 190 segundos. Alcanza la mitad del valor final (2,5 cm) a los 80 segundos de haber iniciado el proceso, además de un tiempo de levantamiento de 175 segundos. Con respecto a la señal de control (Figura 70), toma su máximo valor en el momento en que la salida es cero y continua fluctuando hasta que se estabiliza en cero en el instante en que la salida es igual a la salida deseada. De igual modo, la señal del error (Figura 71) toma su máximo valor cuando la salida es cero, y disminuye su valor para estabilizarse posteriormente en un valor cercano a cero.

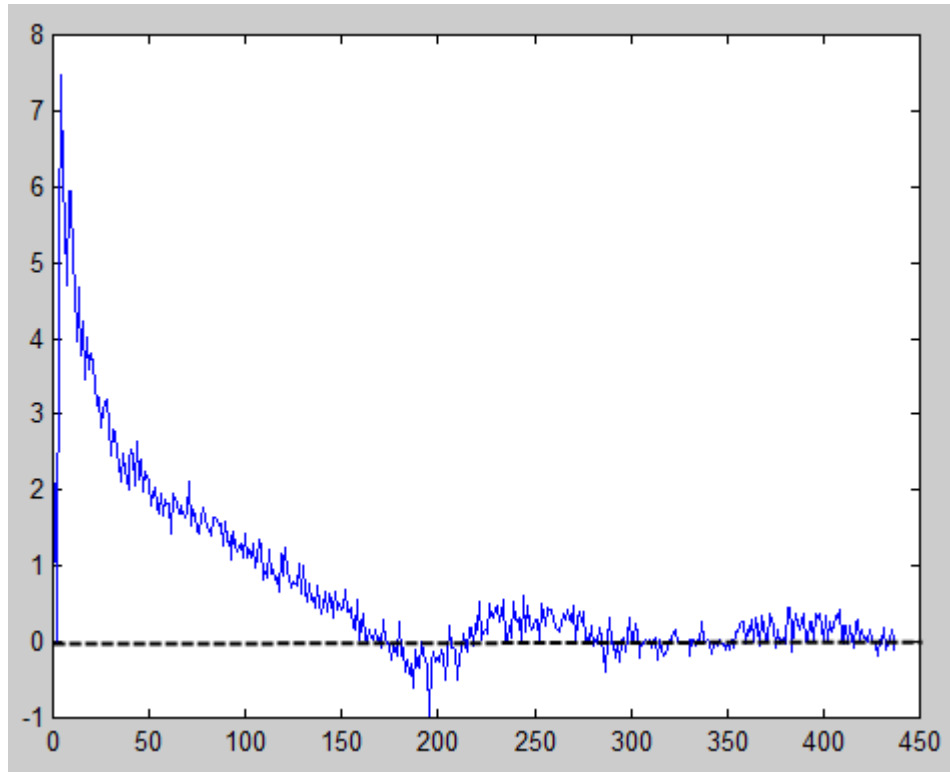


Figura 70. Señal de control SC.

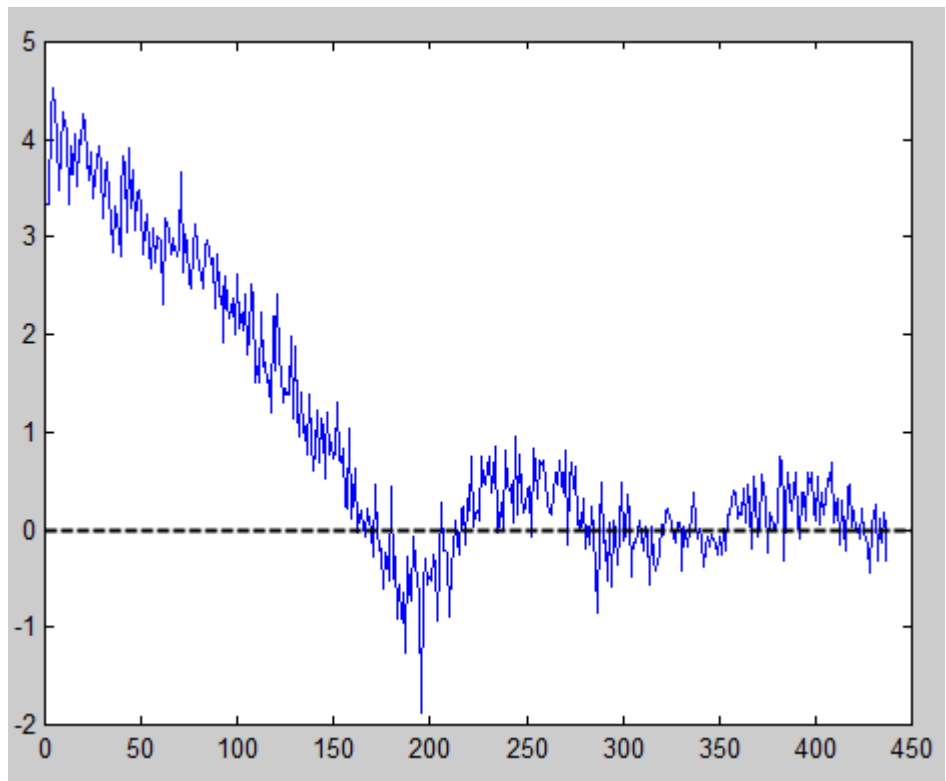


Figura 71. Señal de error con SC.

6.6.3 Adquisición y control MRAC

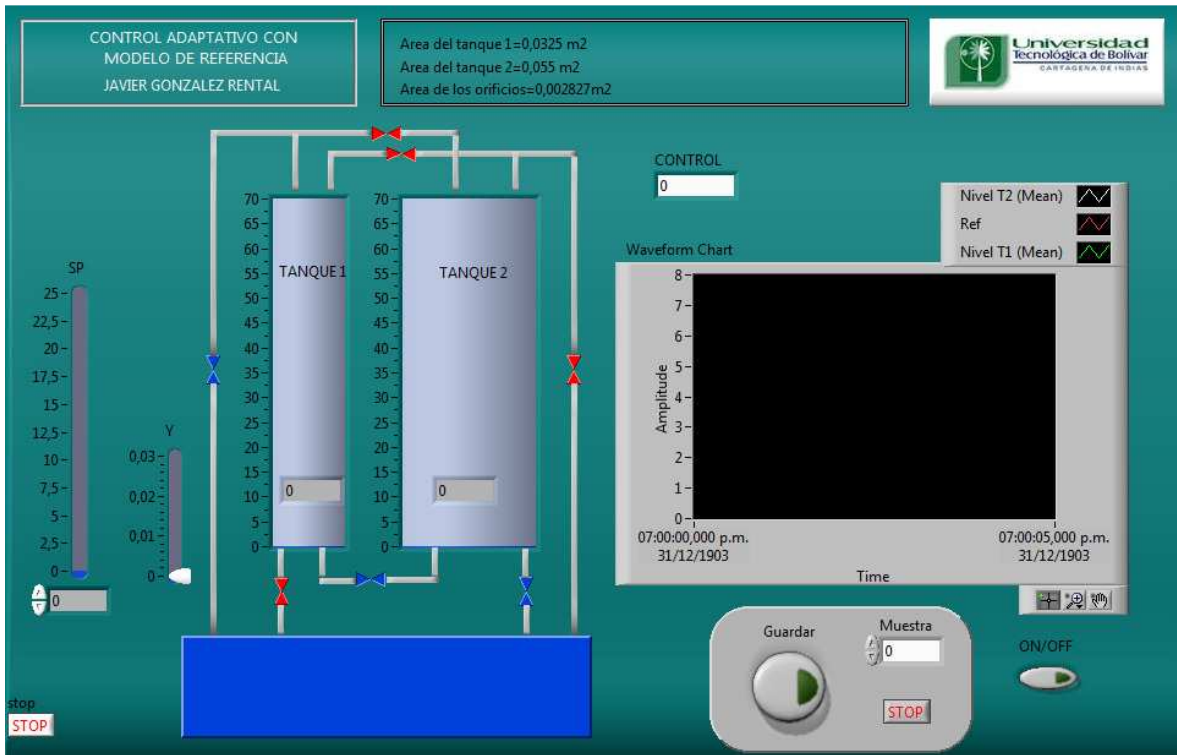


Figura 72. Panel frontal de control adaptativo con modelo de referencia MRAC.

Las figuras 72 y 73 muestran el panel frontal del control MRAC y su respectivo diagrama de bloques, en este último se puede ver específicamente el diagrama de bloques referente al control adaptativo, el cual contiene el modelo de referencia

$$\dot{z}_m = \begin{bmatrix} \dot{z}_{m1} \\ \dot{z}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{m1} \\ z_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \end{bmatrix} r$$

$$G_m(s) = \frac{Z_{m1}(s)}{R(s)} = \frac{a_2}{s^2 + a_1s + a_2}$$

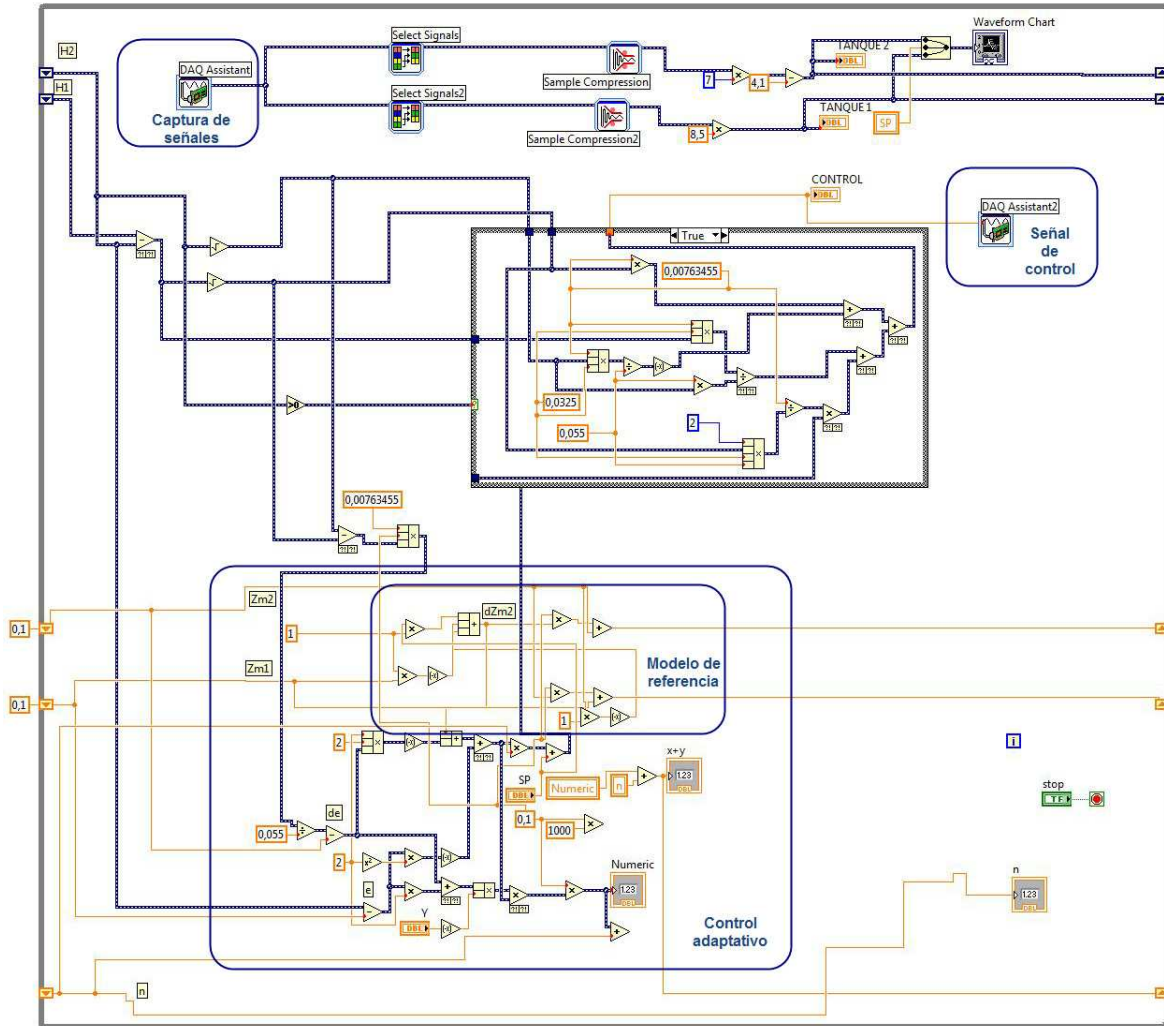


Figura 73. Diagrama de bloques de control MRAC.

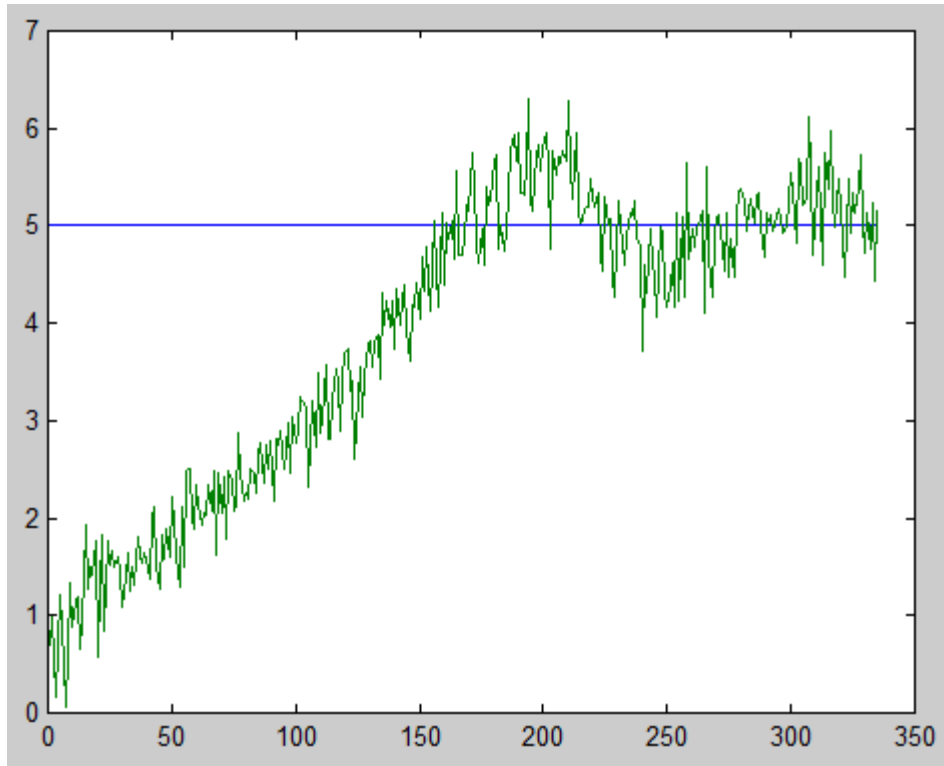


Figura 74. Señal de salida y referencia con MRAC.

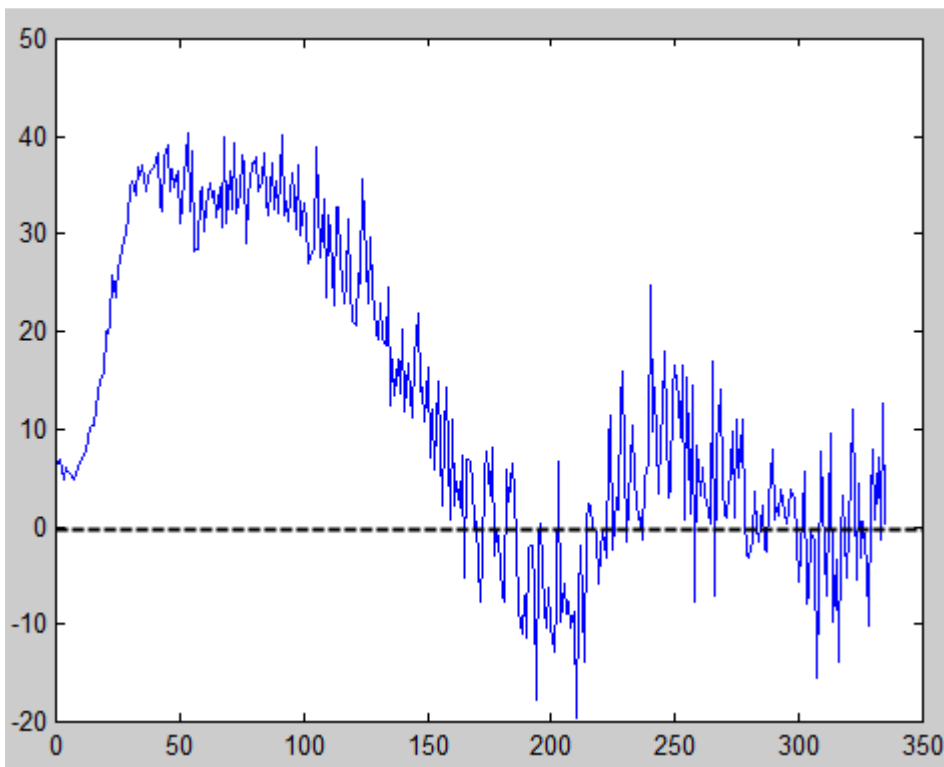


Figura 75. Señal de control MRAC.

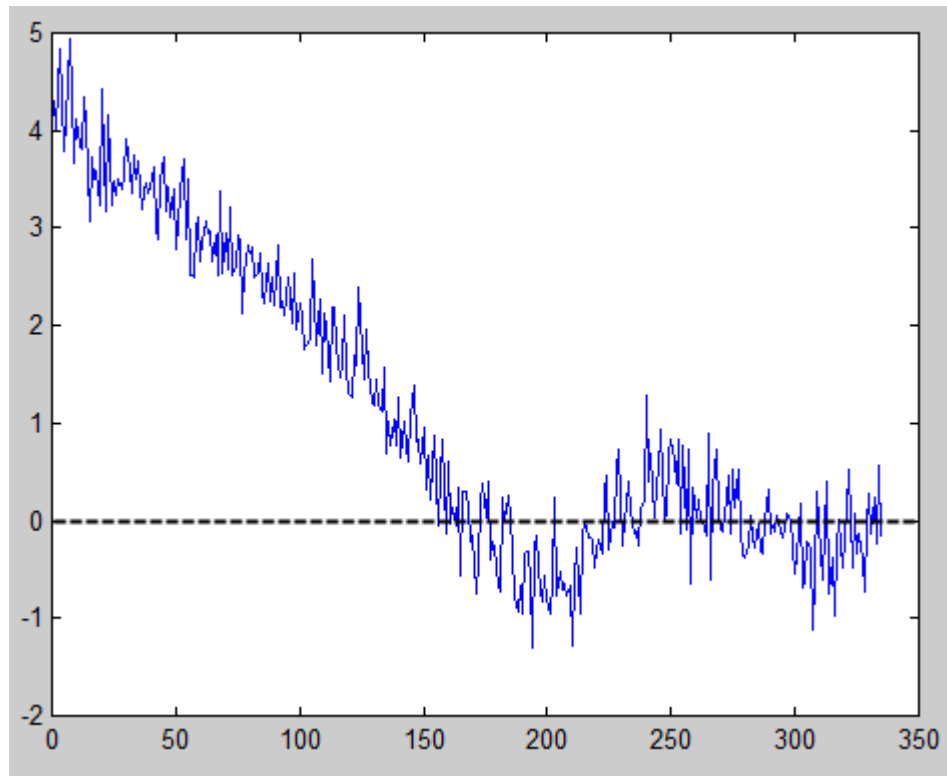


Figura 76. Señal de error con MRAC.

Como se logra observar en la figura 74, el control adaptativo con modelo de referencia (MRAC) hace que el sistema tenga un sobrepaso inferior al 25% sobre la referencia, aproximadamente en 200 segundos; alcanza un asentamiento después de transcurrir 250 segundos y mantiene un valor final alrededor del valor deseado (5 cm). La señal de control (Figura 75) toma un valor máximo en el instante en que la salida se encuentra por debajo de la entrada de referencia y presenta su primer cruce por cero cuando la salida por primera vez es igual a la referencia, esto sucede antes de los 200 segundos, finalmente tiene algunos cambios fuertes en la cercanía de cero. La señal de error inicia con valor máximo no superior a 5 y decrece paulatinamente hasta lograr estabilizarse en la vecindad de cero.

6.7 RESPUESTA DEL SISTEMA ANTE CAMBIOS EN LA REFERENCIA

Frente a un cambio de la referencia, se debe tener una salida que llegue relativamente rápido a lo que se requiera sin mostrar sobrepasos significantes. En primera instancia se obtiene la respuesta del sistema con un setpoint de 5cm, posteriormente de 10cm y por ultimo un setpoint de 15cm. La figura 77 muestra la respuesta para los tres puntos de referencia mencionados para el sistema con

Linealización por Realimentación (LPR), es importante aclarar que entre más cercano a cero sea el setpoint, se presentaran fuertes oscilaciones debido al comportamiento de los transmisores de presión diferencial. A medida que la referencia incrementa, el tiempo de asentamiento aumenta de igual forma, sumado a esto se puede notar un incremento considerable en el sobrepaso al aumentar la referencia.

| RESPUESTA DE SISTEMA LPR | | | | | |
|---------------------------------|------------------------------|------------------------------------|------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| SETPOINT (Cm) | Tiempo de retardo (S) | Tiempo de levantamiento (S) | Tiempo pico (S) | Sobrepaso máximo (Cm) | Tiempo de asentamiento (S) |
| 5 | 25 | 160 | 230 | 1,6 | 590 |
| 10 | 125 | 220 | 345 | 3,85 | 625 |
| 15 | 175 | 330 | 510 | 6,65 | 1000 |

Figura 77. Comparación de respuestas de sistema LPR ante diferentes referencias.

| RESPUESTA DE SISTEMA SC | | | | | |
|--------------------------------|------------------------------|------------------------------------|------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| SETPOINT (Cm) | Tiempo de retardo (S) | Tiempo de levantamiento (S) | Tiempo pico (S) | Sobrepaso máximo (Cm) | Tiempo de asentamiento (S) |
| 5 | 82 | 162 | 195 | 1,68 | 370 |
| 10 | 121,8 | 224,7 | 255 | 0,78 | 360 |
| 15 | 170,9 | 331,7 | 337 | 0,74 | 518 |

Figura 78. Comparación de respuestas de sistema SC ante diferentes referencias.

| RESPUESTA DE SISTEMA MRAC | | | | | |
|----------------------------------|------------------------------|------------------------------------|------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| SETPOINT (Cm) | Tiempo de retardo (S) | Tiempo de levantamiento (S) | Tiempo pico (S) | Sobrepaso máximo (Cm) | Tiempo de asentamiento (S) |
| 5 | 76,5 | 155,9 | 194 | 1,31 | 320 |
| 10 | 129,89 | 225,16 | 263 | 1,41 | 410 |
| 15 | 166,76 | 315,83 | 350 | 1,06 | 470 |

Figura 79. Comparación de respuestas de sistema MRAC ante diferentes referencias.

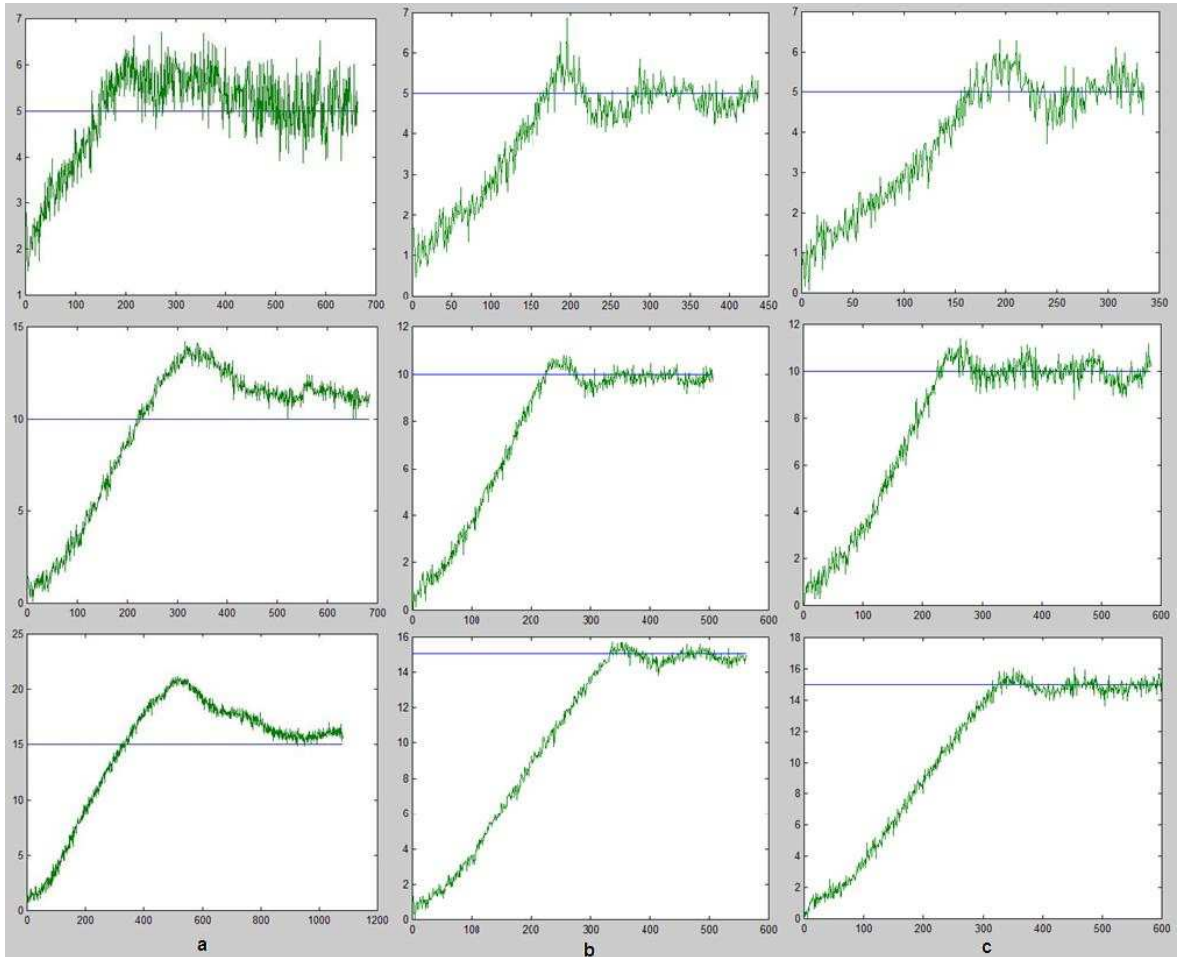


Figura 80. a) Comparación de respuestas de sistema LPR ante cambios en referencia. b) Comparación de respuestas de sistema SC ante cambios en referencia. c) Comparación de respuestas de sistema MRAC ante cambios en referencia.

En la figura 80 se puede observar la respuesta de cada uno de los sistemas ante tres valores diferentes en la referencia, a medida que aumenta el valor de referencia el sistema tarda un poco más en pasar de 0% del valor final a 100%. El sistema con control deslizante (SC) tarda alrededor de 162 segundos en llegar por primera vez al valor deseado (5 Cm) al igual que el sistema con linealización por realimentación (LPR) el cual tarda aproximadamente 160 segundos para el mismo punto de referencia, mientras que el sistema con control adaptativo con modelo de referencia (MRAC) resulta ser un poco más rápido, pues pasa de 0% a 100% del valor final en 155,9 segundos; al incrementar el valor de la referencia los tres sistemas muestran cambios similares con respecto al tiempo de levantamiento. Sin embargo, como lo muestran las figuras 77, 78, 79 y 80 el sobrepaso máximo que presenta cada una de respuestas difieren considerablemente; en un principio el sistema LPR tiene un sobrepaso máximo 33% del valor final para un setpoint de 5 Cm (el menor de los tres), pero este pasa a ser 38,5% y posteriormente 44,3% para 10 Cm y 15 Cm respectivamente, lo que resulta ser inapropiado en instantes

en que el setpoint sea relativamente grande. Por otra parte, los sistemas SC y MRAC muestran un sobrepaso máximo más conservador; el sistema SC logra tener un sobrepaso no superior al 33,6% del valor final (5 Cm) pero para cambios considerables en la entrada de referencia (10 y 15 Cm) este no supera el 8%, y para el sistema MRAC se puede ver que tampoco presenta picos elevados, y tiene un sobrepaso máximo no superior 15% para los tres valores en la referencia.

En relación al tiempo necesario para que la respuesta alcance un valor alrededor del valor final, cada sistema tiene un incremento coherente a medida que se ve incrementada la referencia; el LPR tiene un lento asentamiento en comparación con los demás sistemas, siendo el MRAC mas rápido para un setpoint inicial (5 Cm) y para un setpoint final (15 Cm), y el SC el más rápido al duplicar la entrada de referencia (10 Cm).

6.8 RESPUESTA DE SISTEMA ANTE PERTURBACIONES EN LA SALIDA

Como ya es sabido el sistema de tanques interconectado en paralelo consta de dos bombas, para operar como un sistema SISO (sistema con una entrada y una salida) se ha considerado que solo la bomba 1 debe ser activada para suministrar el liquido al tanque 2 a través del tanque 1, por tanto la bomba 2 debe permanecer inactiva.

En el análisis de la respuesta del sistema ante perturbaciones en la salida, se optó por establecer como perturbación un flujo el cual es suministrado al tanque 2 a través de la bomba 2. La estrategia para observar la respuesta del sistema ante estas condiciones es la siguiente:

1. Fijar un setpoint.
2. Ajustar los parámetros necesarios para cada tipo de control.
3. Iniciar el proceso en lazo cerrado.
4. Activar la bomba 2 simulando de esta forma una perturbación sobre la salida (tanque 2). Esta activación se hace manualmente en el panel de control del banco (Figura 81).
5. Tomar los datos necesarios para luego visualizar la respuesta del sistema.

En figura 77 se puede ver los controles manuales de nivel para cada uno de los tanques, el *Control Nivel TK1* activa la bomba 1 y el *Control Nivel TK2* activa la bomba 2.

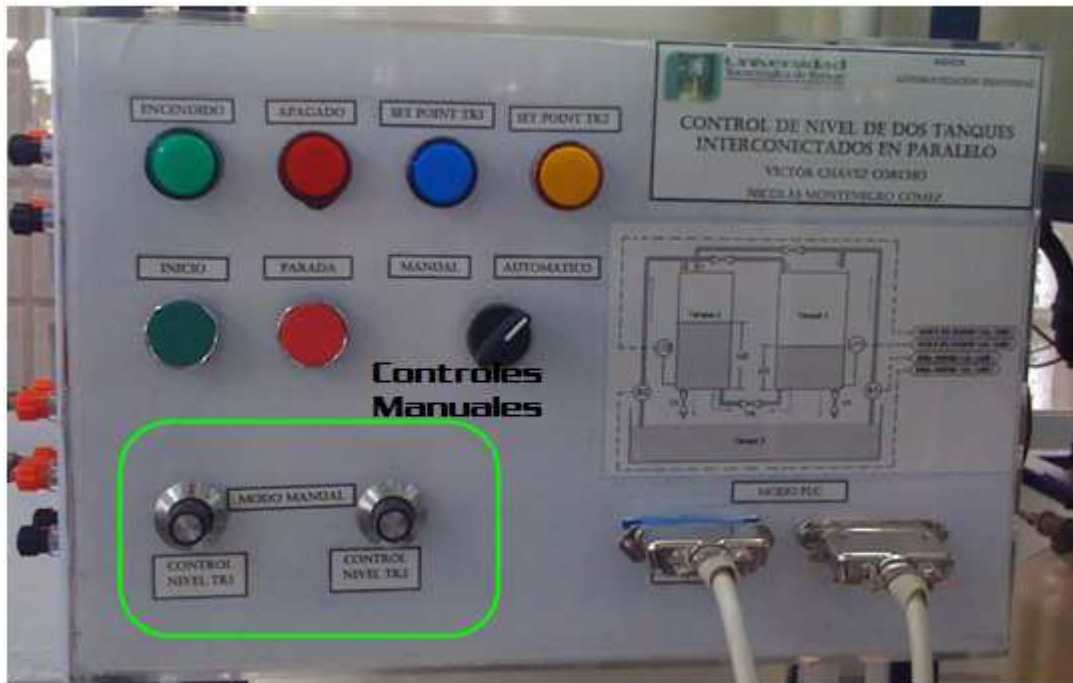


Figura 81. Vista frontal del panel de control.

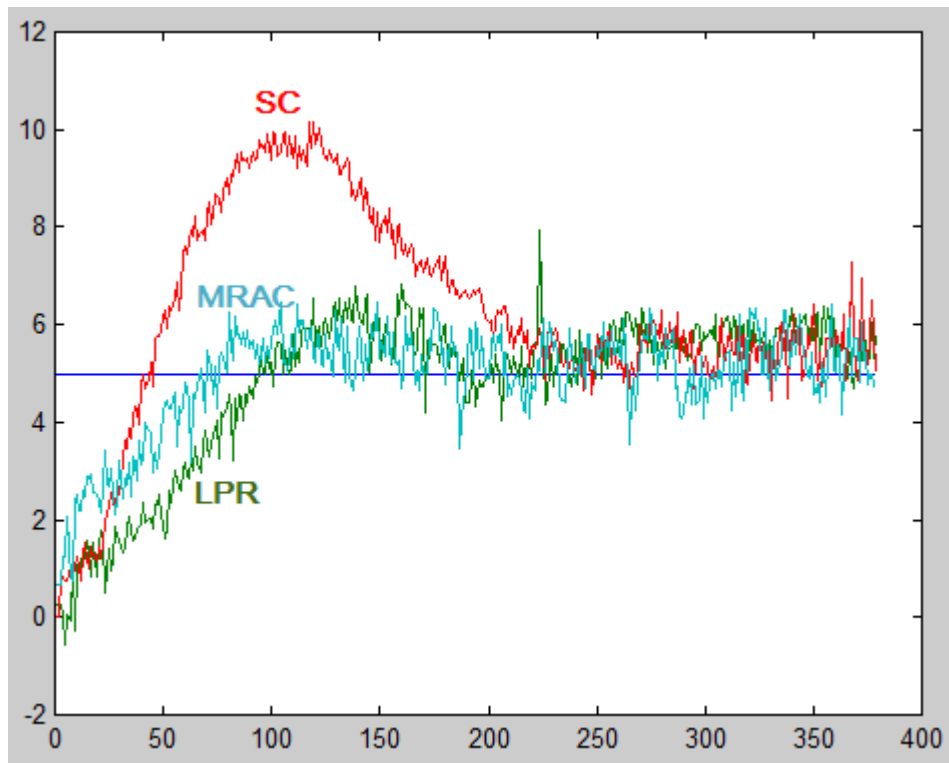


Figura 82. Comparación de respuestas ante una perturbación en la salida del sistema.

Como el sistema de control deslizante (SC) tiene un tiempo de retardo mayor para un setpoint de 5 Cm, la perturbación hará que el nivel de líquido en el tanque 2 incremente considerablemente como lo muestra la figura 82, mientras que los sistemas LPR y MRAC los cuales tienen un tiempo de retardo pequeño en relación al sistema SC, no presentan sobrepasos exagerados, y tiempos de asentamiento inferiores.

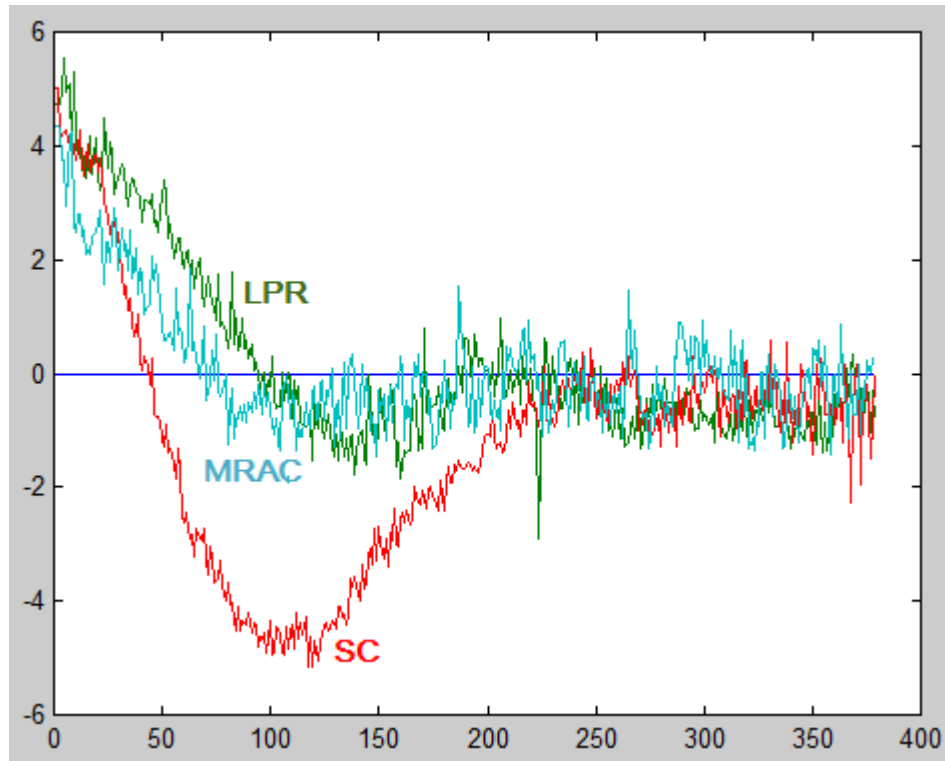


Figura 83. Comparación de señales de error ante perturbación en la salida.

La señal de error para el sistema SC toma un valor cercano a 5 Cm y posteriormente comienza a decrecer haciendo un cruce por cero antes que los otros sistemas pero continúa decreciendo debido al sobrepaso que presenta la salida. La señal de error para el sistema LPR inicialmente toma un valor cercano a 5 Cm y comienza a decrecer llegando a ser cero por primera vez en un tiempo aproximado de 100 segundos y luego trata de mantenerse en valores próximos a cero. La señal de error para el sistema MRAC inicia en valor cercano a cero y decrece hasta llegar por primera vez a cero más rápido que el sistema LPR, continúa decreciendo por muy poco tiempo y luego inicia su ascenso para estabilizarse en valores cercanos a cero. Ver figura 83.

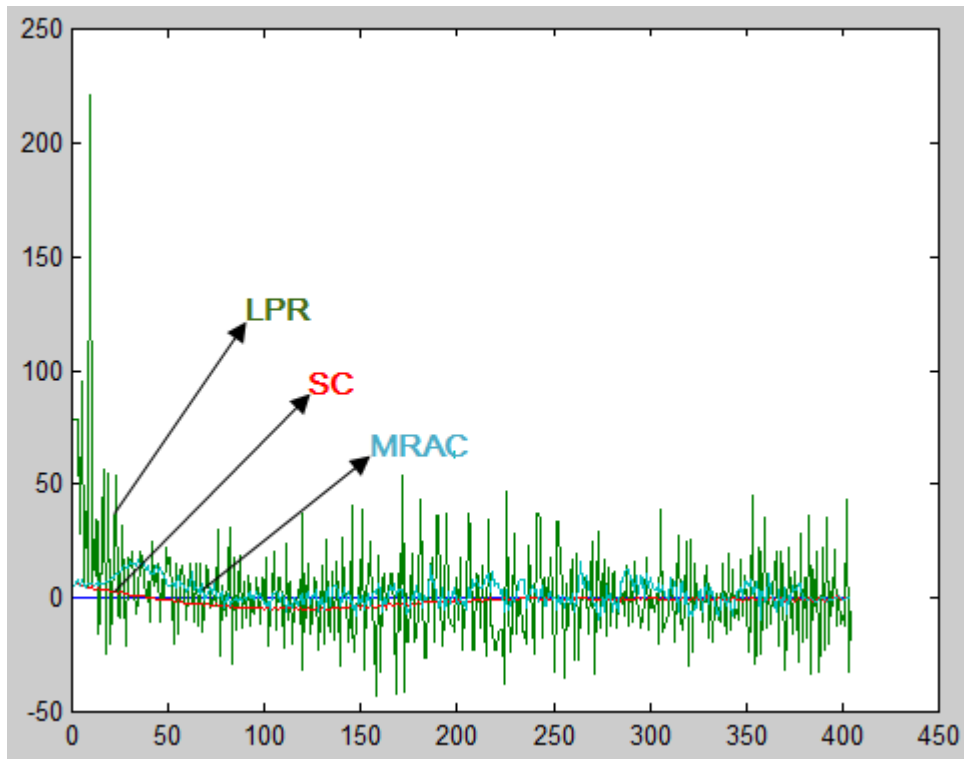


Figura 84. Comparación de señales de control ante perturbación en la salida.

Aunque la salida del sistema LPR no muestra un sobrepaso considerable, la señal de control si muestra un gran esfuerzo para que la salida siga a la entrada de referencia, tanto así que debe generar un pulso muy grande (superior a 200) para evitar que la salida se pierda, este comportamiento se mantiene a lo largo del tiempo con pulsos inferiores al inicial pero aun muy fuertes. Por otra parte, tanto la señal de control del sistema SC como la del sistema MRAC tienen cambios menos bruscos en relación al sistema LPR, lo que permitiría un óptimo desempeño de las bombas. Ver figura 84.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

Cada uno de los sistemas de control estudiados presenta algunas ventajas y desventajas en relación con los demás, esto permite definir cuál podría ser el sistema de control más eficaz para controlar el sistema de tanques interconectados en paralelo. Para poder definir lo anterior, fue necesario analizar la respuesta del sistema no solo ante diferentes tipos de entrada de referencia sino también la respuesta del sistema ante una perturbación en la salida.

En primera instancia, es necesario hacer notar la importancia del software utilizado, **LABVIEW**, este fue pieza vital en el desarrollo de actividades como programación, adquisición de datos y visualización de los datos y del proceso de control en general, brindando una interfaz gráfica de fácil acceso.

Para poder calificar el desempeño de los sistemas de control, se debe dejar claro cuales serian los parámetros que definirían la eficiencia de cada sistema, estos son:

- Rapidez de respuesta
- Sobrepasso máximo de la respuesta
- Estabilidad relativa
- Interpretación de la acción de control

El sistema con **Linealización por Realimentación (LPR)**, llega por primera vez al valor deseado después de haber transcurrido como mínimo 160 segundos pero tarda más del triple en lograr un asentamiento sobre la referencia, por lo que se podría afirmar que este sistema no tiene una rápida respuesta. A medida que incrementa el setpoint este sistema muestra picos elevados y por tal razón tiene problemas de estabilidad relativa, además de los fuertes cambios que muestra la señal de control, pese a esto el sistema ante una perturbación en la salida mostró un desempeño favorable con respecto a la rapidez de la respuesta.

El sistema con **Control Deslizante (SC)**, resulto ser más rápido que el ya mencionado pues aunque tiene valores similares al sistema LPR en relación al tiempo de levantamiento, el sistema SC logra un asentamiento en menor tiempo. Cuando se aumenta el setpoint no tiene picos elevados (máximo del 8% del setpoint) por lo cual se podría decir que presenta una estabilidad relativa. La señal de control no tiene fuertes oscilaciones lo que permite la buena operación de las bombas sumergibles, sin embargo, en presencia de perturbación el desempeño de este sistema se ve afectado ya que muestra sobrepasso próximo al 50% del valor final afectando su estabilidad relativa.

El sistema con **Control Adaptativo con Modelo de Referencia (MRAC)**, resultó ser el más rápido de todos por mostrar un levantamiento y asentamiento rápido. Cuando los valores en la entrada de referencia o setpoint incrementan, tiene pequeños picos (no superiores al 15% del setpoint) lo que podría garantizar la ausencia de problemas de estabilidad relativa. La señal de control, al igual que el sistema LPR, tiene algunas oscilaciones fuertes limitando de esta forma la eficiencia de las bombas sumergibles, pero muestra un desempeño satisfactorio ante perturbaciones en la salida del sistema.

Por todo lo anterior, es claro afirmar que el sistema de **Control Deslizante** mostro un mejor desempeño en comparación con el sistema con Linealización por Realimentación y con el sistema con Control Adaptativo con Modelo de Referencia, su rápida respuesta ante cualquier setpoint y el poco esfuerzo que debe realizar la acción de control para mantener la salida cerca de la referencia, lo hace un sistema de control eficiente; gracias a que en primera instancia la acción deslizante trata de llevar al sistema a una *superficie de deslizamiento* y mantenerlo en ella, la tarea de hacer que la salida siga a la referencia la hace ver relativamente fácil. No obstante, el control MRAC también mostró un desempeño favorable, pero se encuentra en desventaja con el sistema SC debido a que la acción de control de este resulta ser mucho más oscilante.

Por otra parte, se espera que los resultados obtenidos para la temática desarrollada se logren extender a múltiples sistemas dinámicos reales, la clara presencia de características no lineales en la dinámica de estos sistemas, hace necesario desarrollar una estrategia tal que pueda controlar cualquier sistema sin necesidad de recurrir a ningún tipo de linealización.

Por último y no menos importante, cabe aclarar que el objeto de estudio de este trabajo era identificar cual de las tres técnicas de control no lineal podría mostrar un mejor desempeño, lo que no conlleva a afirmar que estas técnicas son o podrían ser mejores que las tradicionalmente usadas (Técnicas de Control Lineal), por ello es vital realizar un estudio previo del proceso a controlar, para luego determinar si se hace necesario la implementación de estas novedosas técnicas, de no ser así, el diseño del controlador podría generar complicaciones innecesarias y tal vez resultados no tan óptimos en relación con un controlador lineal.

BIBLIOGRAFIA

Aström, K. J. & Östberg, A. B. (1985) *A teaching Laboratory for Process control*. IEEE, American Control Conference.

Baumann, W. T. & Rugh, W. J. (1986) *Feedback control of nonlinear systems by extended linearization*, IEEE Transaction on Automatic Control.

De La Cruz, A. & Avelino, M. (2006) *Estudio e Implementación de Técnicas de Control Basadas en Conceptos de Robustez e Hiperestabilidad en Aplicaciones industriales*. Tesis Pregrado. Universidad Tecnológica de Bolívar. Cartagena – Colombia.

Dorf, Richard C. (2005) *Sistemas de Control Moderno*, Person Educación, Madrid.

Gordillo, F. (2009) *Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de Lyapunov*, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 6, No. 2.

Hamel, B. (1949) *Contribution à l'étude mathématique des systèmes de réglage par tout ou rien*, (en Frances).

Isidori, A. (1995) *Nonlinear Control Systems*, 3th edition, Springer-Verlag, Londres.

Itkis, U. (1976) *Control systems of variable structure*, Wiley, New York.

Khalil, Hassan K. (1996) *Nonlinear Systems*, Second Edition, Prentice Hall.

Kuo, Benjamín. (1956) *Sistemas de Control Automático*, Department of Electrical and computer Engineering University of Illinois at Urbana-Champaign, Prentice Hall Hispano America, S.A. México.

Landau, I. D. (1979) *A Surve of Model Reference Adaptive Techniques – Theory and Applications*. Automatica, Vol. 10.

Morari, Manfred & Zafiriou, Evangelhos. (1989) *Robust Process Control*, Prentices Hall.

Ogata, Katsuhiko. (1987) *Dinámica de sistemas*, Prentice Hall Hispano América, S. A. México.

Ogata, Katsuhiko. (1998) *Ingeniería de Control Moderna*, Person Educación, Mexico.

Perruquetti, Wilfrid & Barbot, Jean Pierre . (2007) *Sliding Mode Control in Engineering*, Control Engineering Series, Kindle Edition, Published by Taylor & Francis.

Petros, A. & Ioannou, Jing Sun. (1996) *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall.

Rodríguez, F. & López, M. (1996) *Control Adaptivo y Robusto*, Serie Ingeniería, No. 9. Universidad de Sevilla. Sevilla – España.

Sastry, Shankar (1989) *Adaptive Control Stability, Convergence, and Robustness*, Prentice Hall.

Sira – Ramírez, H. (1992) *Differential geometric methods in variable structure control*, Int. J. Control, Vol. 48, No. 4.

Sira – Ramírez, H. (2004) *Regímenes Deslizantes*, Cinvestav-inp. Ciudad de México – México.

Slotine, Jean-Jacques E. (1984) *Sliding Controller Desing for Nonlinear Systems*, Int. J. Control, Vol. 40, No. 2.

Slotine, Jean-Jacques E. (1991) *Applied Nonlinear Control*, New Jersey. Prentice Hall.

Smith, Carlos A. & Corripio, Armando B. (2006) *Control Automático de Procesos Teoría y Práctica*, Tercera Edición. John Wiley and Sons, INC.

Utkin, V. I. (1977) *Variable structure systems with sliding modes*, IEEE Transaction on Automatic Control. Vol. 22, No. 2.