

**ESTUDIO E IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL BASADAS EN
CONCEPTOS DE ROBUSTEZ E HIPERESTABILIDAD EN APLICACIONES
INDUSTRIALES**

AMAURY DE LA CRUZ VALDÉS

MARCELL AVELINO CORREA FRIAS

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR
FACULTAD DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
CARTAGENA DE INDIAS D. T. Y C.
2006**

**ESTUDIO E IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL BASADAS EN
CONCEPTOS DE ROBUSTEZ E HIPERESTABILIDAD EN APLICACIONES
INDUSTRIALES**

AMAURY DE LA CRUZ VALDÉS

MARCELL AVELINO CORREA FRIAS

Trabajo de grado presentado como requisito
para optar el título de Ingeniero Electrónico

Director
JOSÉ LUIS VILLA RAMÍREZ, PhD.
Doctor en Ingeniería

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR
FACULTAD DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
CARTAGENA DE INDIAS D. T. Y C.
2006

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Cartagena de Indias, D. T. y C. Abril 25 de 2006.

Cartagena de Indias D. T. y C. Abril 25 de 2006.

Señores

COMITÉ FACULTAD DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

Universidad Tecnológica de Bolívar

Cartagena

Asunto: Presentación Trabajo de Grado

Cordial saludo.

Por medio de la presente ratifico mi aceptación como el director del proyecto de grado titulado “ESTUDIO E IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL BASADAS EN CONCEPTOS DE ROBUSTEZ E HIPERESTABILIDAD EN APLICACIONES INDUSTRIALES”, me permito hacer entrega formal del mismo, que será presentado por los estudiantes del programa de ingeniería eléctrica y electrónica AMAURY DE LA CRUZ VALDÉS y MARCELL AVELINO CORREA FRIAS.

Agradezco la atención prestada.

Cordialmente,

JOSÉ LUIS VILLA RAMÍREZ, PhD.

Doctor en Ingeniería

Cartagena de Indias D. T. y C. Abril 25 de 2006.

Señores

COMITÉ FACULTAD DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

Universidad Tecnológica de Bolívar

Cartagena

Asunto: Presentación Trabajo de Grado

Cordial saludo.

Hacemos entrega formal del proyecto de grado titulado “ESTUDIO E IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL BASADAS EN CONCEPTOS DE ROBUSTEZ E HIPERESTABILIDAD EN APLICACIONES INDUSTRIALES”, como requisito para optar el título de ingeniero electrónico.

Agradecemos la atención prestada.

Cordialmente,

AMAURY DE LA CRUZ VALDÉS

Código 0004020

MARCELL A. CORREA FRIAS

Código 9904500

Cartagena de Indias D. T. y C. Abril 25 de 2006.

Señores

COMITÉ FACULTAD DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

Universidad Tecnológica de Bolívar

Cartagena

Asunto: Autorización para colgar trabajo de grado en la página Web de la biblioteca.

Cordial saludo.

Autorizamos que el trabajo realizado por nosotros titulado “ESTUDIO E IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL BASADAS EN CONCEPTOS DE ROBUSTEZ E HIPERESTABILIDAD EN APLICACIONES INDUSTRIALES”, que ha sido dirigido por el PhD José Luís Villa Ramírez y realizado en el grupo de automatización industrial y control automático (GAICO), se encuentra en condiciones de ser leído y definido como tesis de grado, a su vez este mismo puede ser consultado en versión digital a través de la pagina Web de la biblioteca de la Universidad Tecnología de Bolívar.

Lo que se firmo para los efectos oportunos con fecha 25 de Abril de 2006.

AMAURY DE LA CRUZ VALDÉS

Código 0004020

MARCELL A. CORREA FRIAS

Código 9904500

ARTICULO 104

La Universidad Tecnológica de Bolívar se reserva el derecho de propiedad intelectual de todos los trabajos de grados aprobados y no pueden ser explotados comercialmente sin autorización.

Dedico este proyecto Al único y sabio,
mi guía suprema DIOS.
A mis padres Rita y Amaury quienes
me ayudan incondicionalmente
y me brindan todo su amor y apoyo.
A mis hermanas por su compañía,
confianza y constante motivación.

AMAURY DE LA CRUZ VALDÉS.

Dedico este trabajo a mis padres
Francisco Correa Y Carmen Maria
A mis hermanas Angiola y Edelcy Correa
A mis familiares y amigos
Y en especial a Dios.

MARCELL A. CORREA FRIAS.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar los autores desean expresar sus más sincero agradecimientos al director de este trabajo de grado Dr. José Luís Villa Ramírez, por sus inestimables ideas y consejos que han permitido la realización de este trabajo.

Asimismo quisiéramos hacer constar nuestra gratitud a los colaboradores de otras universidades de los que siempre obtuvimos acertados consejos y gran ayuda: Dra. Eva Maria Navarro López y Dr. Alfonso J. Zozaya S.

Por último, deseáramos dar las gracias y hacer constar nuestro cariño a los amigos injustamente omitidos, en recuerdo de los buenos momentos compartidos.

CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN	18
INTRODUCCIÓN	20
1 CONCEPTOS PRELIMINARES	22
1.1 CONTROL REALIMENTADO	22
1.1.1 <i>Propósitos de la realimentación</i>	22
1.2 SISTEMAS DE CONTROL EN LAZO CERRADO	22
1.3 SISTEMA DE CONTROL EN LAZO ABIERTO	23
1.4 ACCIONES DE CONTROL	23
1.4.1 <i>Acción de control proporcional-integral (PI)</i>	23
1.4.2 <i>Acción de control proporcional-integral-derivativo</i>	23
1.5 TIPOS DE REGULADORES PID	24
1.5.1 <i>PID ideal</i>	24
1.5.2 <i>PID Serie (interactuante)</i>	25
1.5.3 <i>PID Industrial</i>	25
1.6 RESPUESTA TRANSITORIA	26
1.6.1 <i>Tiempo de retardo t_d</i>	26
1.6.2 <i>Tiempo de levantamiento o subida t_r</i>	26
1.6.3 <i>Tiempo pico t_p</i>	26
1.6.4 <i>Sobreimpulso Máximo (OS)</i>	27
1.6.5 <i>Tiempo de asentamiento t_s</i>	27
2 CRITERIOS DE SINTONIZACIÓN DE REGULADORES	28
2.1 MÉTODOS DE SINTONIZACIÓN	29
2.2 MÉTODOS DE SINTONIZACIÓN DE ZIEGLER – NICHOLS	30
2.2.1 <i>Primer método (curva de reacción)</i>	30
2.2.2 <i>Segundo método (Oscilaciones sostenidas)</i>	31
2.3 CONTROL POR MODELO INTERNO (IMC).....	32
2.3.1 <i>Antecedentes</i>	32
2.3.2 <i>Desarrollo de la estructura IMC</i>	33
2.3.3 <i>Diseño PID basado en IMC para un proceso de primer orden más retardo de tiempo</i>	34
2.3.4 <i>Generalización del procedimiento de diseño PID basado en IMC</i>	36
2.4 CRITERIOS DE LA INTEGRAL DEL ERROR	40
2.4.1 <i>Antecedentes</i>	43
2.4.2 <i>Métodos de optimización</i>	43
2.4.3 <i>Cálculo óptimo del controlador</i>	44

2.4.4	<i>Ajuste mediante los criterios integrales de error de integración mínimo.</i>	45
3	PARÁMETROS PARA LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE REGULADORES	47
3.1	EVALUACIÓN DE DESEMPEÑO DEL CONTROLADOR BASADO EN LOS DATOS DE RESPUESTA A LA REFERENCIA.....	47
3.1.1	<i>Funcionamiento de los índices adimensionales.</i>	48
3.1.2	<i>Intercambio entre robustez y desempeño.</i>	49
3.1.3	<i>Estudio de simulación.</i>	50
4	ROBUSTEZ DE LOS MÉTODOS DE SINTONIZACIÓN	54
4.1	ROBUSTEZ DEL SISTEMA DE CONTROL Y ESTABILIDAD.....	54
4.1.1	<i>Desempeño robusto.</i>	54
4.1.2	<i>Medidas de estabilidad robusta del controlador.</i>	55
4.2	SENSIBILIDAD ANTE LOS ERRORES EN EL MODELADO	56
4.2.1	<i>Índices de robustez.</i>	56
4.2.2	<i>Información última y robustez.</i>	57
4.3	ÍNDICE DE ROBUSTEZ RESPECTO A UN PARÁMETRO DEL PROCESO IR_{PC}	58
4.4	¿QUÉ ES HIPERESTABILIDAD?	60
4.4.1	<i>Definición y notación.</i>	61
4.5	ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LYAPUNOV.....	62
4.5.1	<i>Definida positiva de las funciones escalares.</i>	62
4.5.2	<i>Definida negativa de las funciones escalares.</i>	62
4.5.3	<i>Semidefinida positiva de las funciones escalares.</i>	63
4.5.4	<i>Semidefinida negativa de las funciones escalares.</i>	63
4.5.5	<i>Indefinida de las funciones escalares.</i>	63
4.5.6	<i>Forma cuadrática.</i>	63
4.5.7	<i>Forma hermitiana.</i>	63
4.5.8	<i>Segundo método de Lyapunov.</i>	64
4.5.9	<i>Teorema principal de la estabilidad de Lyapunov.</i>	65
4.5.9.1	<i>Ejemplo, teorema principal de estabilidad de Lyapunov.</i>	65
4.5.10	<i>Análisis de la estabilidad de Lyapunov de los sistemas LTI.</i>	66
4.5.11	<i>Teorema L.</i>	67
4.5.12	<i>Aplicando la estabilidad en el sentido de Lyapunov.</i>	69
4.5.12.1	<i>Ejemplo de estado de equilibrio.</i>	69
4.5.12.2	<i>Ejemplo para determinar el rango de estabilidad.</i>	70
5	RESULTADOS DE LAS EXPERIMENTACIONES	73
5.1	PROCESO REAL UTILIZADO	73
5.2	IDENTIFICACIÓN DE LA PLANTA	74
5.2.1	<i>Obtención experimental de la planta.</i>	76

5.3	TÉCNICAS DE SINTONIZACIÓN DE REGULADORES	79
5.4	ROBUSTEZ Y DESEMPEÑO DE LOS REGULADORES	90
5.5	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	92
	CONCLUSIONES	94
	OBSERVACIONES Y TRABAJOS FUTUROS	95
	BIBLIOGRAFÍA.....	96
	ANEXOS.....	98

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A. GLOSARIO	98
ANEXO B. Programa en Matlab para la comparación de las técnicas de sintonización de reguladores.	102
ANEXO C. Diagrama de bloque del programa en labview.....	104
ANEXO D. Demostración de las ecuaciones utilizadas en los diagramas de bloques de las operaciones de labview.	105
ANEXO E. Tabla de adquisición de datos con labview.....	108

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Representación control PID	24
Figura 2. Características de la respuesta transitoria.....	26
Figura 3. Sistema de control realimentado	28
Figura 4. Ejemplo de regulador.....	29
Figura 5. Curva de respuesta (forma de S).....	30
Figura 6. Respuesta de la planta con ganancia critica.....	31
Figura 7. Estructura IMC.....	33
Figura 8. Reconfiguración de la estructura IMC.....	33
Figura 9. Diagrama en realimentación convencional	34
Figura 10. Característica de la curva del error.....	41
Figura 11. Evolución del error.....	41
Figura 12. Simulación para cinco modelos en lazo cerrado.....	51
Figura 13. Comparación de las relaciones analítica y experimental entre T_s e $IAEd$	52
Figura 14. Comparación de las relaciones analítica y experimental entre T_s y GM	52
Figura 15. Comparación de las relaciones analítica y experimental entre T_s y PM	53
Figura 16. Limite superior de la constante del sensor.....	59
Figura 17. Limite inferior de la constante del sensor.....	59
Figura 18. Arquitectura de los sistemas que heredan la propiedad (16),.....	60
Figura 19. Estabilidad de Lyapunov.....	66
Figura 20. Ejemplo de análisis Lyapunov para un sistema de control	70
Figura 21. Proceso real utilizado.....	73
Figura 22. Panel frontal del programa.....	75
Figura 23. Estructura del proceso	75
Figura 24. Curva de reacción de un proceso	76

Figura 25. Curva de reacción del proceso para un cambio escalón	77
Figura 26. Curva de reacción del proceso	78
Figura 28. Diagrama de Bloque de la planta simulada en Lazo abierto.....	78
Figura 27. Comparación planta real vs. Simulada	79
Figura 29. Comportamiento del regulador con el método IAE_PI.....	80
Figura 30. Comportamiento del regulador con el método IAE_PID	81
Figura 31. Comportamiento del regulador con el método ISE_PI.....	81
Figura 32. Comportamiento del regulador con el método ISE_PID	82
Figura 33. Comportamiento del regulador con el método ITAE_PI.....	82
Figura 34. Comportamiento del regulador con el método ITAE_PID	83
Figura 35. Comportamiento del regulador con el método IMC_A	83
Figura 36. Comportamiento del regulador con el método IMC_B	84
Figura 37. Comportamiento del regulador con el método IMC_C.....	84
Figura 38. Comportamiento del regulador con el método IMC_D.....	85
Figura 39. Comportamiento del regulador con el método Ziegler - Nichols	85
Figura 40. Comparación del comportamiento de los reguladores.....	86
Figura 41. Vista ampliada, comparación del comportamiento de los reguladores .	86
Figura 42. Señales de Control	87
Figura 43. Comparación de desempeño para un cambio de referencia	88
Figura 44. Señal de control ante un cambio de referencia.....	88
Figura 45. Comparación de desempeño ante una perturbación	89
Figura 46. Señal de control ante una perturbación	89
Figura 47. Vista ampliada, comparación de desempeño ante una perturbación ...	90

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Reglas de sintonización de Ziegler y Nichols basada en la respuesta escalón de la planta (primer método).....	31
Tabla 2. Reglas de sintonización de Zigler y Nichols basada en la ganancia crítica y el período crítico (Segundo método).....	32
Tabla 3. Parámetros de sintonización PID ideal para lazo abierto estable y procesos de integración ^a	38
Tabla 4. Parámetros de sintonización PID para procesos estables con tiempo muerto ^a	39
Tabla 5. Parámetros de sintonización PID para procesos inestables.....	40
Tabla 6. Criterios integrales para control proporcional.....	45
Tabla 7. Criterios integrales para control proporcional – integral (PI).....	46
Tabla 8. Criterios integrales para control PID.....	46
Tabla 9. Valores de ajuste para los diferentes controladores.....	80
Tabla 10. Márgenes de fase (PM) y ganancia (GM).....	91
Tabla 11. Robustez y comportamiento utilizando una planta real para diferentes controladores.....	91
Tabla 12. Índice de robustez respecto a un parámetro del proceso.....	91

RESUMEN

TITULO DEL TRABAJO: ESTUDIO E IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL BASADAS EN CONCEPTOS DE ROBUSTEZ E HIPERESTABILIDAD EN APLICACIONES INDUSTRIALES.

AUTORES: AMAURY DE LA CRUZ VALDÉS y MARCELL AVELINO CORREA FRIAS.

OBJETIVO GENERAL: Estudiar el desempeño y la robustez de los métodos de sintonización de controladores PID, y su análisis basado en la teoría de hiperestabilidad para diseñar reguladores industriales.

METODOLOGÍA: Se estableció el estado del arte en este tema mediante una búsqueda bibliográfica en la Biblioteca de la Universidad Tecnológica de Bolívar, complementándola ampliamente con información obtenida en Internet y bases de datos científicas.

Se revisaron varios estudios realizados por diferentes autores sobre los métodos de sintonización de controladores PID basados en diferentes modelos, al igual que la evaluación del desempeño y teoría de pasividad.

Se seleccionaron los métodos a comparar y se determinó la información del proceso requerida de los mismos. El trabajo está acompañado de una parte experimental de implementación y pruebas en uno de los prototipos industriales del laboratorio de control de la Universidad Tecnológica de Bolívar.

Basados en los resultados obtenidos en el prototipo, se elaboraron recomendaciones generales sobre la utilización de los métodos de sintonización.

Dicho trabajo de investigación presenta una nueva contribución en la teoría de control y en el estudio de las propiedades de control de sistemas.

El tipo de investigación: Investigación aplicada. La razón por la cual el problema se puede abordar con este tipo de investigación es que se aplican métodos matemáticos en la identificación y control.

RESULTADOS: Analizar criterios de robustez una vez implementadas dichas técnicas de control propuestas.

Estudiar y analizar el tratamiento de los sistemas de control basados en teoría de hiperestabilidad.

PERSPECTIVAS: Debido a la complejidad de los temas se espera que las implementaciones de las técnicas resulten un poco complejas. Por ello, los resultados positivos (aunque no sean de un desempeño óptimo) serán excelentes. En caso de tener problemas serios, se hará un análisis detallado con miras a su futura solución.

DIRECTOR: JOSÉ LUIS VILLA RAMÍREZ, PhD.

Doctor en Ingeniería.

Docente del programa de Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

INTRODUCCIÓN

Dentro del marco de los proyectos que actualmente se llevan a cabo en el grupo de automatización industrial y control automático (GAICO) de la Universidad Tecnológica de Bolívar, se encuentra el trabajo de investigación titulado Control de sistemas dinámicos. Cuyo propósito principal se centra en desarrollar estrategia de control en los prototipos industriales que se han desarrollado en el laboratorio de control automático, para elaborar metodologías que permitan la implementación de diversos tipos de reguladores y que a su vez estas puedan ser extrapoladas a entornos industriales.

Teniendo en cuenta la gran importancia del control de procesos basados en modelos con bajo rango de validez o alto nivel de incertidumbre ha sido siempre un tema de gran interés, una constante en el ámbito industrial y un amplio tema investigación en el ámbito académico. Es necesario percatarse de que estas técnicas están adquiriendo un rango dominante entre los distintos grupos de investigación del país y por supuesto a nivel internacional.

El control PID es todavía bastante común en aplicaciones industriales más modernas debido a su estructura relativamente simple y al amplio alcance de su uso. Sin embargo, las reglas convencionales de sintonización Ziegler – Nichols (Z-N) que han sido preferidas por más de 40 años son cuestionadas progresivamente tanto en la industria como en los sectores de investigación, por las exigencias de especificaciones más estrictas de desempeño del control. El concepto de robustez del controlador de ese modo se ha convertido en una parte integral de diseño del control.

Este trabajo pretende aportar conocimientos y herramientas prácticas mediante la verificación de algunas metodologías existentes con relación al ajuste de controladores PID con criterios y parámetros de robustez variable, al tiempo que se estudia y contrasta su aplicabilidad. Este trabajo aborda dos problemas de diferente naturaleza que comparten un hilo común en la presentación y sustentación de las primeras contribuciones en el trabajo de investigación control de sistemas dinámicos.

Un primer tema general es: el estudio de los métodos de sintonización y ajustes de controladores industriales.

Quizás los métodos de sintonización y ajustes mas conocidos son los *ajustes heurísticos*. Ello se debe a la facilidad de aplicación – simplemente tomar valores de una tabla-, y a su amplia difusión. Los ajustes están asociados a una determinada presentación (desempeño) en lazo cerrado.

Sin lugar a dudas, las reglas de ajustes más conocidas son las de Ziegler y Nichols (1942). Ellas están basadas en lograr una relación de 0,25 entre el valor del segundo y el primer pico de la respuesta temporal del sistema a una entrada de tipo escalón. Estas técnicas son conocidas como: "*Quarter Decay Ratio*". Un poco después a mediados de los 80's surgen reglas de ajustes basados en la minimización de alguna medida del error, como: La integral del valor absoluto del error (IAE), la integral del error al cuadrado (ISE), la integral del error por el tiempo (ITAE) y la integral del cuadrado del error por el tiempo (ITSE). Por esa misma época se presentan trabajos experimentales de aplicaciones basados en control por modelo interno (IMC "*Internal Model Control*").

Además de los ajustes convencionales enunciados y que normalmente están asociados a la respuesta temporal en lazo cerrado, Ho y col (1997) proponen un enfoque menos convencional, basado en el ajuste en el margen de fase (PM) y de ganancia (GM) del sistema.

El estudio se basa fundamentalmente en la comparación cuantitativa (simulaciones, implementaciones y pruebas en el laboratorio) de estas técnicas de sintonización para elaborar criterios de comparación de robustez para diferentes diseños de reguladores.

La segunda línea de investigación se enfoca en la caracterización de los sistemas Hiperestables.

Una de las técnicas que mayor interés ha despertado en la comunidad del control de sistemas, especialmente en los sistemas subactuados por sus múltiples aplicaciones y por su retorno al uso de la intuición física en la labor del ingeniero es la *hiperestabilidad o pasividad*. Para su entendimiento es preciso establecer el papel de la energía en el control.

Si al analizar una ley de control que actúa sobre un sistema, sabemos discernir que términos mantienen la energía constante, cuáles tiene un efecto disipativo, y cuáles inyectan energía al sistema, encontraremos algo nuevo para el problema de la estabilización, abriendo paso a tareas subsiguientes de ajuste y sintonización del comportamiento transitorio.

Este documento está organizado de la siguiente forma: En el **capítulo 1**, se exponen los conceptos preliminares, conceptos básicos de la teoría de control que son ampliamente difundidos en ingeniería. El **capítulo 2**, trata de los criterios empleados para la sintonización de reguladores. El **capítulo 3**, hace referencia a aquellas metodologías estudiadas y a la obtención de parámetros para la evaluación del desempeño de reguladores. En el **capítulo 4**, se sustenta la teoría relacionada con la robustez de los métodos de sintonización. Por último en el **capítulo 5**, se encuentran los resultados de las experimentaciones y el análisis de resultados.

1 CONCEPTOS PRELIMINARES

Si bien los conceptos básicos de la teoría de control son ampliamente difundidos en la ingeniería, este capítulo hace énfasis en los conceptos utilizados en este trabajo complementándolo con información que no es usual en textos clásicos de teoría de control. La discusión de este capítulo se basa principalmente en los textos [Aström], [Corripio], [O'Dwyer], [Ogata].

1.1 CONTROL REALIMENTADO

El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbación, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continúa haciendo con base en esta diferencia. Aquí solo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, dado que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema.

1.1.1 Propósitos de la realimentación.

Los rasgos más importantes que la presencia de realimentación imparte a un sistema son:

- Aumento de la exactitud. Por ejemplo, la habilidad para reproducir la entrada fielmente.
- Reducción de la sensibilidad de la salida, correspondiente a una determinada entrada, ante variaciones en las características del sistema.
- Efectos reducidos de la no linealidad y de la distorsión.
- Aumento del intervalo de frecuencias (de la entrada) en la cual el sistema responde satisfactoriamente (aumento en el ancho de banda).

1.2 SISTEMAS DE CONTROL EN LAZO CERRADO

Los sistemas de control realimentado se denominan también *sistemas de control en lazo cerrado*. En estos sistemas se alimenta al controlador con la señal de error de actuación, la cual es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la señal de salida misma o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), a fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor conveniente.

El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

1.3 SISTEMA DE CONTROL EN LAZO ABIERTO

Los sistemas en los cuales la salida no afecta la acción de control se denominan *sistemas de control en lazo abierto*. En estos sistemas de control no se mide la salida ni se realimenta para comparar con la entrada.

En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Por lo tanto a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fija. Como resultado, la precisión del sistema depende de la calibración.

Se utilizará la noción de sistema en lazo abierto en este documento para indicar la operación sobre el sistema real sin utilizar realimentación de la salida.

1.4 ACCIONES DE CONTROL

La mayor parte de los controladores básicos industriales se identifican por las siguientes acciones de control: acción de control P (proporcional), acción de control PI (proporcional-integral), modo de control PD (proporcional-derivativo), acción de control PID (proporcional-integral-derivativo). En este trabajo estudiaremos los controladores PI y PID.

1.4.1 Acción de control proporcional-integral (PI).

La acción del controlador proporcional integral se define mediante:

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{\tau_I} \int_0^t e(t) d(t)$$

Y su función de transferencia para este controlador es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

Donde k_p es la ganancia proporcional y τ_I se denomina tiempo integral. El tiempo integral ajusta la acción de control integral, mientras que un cambio en el valor de k_p afecta las partes integral y proporcional de la acción de control.

1.4.2 Acción de control proporcional-integral-derivativo.

En la figura 1. Esta acción combinada reúne las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada se obtiene mediante:

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{\tau_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + k_p \tau_D \frac{de(t)}{dt}$$

Y su función transferencia resulta:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

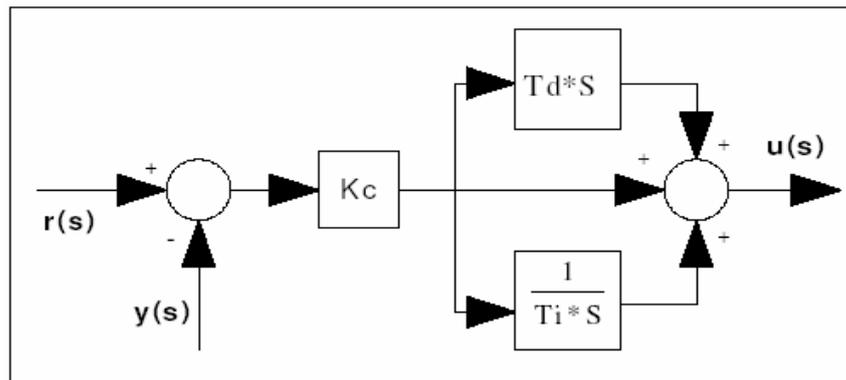


Figura 1. Representación control PID

1.5 TIPOS DE REGULADORES PID

Las estructuras PID consideradas por los autores de los métodos de sintonización, se definen a continuación.

1.5.1 PID ideal.

Caracterizado por la función de transferencia:

$$G_C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

Siendo k_c , la constante proporcional, τ_I la constante integral y τ_D la constante del componente derivativo.

Una variación del controlador es llamada estructura de control en “paralelo”. Esta variación “no interactuante”, “independiente” o de “ganancia independiente” es utilizada en los siguientes productos:

- a) Productos Allen Brandley PLC5
- b) Productos Intellution FIX
- c) Manejador de procesos tipo A, HoneyWell TDC3000.

1.5.2 PID Serie (interactuante).

Es también llamado controlador en “cascada”, “interactuante” o “serie” y su función de transferencia es la siguiente:

$$G_C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \left(\frac{1 + s\tau_D}{1 + s\frac{\tau_D}{N}} \right)$$

La estructura es usada en los siguientes productos:

- Productos Honeywell TDC básico/extendido/multifunción tipo A y B, con $N = 8$.
- Productos Toshiba TOSDIC 200, con $3.33 \leq N \leq 10$
- Productos EXACT Model 761, con $N = 10$
- Productos Honeywell UDC6000, con $N = 8$.

1.5.3 PID Industrial.

Caracterizado por la función de transferencia:

$$G_C(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \left(R(s) - \frac{1 + s\tau_D}{1 + s\frac{\tau_D}{N}} Y(s) \right)$$

Esta estructura es utilizada en los siguientes productos:

- Productos Fisher-Rosemount Provox, con $N = 8$.
- Productos Foxboro Modelo 761, con $N = 10$
- Productos SATT Instruments EAC400, con $N = 8.33$
- Producto Taylor Mod 30 ESPO, con $N = 16.7$

En algunos casos, una estructura del controlador puede ser transformada en otra. Si el controlador PID, que se desea sintonizar no es del mismo tipo que el supuesto en el método de sintonización a emplear, deberá realizarse, la conversión de parámetros necesaria, [O'Dwyer].

1.6 RESPUESTA TRANSITORIA

En muchos casos prácticos, las características de desempeño (figura 2) deseadas del sistema de control se especifican en términos de cantidades en dominio del tiempo. Los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente y exhiben respuestas transitorias cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones.

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable. Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario. Es común especificar:

1.6.1 Tiempo de retardo t_d .

El tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

1.6.2 Tiempo de levantamiento o subida t_r .

Es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para sistemas sub-amortiguados de segundo orden, por lo común se usa el tiempo de levantamiento de 0 a 100%. Para sistemas sobre-amortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10 a 90%.

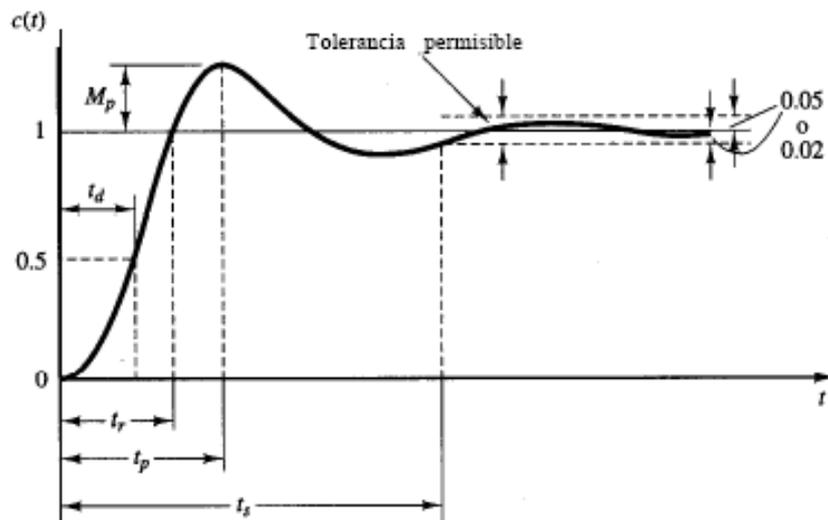


Figura 2. Características de la respuesta transitoria

1.6.3 Tiempo pico t_p .

El tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobreimpulso.

1.6.4 Sobreimpulso Máximo (OS).

Es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estable de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobrepaso máximo. Se define mediante:

$$OS\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

La cantidad de sobrepaso máximo (en porcentaje) indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema.

1.6.5 Tiempo de asentamiento t_s .

Es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 a 5%) y permanezca dentro de él. El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control. Los objetivos del diseño del sistema en cuestión determinan cuál criterio de error en porcentaje usar.

2 CRITERIOS DE SINTONIZACIÓN DE REGULADORES

La sintonización de los controladores se basa en la escogencia adecuada de sus Parámetros (K_C , T_I , T_D), tal que el sistema de control tenga un comportamiento adecuado y una robustez aceptable. [Baquette], [Babatunde], [Kuo], [López], [Rivera].

Para poder realizar la sintonización de los controladores, primero se debe identificar la dinámica del proceso, y a partir de ésta determinar los parámetros del controlador utilizando el método de sintonización seleccionado.

Si se consideran las variables en el dominio de la variable compleja s y se define $G_C(s)$ y $G_P(s)$ como las funciones de transferencia del controlador y de la planta respectivamente, a partir del diagrama de bloques del sistema de control e lazo cerrado (figura 3) , se obtiene que la señal realimentada está dada por:

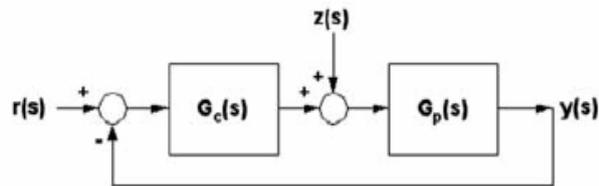


Figura 3. Sistema de control realimentado

Donde $r(s)$ es la entrada del sistema, $y(s)$ es la salida del sistema y $z(s)$ es una perturbación aditiva a la entrada del sistema no medible.

Del diagrama de bloques de la figura 3. Se obtiene la siguiente relación:

$$y(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} r(s) + \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} z(s)$$

En este trabajo nos enfocamos al caso del controlador utilizado como regulador, tanto por su sencillez como por ser el caso más común en la industria.

Una determinada magnitud física se dice que esta *regulada* si esta provista de un sistema que reaccione frente a los cambios del medio externo que afecten a esta magnitud, y que se mantenga en un valor aproximadamente constante. Un ejemplo de ello lo suministra un sistema de regulación de temperatura en una habitación. El sistema calefactor, a través de un termostato, debe reaccionar a las variaciones del medio (aperturas de puertas, entrada de más o menos gente, pérdidas naturales distintas en el día que en la noche, etc.) para que la temperatura se mantenga constante. Figura 4.

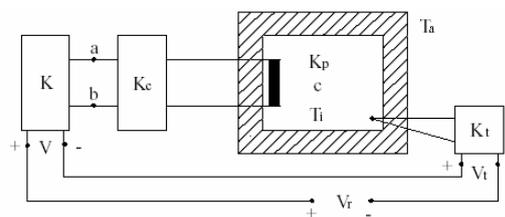


Figura 4. Ejemplo de regulador

En la industria de procesos, la mayor parte de los controladores se utilizan para responder a un cambio en la perturbación, y se requiere de una buena regulación para seguir el cambio en el valor deseado.

Si el controlador se ha sintonizado para lograr una buena respuesta en un cambio en el valor deseado, no eliminará las perturbaciones en forma efectiva si el sistema contiene un integrador o si su constante de tiempo es grande.

Es importante, entonces, determinar los requisitos de funcionamiento del lazo de control para seleccionar el procedimiento de sintonización adecuado.

2.1 MÉTODOS DE SINTONIZACIÓN

Los métodos de sintonización se basan principalmente, aunque no todos, en encontrar un modelo sencillo en lazo abierto del sistema y utilizar una tabla o método de ajuste ya especificado. En este capítulo se presenta los métodos de sintonización utilizados en este trabajo.

2.2 MÉTODOS DE SINTONIZACIÓN DE ZIEGLER – NICHOLS

Ziegler y Nichols propusieron unas de las reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional, el tiempo integral y el tiempo derivativo, esto con base a las características de la respuesta transitoria de la planta especificada.

Las reglas de sintonización de Ziegler y Nichols, su característica general es la de obtener un 25% de sobrepaso máximo en la respuesta escalón.

2.2.1 Primer método (curva de reacción).

Cuando se tiene una planta la cual no contiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados, la curva de la respuesta escalón unitario puede tener forma de S (si la respuesta del sistema no exhibe esta característica, el método no es pertinente) tales curvas de respuesta escalón se generan experimentalmente ó a partir de una simulación dinámica de la planta.

La curva con forma de S se caracteriza por dos parámetros: Tiempo de retardo L y la constante de tiempo T . El tiempo de retardo y de la constante de tiempo se determina dibujando la recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de S.

La figura 5 ilustra la curva de respuesta con forma de S (curva de reacción).

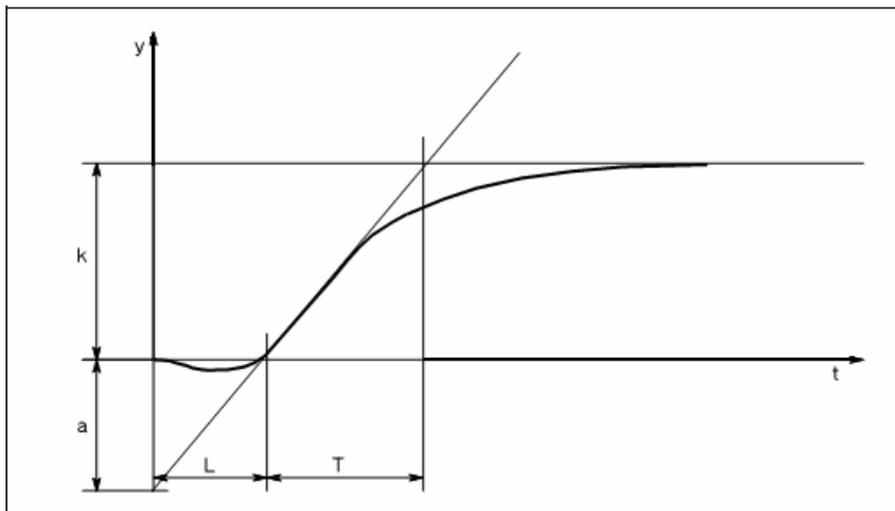


Figura 5. Curva de respuesta (forma de S)

Ziegler y Nichols Sugirieron establecer los valores de K_p , T_i , T_d mediante las fórmulas presentadas en la tabla 1.

Tipo De Controlador	K_p	T_i	T_d
P	T/L	∞	0
PI	0.9* T/L	L/0.3	0
PID	1.2* T/L	2*L	0.5*L

Tabla 1. Reglas de sintonización de Ziegler y Nichols basada en la respuesta escalón de la planta (primer método)

2.2.2 Segundo método (Oscilaciones sostenidas).

Para el segundo método se establece que el tiempo integral tiende a infinito y el tiempo derivativo es igual a 0. Usando solamente la acción de control proporcional e incrementando el valor de K_p de 0 a un valor crítico K_{cr} , en donde las salidas exhiban oscilaciones sostenidas (si la salida no presenta oscilaciones sostenidas el método no se aplica), figura 6.

Por lo tanto, la ganancia crítica K_{cr} y el periodo crítico P_{Cr} correspondientes se determinan experimentalmente. La tabla 2, muestra los valores de los parámetros K_p , T_i , T_d

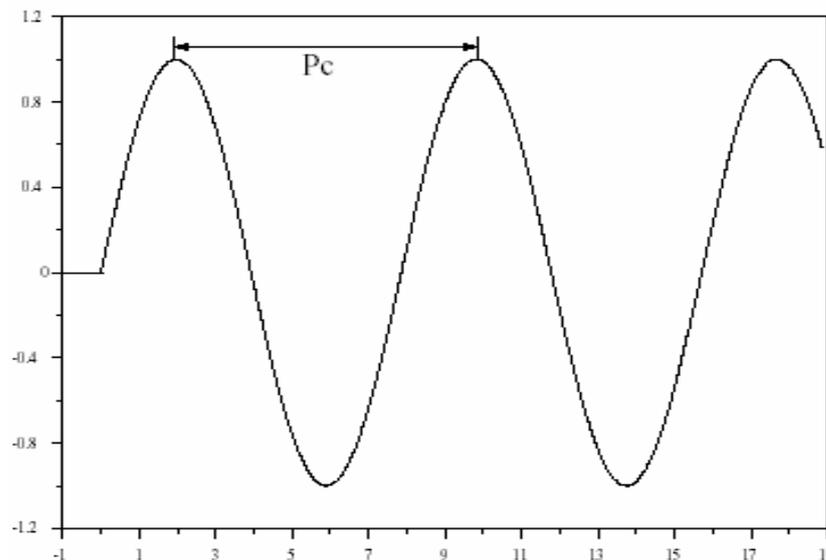


Figura 6. Respuesta de la planta con ganancia crítica

Tipo De Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45 K_{cr}$	$\frac{1}{1.2} P_{cr}$	0
PID	$0.6 K_{cr}$	$0.5 P_{Cr}$	$0.125 P_{Cr}$

Tabla 2. Reglas de sintonización de Zigler y Nichols basada en la ganancia crítica y el período crítico (Segundo método)

2.3 CONTROL POR MODELO INTERNO (IMC)

Este es un procedimiento basado en modelo, donde el modelo del proceso está "incrustado (enclavado)" en el controlador. Explícitamente usando conocimiento del proceso, en virtud del modelo del proceso, el desempeño mejorado puede ser obtenido.

2.3.1 Antecedentes.

García, C.E y Morari, M (1985) aplican un controlador IMC (*Internal Model Control*) a una columna de destilación. Los resultados presentados muestran que IMC presento un desempeño (*performance*) considerado satisfactorio. Cuando los resultados fueron comparados con un controlador de tipo PI, el IMC presento un mejor desempeño. Los autores de ese trabajo presentan inmediatamente otra aplicación del IMC, esta vez controlando la temperatura y la concentración de oxígeno en un reactor. Los resultados presentados en este trabajo muestran que IMC presento un buen desempeño, siendo superior a otro controlador de tipo PI.

Arkun, Y (1986) presenta una primera aplicación experimental de control predictivo IMC. Durante el experimento, un controlador IMC es aplicado a un calentador y el objetivo fue controlar la temperatura de salida del agua. Arkun (1986) concluye, de ese experimento, que si un modelo suficientemente preciso del proceso estuviese disponible, el controlador IMC es capaz de dar respuestas rápidas conduciendo el proceso al estado deseado.

Arkun, Y (1986) presenta una segunda aplicación del controlador IMC, esta vez, el IMC es aplicado para el control de un tanque de agua controlando la temperatura y el nivel del agua. De ese trabajo concluye que los resultados obtenidos para el controlador IMC fueron satisfactorios y superiores a otro controlador de tipo PI, la *robustez* del IMC con relación a determinados errores de modelamiento, deliberadamente insertados durante el experimento, fue considerada relativamente satisfactoria siendo comparada con PI.

2.3.2 Desarrollo de la estructura IMC

Dos representaciones de la función de transferencia del proceso son utilizadas. Una es conocida, el proceso (algunas veces se utiliza el término planta) el cual no es conocido exactamente. La otra se considera el modelo del proceso, el cual se sabe exactamente.

Proceso (o planta)	$g_p(s)$
Modelo	$\tilde{g}_p(s)$

La equivalencia de realimentación convencional para el IMC se puede derivar usando la manipulación de los diagramas de bloques. Se comienza por la estructura del IMC y mostrada en la figura 7.

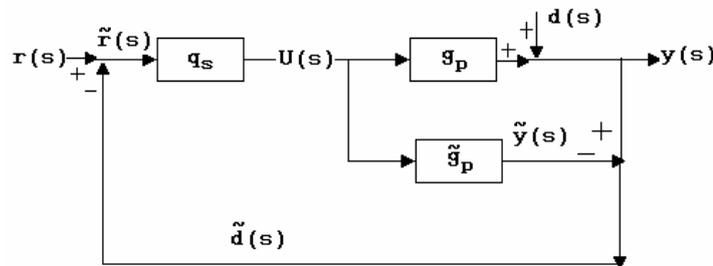


Figura 7. Estructura IMC

La figura 7 puede reconfigurarse para formar la figura 8.

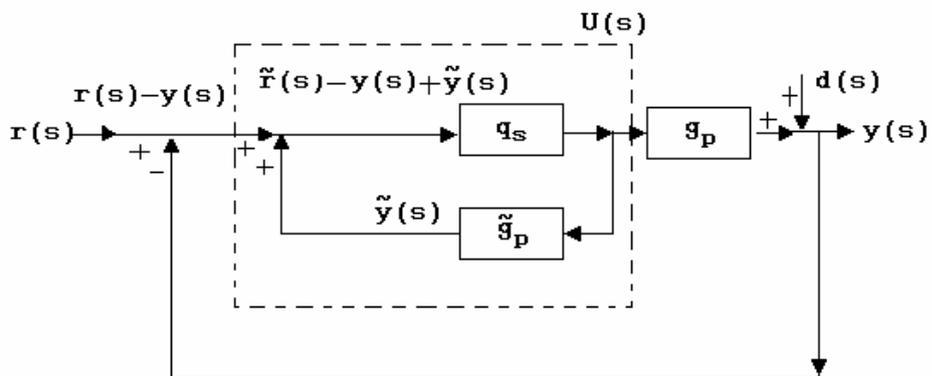


Figura 8. Reconfiguración de la estructura IMC

El lector puede encontrar una descripción detallada de la teoría de IMC en [\[Rivera y Morari\]](#).

Esta formulación es ventajosa porque encontramos que un controlador PID muchas veces resulta cuando el procedimiento de diseño IMC es utilizado. Además, el diagrama de bloques IMC convencional no puede ser usado para sistemas inestables, así es que esta forma de realimentación debe ser usada para esos casos.

Partiendo de lo anterior, se puede utilizar el procedimiento de diseño IMC para diseñar controladores convencionales con realimentación como se ilustra en la figura 9. El controlador convencional con realimentación es una función del modelo interno, $\tilde{g}_p(s)$, y del controlador con modelo interno, $q(s)$, el equivalente en IMC es

$$g_c(s) = \frac{q(s)}{1 - \tilde{g}_p(s)q(s)}$$

La ecuación anterior es denominada como la relación PID basada en IMC, por que la forma de $g_c(s)$ es muchas veces como la de un controlador PID.

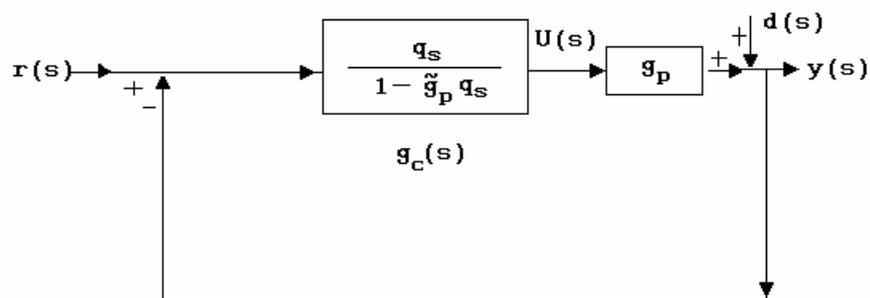


Figura 9. Diagrama en realimentación convencional

2.3.3 Diseño PID basado en IMC para un proceso de primer orden más retardo de tiempo.

Ya que primer orden más retardo de tiempo es la representación más común de la dinámica de procesos químicos, la forma PID desarrollada en este tópico es útil para un gran número de lazos de control de procesos.

Encontrar el controlador PID con aproximaciones IMC para un proceso de primer orden más retardo de tiempo.

$$\tilde{g}_p(s) = \frac{\tilde{k}_p e^{-\tilde{\theta}s}}{\tilde{\tau}_p s + 1}$$

Paso 1. Usar una aproximación de Padé de primer orden para el tiempo muerto.

$$e^{-\theta s} \approx \frac{-0.5\theta s + 1}{0.5\theta s + 1}$$

$$\tilde{g}_p(s) = \frac{k_p(-0.5\theta s + 1)}{(\tau_p s + 1)(0.5\theta s + 1)}$$

Paso 2. Factorizar, sacar los elementos no invertibles

$$\tilde{g}_{p-}(s) = \frac{k_p}{(\tau_p s + 1)(0.5\theta s + 1)}$$

$$\tilde{g}_{p+}(s) = -0.5\theta s + 1$$

Paso 3. Formar el controlador idealizado

$$\tilde{q}(s) = \frac{(\tau_p s + 1)(0.5\theta s + 1)}{k_p}$$

Paso 4. Agregar el filtro.

$$q(s) = \tilde{q}(s)f(s) = \tilde{g}_{p-}^{-1}(s)f(s) = \frac{(\tau_p s + 1)(0.5\theta s + 1)}{k_p} \frac{1}{\lambda s + 1}$$

Se encuentra el equivalente PID con la transformación

$$g_c = \frac{q(s)}{1 - \tilde{g}_p(s)q(s)} = \frac{\tilde{q}(s)f(s)}{1 - \tilde{g}_p(s)\tilde{q}(s)f(s)}$$

$$g_c = \frac{\tilde{q}(s)f(s)}{1 - \tilde{g}_{p-}(s)\tilde{g}_{p+}(s)\tilde{g}_{p-}^{-1}(s)f(s)} = \frac{\tilde{q}(s)f(s)}{1 - \tilde{g}_{p+}(s)f(s)} = \left(\frac{1}{k_p}\right) \frac{(\tau_p s + 1)(0.5\theta s + 1)}{(\lambda + 0.5\theta)s}$$

Se puede expandir el término del numerado para encontrar

$$g_c(s) = \left(\frac{1}{k_p}\right) \frac{0.5\tau_p \theta s^2 + (\tau_p + 0.5\theta)s + 1}{(\lambda + 0.5\theta)s}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $(\tau_p + 0.5)/(\theta/\tau_p 0.5\theta)$ para encontrar los parámetros PID

$$k_c = \frac{(\tau_p + 0.5\theta)}{k_p(\lambda + 0.5\theta)}$$

$$\tau_i = \tau_p + 0.5\theta$$

$$\tau_D = \frac{\tau_p \theta}{2\tau_p + \theta}$$

El procedimiento de diseño del controlador PID basado en IMC resulta en un controlador PID, cuando el proceso es de primer orden mas retardo de tiempo. Una aproximación de Padé para el tiempo muerto es usada en este desarrollo, aceptando que el factor del filtro λ no puede hacerse arbitrariamente pequeño; por esto, habrá limitaciones de desempeño para la estrategia PID basada en IMC que no ocurre en la estrategia IMC convencional. Rivera (1986) recomienda que $\lambda > 0.8\theta$ por la incertidumbre del modelo debido a la aproximación de Padé. Morari, M y Zafiriou, E (1989) recomiendan $\lambda > 0.25\theta$ para el PID más la formulación en atraso.

La tabla 3 proporciona un resumen de los parámetros de sintonización PID para sistemas sin retardo de tiempo.

Suposiciones diferentes son usadas para derivar el PI y PID mostrados en la tabla 4. La tabla 4 resume los parámetros de sintonización PID para procesos estables con retardo de tiempo. Se muestran los valores mínimos recomendados para λ , ya que aquí son inherentes a la incertidumbre del modelo, debido a la aproximación de Padé. Seleccionando λ cerca del valor que pondrá al sistema en lazo cerrado al borde de la estabilidad, entonces con mayor frecuencia los valores de sintonización iniciales para λ serán significativamente mayores que estos valores mínimos.

El desempeño del PID más el filtro es casi idéntico al IMC “puro”. Esto muestra que el poderoso encuadre IMC puede ser usado para diseñar controladores de tipo PID que pueden ser implementados en procesos industriales usando el equipo de control (PID) existente.

Los resultados para varias funciones de transferencias de procesos inestables son mostrados en la tabla 5.

2.3.4 Generalización del procedimiento de diseño PID basado en IMC.

1. Encontrar la función de transferencia del controlador IMC, $q(s)$, que incluye un filtro $f(s)$. El controlador, $q(s)$, puede ser *semipropio* e incluso *impropio* para dar resultante un controlador PID. Si un modelo de proceso tiene un

retardo de tiempo, se usa una aproximación de Padé de primer orden o segundo orden.

Para un buen seguimiento de la referencia, un filtro con la siguiente forma es utilizado generalmente

$$f(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^n}$$

Para mejorar el rechazo de perturbaciones, o para integración y procesos inestables en lazo abierto, un filtro con la siguiente forma es usado

$$f(s) = \frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^n}$$

Para el rechazo de perturbaciones, γ es seleccionado de modo que el término dentro de los corchetes cancele el polo más lento en la función de transferencia de la perturbación (muchas veces $g_d(s) = g_p(s)$ para perturbaciones de entrada)

$$y(s) = [1 - \tilde{g}_p(s)q(s)]g_d \cdot l(s)$$

Para procesos inestables, un valor de γ es encontrado de manera que satisfice los requerimientos del filtro $f(s = p_u) = 1$.

2. Encontrar el controlador PID basado en IMC usando la transformación

$$g_c = \frac{q(s)}{1 - \tilde{g}_p(s)q(s)}$$

Esto se escribe en la forma de un cociente entre dos polinomios.

3. Presentar esto en la forma PID y encontrar, k_c, τ_I, τ_D . Algunas veces este procedimiento resulta en un controlador PID ideal en cascada con un filtro de primer orden, con una constante de tiempo del filtro (τ_F)

$$g_c(s) = k_c \left[\frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s} \right] \left[\frac{1}{\tau_F s + 1} \right]$$

4. Realizar simulaciones en lazo cerrado para ambos casos *el modelo perfecto* y casos con incompatibilidad de modelo. Ajustar λ considerando un intercambio entre el desempeño y la robustez (sensibilidad al error del modelo).

	$g_p(s)$	$g_{CL}(s)$	k_C	τ_I	τ_D	τ_F
A	$\frac{k_p}{\tau_p s + 1}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{\tau_p}{k_p \lambda}$	τ_p		
B ^b	$\frac{k_p}{\tau_p s + 1}$	$\frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{2\tau_p - \lambda}{k_p \lambda}$	$\frac{2\tau_p \lambda - \lambda^2}{\tau_p}$		
C	$\frac{k_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{\tau_1 + \tau_2}{k_p \lambda}$	$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$	
D	$\frac{k_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{2\zeta \tau}{k_p \lambda}$	$2\zeta \tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$	
E ^c	$\frac{k_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$	$\frac{1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{\zeta \tau}{k_p \lambda}$	$2\zeta \tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$	$\frac{\lambda}{2}$
F ^{c,d}	$\frac{k_p(-\beta s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$	$\frac{(-\beta s + 1)}{(\beta s + 1)(\lambda s + 1)}$	$\frac{2\zeta \tau}{k_p(2\beta + \lambda)}$	$2\zeta \tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$	$\frac{\beta \lambda}{2\beta + \lambda}$
G ^d	$\frac{k_p(-\beta s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$	$\frac{-\beta s + 1}{\lambda s + 1}$	$\frac{2\zeta \tau}{k_p(\beta + \lambda)}$	$2\zeta \tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$	
H	$\frac{k}{s}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{1}{k\lambda}$			
I ^e	$\frac{k}{s}$	$\frac{2\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{2}{k\lambda}$	2λ		
J	$\frac{k}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{1}{k\lambda}$		τ	
K ^e	$\frac{k}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{2\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{2\lambda + \tau}{k\lambda^2}$	$2\lambda + \tau$	$\frac{2\lambda \tau}{2\lambda + \tau}$	

Tabla 3. Parámetros de sintonización PID ideal para lazo abierto estable y procesos de integración ^a.

^a Parámetros para funciones de transferencias de procesos son dadas por Rivera (1986), Morari y Zafiriou (1989).

^b El controlador es diseñado para mejorar el rechazo a la entrada de perturbación;

$$\gamma = \frac{2\tau_p \lambda - \lambda^2}{\tau_p}. \text{ Se desea } \gamma > 0, \text{ lo que lleva a } \lambda < 2\tau_p$$

^c El controlador es PID más atraso $g_c(s) = k_c \left[\frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s} \right] \left[\frac{1}{\tau_F s + 1} \right]$

^d Es asumido $\beta > 0$ (respuesta inversa, ceros RHP).

^e El controlador es diseñado para cambios de referencia tipo rampa. Esto además generalmente conlleva a un mejor rechazo a la entrada de perturbación.

	$g_p(s)$	k_c	τ_I	τ_D	τ_F	Notas ^b
A	$\frac{k_p e^{-\theta s}}{\tau_p s + 1}$	$\frac{\tau_p + \frac{\theta}{2}}{k_p (\theta + \lambda)}$	$\tau_p + \frac{\theta}{2}$	$\frac{\tau_p \theta}{2\tau_p + \theta}$	$\frac{\lambda \theta}{2(\lambda + \theta)}$	1
B	$\frac{k_p e^{-\theta s}}{\tau_p s + 1}$	$\frac{\tau_p + \frac{\theta}{2}}{k_p \left(\lambda + \frac{\theta}{2} \right)}$	$\tau_p + \frac{\theta}{2}$	$\frac{\tau_p \theta}{2\tau_p + \theta}$		2
C	$\frac{k_p e^{-\theta s}}{\tau_p s + 1}$	$\frac{\tau_p}{k_p \lambda}$	τ_p			3
D	$\frac{k_p e^{-\theta s}}{\tau_p s + 1}$	$\frac{\tau_p + \frac{\theta}{2}}{k_p \lambda}$	$\tau_p + \frac{\theta}{2}$			4
E	$\frac{k e^{-\theta s}}{s}$	$\frac{2\lambda + \theta}{k(\lambda + \theta)^2}$	$2\lambda + \theta$			5
F	$\frac{k e^{-\theta s}}{s}$	$\frac{2}{k \left(\lambda + \frac{\theta}{2} \right)}$	$2\lambda + \theta$	$\frac{\lambda \theta + \frac{\theta^2}{4}}{2\lambda + \theta}$		6
G	$k e^{-\theta s}$	$\frac{\theta}{k(2\lambda + \theta)}$	$\frac{\theta}{2}$			7
H	$k e^{-\theta s}$	$\frac{\theta}{k(4\lambda + \theta)}$	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{6}$	$\frac{2\lambda^2 - \frac{\theta^2}{6}}{4\lambda + \theta}$	8

Tabla 4. Parámetros de sintonización PID para procesos estables con tiempo muerto ^a.

^a Basado en la función de transferencia del controlador PID ideal

$$g_c(s) = k_c \left[\frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s} \right] \left[\frac{1}{\tau_F s + 1} \right]$$

^b PID basado en IMC esta basado en una aproximación de Padé de primer orden, salvo indicación contraria. 1, con factorización $q(s)$ *semipropio* se recomienda $\lambda > 0.25\theta$. 2, sin factorización $q(s)$ *impropio*; se recomienda $\lambda > 0.8\theta$. 3, retardo de tiempo desechado; se recomienda $\lambda > 1.7\theta$. 4, retardo de tiempo desechado; constante de tiempo efectiva incrementada por 0.5 θ ; se recomienda $\lambda > 1.7\theta$. 5, usando una aproximación de Taylor para el tiempo muerto $(-\theta s + 1)$. 6, Con un $q(s)$ *impropio*. 7, Usando una aproximación de Padé de primer orden para el tiempo muerto. 8, Usando una aproximación de Padé de segundo orden para el tiempo muerto. En todos los casos se recomienda que $\lambda > 0.2\tau_p$.

	$g_p(s)$	k_C	τ_I	τ_D	τ_F	Notas _a
A	$\frac{k_p}{-\tau_u s + 1}$	$\frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{-(\lambda + \tau_u)}{k_p \lambda}$	γ		1
B	$\frac{k_p}{(-\tau_u s + 1)(\tau_p s + 1)}$	$\frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{-\tau_u(\gamma + \tau_p)}{k_p \lambda^2}$	$\gamma + \tau_p$	$\frac{\gamma \tau_p}{\gamma + \tau_p}$	1
C	$\frac{k_p(\tau_n s + 1)}{(-\tau_u s + 1)(\tau_p s + 1)}$	$\frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{-1}{k_p} \left(1 + \frac{2\tau_u}{\lambda}\right)$	γ		1,2

Tabla 5. Parámetros de sintonización PID para procesos inestables.

a 1, $\gamma = \lambda \left(\frac{\lambda}{\tau_u} + 2 \right)$. 2, PI en cascada con un filtro en adelanto-atraso, $\frac{\tau_p s + 1}{\tau_p s + 1}$.

2.4 CRITERIOS DE LA INTEGRAL DEL ERROR

Debido a que error esta en función del tiempo que dura la respuesta, la suma del error en el tiempo en cada instante se debe minimizar. Dicha suma es por definición, la integral del error en el tiempo. Figura 10. [Lopez], [Corripio].

La búsqueda de una forma para cuantificar el comportamiento de los lazos de control llevó al establecimiento de índices de desempeño basados en la señal de error $e(t)$, la cual es la diferencia entre el valor deseado de la variable controlada y su valor real. De estos los más conocidos son los llamados *criterios integrales*.

Los criterios de la integral del error ISE, IAE o ITAE son fácilmente implementables empleando algún método de integración numérica que forme parte del paquete de software que realiza la simulación dinámica del sistema bajo estudio. Teniendo en cuenta la evolución del error tanto para cambios de referencia, como en carga (perturbaciones) como se muestra en la Figura 11.

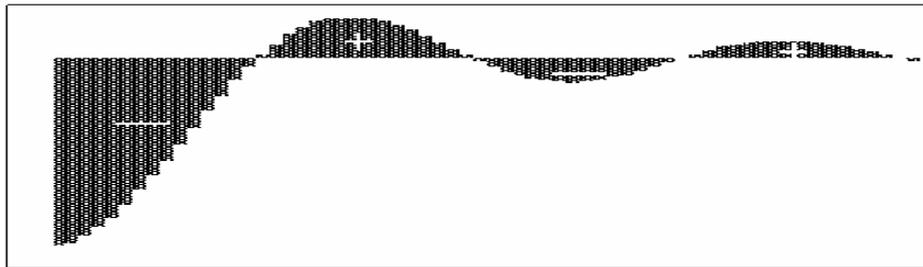
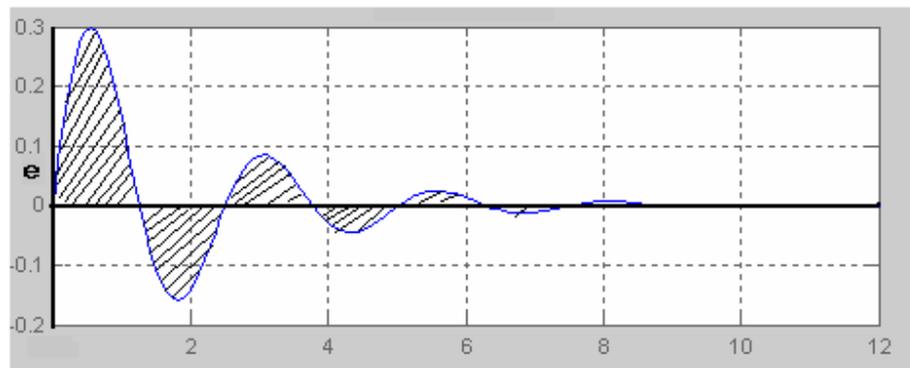
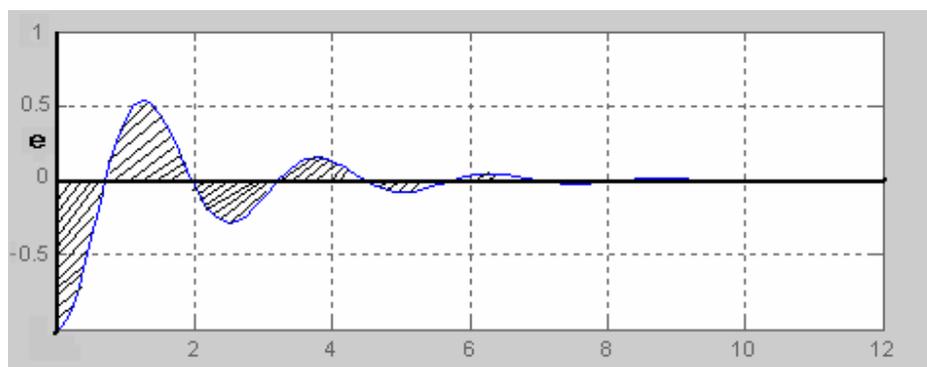


Figura 10. Característica de la curva del error



(a)



(b)

Figura 11. Evolución del error. (a) Para cambios en carga (perturbaciones).
(b) Cambios de referencia.

Puede observarse que la evolución del error toma magnitudes positivas y negativas en ambos tipos de cambio. Por lo tanto para tener una idea realista del verdadero impacto que tiene este en la respuesta se debe de tomar una medida que sea independiente del signo. Entonces los índices típicamente usados son:

1. Integral del error cuadrático (ISE – Integral Square Error). Se emplea siempre que la magnitud del error no sea $\ll 1$

$$ISE = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt$$

Donde el error esta dado por $e(t) = r(t) - y(t)$

2. Integral del valor absoluto del error (IAE – Integral of Absolute value of Error). Se emplea con buenos resultados aun cuando la magnitud del error es $\ll 1$

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

El IAE brinda el área bajo la curva del error, esta representa la cantidad de material fuera de especificaciones, energía perdida u otra característica indeseada. Si $IAE \rightarrow 0$, entonces, $y(t) \rightarrow r(t) \forall t$, si el control fuese perfecto.

3. Integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE – Integral of Time-weighted Absolute value of Error). Se emplea cuando la magnitud del error es $\ll 1$ pero además perdura en el tiempo de forma que este trabaja como un factor de peso variable.

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

El criterio ITAE es la función de costo preferida para el desempeño debido a su habilidad para producir ajustes más conservadores en parámetros del controlador estos significa que la función de costo ITAE proporciona controladores mas robustos.

El controlador se diseña eligiendo los parámetros que minimizan la integral de alguna medida del error, seleccionada de acuerdo a los criterios mencionados anteriormente.

2.4.1 Antecedentes.

Willis D.M. (1962) fue uno de los primeros en utilizar los criterios integrales para estudiar el efecto de los parámetros del controlador sobre el valor de estos índices, mostrando sus conclusiones en forma grafica.

López, A. M., Miller, J. A., Smith, C. L., Murrill P. W. (1967). Estudiaron los controladores P, PI y PID con los criterios integrales IAE, ISE e ITAE y establecieron las relaciones matemáticas para el cálculo de los parámetros de un controlador PID *ideal* para sistemas operando como reguladores para valores de $\theta_a / \tau \leq 1$.

Por su parte Rovira, A., Murrill, P. W., Smith C. L. (1969). Lo hicieron para controladores PI y PID, en sistemas operando como servomecanismo con los criterios IAE e ITAE y determinaron ecuaciones para la sintonización de un controlador PID *ideal* válidas también para valores de $\theta_a / \tau \leq 1$.

Como se ha indicado anteriormente, las ecuaciones de López y las de Rovira se pueden aplicar directamente para el cálculo de los parámetros de un controlador PID ideal. Usualmente con $\tau = 0.1$

Posteriormente Kaya, A. y Sheib, T. J. (1988). Realizaron nuevamente el estudio para determinar los parámetros de los controladores optimizados con criterios IAE, ISE e ITAE para valores de $\theta_a / \tau \leq 1$, pero para controladores PID *serie*, una variante del PID *paralelo* y el PID *industrial*. Las características de los diferentes controladores PID y las ecuaciones para la conversión de los parámetros entre estos, son presentadas por Alfaro, V.M. (1993).

Una función de costo ISE ponderada (*WISE*) fue utilizada por Nishikawa, Y., Sannomiya, N., Ohta, T., Tanaka H. (1984), para establecer polinomios para el cálculo de los parámetros de controladores *PI* y *PID-Ideal* para cambios tanto en el valor deseado como en la perturbación.

Por su parte Sung, S.W., O, J., Lee, I. B. Lee J. (1996), optimizaron la función de costo ITAE a partir de un modelo de segundo orden más tiempo muerto, con un controlador *PID-Ideal* y ajustaron las ecuaciones de sintonización para $0,05 \leq \theta_a / \tau^2 \leq 2,0$.

2.4.2 Métodos de optimización.

El concepto de optimización de sistemas de control abarca dos etapas, una de selección de índices de desempeño y otra de diseño en base a la minimización o maximización de dichos índices.

Al resolver problemas de sistemas de control óptimo (por ejemplo), se tiene por objetivo hallar un procedimiento para determinar la acción de control sujeta a

restricciones que disminuyen en alguna medida el comportamiento ideal. Tal medida habitualmente está dada por un criterio de optimización de un índice de desempeño. Ese índice es una función cuyo valor indica hasta qué punto el funcionamiento efectivo del sistema se acerca al funcionamiento deseado.

El planteamiento general de la optimización de un sistema realimentado de control, da por solución la ley de control óptima, es decir, la estructura y parámetros del controlador.

Si se establece de antemano una estructura para el controlador (por ejemplo una estructura PID), el problema de optimización se reduce a encontrar los valores de los parámetros del controlador que minimizan (o maximizan) un determinado índice de desempeño.

2.4.3 Cálculo óptimo del controlador.

Los criterios integrales del error sirven para los sistemas de control en realimentación, donde el error a la salida debe de ser minimizado con relación al tiempo. El método de ajuste IFT (*Iterative Feedback Tuning*) tiene como objetivo la sintonía directa, en lazo cerrado de los parámetros de un controlador tipo PID. El ajuste se realiza mediante la minimización de una función de costo (criterio integral). El método no exige ningún conocimiento explícito del modelo de la planta ni de las perturbaciones.

Se trata de ajustar los parámetros ρ del controlador, de manera que minimice cierta función de costo típicamente relacionada con el error de seguimiento de la referencia y con el esfuerzo de control como se muestra en la siguiente ecuación

$$J(\rho) = \int_{t=0}^N \{ [e(t)] + \lambda [u(t)] \}$$

Matemáticamente el problema se plantea como encontrar los parámetros óptimos ρ^0 tales que

$$\rho^0 = \arg \min_{\rho} J(\rho)$$

Una manera sistemática de resolver un problema de optimización como el planteado es mediante un algoritmo numérico iterativo del tipo

$$\rho(k+1) = \rho(k) - \delta_k R_k^{-1} \frac{\partial J}{\partial \rho} \rho(k)$$

Donde R_k es el Hessiano de J y δ es el paso de optimización. En cada iteración, el algoritmo propone un nuevo vector de parámetros $\rho(k+1)$ que modifica los parámetros de la iteración anterior, $\rho(k)$, según un vector relacionado con el gradiente de la función de coste con respecto a los parámetros.

Ahora bien, para poder aplicar este algoritmo se necesita conocer el gradiente del índice. Es evidente, sin embargo, que dicha magnitud depende de la función de transferencia de la planta que se asume desconocida. La principal aportación del método *IFT* es haber hallado la manera de estimar dicho gradiente a partir de experimentos sobre el sistema en lazo cerrado.

Primero, se sabe que un estimado (*est*) del gradiente de la función de costo puede ser hallado como:

$$est \frac{\partial J}{\partial \rho}(\rho) = \frac{1}{N} \left[\sum_{t=1}^N \tilde{y}_t(\rho) est \frac{\partial \tilde{y}_t(\rho)}{\partial \rho} + \lambda \sum_{t=1}^N u_t(\rho) est \frac{\partial u_t(\rho)}{\partial \rho} \right]$$

Donde

$$\tilde{y}(\rho) = y(\rho) - y^d$$

Siendo y la salida del sistema en lazo cerrado y, y^d la salida deseada.

Para calcular los gradientes del índice se debe primero obtener los gradientes de la salida del sistema y del controlador con respecto a los parámetros de este último.

2.4.4 Ajuste mediante los criterios integrales de error de integración mínimo.

López y asociados desarrollaron formulas de ajuste para el criterio de integral mínima de error con base en la suposición de que la función de transferencia del proceso para las entradas de perturbaciones es idéntica a la función de transferencia para la señal de salida del controlador. En las tabla 6, 7 y 8 se dan las ecuaciones de ajuste de integral mínima de error para entrada de perturbaciones.

Integral del error	ISE	IAE	ITAE
$k_c = \frac{a}{k_p} \left(\frac{\theta}{\tau_p} \right)^b$	$a = 1.411$	$a = 0.902$	$a = 0.490$
	$b = -0.917$	$b = -0.985$	$b = -1.084$

Tabla 6. Criterios integrales para control proporcional

Integral del error	ISE	IAE	ITAE
$k_C = \frac{a_1}{k_p} \left(\frac{\theta}{\tau_p} \right)^{b_1}$	$a_1 = 1.305$	$a_1 = 0.984$	$a_1 = 0.859$
	$b_1 = -0.959$	$b_1 = -0.986$	$b_1 = -0.977$
$\tau_I = \frac{\tau_p}{a_2} \left(\frac{\theta}{\tau_p} \right)^{b_2}$	$a_2 = 0.492$	$a_2 = 0.608$	$a_2 = 0.674$
	$b_2 = 0.739$	$b_2 = 0.707$	$b_2 = 0.680$

Tabla 7. Criterios integrales para control proporcional – integral (PI)

Integral del error	ISE	IAE	ITAE
$k_C = \frac{a_1}{k_p} \left(\frac{\theta}{\tau_p} \right)^{b_1}$	$a_1 = 1.495$	$a_1 = 1.435$	$a_1 = 1.357$
	$b_1 = -0.945$	$b_1 = -0.921$	$b_1 = -0.947$
$\tau_I = \frac{\tau_p}{a_2} \left(\frac{\theta}{\tau_p} \right)^{b_2}$	$a_2 = 1.101$	$a_2 = 0.878$	$a_2 = 0.842$
	$b_2 = 0.771$	$b_2 = 0.749$	$b_2 = 0.738$
$\tau_D = a_3 \tau_p \left(\frac{\theta}{\tau_p} \right)^{b_3}$	$a_3 = 0.560$	$a_3 = 0.482$	$a_3 = 0.381$
	$b_3 = 1.006$	$b_3 = 1.137$	$b_3 = 0.995$

Tabla 8. Criterios integrales para control PID

3 PARÁMETROS PARA LA EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO DE REGULADORES

Las metodologías estudiadas y presentadas en esta parte del trabajo han sido desarrolladas por [Swanda], [Wade], [Boyd y Craig]. Del análisis y comprensión de estos documentos resulta la elaboración de algunos criterios de comparación de desempeño (basados en la implementación) entre los reguladores.

3.1 EVALUACIÓN DE DESEMPEÑO DEL CONTROLADOR BASADO EN LOS DATOS DE RESPUESTA A LA REFERENCIA

[Swanda y Seborg] Proponen una metodología para determinar el desempeño de los controladores PI basados en datos de respuesta en lazo cerrado para un cambio de la referencia (*setpoint*) tipo escalón. Se basa en el funcionamiento de dos índices adimensionales que son, el tiempo de asentamiento adimensional y la integral del valor absoluto del error adimensional.

La metodología es utilizada para cuantificar que tan lejano está un lazo de control del mejor desempeño realizable con control PI. También identifica lazos de control que se desempeñan pobremente, y aquellos que son excesivamente lentos. El desempeño y las propiedades de robustez del método de sintonización de Control con Modelo Interno (IMC) son analizados y utilizados como estándares industriales de comparación relevantes. Esta metodología es también aplicable a controladores PID.

Varias características de dominio en el tiempo se usan tradicionalmente para describir una respuesta tipo escalón (figura 2) en lazo cerrado para un cambio en la referencia: el tiempo de subida, t_r , el tiempo de asentamiento, t_s , y el sobre impulso (*overshoot*), OS. El tiempo de asentamiento está definido como el tiempo que la salida del proceso toma para cumplir y permanecer dentro de una banda cuya anchura es igual a $\pm\alpha$ y de la diferencia entre los valores en estado estacionario iniciales y finales.

Otra caracterización utilizada para determinar el funcionamiento del sistema de control es la Integral del valor absoluto del error (IAE), donde el error es igual a la diferencia existente entre la referencia (*setpoint*) y la señal de salida.

Un primer orden más retardo de tiempo en el modelo de la función de transferencia es usado para desarrollar estándares de comparación de desempeño

$$G(s) = \frac{k_p e^{-\theta s}}{\tau_p s + 1} \quad \text{Modelo 1}$$

El t_s , y los valores de IAE son adimensionales usando el retardo de tiempo. Se demuestra que los índices adimensionales del desempeño de un controlador correctamente sintonizado son aproximadamente independientes del modelamiento de un sistema lineal. Así con el conocimiento limitado de la planta fundamental, el desempeño del controlador PI puede ser evaluado.

3.1.1 Funcionamiento de los índices adimensionales.

Un índice de desempeño puede ser desarrollado utilizando el retardo y el tiempo de asentamiento en un índice adimensional, el cual puede ser definido como:

$$T_s \equiv \frac{t_s}{\theta}$$

Los valores de prueba comparativa para T_s determinan un indicativo de controladores correctamente sintonizados. El lector puede notar que esta expresión aparece naturalmente en varias técnicas de sintonización, sin embargo aquí el objetivo es utilizarla como índice de comparación de reguladores.

Dado que el tiempo de asentamiento se basa solo en un punto de la curva, a menudo es importante caracterizar la curva entera de respuesta, una caracterización tal es la integral del valor absoluto del error (IAE). Se define un índice adimensional de IAE, IAE_d para los cambios de referencia escalón como:

$$IAE_d = \frac{IAE}{|r_o|\theta}$$

Donde r_o , es el tamaño del cambio de la referencia escalón. Los valores de prueba comparativa para IAE_d determinan un indicativo de controladores correctamente sintonizados.

Es interesante notar que estos índices pueden ser calculados analíticamente para ciertos métodos de diseño. Para el caso IMC, el índice T_s para un modelo de primer orden más retardo de tiempo es expresado como

$$T_s = 2.30 \frac{\lambda}{\theta} + 1 \quad (1)$$

Para el desarrollo analítico de la expresión (1) ver [\[Swanda y Seborg\]](#)

La ecuación (1) es razonablemente precisa porque sobre estima el tiempo de asentamiento adimensional verdadero por un factor no mas de 1.1 para $\lambda/\theta \geq 1$. Esta desigualdad es cercana a cero para valores grandes de λ/θ .

Una expresión analítica para IAE también puede ser derivada usando la función de transferencia en lazo cerrado para el modelo 1 (con el controlador IMC-PI) y una aproximación de Padé de primer orden, para el retardo de tiempo del denominador.

$$IAE_d = 1 + \frac{\lambda}{\theta} \quad (2)$$

La ecuación (2) es muy precisa aún para $\lambda/\theta \geq 1$, lo cual incluye los casos: levemente poco-amortiguado, críticamente amortiguado y sistemas sobre-amortiguados.

La ecuación (1) puede ser combinada con (2) para proporcionar la siguiente relación aproximada entre T_s e IAE_d :

$$IAE_d = \frac{T_s}{2.30} + 0.565 \quad \text{Para } T_s \geq 3.30 \quad (3)$$

La condición que $T_s \geq 3.30$, ocurre porque (1) y (2) son únicamente válidos para $\lambda/\theta \geq 1$.

3.1.2 Intercambio entre robustez y desempeño.

El modelo de la función de transferencia en lazo abierto para el modelo 1 y el controlador IMC-PI es:

$$G_{OL} = G_c G = \frac{1}{(\lambda + \theta)s} \cdot e^{-\theta s} \quad (4)$$

El margen de ganancia correspondiente, GM, y el margen de fase, PM, puede estar expresados como una función de λ/θ .

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\lambda}{\theta} + 1 \right) \quad (5)$$

$$PM = \pi + \arg\{G_{OL}(j\omega_g)\} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\frac{\lambda}{\theta} + 1} \quad (6)$$

Donde ω_c es la frecuencia de cruce por fase y ω_g es la frecuencia de cruce por la ganancia. Las ecuaciones (5) y (6) son simples y proporcionan entendimiento en como λ parámetro sintonizador guarda relación con la robustez. Ellas pueden ser usadas para determinar el valor apropiado de λ para un par deseado del margen fase – ganancia. Además, son también útiles porque pueden usarse para relacionar los márgenes de ganancia y fase con los índices de desempeño adimensional.

Por ejemplo, solucionando (1) para λ/θ y sustituyendo el resultado en (5) y (6) produce:

$$GM = \frac{\pi}{2} \left(\frac{T_s}{2.30} + 0.565 \right) \quad (7)$$

$$PM = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\frac{T_s}{2.30} + 0.565} \quad (8)$$

Ya que (1) es solamente aplicable para $\lambda/\theta \geq 1$, las relaciones anteriormente citadas de robustez – desempeño son validas para $T_s \geq 3.30$.

3.1.3 Estudio de simulación.

Las ecuaciones (3), (7) y (8) son aproximadas y basadas en el modelo 1 se demuestra que son precisas pese a la aproximación y que son también aplicables a otros modelos de proceso.

Las simulaciones (Figura 12) en lazo cerrado fueron realizadas utilizando el modelo 1 y cuatro modelos adicionales. En este trabajo se reconstruye el algoritmo para verificar la metodología expuesta por [\[Swanda y Seborg\]](#).

:

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2} \quad \text{Modelo 2}$$

$$G(s) = \frac{(1.25s+1)e^{-0.4s}}{(s+1)^2} \quad \text{Modelo 3}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^5} \quad \text{Modelo 4}$$

$$G(s) = \frac{-0.75s+1}{(s+1)^3} \quad \text{Modelo 5}$$

Los modelos 1 a 5 representan una gran variedad de lazos abiertos en procesos estables. La forma convencional del controlador PI

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

Donde U es la salida del controlador, E es el error, K_C es la ganancia del controlador y τ_I es el tiempo integral.

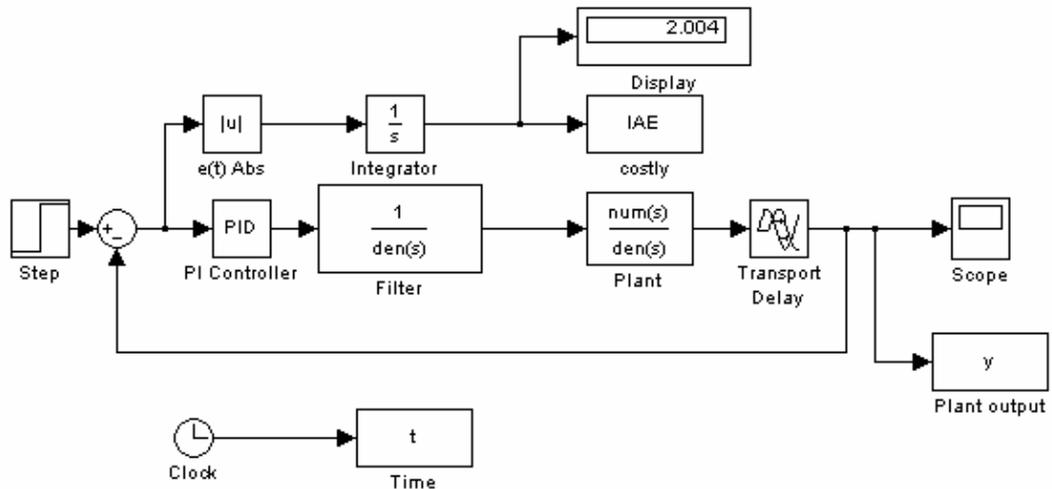


Figura 12. Simulación para cinco modelos en lazo cerrado

Los valores de los parámetros del PI, se asignan de acuerdo a las tablas 3, 4 y 5. De igual manera la forma de la función de transferencia del filtro varia de acuerdo al modelo como muestran las tablas 3, 4 y 5.

La figura 13 compara numéricamente T_s e IAE_d determina los valores para los modelos 1 a 5 con la relación analítica (3). La relación $T_s - IAE_d$ es casi la misma para todos los cinco modelos. También demuestra que hay una diferencia pequeña entre los datos y (3) para valores pequeños de T_s . Para mejorar la exactitud de la relación, se utiliza la regresión lineal para desarrollar un ajuste de línea recta.

$$IAE_d = \frac{T_s}{2.43} + 0.878 \text{ Para } T_s \geq 3.30$$

El cual es también mostrado en la figura 13. Las figuras 14 y 15 demuestran que los márgenes de ganancia y fase se relacionan dentro de (7) y (8) estas concuerdan correctamente con los valores numéricamente determinados para los modelos 1 a 5. La simulación resulta en las figuras 13 a 15 muestran que (3), (7) y (8) son precisas para una gran variedad de modelos y no están limitadas para el modelo 1.

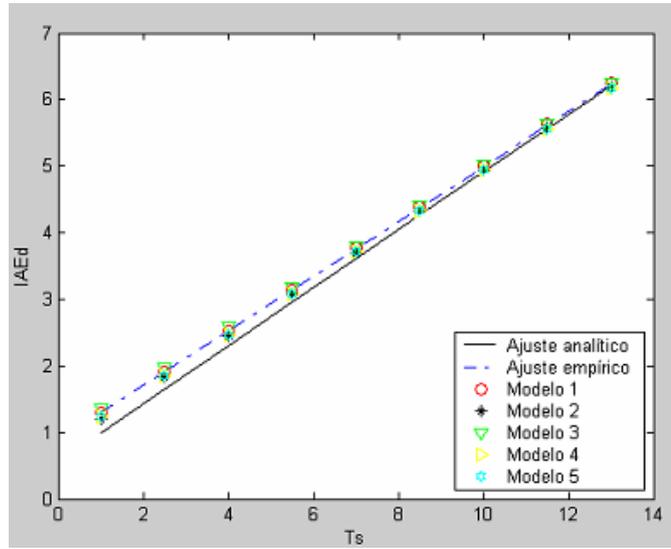


Figura 13. Comparación de las relaciones analítica y experimental entre Ts e IAEd con los valores numéricamente determinados para los modelos 1 a 5.

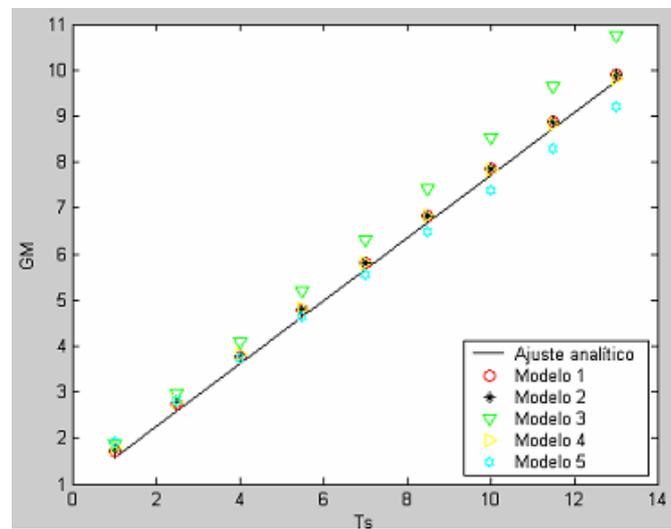


Figura 14. Comparación de las relaciones analítica y experimental entre Ts y GM con los valores numéricamente determinados para los modelos 1 a 5.

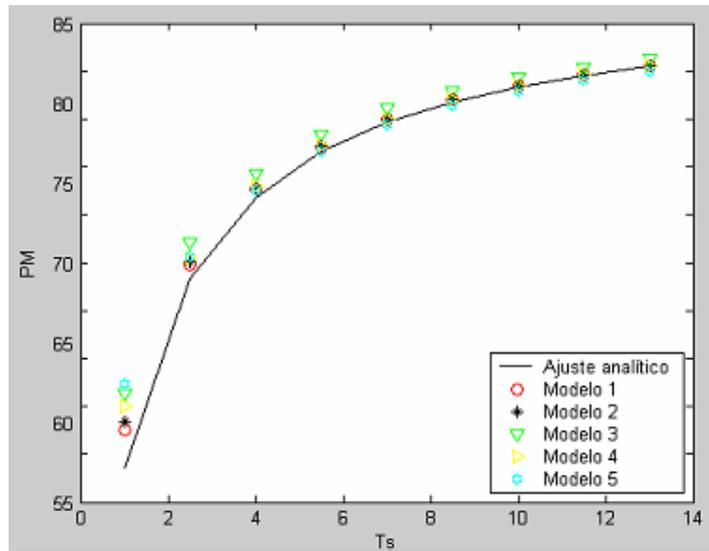


Figura 15. Comparación de las relaciones analítica y experimental entre Ts y PM con los valores numéricamente determinados para los modelos 1 a 5.

En conclusión los índices utilizados para evaluar el desempeño de los reguladores son:

- a) Porcentaje de error máximo: $PME = \frac{100|y(t)máx - r(t)|}{r(t)}$
- b) Tiempo de establecimiento ($ts_{2\%}$)
- c) Integral del valor absoluto del error adimensional (IAE)
- d) Tiempo de establecimiento adimensional

4 ROBUSTEZ DE LOS MÉTODOS DE SINTONIZACIÓN

El objetivo fundamental de este estudio es la utilización de criterios de comparación de robustez para diferentes diseños de reguladores, basado en las técnicas propuestas de evaluación de desempeño y robustez para controladores de tipo PID y PI. [Wade], [Ogata]. Un enfoque hacia la caracterización de los sistemas control basados en hiperestabilidad, se plantea al finalizar este capítulo como un posible herramienta de evaluación de la robustez. [Navarro], [Zozaya].

4.1 ROBUSTEZ DEL SISTEMA DE CONTROL Y ESTABILIDAD

La robustez es la habilidad de un sistema de control de mantener las características de comportamiento deseadas ante cambios en los parámetros de la planta. De esta forma cuando un método de sintonización es robusto, significa que su comportamiento en modo de operación ya sea como servomecanismo o como regulador no se ve mayormente afectado al variarse algunos parámetros de la planta. Si por el contrario el método no es robusto, el sistema puede verse afectado considerablemente hasta el punto de volverse inestable.

Es un hecho muy conocido que la realimentación reduce el efecto de las perturbaciones y modera errores de modelado o los cambios de parámetros en el desempeño de un sistema de control. Sin embargo ante la presencia de perturbaciones y ruido en el sensor, si se pretende diseñar sistemas de control de alto desempeño se debe tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Desempeño del seguimiento (reducir el error de seguimiento)
- Rechazo a perturbaciones (reducir la salida y para una entrada de perturbación)
- Sensibilidad ante los errores en el modelado (reducir la sensibilidad)
- Margen de estabilidad (establecer una estabilidad robusta)
- Sensibilidad a ruido en el sensor (reducir la sensibilidad)

Para la realización de la investigación se utilizó las consideraciones como la sensibilidad ante los errores en el modelado y margen de estabilidad ya que ofrecen una visión clara en la robustez de un sistema.

4.1.1 Desempeño robusto.

El desempeño de los controladores para el control robusto es, esencialmente una pregunta de qué tan adecuadamente el sistema de control retiene el desempeño deseado cuando los parámetros del sistema cambian por valores que son diferentes a los valores nominales de diseño del sistema.

Un conjunto de indicadores y medidas del sistema son usados para cuantificar los niveles deseados de desempeño que el sistema de control debería lograr. Las funciones de transferencia del sistema que son comúnmente usadas en el diseño de control para el desempeño robusto incluyen la función de sensibilidad complementaria (T) para el desempeño del monitoreo de la referencia y el rechazo al ruido del sensor, y la función de sensibilidad (S) que sirve para el análisis de rechazo a perturbaciones. En general, el desempeño robusto trata de retener características de las funciones de transferencia, S y T, sobre una clase de incertidumbre dada, de manera que aún en el peor marco hipotético del caso debería resultar un desempeño aceptable del sistema de control.

Un ejemplo típico de desempeño robusto es la habilidad del controlador PI para garantizar el desempeño del monitoreo de la referencia en estado estable aún si la variación del parámetro del proceso ocurre. Esto es porque el término integral siempre eliminara la constante de offset en la señal de error con el paso del tiempo si el sistema permanece estable. En otro ejemplo, PI tiene la habilidad de producir buen rechazo de perturbación y atenúa las constantes de los efectos de las perturbaciones sobre la salida del sistema. La dificultad de lograr un buen desempeño robusto obedece a la relación entre las funciones de sensibilidad; es decir, $S+T = 1$. Por lo tanto, el problema de diseño del sistema de control es como lograr mejor rechazo a perturbaciones o el monitoreo de la referencia pese al acoplamiento entre las funciones de transferencia del sistema, S y T.

4.1.2 Medidas de estabilidad robusta del controlador.

La estabilidad robusta, es la habilidad del sistema de control para retener la estabilidad en lazo cerrado sobre una clase de variaciones de incertidumbres del proceso. En diseño clásico de control hay un número de maneras para cuantificar la incertidumbre del proceso y, posteriormente, la estabilidad robusta en lazo cerrado del sistema de control.

Las medidas más conocidas para la estabilidad robusta son: *el margen de ganancia* (GM) y *el margen de fase* (PM), los cuales cuantifican la distancia del sistema en lazo cerrado de hallarse inestable cuando hay perturbaciones en el sistema.

El cálculo del margen de ganancia produce una medida de cambio aceptable en la ganancia del sistema tal que la estabilidad en lazo cerrado es mantenida. Alternativamente, GM es la magnitud por la cual el plano de Nyquist puede ser multiplicado antes de rodear el punto $(-1+j0)$. Del mismo modo, para el cálculo PM, es el rango de fase permisible en la función de transferencia $e^{-\theta s} G(s)$, que mantiene la estabilidad del sistema en lazo cerrado. *El margen de retardo* (DM) es definido como el retardo mínimo desestabilizador que puede ser introducido en el sistema en lazo cerrado. Hay una relación clara entre PM y DM dada a través de la ecuación:

$$DM = \frac{PM}{\omega_g} \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

Donde ω_g . Es la frecuencia a la cual la ganancia es igual a cero decibeles.

4.2 SENSIBILIDAD ANTE LOS ERRORES EN EL MODELADO

Al diseñar sistemas de control, nuestro diseño se basa en el modelo de una planta específica, tal modelo no es de ninguna manera preciso sino sólo una aproximación a la dinámica real de la planta. La diferencia entre la dinámica de la planta real y la dinámica de un modelo se denomina error de modelado.

Los errores de modelado ocurren por algunas de las siguientes razones:

1. Características no lineales de la planta consideradas
2. Características de alta frecuencia de las plantas no consideradas (por ejemplo los sistemas mecánicos tienen un fenómeno dinámico de alta frecuencia, incluyendo las resonancias el efecto de una masa de resorte no considerada, etc.)
3. La precisión de los parámetros no es suficientemente buena.
4. Simplicidad del modelo (baja complejidad del modelo)

Es posible cuantificar la robustez de un método de sintonización al variar la ganancia o el retardo de tiempo hasta llevar al sistema al límite de la estabilidad y por esto se definen los siguientes índices.

4.2.1 Índices de robustez.

Únicamente la medición del desempeño del lazo de control no puede constituirse en la forma de evaluar la bondad de los métodos de sintonización de controladores.

Una característica deseada para los métodos de sintonización de controladores, es que el sistema de control conserve una operación estable ante cambios en los parámetros de la planta. La variación requerida para llevar el sistema a límite de estabilidad es una indicación de esta habilidad, que se denomina *Robustez*.

Dos parámetros de la planta que pueden sufrir variación son la ganancia y el retardo de tiempo. Los siguientes *índices de robustez* (IRk_p , $IR\theta$) se definen respecto a la variación de estos parámetros:

$$IRk_p = \frac{k_{pu}}{k_p} - 1 \quad (9) \text{ Índice de robustez en la ganancia}$$

$$IR_{\theta} = \frac{\theta_u}{\theta} - 1 \quad (10) \text{ Índice de robustez en el retardo de tiempo}$$

Los parámetros k_p y θ representan los valores de los parámetros de la planta utilizados en la sintonización del regulador; de igual forma los parámetros con subíndice “u” denotan los valores que llevan al sistema de control al límite de la estabilidad.

Los índices de robustez (9) y (10) son mediciones independientes de las variaciones requeridas en la ganancia y en el retardo de tiempo del sistema, para que este se inestabilice, eso si, considerando cada uno por separado, puesto que si la variación es simultanea, el sistema tiende a volverse inestable mucho antes de que los parámetros alcancen los valores establecidos por los índices de robustez.

De esta manera, se define un *Índice de robustez absoluta* (IR_A) dado por la siguiente expresión:

$$IR_A = \min(IRk_p, IR_{\theta}, IR_C) \quad (11)$$

Donde IR_C es denominado *Índice de robustez combinado* y se determina mediante la siguiente ecuación:

$$IR_C = 0.5\sqrt{IRk_p^2 + IR_{\theta}^2} \quad (12)$$

4.2.2 Información última y robustez.

Para obtener el índice de robustez en la ganancia y el índice de robustez en el retardo de tiempo dadas por las ecuaciones (9) y (10), es necesario encontrar la información crítica del sistema.

La información crítica del sistema puede a su vez obtenerse del GM y PM del diagrama de bode, en donde estos corresponden a los puntos en el que la curva de ganancia y la curva de fase cruzan la línea de 0dB y la de los -180° respectivamente.

Para esto se utilizo la instrucción *margin* del programa **MATLAB**, que permite calcular el margen de ganancia y margen de fase. A partir de estos, se obtiene la información última (k_{pu}, θ_u) , dada por las ecuaciones:

$$k_{pu} = GM \cdot k_p \quad (13)$$

$$\theta_u = \theta + PM \cdot \frac{\pi}{100w_g} \quad (14)$$

De esta manera, con los parámetros últimos y las ecuaciones (9) y (10), se obtiene los índices de robustez antes mencionados.

El principal inconveniente sería el cálculo de estos índices con respecto al proceso real, para ello es necesaria una medición mucho más próxima a lo que realmente sucede sobre el proceso. Por tanto se define un índice IR_{PC} .

4.3 ÍNDICE DE ROBUSTEZ RESPECTO A UN PARÁMETRO DEL PROCESO IR_{PC} .

Interesa que la salida de un sistema sea insensible a la variación de sus parámetros para evitar problemas debidos a la imprecisión de sus componentes, por falta de linealidad de los mismos y las perturbaciones en el sistema. Se define el parámetro del índice de robustez ante un parámetro de control de control como el cociente entre la variación unitaria de la salida entre la variación unitaria del parámetro respecto del cual se desea calcular.

En la investigación se utilizaron diferentes parámetros para observar la estabilidad del sistema de control, pero además de estos, se debe tener en cuenta el voltaje en las bombas, el tiempo de uso, los sensores, el estado de los mismos, etc. La señal de las bombas, para este caso es tomada como señal de control, y así poder usarlas como parámetro de medición de robustez, estas señales se pueden observar a través de los graficadores del diagrama de bloques implementado para el programa en Labview.

Para realizar el cálculo de este parámetro se debe tener en cuenta la ganancia del controlador utilizada en cada método de sintonización, la ganancia de la planta, y la variación en la señal del controlador (voltaje en las bombas), y aplicando la ecuación (15), para obtener el índice de robustez ante un parámetro de control, el cual nos permite determinar si el sistema es robusto y estable en presencia de perturbaciones

$$IR_{PC} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta K_S / K_S} \quad (15)$$

Este índice también se puede utilizar para observar la eficiencia de la ganancia respecto al sensor en lazo cerrado, ya que resulta muy importante adquirir sensores con una ganancia muy estable y se justifica que los sensores son realmente la clave del éxito de una buena regulación.

Respecto a la sensibilidad de la ganancia del sensor en lazo cerrado: se sabe que la ganancia del sensor (K_s) varía en un rango de mayor (K_{sh}) a menor (K_{sl}) como se ilustra en las figuras 16 y 17.

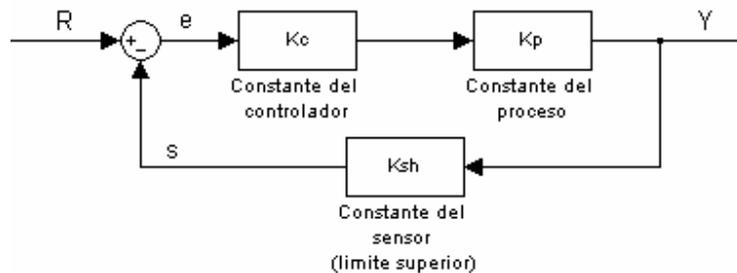


Figura 16. Límite superior de la constante del sensor

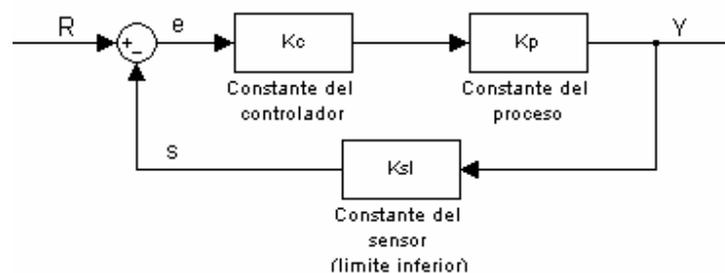


Figura 17. Límite inferior de la constante del sensor

De donde:

$$Y = K_c \cdot K_p (R - S) = K_c \cdot K_p \cdot R - K_c \cdot K_p \cdot S \Rightarrow K_c \cdot K_p \cdot R - K_c \cdot K_p \cdot K_{sh} \cdot Y$$

$$Y + K_c \cdot K_p \cdot K_{sh} \cdot Y = K_c \cdot K_p \cdot R \Rightarrow Y = \frac{K_c \cdot K_p \cdot R}{1 + K_c \cdot K_p \cdot K_{sh}}$$

$$Y' = K_c \cdot K_p (R - S) = K_c \cdot K_p \cdot R - K_c \cdot K_p \cdot S \Rightarrow K_c \cdot K_p \cdot R - K_c \cdot K_p \cdot K_{sl} \cdot Y'$$

$$Y' + K_c \cdot K_p \cdot K_{sl} \cdot Y' = K_c \cdot K_p \cdot R \Rightarrow Y' = \frac{K_c \cdot K_p \cdot R}{1 + K_c \cdot K_p \cdot K_{sl}}$$

Entonces:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{Y' - Y}{Y} \text{ y, } \frac{\Delta K_s}{K_s} = \frac{K_{sl} - K_{sh}}{K_{sh}}$$

Se plantea una forma adicional para la evaluación de la robustez de los métodos de sintonización. Este planteamiento está basado en la teoría de hipersensibilidad y/o pasividad. A continuación se exponen los conceptos fundamentales para la comprensión de dicha teoría.

4.4 ¿QUÉ ES HIPERESTABILIDAD?

El concepto de hiperestabilidad fue introducido por Vasile-Mihai Popov en 1963. Este término es más bien usado en Europa, y que es en opinión de algunos, sinónimo del término Pasividad mayormente usado en USA.

Inicialmente Popov introdujo el concepto para sistemas LTI (lineales e invariantes en el tiempo) con una entrada – una salida (SISO) y subsecuentemente expande estas ideas. La característica significativa de sus resultados es la existencia de una equivalencia entre sistemas hiperestables y los sistemas que pueden estar descritos por una función de transferencia que es real positiva, La función de transferencia es comparable con el asocio que existe entre la entrada y la salida de un sistema pasivo.

Se refiere entonces a la simultánea estabilidad de un conjunto de sistemas que satisfacen la condición:

$$\int_0^t y(\tau)u(\tau)d\tau \geq 0 \quad (16)$$

Donde $u(t)$ constituye la señal de entrada y $y(t)$ es la señal de salida. Los sistemas que satisfacen la inecuación (16), siempre que $x(0) = 0$, se conocen también como sistemas reales positivos y son estables en el sentido de Lyapunov. La combinación en paralelo o realimentada de dos sistemas reales positivos da lugar a un nuevo sistema que también lo es (figura 18).

Según Popov, cualquier bloque **B1** que haga que el sistema realimentado de la figura 18(a) un sistema estable, siendo el bloque **B2** uno cualquiera que satisfaga la inecuación (16), es “*hiperestable*”.

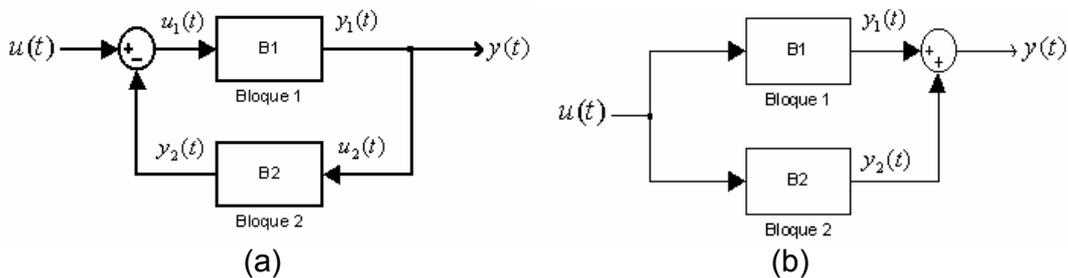


Figura 18. Arquitectura de los sistemas que heredan la propiedad (16), con $x(0) = 0$, de los bloques que los componen.

18 (a) sistema realimentado constituido por dos bloques reales positivos. 18 (b) combinación en paralelo de los bloques reales positivos.

4.4.1 Definición y notación.

Ya que los bloques están constituidos por sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), caracterizados por las ecuaciones en espacios de estado de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU\end{aligned}\quad (17)$$

Donde la pareja de matrices $[A, B]$ es completamente controlable, y $[A, C]$ completamente observable. Asumiendo que los vectores U y Y tienen la misma dimensión. Hiperestabilidad es una propiedad del sistema que requiere el vector de estados para permanecer definido si las entradas de u están restringidas formando parte de un subconjunto del conjunto de todas las entradas posibles. El subconjunto de entradas u es definido por aquellas $u(\cdot)$ el cual satisface para todo T .

$$\int_0^T u'(t) y(t) dt \leq \delta \left[\|x(0)\| \right] \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\| \quad (18)$$

Aquí δ es una constante positiva que depende del estado inicial $x(0)$ del sistema pero independiente del tiempo T y el símbolo $\| \cdot \|$ denota la norma euclidiana.

La notación \sup significa supremo que indica el máximo si se incluyen casos donde el máximo es aproximado solamente como un límite.

El sistema (17) es llamado hiperestable si para cualquier $u(\cdot)$ en el subconjunto definido por (18) la siguiente inecuación se mantiene para alguna constante positiva K en todo t .

$$\|x(t)\| \leq K(\|x(0)\| + \delta) \quad (19)$$

El sistema es llamado "asintóticamente Hiperestable" si para cualquier $u(\cdot)$ en el subconjunto definido por (18) el cual es también definido por la desigualdad (19) sujeta conjuntamente. Y además se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (20)$$

La hiperestabilidad y la hiperestabilidad asintótica son propiedades de la matriz de función de transferencia, esto puede ser comprobado.

4.5 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

En un sistema de control determinado, por lo general, el aspecto cuya determinación es más importante es la estabilidad. Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI), existen muchos criterios de estabilidad. Entre ellos están el criterio de estabilidad de Nyquist y el criterio de estabilidad de Routh. Sin embargo, si el sistema es no lineal o lineal pero variante con el tiempo, tales criterios de estabilidad no se aplican.

En 1892, A. M. Lyapunov presentó dos métodos para determinar la estabilidad de los sistemas dinámicos descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. El primer método se compone de todos los procedimientos en los cuales se usa la forma explícita de la solución de las ecuaciones diferenciales para el análisis.

En cambio el segundo método no requiere de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Es decir, mediante el segundo método de Lyapunov, se determina la estabilidad de un sistema sin resolver las ecuaciones de estado. Esto ofrece una gran ventaja porque, por lo general, es muy difícil despejar las ecuaciones de estado no lineales y/o variantes en el tiempo.

4.5.1 Definición positiva de las funciones escalares.

Se dice que una función escalar $V(x)$ es definida positiva en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estados) si $V(x) > 0$ para todos los estados x diferentes de cero en la región Ω y $V(0) = 0$.

Se dice que una función variante con el tiempo $V(x,t)$ es definida positiva en una región Ω (que incluye el origen del espacio de estados) si esta limitada desde abajo por una función definida positiva variante con el tiempo, es decir, si existe una función positiva $V(x)$ tal que:

$$\begin{aligned} V(x,t) &> V(x), & \text{Para todo } t &\geq t_0 \\ V(0,t) &= 0, & \text{Para todo } t &\geq t_0 \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} V(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 \\ V(x) &= x_1^2 + \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} \end{aligned}$$

4.5.2 Definición negativa de las funciones escalares.

Se dice que una función escalar $V(x)$ es definida negativa si $-V(x)$ es definida positiva. Ejemplo:

$$V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$$

4.5.3 Semidefinidad positiva de las funciones escalares.

Se dice que una función escalar $V(x)$ es semidefinida positiva si es positiva en todos los estados de la región Ω , excepto en el origen y en ciertos otros estados, en donde es cero. Ejemplo:

$$V(x) = (x_1 + x_2)^2$$

4.5.4 Semidefinidad negativa de las funciones escalares.

Se dice que una función escalar $V(x)$ es semidefinida negativa si $-V(x)$ es semidefinida positiva.

4.5.5 Indefinición de las funciones escalares.

Se dice que una función escalar $V(x)$ es indefinida si en la región Ω adopta tanto valores positivos como negativos, sin importar qué tan pequeña sea la región Ω . Ejemplo:

$$V(x) = x_1 x_2 + x_2^2$$

4.5.6 Forma cuadrática.

Una clase de funciones escalares que juega un papel importante en el análisis de estabilidad basado en el segundo método de Lyapunov es la forma cuadrática. Un ejemplo es:

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & P_{1n} \\ P_{12} & p_{22} & \cdot & \cdot & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{1n} & P_{2n} & \cdot & \cdot & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

x es un vector real y P es una matriz simétrica real.

4.5.7 Forma hermitiana.

Si x^* es un vector de dimensión n complejo y P es una matriz hermitiana, entonces, la forma cuadrática compleja se denomina hermitiana. Un ejemplo es:

$$V(x) = x^* P x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & P_{1n} \\ \bar{P}_{12} & p_{22} & \cdot & \cdot & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{P}_{1n} & \bar{P}_{2n} & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

En el análisis de estabilidad en el espacio de estados, con frecuencia se usa la forma *hermitiana* en lugar de la forma cuadrática, dado que la primera es más general que la última. Para un vector real x y una matriz simétrica real P , una forma hermitiana x^*Px se vuelve igual a la forma cuadrática $x^T Px$.

La definidad positiva de la forma cuadrática o la forma hermitiana $V(x)$ puede determinarse mediante el criterio de Silvestre, que plantea que las condiciones necesarias y suficientes para que la forma cuadrática o la forma hermitiana $V(x)$ sea definida positiva son que todas las menores principales sucesivas de P sean positivas; es decir:

$$P_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ \overline{P}_{12} & P_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots \quad \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & P_{1n} \\ \overline{P}_{12} & P_{22} & \cdot & \cdot & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{P}_{1n} & \overline{P}_{2n} & \cdot & \cdot & P_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

4.5.8 Segundo método de Lyapunov.

A partir de la teoría clásica de la mecánica, se sabe que un sistema vibratorio es estable si su energía total (una función definida positiva) es continuamente decreciente (lo que significa que la derivada de tiempo de la energía total debe ser definida negativa) hasta que se alcanza un estado de equilibrio.

El segundo método de Lyapunov se basa en una generalización de este hecho: si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía almacenada en el sistema desplazada dentro del dominio de atracción (la región más grande de la estabilidad asintótica) se descomponen conforme transcurre el tiempo, hasta que finalmente adopta su valor mínimo en el estado de equilibrio. Sin embargo, para los sistemas puramente matemáticos no existe una forma simple para definir una "función de energía". Para superar esta dificultad Lyapunov la función de Lyapunov, una función de energía ficticia.

Las funciones de Lyapunov dependen de x_1, x_2, \dots, x_n y t . Se representan mediante $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ o simplemente mediante $V(x, t)$. Si las funciones de Lyapunov no incluyen t explícitamente, se representan mediante $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o $V(x)$. En el segundo método de Lyapunov, el comportamiento del signo de $V(x, t)$ y el de su derivada con respecto al tiempo nos ofrece información con respecto a la estabilidad, la estabilidad asintótica, o la inestabilidad de un estado de equilibrio sin tener que obtener directamente las soluciones. Esto aplica tanto para sistemas lineales como no lineales.

4.5.9 Teorema principal de la estabilidad de Lyapunov.

Se puede demostrar que si una función escalar $V(x)$ en donde x es un vector de n dimensiones, es definida positiva, los estados x satisfacen:

$$V(x) = C$$

En donde C es una constante positiva, se encuentran en una hipersuperficie cerrada en el espacio de estados de n dimensiones, al menos en la cercanía del origen. Si $V(x) \rightarrow \infty$ conforme $\|x\| \rightarrow \infty$, entonces, las superficies cerradas se extienden sobre el espacio de estados completo. La hipersuperficie $V(x) = C_1$ se encuentra dentro de la hipersuperficie $V(x) = C_2$ si $C_1 < C_2$.

Para un sistema determinado, si se encuentra una función escalar definida positiva $V(x)$ tal que su derivada con respecto al tiempo, tomada a lo largo de una trayectoria, sea siempre negativa, entonces, conforme se incrementa el tiempo, $V(x)$ se reduce finalmente a cero y, por lo tanto, x también se reduce a cero. Esto implica la estabilidad asintótica del origen del espacio de estados. El teorema principal de Lyapunov, que es una generalización del hecho anterior, proporciona una condición suficiente para la estabilidad asintótica.

4.5.9.1 Ejemplo, teorema principal de estabilidad de Lyapunov.

Sea un sistema descrito mediante:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

Se evidencia que el origen ($x_1 = 0, x_2 = 0$) es el estado de equilibrio. Se determina la estabilidad.

Si se define una función escalar $V(x)$ mediante: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ que es definida positiva, entonces la derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ a lo largo de cualquier trayectoria es $\dot{V}(x) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$ que es definida negativa. Esto demuestra que $V(x)$ decrece continuamente a lo largo de cualquier trayectoria; por lo tanto, $V(x)$ es una función de Lyapunov.

Obsérvese que si se supone que $V(x)$ toma valores iguales a 0, C_1, C_2, \dots , ($0 < C_1 < C_2 < \dots$), entonces $V(x) = 0$ corresponde al origen del plano de estado y $V(x) = C_1, V(x) = C_2, \dots$ describen círculos que no se intersecan y que encierran el origen del plano de estados, como se aprecia en la figura 19. Se observa también

que dado que $V(x)$ es radialmente limitada, o $V(x) \rightarrow \infty$ conforme $\|x\| \rightarrow \infty$, los círculos se entienden sobre todo el plano de estados.

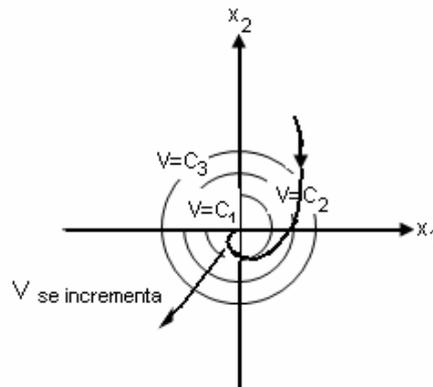


Figura 19. Estabilidad de Lyapunov. Contornos de V constantes y una trayectoria representativa.

Dado que el círculo $V(x) = C_k$ se encuentra completamente dentro del círculo $V(x) = C_{k+1}$, una trayectoria representativa cruza el límite de los contornos de V de afuera hacia adentro. Es decir, la interpretación geométrica de una función de Lyapunov se plantea del siguiente modo: $V(x)$ es una medida de la distancia del estado x a partir del origen del espacio de estados. Si la distancia entre el origen y el estado $x(t)$ instantáneo disminuye continuamente conforme t se incrementa.

4.5.10 Análisis de la estabilidad de Lyapunov de los sistemas LTI.

Para un sistema lineal e invariante en el tiempo $\dot{x} = Ax$ en donde x es un vector de estados (vector de n dimensiones) y A es una matriz de coeficientes constantes de $n \times n$. Se supone que A es no singular. Entonces, el único estado de equilibrio es el origen $x = 0$.

Para el sistema definido mediante la ecuación $\dot{x} = Ax$ se selecciona una función de Lyapunov posible como:

$$V(x) = x^* P x$$

La derivada con respecto al tiempo de $V(x)$ a lo largo de cualquier trayectoria es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^* P x + x^* P \dot{x} \\ &= (Ax)^* P x + x^* P A x \\ &= x^* A^* P x + x^* P A x \\ &= x^* (A^* P + P A) x \end{aligned}$$

Dado que $V(x)$ fue definida positiva, se requiere, para una estabilidad asintótica, que $\dot{V}(x)$ sea definida negativa. Por lo tanto,

$$\dot{V}(x) = -x^* Q x$$

En donde

$$Q = -(A^* P + P A) = \text{Definida positiva}$$

De esta forma, para la estabilidad asintótica del sistema de la ecuación $\dot{x} = Ax$, es suficiente que Q definida positiva. Para una prueba de definidad positiva de una matriz de $n \times n$, se aplica el criterio de Silvestre, que plantea que una condición necesaria y suficiente para que la matriz sea definida positiva es que los determinantes de todos los menores principales sucesivos de la matriz sean positivos.

En lugar de primero especificar una matriz P definida positiva y examinar si Q es definida positiva, es conveniente primero especificar una matriz Q definida positiva y después examinar si P , determinada a partir de $A^* P + P A = -Q$ es positiva. Obsérvese que el que P sea definida positiva es una condición necesaria y suficiente.

4.5.11 Teorema_L.

Considerando un sistema descrito mediante $\dot{x} = Ax$, una condición necesaria y suficiente para que el estado de equilibrio $x=0$ sea asintóticamente estable en general, es que, dada cualquier matriz Q hermitiana (o simétrica real) definida positiva, exista una matriz P hermitiana (o simétrica real) definida positiva, tal que:

$$A^* P + P A = -Q$$

La función escalar $x^* P x$ es una función de Lyapunov para este sistema. Se observa que, en el sistema lineal considerado, si el estado de equilibrio (el origen) es asintóticamente estable, entonces es asintóticamente estable general.

Al aplicar el teorema_L, es conveniente señalar varias condiciones importantes.

1. Si el sistema sólo contiene un vector de estado real x y una matriz de estado real A , entonces la función de Lyapunov $x^* P x$ se vuelve $x^T P x$ y la ecuación de Lyapunov se convierte en $A^T P + P A = -Q$.

2. Si $\dot{V}(x) = -x^* Q x$ no se desvanece idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria, entonces se selecciona que Q sea semidefinida positiva.
3. Si se opta por cualquier matriz arbitraria definida positiva como Q o una matriz semidefinida positiva como Q , si $V(x)$ no se desvanece idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria y despejando la ecuación $A^T P + PA = -Q$ para determinar P , entonces la definidad positiva de P es una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del estado de equilibrio $x=0$. Obsérvese que $V(x)$ no se desvanece idénticamente a lo largo de cualquier trayectoria si una matriz Q semidefinida positiva satisface la condición de rango.

$$\text{rango} \begin{vmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2} A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q^{1/2} A^{n-1} \end{vmatrix} = n$$

4. El resultado final no depende de la matriz Q específica elegida mientras sea definida positiva (o semidefinida positiva, como puede ocurrir).
5. Para determinar los elementos de la matriz P , se igualan las matrices $A^* P + PA$ y $-Q$ elemento por elemento. Esto produce las $n(n+1)/2$ ecuaciones lineales para la determinación de los elementos $P_{ij} = \bar{P}_{ji}$ de P . Si se representan los valores característicos de A mediante $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, cada uno repetido con la frecuencia de su multiplicidad como raíz de la ecuación característica y si para cada suma de dos raíces $\lambda_j + \lambda_k \neq 0$ entonces los elementos de P se determinan en forma única. Se observa que la matriz A representa un sistema estable, las sumas de $\lambda_j + \lambda_k$ siempre son diferentes de cero.
6. Al determinar si existe una matriz hermitiana definida positiva o una matriz simétrica real P , es conveniente elegir $Q=1$, en donde 1 es la matriz de identidad. Así los elementos de P se determinan a partir de $A^* P + PA = -1$ y se prueba la definidad positiva de la matriz P .

4.5.12 Aplicando las estabilidad en el sentido de Lyapunov.

A continuación se exponen dos ejemplos que ilustran y engloban, todos los conceptos previamente establecidos del análisis de estabilidad de Lyapunov.

4.5.12.1 Ejemplo de estado de equilibrio.

Considérese el sistema de segundo orden descrito mediante

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Es evidente que el estado de equilibrio es el origen. Para determinar la estabilidad de este estado. Primero se supone una función de Lyapunov tentativa

$$V(x) = x^T P x$$

En donde P va a determinarse a partir de

$$A^T P + P A = -1$$

Esta última ecuación se escribe como

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Expandiendo estas ecuaciones de matriz, se obtienen tres ecuaciones simultáneas del modo siguiente:

$$\begin{aligned} -2P_{12} &= -1 \\ P_{11} - P_{12} - P_{22} &= 0 \\ 2P_{12} - 2P_{22} &= -1 \end{aligned}$$

Despejando P_{11} , P_{12} se obtiene

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Para probar la definidad positiva de P , se verifican los determinantes de los menores principales

$$\frac{3}{2} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Es evidente que P es definida positiva. Por tanto, el estado de equilibrio en el origen es asintóticamente estable en general y una función de Lyapunov es

$$V(x) = x^T P x = \frac{1}{2} (3x_1 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2)$$

Y

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2)$$

4.5.12.2 Ejemplo para determinar el rango estabilidad.

Se determinara el rango de estabilidad para la ganancia K del sistema de la figura 20.

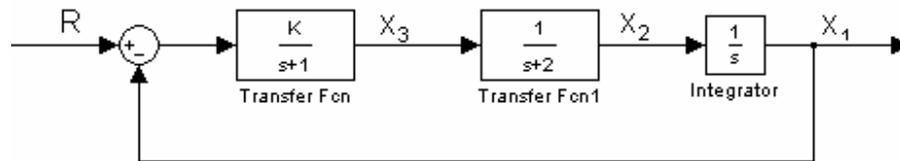


Figura 20. Ejemplo de análisis Lyapunov para un sistema de control

La ecuación de estado del sistema es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{pmatrix} u$$

Al determinar el rango de estabilidad para K , se supone que la entrada u es cero. Así, esta última ecuación se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -Kx_1 - x_3 \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones anteriores se encuentra que el origen es el estado de equilibrio. Se selecciona la matriz Q simétrica real definida positiva como

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta elección de Q es permisible dado que $\dot{V}(x) = -x^T Q x$ no puede ser igual a cero, excepto en el origen. O bien se verifica el rango de la matriz

$$\text{rango} \begin{pmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2} A \\ \cdot \\ \cdot \\ Q^{1/2} A^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & -K & 1 \end{pmatrix}$$

Es evidente que el rango es 3 para $K \neq 0$. Por lo tanto, se selecciona esta Q para la ecuación de Lyapunov. Ahora despejando la ecuación De Lyapunov

$$A^T P + PA = -Q$$

Que se vuelve a escribir como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejando esta ecuación para los elementos de P , se obtiene

$$P = \begin{vmatrix} \frac{K^2 + 12K}{12 - 2K} & \frac{6K}{12 - 2K} & 0 \\ \frac{6K}{12 - 2K} & \frac{3K}{12 - 2K} & \frac{K}{12 - 2K} \\ 0 & \frac{K}{12 - 2K} & \frac{6}{12 - 2K} \end{vmatrix}$$

Para que P sea definida positiva, es necesario y suficiente que

$$12 - 2K > 0, \quad K > 0$$

O bien

$$0 < K < 6$$

Por lo tanto para $0 < K < 6$, el sistema es estable en el sentido convencional, es decir, el origen es asintóticamente estable en general.

Se plantea entonces que mediante el uso de una herramienta tan poderosa y flexible como es el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov, determinamos aquellos valores que aseguran estabilidad o estabilidad asintótica en el sistema. Esta estabilidad se encuentra estrechamente ligada a la robustez del sistema. El lector puede encontrar una descripción detallada de la teoría de hiperestabilidad y pasividad en [\[Anderson\]](#), [\[Byrnes\]](#), [\[Narendra\]](#), [\[Nilsson\]](#).

En conclusión en este trabajo se evalúa la robustez de los métodos de sintonización haciendo uso de la información obtenida en las implementaciones y utilizando herramientas matemáticas conocidas que exigen planteamientos mínimos (índices de robustez y sensibilidad).

5 RESULTADOS DE LAS EXPERIMENTACIONES

Para poder realizar la sintonización de los controladores, primero se debe identificar o aproximar un modelo del proceso, y a partir de esta identificación se determinan los parámetros del controlador utilizando el método de sintonización seleccionado.

El cálculo de los parámetros del controlador se basa en la obtención de información del proceso a controlar en un punto de operación, usualmente mediante la identificación de un modelo de primer orden o segundo orden más retardo de tiempo.

Los parámetros de estos modelos (ganancia, constante de tiempo y retardo de tiempo aparente) dependen del punto en el cual se realiza la identificación. Aunque ésta se realice en el punto más probable del sistema, la naturaleza no lineal intrínseca en los procesos, hace que los valores de estos parámetros cambien, debido al efecto de las perturbaciones o de cambios en el valor deseado.

5.1 PROCESO REAL UTILIZADO

La planta utilizada es un sistema de dos tanques (Tanque 1 y 2) interconectados en paralelo de 44 y 26 litros de capacidad respectivamente como se muestra en la figura 21. [Jiménez y Mercado].

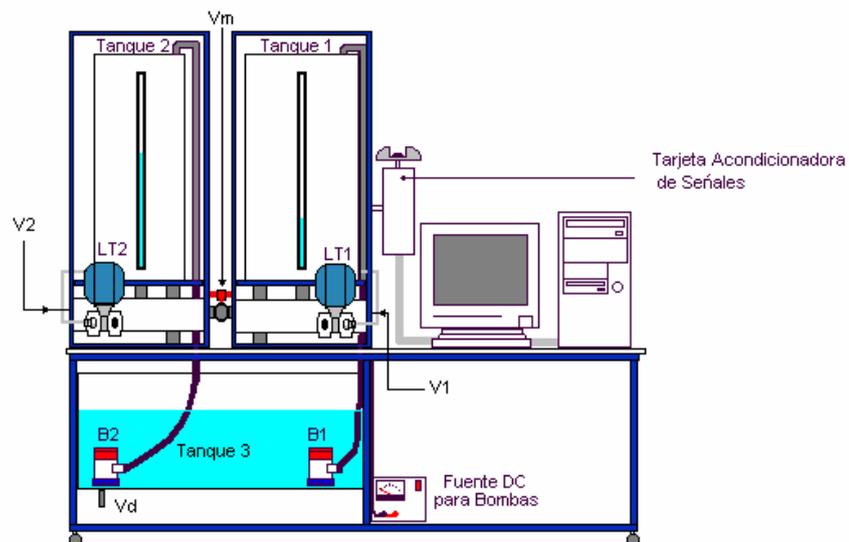


Figura 21. Proceso real utilizado

Como se puede notar el banco consta de dos bombas, tres válvulas V1, V2 y Vm; estas son válvulas de medio paso, las cuales se encuentran en una posición predeterminada, obteniendo a partir de la experimentación diversos comportamientos de la planta.

Ambos tanques vierten el agua en un tercer tanque (Tanque 3) de 75 litros de capacidad, situado por debajo de ellos, a través la estructura que les soporta. El llenado de los dos tanques se realiza mediante dos bombas sumergibles en agua y de velocidad variable, con caudal máximo de 1100 GPH (4165 Litros por Hora), ubicadas en el Tanque 3.

5.2 IDENTIFICACIÓN DE LA PLANTA

Para efectuar el proceso de identificación de la planta, se utiliza un programa realizado en LABVIEW, que se encuentra en el archivo **Control_IMC.vi**, la figura 22 muestra el panel frontal del programa

El modelo de la planta suele variar por diversas razones, en nuestro caso las válvulas (incluida la de interconexión) pueden variar para cambiar la estructura del procesos.

Las válvulas de la planta se configuraron de varias formas, finalmente se selecciono la configuración como se muestra en la figura 23.

La válvula 1 totalmente cerrada, la válvula 2 con apertura del 100% al igual que la válvula que interconecta los dos tanques.

La caracterización del modelo puede determinarse realizando varios ajustes de modelos dinámicos o través de un modelo matemático simple. La planta al igual que muchas otras puede ser descrita satisfactoriamente por el modelo:

$$G_p(s) = \frac{k_p e^{-\theta s}}{\tau_p s + 1} \quad \text{Donde} \quad \tau_p > 0 \quad (21)$$

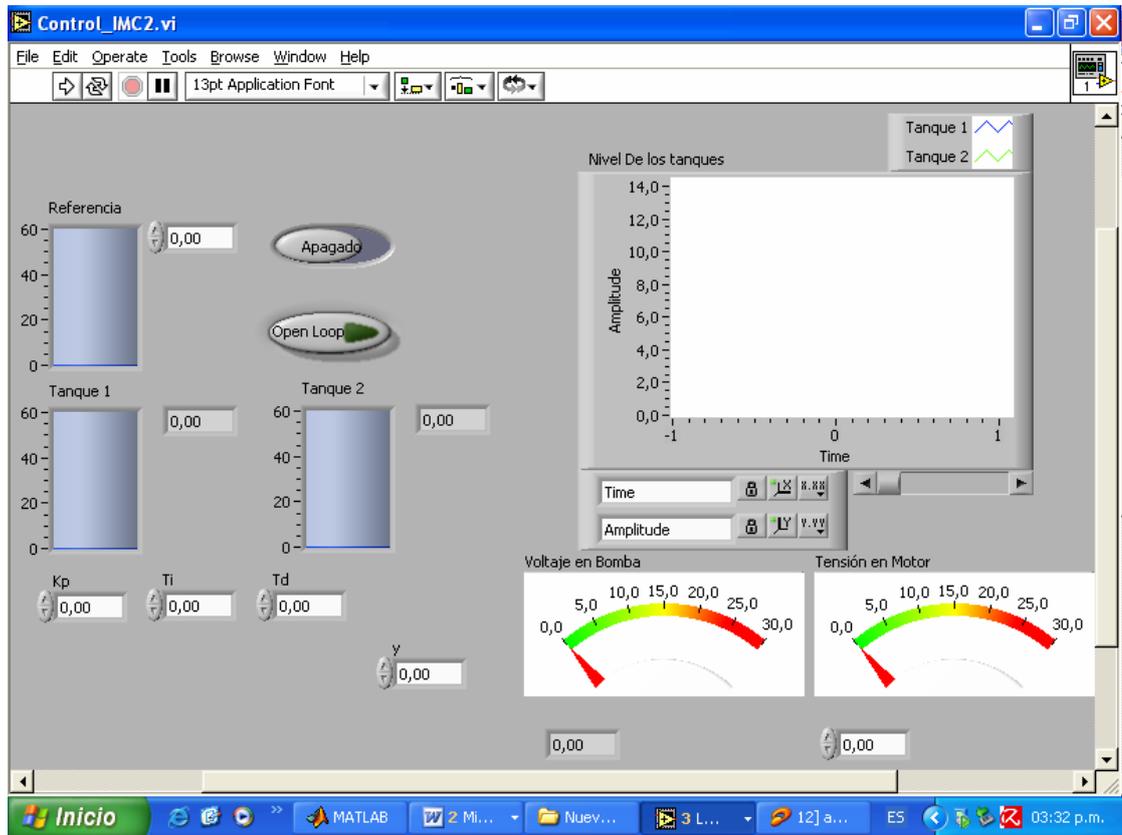


Figura 22. Panel frontal del programa

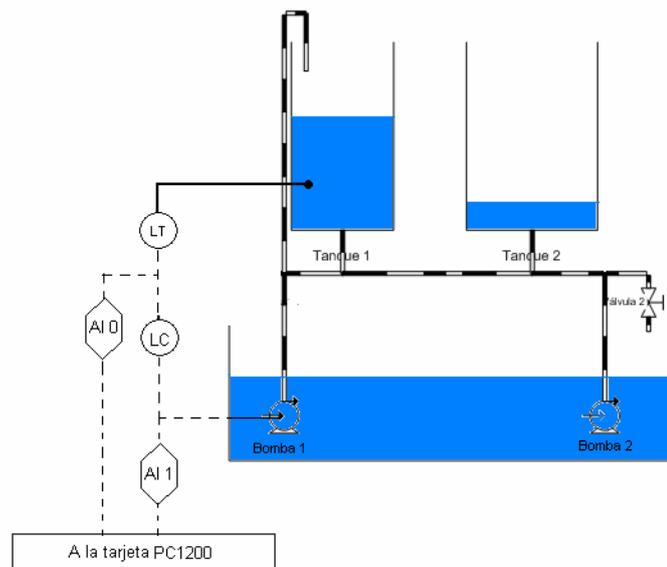


Figura 23. Estructura del proceso a controlar

Una versión de este modelo se obtiene mediante un experimento en lazo abierto, utilizando el siguiente procedimiento.

- Con la planta en lazo abierto (modo manual), se lleva la planta a un punto de operación normal. Se dice que la salida se estabiliza en $y(t) = y_0$ para una entrada constante $u(t) = u_0$.
- En el instante inicial t_0 , se aplica un cambio en la entrada escalón, desde u_0 a u_∞ (por lo regular es un rango de 10 al 20% de rango completo).
- Se registra la salida hasta que se estabilice en el nuevo punto de operación. Si la curva de la planta tiene forma de "S" (curva de reacción del proceso) se aplica el método ilustrado en la figura 24.

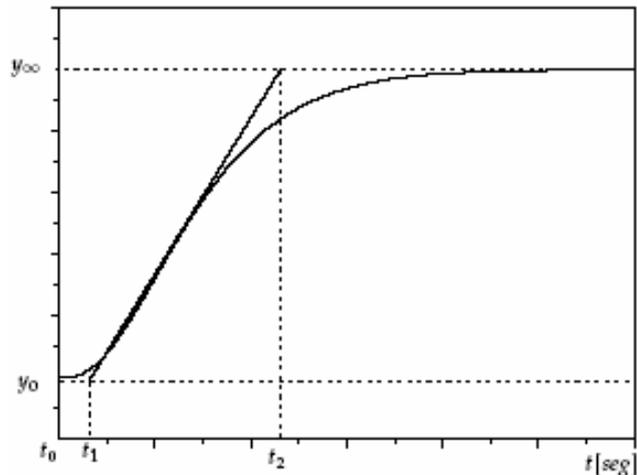


Figura 24. Curva de reacción de un proceso

- Se aproxima el funcionamiento de la planta a una de primer orden con retardo, como muestra la ecuación (21). Los parámetros del modelo se calculan de la siguiente manera:

$$k_p = \frac{y_\infty - y_0}{u_\infty - u_0} \qquad \theta = t_1 - t_0 \qquad \tau_p = t_2 - t_1$$

Otros métodos de ajustes se pueden consultar en [\[Villa\]](#).

5.2.1 Obtención experimental de la planta.

Con la planta en lazo abierto se aplicó una señal de $6V_{DC}$ a la bomba 1, para llenar la planta a través de la misma hasta que los tanques llegaron a un punto de equilibrio (23.293449 cm en el Tanque 1 y 1.519424 cm en el tanque 2).

A partir del estado de equilibrio inicial al que se llevo la planta, se aplica nuevamente un incremento de $1V_{DC}$ a la bomba; este incremento de voltaje en la señal escalón ocasionará un cambio lo suficientemente grande para ser medida.

Este cambio fue de 14.3% aproximadamente del rango completo, este comportamiento esta representado en la figura 25.

Sobre la curva de reacción mejor especificada en la figura 26, se aplica el procedimiento anteriormente expuesto para la identificación de los parámetros de la planta:

$$k_p = \frac{y_\infty - y_0}{u_\infty - u_0} = \frac{38.6 - 23.6}{6.5 - 6} = 30 \qquad \theta = t_1 - t_0 = 424 - 422 = 2$$

$$\tau_p = t_2 - t_1 = 600 - 424 = 176$$

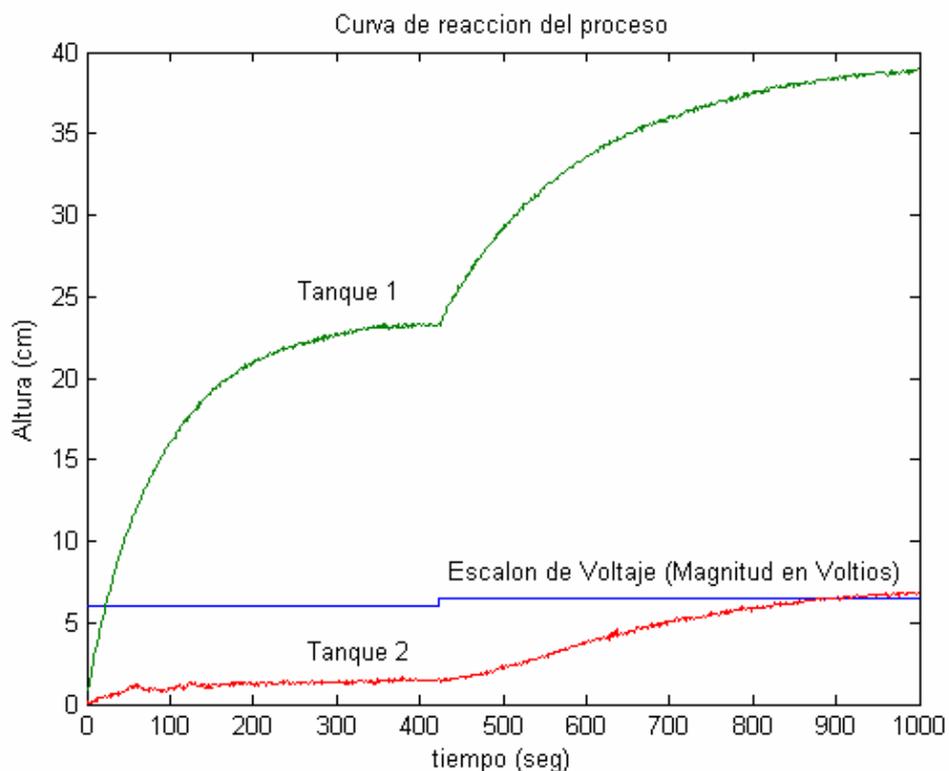


Figura 25. Curva de reacción del proceso para un cambio escalón

Finalmente la planta se describe mediante el modelo $G_p(s) = \frac{30e^{-2s}}{176s+1}$.

Con los valores de los parámetros, se procede a la simulación de la planta haciendo uso del *simulink* de **MATLAB**, de esta forma se compara y reconoce que tan preciso es el modelo matemático que se obtuvo a partir de la identificación. Al introducir una entrada paso en el modelo, la curva obtenida se muestra en la figura 27.

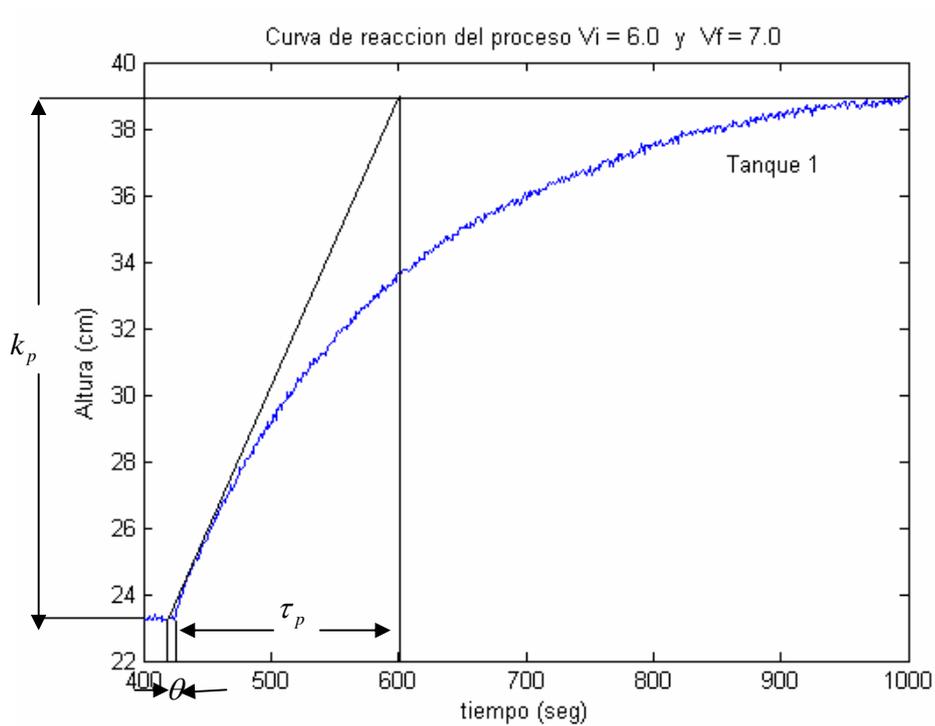


Figura 26. Curva de reacción del proceso

La figura 28, muestra el diagrama de bloques utilizado en *simulink* para simular la planta.

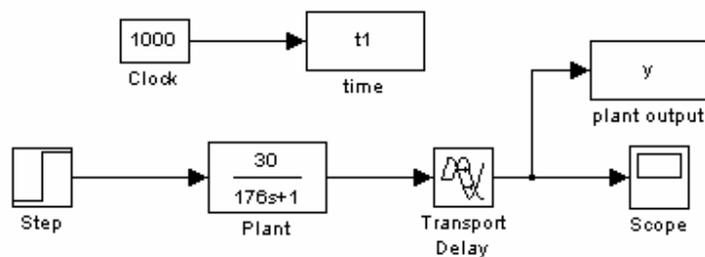


Figura 28. Diagrama de Bloque de la planta simulada en Lazo abierto

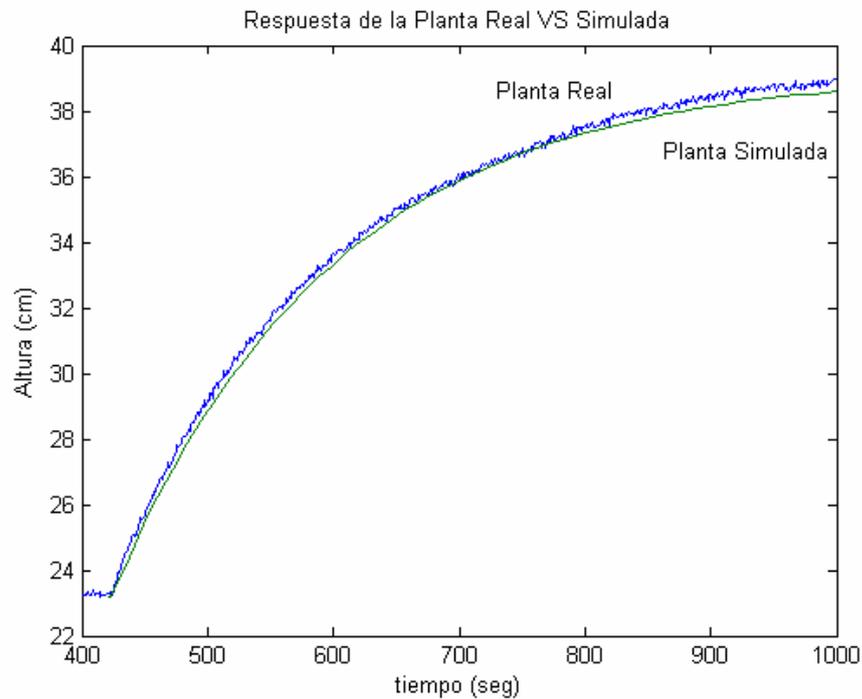


Figura 27. Comparación planta real vs. Simulada

De la figura 27, se observa que tanto la curva real del proceso como la simulada conservan similitud en cuanto al comportamiento lo que indica que el modelo funciona adecuadamente.

Una vez obtenido el modelo matemático del proceso, se podrán diseñar las diferentes estrategias de control, con un mayor grado de confianza y facilidad, teniendo en cuenta siempre el punto de operación sobre el cual fue ajustado el modelo.

5.3 TÉCNICAS DE SINTONIZACIÓN DE REGULADORES

Los valores de los parámetros de sintonización fueron obtenidos con los diferentes métodos de ajustes expuestos anteriormente y fueron implementados en el banco para el control de nivel de tanques paralelos, los diferentes parámetros obtenidos se resumen en la tabla 9.

MÉTODO O TÉCNICA	Parámetros de sintonización		
	Kc	τ_I	τ_D
Ziegler – Nichols	3.52	4.00	1.00
IMC_A ¹ ($\lambda = 0.3\theta$)	2.27	177	1.00
IMC_B ($\lambda = 0.9\theta$)	2.11	177	1.00
IMC_C ($\lambda = 1.8\theta$)	1.63	176	0.00
IMC_D ($\lambda = 1.8\theta$)	1.64	177	0.00
IAE_PI	2.71	12.21	0.00
ISE_PI	3.19	13.08	0.00
ITAE_PI	2.27	12.43	0.00
IAE_PID	2.96	7.00	0.52
ISE_PID	3.43	5.06	1.09
ITAE_PID	3.14	7.68	0.78

Tabla 9. Valores de ajuste para los diferentes controladores. ¹Para el método IMC_A existe un parámetro $\tau_F = 0.23$ el cual ajusta un filtro en cascada con la estructura PID

Una vez obtenido estos valores de ajustes se implementan los controladores y se obtienen las graficas que ilustran el comportamiento del controlador mismo (Figuras desde la 29 a la 38). Otras pruebas adicionales se implementaron para observar que ocurre cuando el controlador opera como regulador (modo de operación frente a perturbaciones) y servomecanismo (modo de operación sobre el punto de consigna).

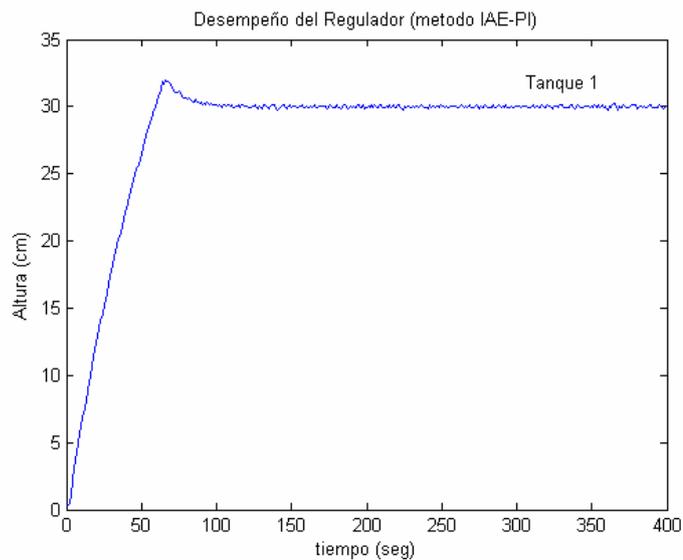


Figura 29. Comportamiento del regulador con el método IAE_PI

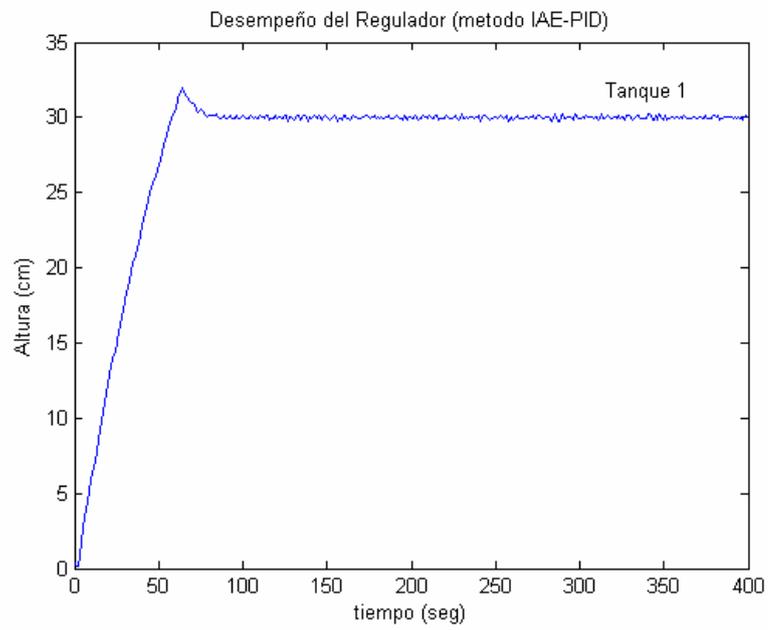


Figura 30. Comportamiento del regulador con el método IAE_PID

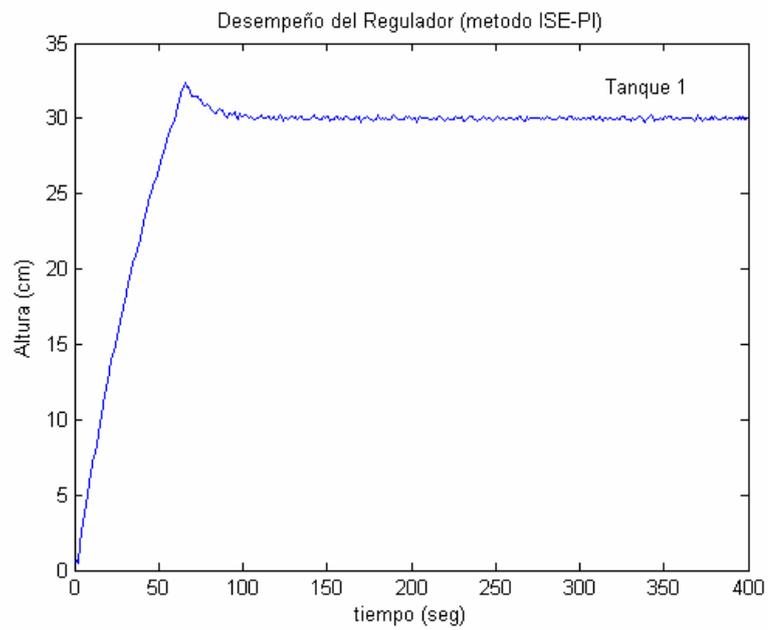


Figura 31. Comportamiento del regulador con el método ISE_PI

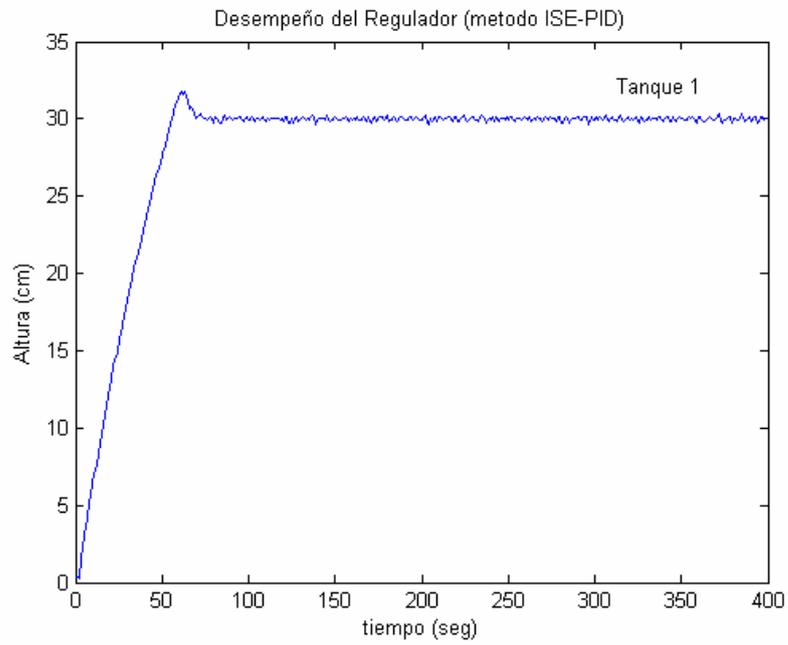


Figura 32. Comportamiento del regulador con el método ISE_PID

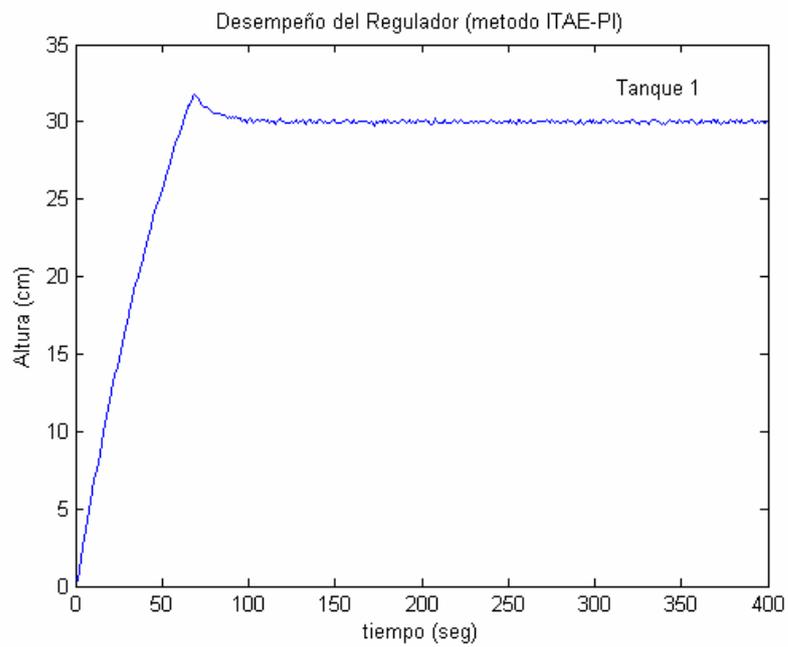


Figura 33. Comportamiento del regulador con el método ITAE_PI

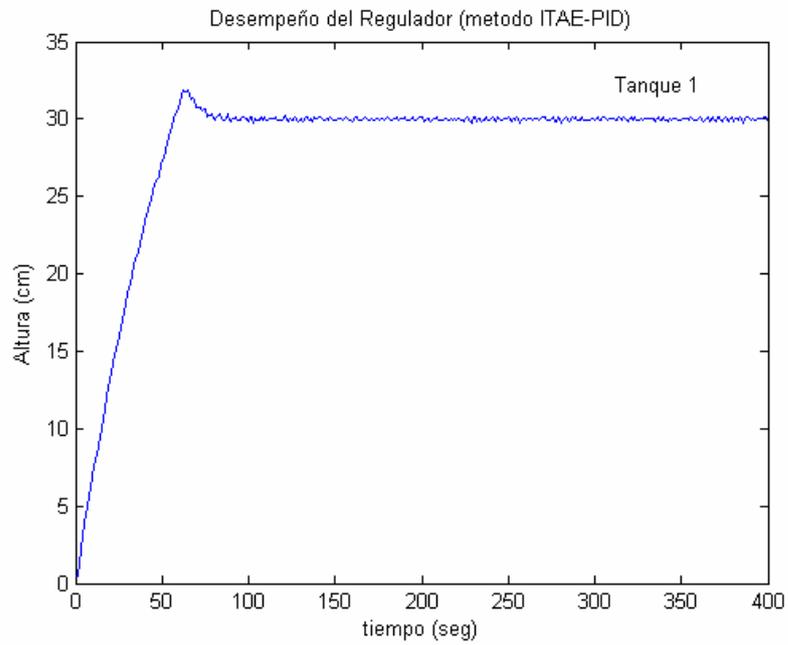


Figura 34. Comportamiento del regulador con el método ITAE_PID

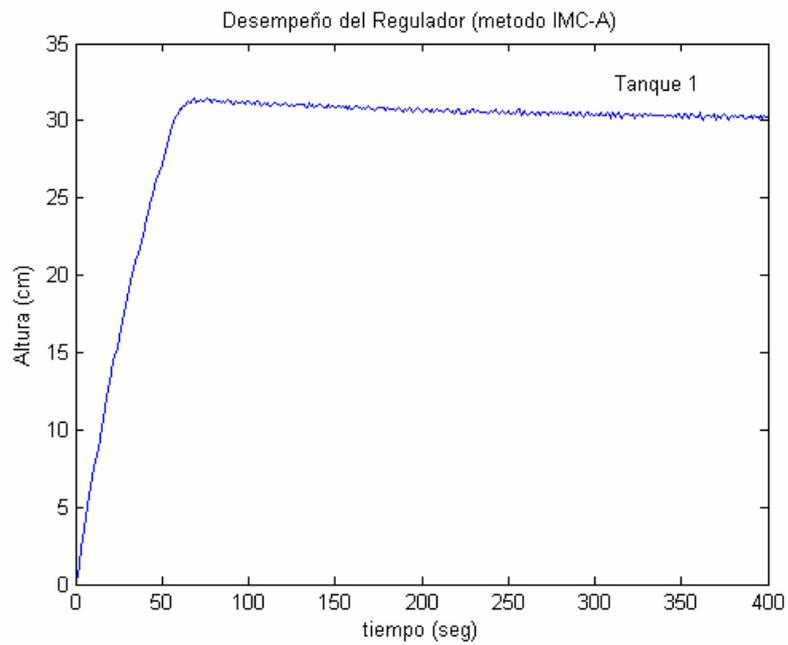


Figura 35. Comportamiento del regulador con el método IMC_A

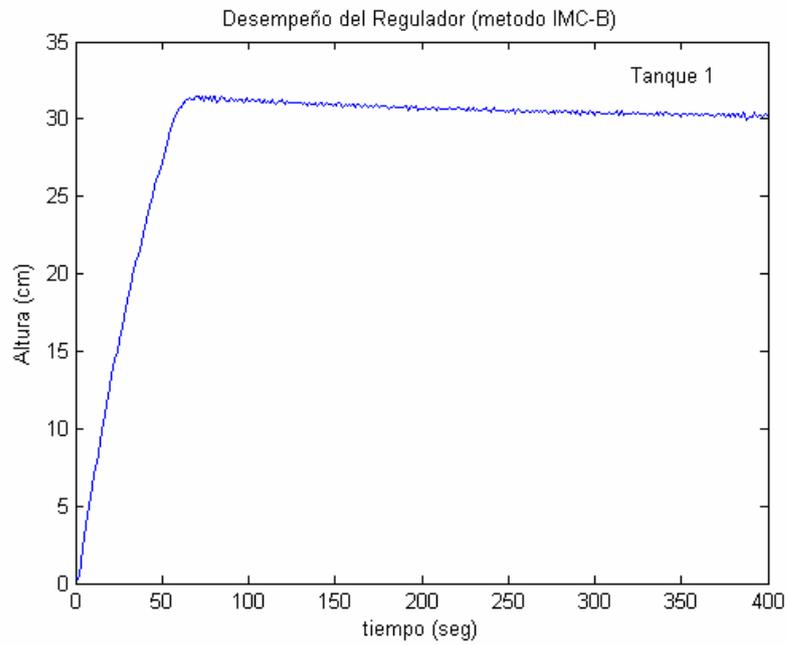


Figura 36. Comportamiento del regulador con el método IMC_B

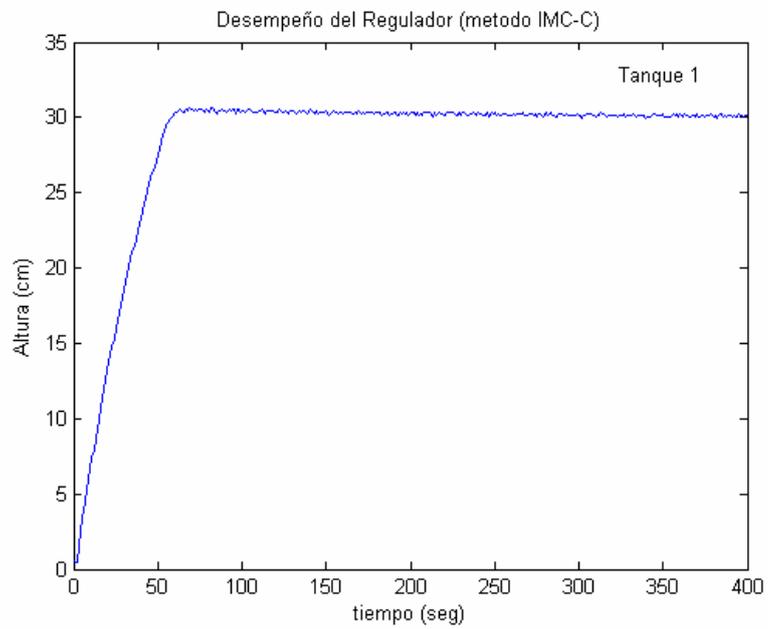


Figura 37. Comportamiento del regulador con el método IMC_C

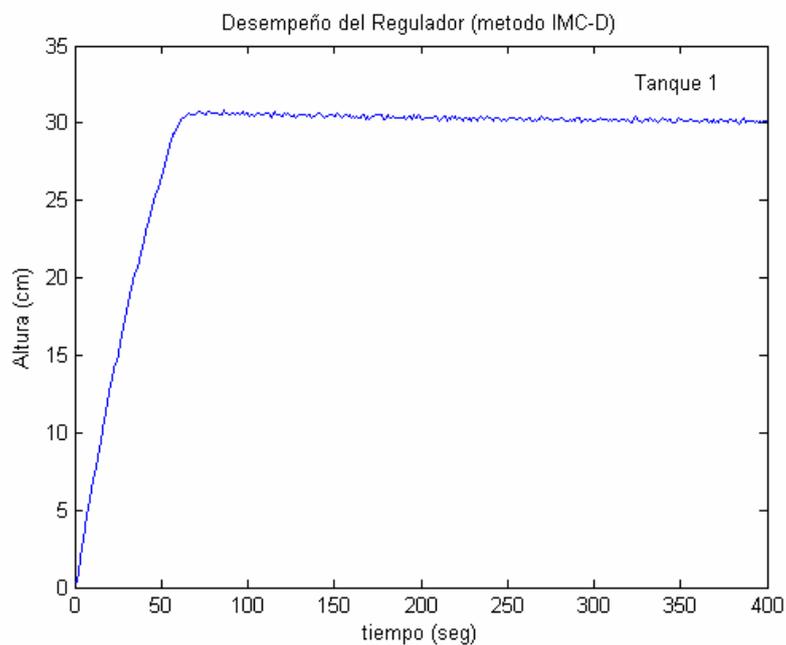


Figura 38. Comportamiento del regulador con el método IMC_D

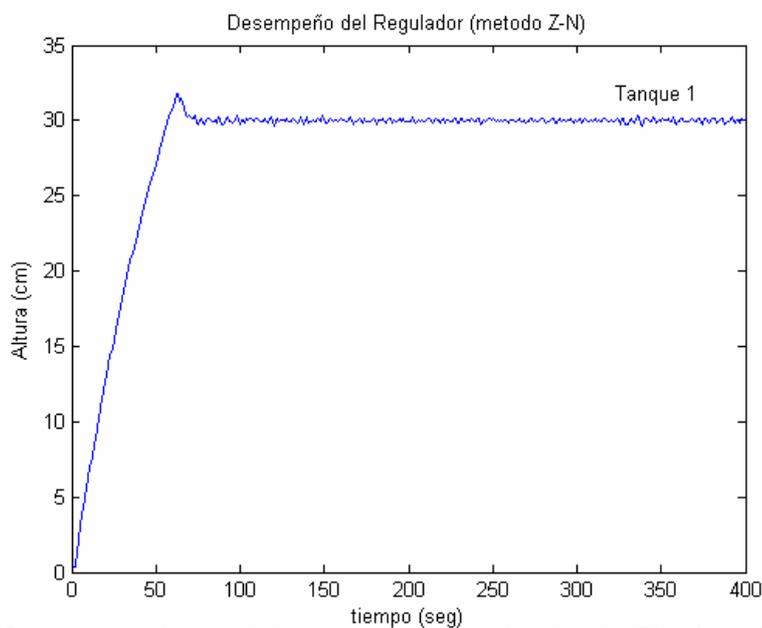


Figura 39. Comportamiento del regulador con el método Ziegler - Nichols

Las figuras 40 y 41 muestran el desempeño de los métodos de sintonización, en base a la comparación y haciendo uso de las técnicas estudiada podemos obtener los índices de comparación de robustez.

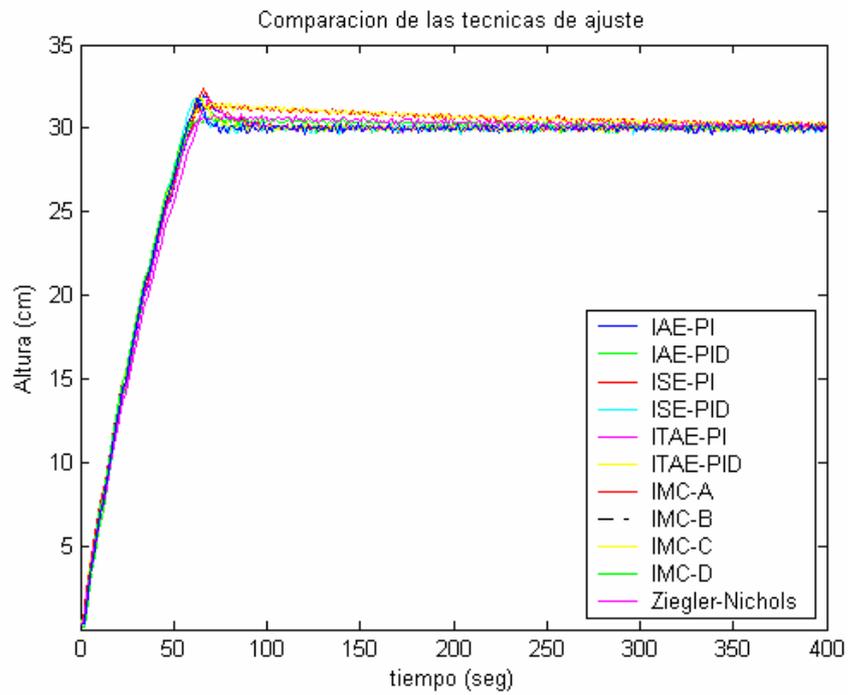


Figura 40. Comparación del comportamiento de los reguladores

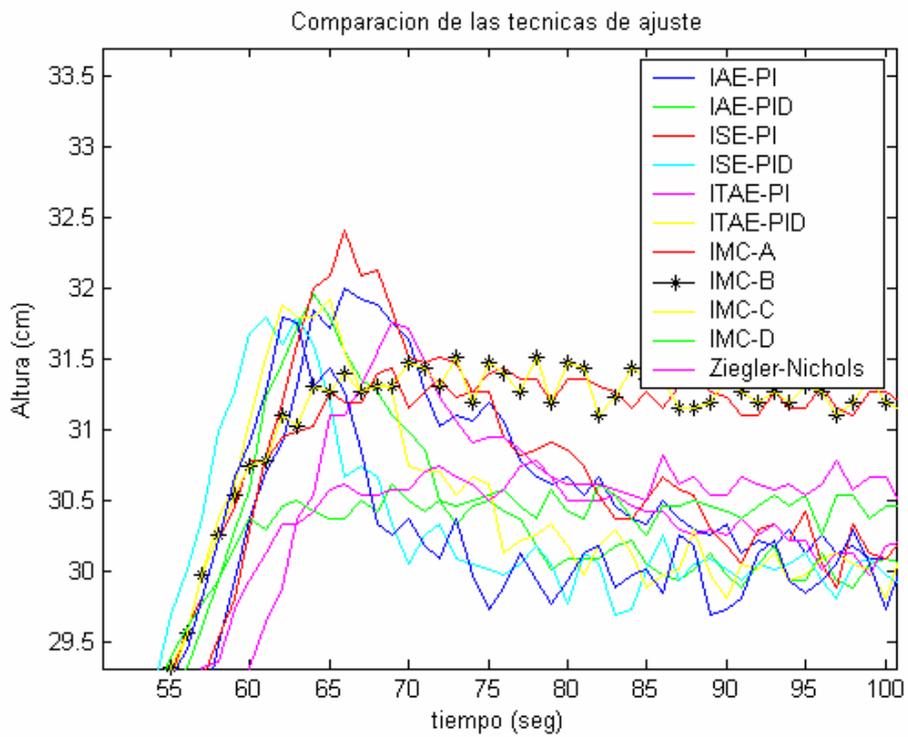


Figura 41. Vista ampliada, comparación del comportamiento de los reguladores

La figura 42 muestra las señales de control que se generan durante la implementación de las diferentes técnicas. El límite inferior de la señal de control se mantiene en aproximadamente $5 V_{DC}$.

De igual forma se realizaron pruebas para observar el comportamiento de los controladores para un cambio de referencia y ante la entrada de una perturbación, las figura 43 y 44 ilustran los resultados. Las señales de control para estas implementaciones también fueron obtenidas y se muestran en las figuras 45 y 46.

Para el caso del cambio de referencia, inicialmente se asigna un setpoint de 30cm y transcurrido aproximadamente unos 215 segundos se asigna una nueva referencia de 40cm para observar y determinar el comportamiento del controlador, los resultados son mostrados en la figura 43. De igual forma se obtienen las señales de control ilustradas en la figura 44.

Ante una perturbación caracterizada por la apertura (en un rango del 60% al 90%) de la válvula que inicialmente se mantiene cerrada en el sistema, los resultados de la experimentación se evidencian en la figuras 45 y 47. El comportamiento de las señales de control se observan en la figura 46.

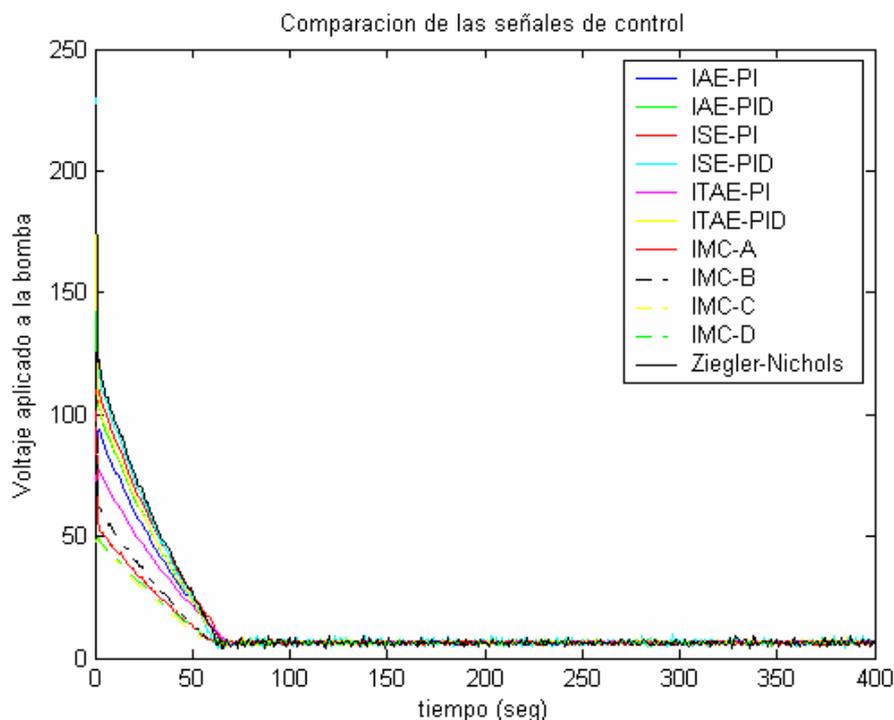


Figura 42. Señales de Control

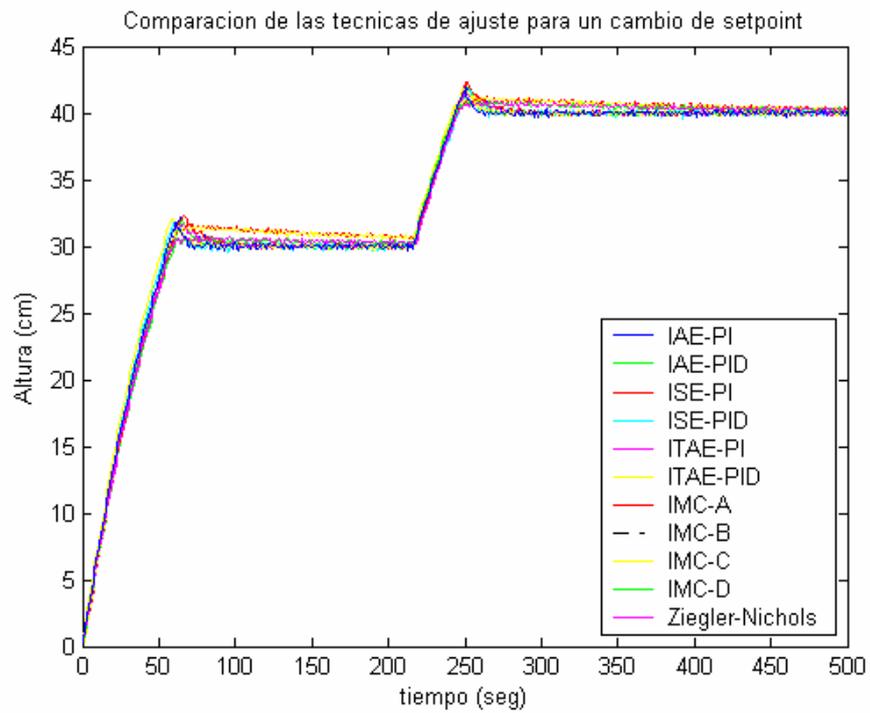


Figura 43. Comparación de desempeño para un cambio de referencia

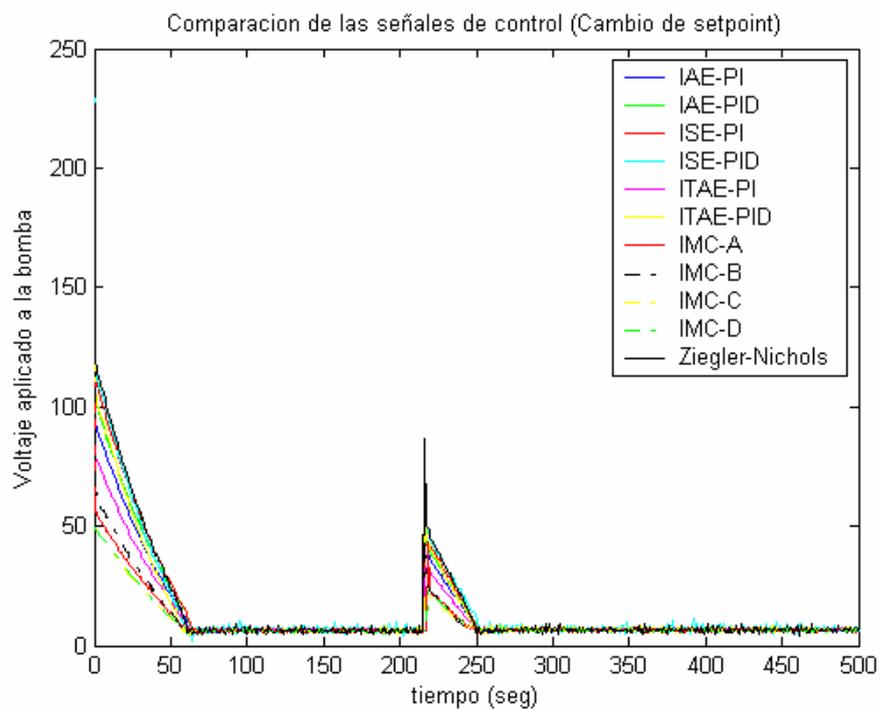


Figura 44. Señal de control ante un cambio de referencia

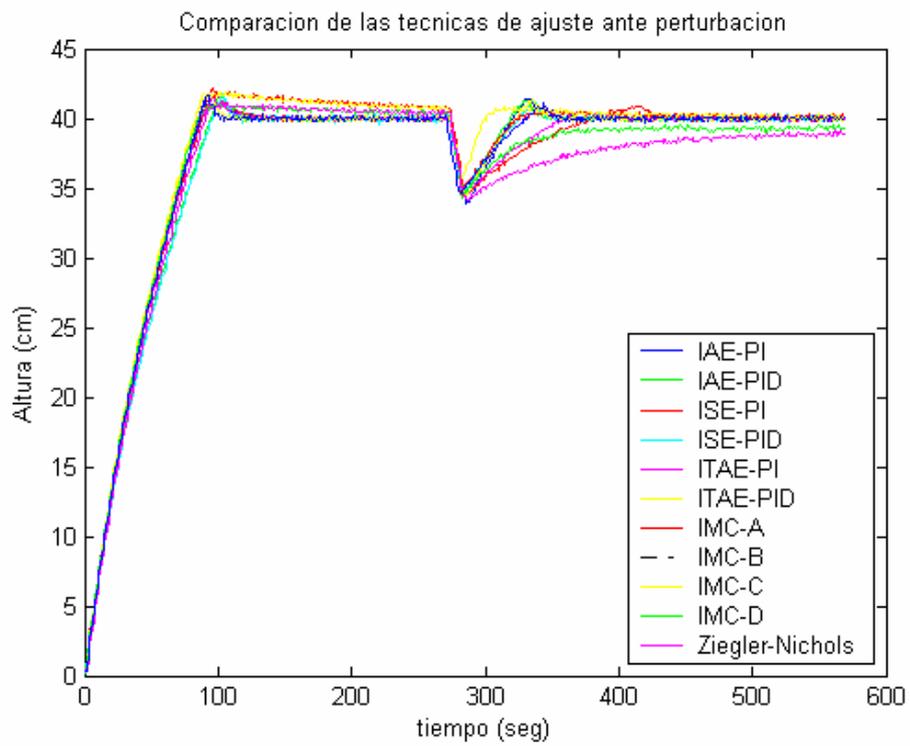


Figura 45. Comparación de desempeño ante una perturbación

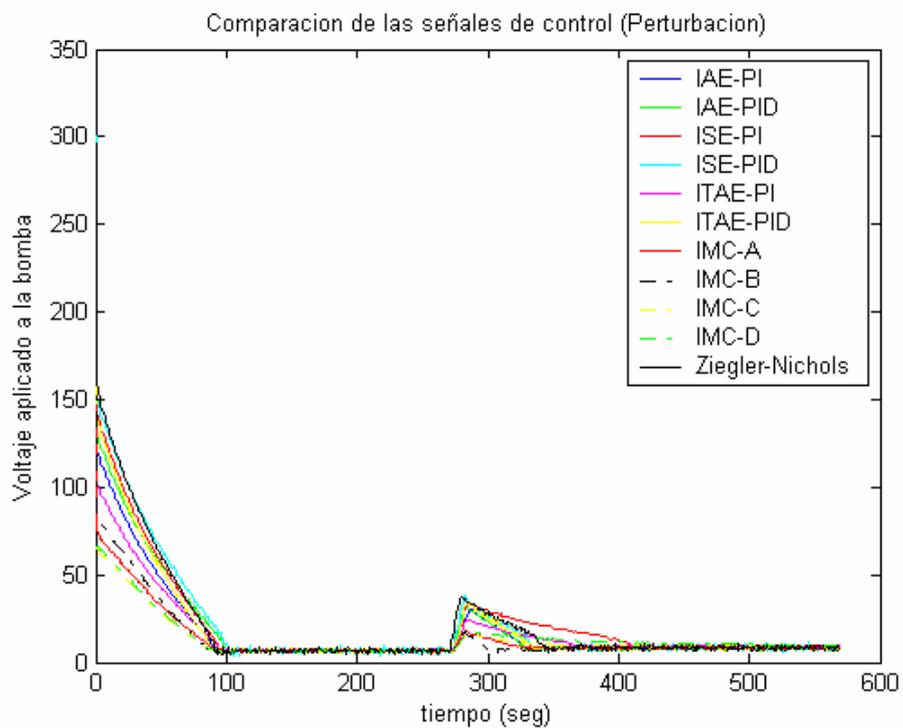


Figura 46. Señal de control ante una perturbación

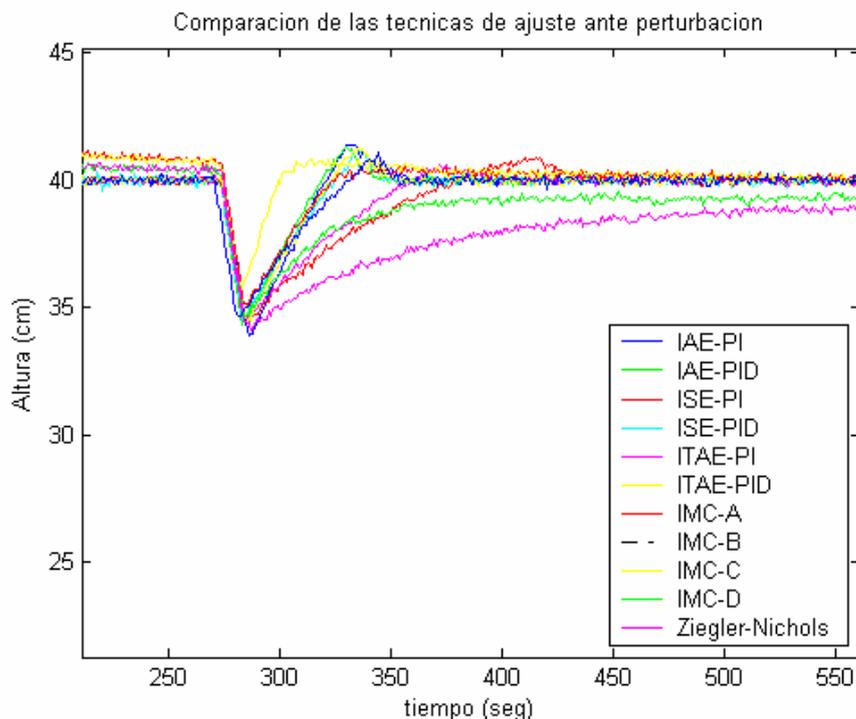


Figura 47. Vista ampliada, comparación de desempeño ante una perturbación

5.4 ROBUSTEZ Y DESEMPEÑO DE LOS REGULADORES

Una vez sintonizados los reguladores, se hicieron las evaluaciones de desempeño y robustez del lazo de control, siendo la planta un modelo de primer orden más retardo de tiempo con el cual se sintonizo el controlador. Dichos resultados se muestran en la tabla 11.

La tabla 10 resume los valores del margen de fase (PM), margen de ganancia (GM) y frecuencia de cruce por la ganancia de 0 dB (w_g) estos valores son utilizados para obtener el índice de robustez en la ganancia y el índice de robustez en el retardo de tiempo dadas por las ecuaciones (9) y (10).

Método o Técnica	GM(DB)	PM(DEG)	w_g (RAD/SEG)
Ziegler – Nichols	4.44	51.4	0.699
IMC_A ¹ ($\lambda = 0.3\theta$)	8.28	48.2	0.387
IMC_B ($\lambda = 0.9\theta$)	8.91	50.9	0.36
IMC_C ($\lambda = 1.8\theta$)	11.1	59.4	0.278
IMC_D ($\lambda = 1.8\theta$)	11.1	59.2	0.279
IAE_PI	6.49	37.3	0.463
ISE_PI	5.13	31	0.544
ITAE_PI	7.97	43.2	0.389

IAE_PID	11.6	46.2	0.512
ISE_PID	3.91	54.4	0.712
ITAE_PID	7.59	51.6	0.571

Tabla 10. Márgenes de fase (PM) y ganancia (GM)

Método o Técnica	IR_{k_p}	IR_{θ}	IR_A	PME	$ts_{2\%}$	T_s	IAE_d
Ziegler – Nichols	0.67	1.16	0.67	10.0	69	34.5	15.56
IMC_A ¹ ($\lambda = 0.3\theta$)	1.59	1.96	1.26	4.67	250	125	54.91
IMC_B ($\lambda = 0.9\theta$)	1.79	2.22	1.42	5.00	260	130	57.08
IMC_C ($\lambda = 1.8\theta$)	2.59	3.36	2.12	2.00	125	62.5	27.74
IMC_D ($\lambda = 1.8\theta$)	2.59	3.33	2.10	1.67	120	60	26.65
IAE_PI	1.11	1.26	0.84	6.67	82	41	18.39
ISE_PI	0.81	0.89	0.60	8.33	83	41.5	18.61
ITAE_PI	1.50	1.74	1.14	5.87	80	40	17.96
IAE_PID	2.80	1.72	1.64	6.53	72	36	16.22
ISE_PID	0.57	1.20	0.66	6.00	68	34	15.35
ITAE_PID	1.40	1.42	1.00	6.40	73	36.5	16.43

Tabla 11. Robustez y comportamiento utilizando una planta real para diferentes controladores

Para lograr una medición sobre el proceso de una forma más directa de la robustez, se hace uso de la sensibilidad del proceso y se toma como parámetro IR_{pc} la señal de la bomba 1 que en este caso es tomada como señal de control. En la tabla 12 ilustra estas evaluaciones.

Método o Técnica	IR_{pc}
Ziegler – Nichols	2.39
IMC_A ¹ ($\lambda = 0.3\theta$)	1.38
IMC_B ($\lambda = 0.9\theta$)	1.44
IMC_C ($\lambda = 1.8\theta$)	1.12
IMC_D ($\lambda = 1.8\theta$)	1.09
IAE_PI	1.28
ISE_PI	1.27
ITAE_PI	1.21
IAE_PID	1.51
ISE_PID	2.11
ITAE_PID	1.53

Tabla 12. Índice de robustez respecto a un parámetro del proceso

Recordemos que IR_{PC} fue definido en la sección 4.3 como el índice de robustez respecto a un parámetro del proceso, para realizar el cálculo de este parámetro se debe tener en cuenta la ganancia del controlador utilizada en cada método de sintonización, la ganancia de la planta, y la variación en la señal del controlador (voltaje en las bombas), y aplicando la ecuación (15). En la siguiente sección analizaremos con más detalles estos resultados.

5.5 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez sintonizado los reguladores se procedió a efectuar las mediciones de la robustez y de los desempeños de los mismos.

Si consideramos cada criterio de forma individual, se nota que el criterio del PME menor al 20% lo cumplen todos los métodos, siendo el sobre paso más alto el del método de Ziegler – Nichols seguido por el ISE-PI con solo un 10% y 8.33% respectivamente. Todas las respuestas están bastante amortiguadas. Es importante destacar que los menores sobre pasos los presentan los métodos basados en IMC.

La respuesta con el menor tiempo de asentamiento se logra con los métodos de ISE-PID y Ziegler – Nichols. Los métodos basados en IMC son los que mayor tiempo de asentamiento exhiben, y a su vez se consideran los más conservadores.

En forma general ISE-PID posee un menor IAEd y es menos oscilatorio, mientras que si todos aquellos métodos basados en IMC presentan los mayores resultados no puede mirarse como los peores puesto que este valor superior de IAEd no los hace oscilatorios.

Usualmente se requiere que los índices de robustez sean superiores a 1, esto es que el sistema permanezca estable ante variaciones independientes de hasta 100% en la ganancia o el retardo de tiempo del proceso, el IR_A tendrá un valor cercano a $0.5\sqrt{2}$ como mínimo aceptable, y se considero deseable entonces que el IR_A fuese superior a $2\sqrt{2}$.

El criterio de que el IR_A estuviese entre $0.5\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$ lo cumplen casi todos excepto los métodos de Ziegler – Nichols, ISE-PI e ISE-PID, los cuales resultan ser obviamente los menos robustos. Sin embargo los valores de IR_θ superan el mínimo aceptable de 1. Se puede observar además, que todos los métodos a excepción de ISE-PI dan sistemas más robustos en cambios en el retardo de tiempo que en cambios en la ganancia del proceso.

En todos los casos de forma muy general los métodos presentan una buena robustez, los peores casos los presenta el método de Ziegler – Nichols, ISE-PI e ISE-PID con IRk_p igual a 0.67, 0.81 y 0.57 respectivamente, lo cual indica que la ganancia puede tener un incremento hasta del 67%, 81% y 57% respectivamente antes de que el sistema se vuelva inestable. Dado que la mayoría de los métodos son robustos, este índice no será un factor de peso para la escogencia del mejor método.

Como la sensibilidad se definió en términos capacidad de respuesta a muy pequeñas excitaciones, estímulos o causas. La robustez (muy sensible=poco robusto) puede medirse de forma mucho más directa sobre el proceso mediante la sensibilidad del mismo. Resulta entonces que para métodos como Ziegler – Nichols e ISE-PID la sensibilidad es mayor en comparación a los otros métodos como se muestra en la tabla 12 y por ello son los mismos que presenta una robustez menor.

Algo muy importante para destacar es el hecho que los métodos de ajuste basados en IMC con un $\lambda \geq 1.7\theta$ presentan la menor sensibilidad es decir son los más robustos, si λ es “pequeña”, el sistema en lazo cerrado es “rápido”, si λ es “grande”, el sistema en lazo cerrado es más Robusto.

Haciendo uso de la metodología expuesta en la sección 3.1, para el control con una variación $3.5 \leq GM \leq 7.8$ y $38^\circ \leq PM \leq 58^\circ$ respectivamente, se obtiene una clase de desempeño considerada alta o muy buena. Se hace necesario tener presente el hecho de que en aplicaciones típicas de control, $GM > 10$ y $PM > 80^\circ$ no se requieren y son indicativos de un grado innecesariamente alto de robustez.

CONCLUSIONES

Nuestra investigación se ha basado en el estudio y aplicabilidad de técnicas de control para evaluar el desempeño y la robustez, toda vez sintonizado el regulador. De la metodología basada en los índices adimensionales, se demuestra que existe un intercambio entre la robustez y el método de sintonización.

De los resultados obtenidos con los métodos de sintonización para reguladores, se puede concluir que si lo que se desea es la respuesta más rápida con un error máximo permisible, el método de ISE-PID es el mejor, aunque su robustez es bastante baja en comparación con los otros métodos. Las curvas de respuesta, en las figuras 40 y 41, muestran claramente la bondad de este ajuste y cuán cercana está la respuesta del método de Ziegler y Nichols.

Buscando un balance en el cumplimiento de los criterios de desempeño establecidos, consideramos que los métodos de IAE-PID, ITAE-PI y los basados en IMC son los más robustos que los anteriores.

Finalmente, si la robustez no es la mayor preocupación, el método de ISE-PID o Ziegler- Nichols serían la mejor opción.

Por otro lado aunque poco fue el trabajo realizado en la aplicación de la teoría de hiperestabilidad. Es importante destacar la comprensión de la teoría misma. El logro mas importante talvez a la entrega de este infome es el hecho de poder haber interpretado el pilar de toda esta teoria que es el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Una herramienta poderosa que nos permite evaluar la estabilidad tanto de sistema LTI, como aquellos lineales y variantes en el tiempo e incluso sistemas no lineales y variantes.

El proceso de diseño en el contexto del control basado en pasividad sería: dado un punto o conjunto de puntos que se desee estabilizar, hallar una ley de control tal que la función de energía en lazo cerrado sea definida positiva en todo el rango de funcionamiento y cero en el objetivo. Si el sistema en lazo cerrado es conservativo con respecto a la energía, esta sería la función de Lyapunov y el sistema será hiperestable o asintóticamente hiperestable.

Por último es necesario también remarcar que, puesto que en la Tesis se han presentado estos índices de evaluación que se enmarcan dentro de los esquemas de control válidos, se ha aportado un completo estado del arte en el esquema de evaluación de la robustez.

OBSERVACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Las siguientes observaciones se presentan como apoyo a posteriores trabajos de Investigación:

Se espera que los resultados obtenidos para los temas aquí expuestos puedan ser extendidos. Proponemos que se estudie la forma de obtener una metodología que permita cuantificar la robustez de reguladores en procesos de una manera más directa, que involucre cálculos matemáticos mínimos (menos teórico).

Otro aporte interesante sería poder lograr una metodología para el diseño de controladores tipo PID basados en los análisis de estabilidad de Lyapunov y los conceptos de hiperestabilidad.

De igual forma haciendo uso de toda la teoría de pasividad y adaptación hiperestable, se propone obtener índices de robustez para la evaluación de reguladores y lazos de control.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, B.D.O., A simplified viewpoint of hyperstability *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 292-294, June 1968.

Babatunde A. Ogunnaike And W. Harmon Ray. Process Dynamics, Modeling, And Control. Copyright 1994 by oxford University Press Inc, Pág 1069 a 1077

Byrnes C.I. And Isidori A. And Willems J.C. Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear System. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:1228-1240, November 1991. 4.1, 2, 4.3

Bequette, B. Wayne. *Process Control Modeling, Design and Simulation.* Prentice-Hall International Series In the Physical and Chemical Engineering Sciences, 2003, Pág. 230-235, 245-307.

Benjamin C. Kuo. *systems of de control automatic Department of electrical and Computer Engineering university of Illinois at Urbana - Champaign*, prentice Hall Hispano America, S,A Mexico 1996.

Ho W. K., Hang C. C. and Cao L. S. , "Tuning of PID Controllers Based on gain and Phase Margin Specification," *Automatica*, Vol. 31, pp. 497-502, 1995.

Ho W. K., Hang C. C., and Zhou J., "Self-tuning PID Control of A Plant with Under-damped Response with Specifications on Gain and Phase Margins," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 5, No. 4, pp. 446-452, 1997.

Jiménez C. Francisco J. y Mercado M. Roberto C. Banco para el control de nivel en tanques interconectados en paralelo. Cartagena – Colombia, 2002. Tesis de pregrado. Universidad Tecnológica de Bolívar.

Karl J. Aström, Tore Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design, And Tuning.* 2nd Edition. ISA (The Instrumentation, Systems, And Automation Society. 1995. Pág. 120-129, 200-229.

Karl J. Aström. y T. Hägglund, *Automatic Tuning of PID Controllers*, Research Triangle Park, NC.EUA, Instrument Society of America, 1988.

Karl J. Aström. y T. Hägglund, Advanced PID control, ISA (The instrumentation, systems and automatic society) , Pag 460.

Lopéz, A.M.; Murill, P.W.; Smith , S.L. Controller tuning relationships based on integral performance criteria *Instrum. Tech.* 14, (11), 57, 1967.

Narendra K.S. And Valavani L.S. A comparison of Lyapunov and Hyperstability Analysis. *IEEE Proceedings SSST '93, Twenty-Fifth South-eastern Symposium on System Theory*, pages 307-309, March 1993.

Navarro López, Eva Maria. Dissipativity and passivity-related properties in nonlinear discrete-time systems. Cataluña - España, 2002, 139p. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña. Instituto de ingeniería industrial y control.

Nilsson Tomas And Perez Miguel, Introduction to Passivity based Control of Euler-Lagrange System, Reports from MSI Aäxjö University, Nov 2003.

O` Dwyer, Aidan. Handbook of PI and PID controller tuning rules; Singapore imperial College Press, 2003.

Ogata Katsuhiko. Ingeniería De Control Moderna. 3 edición. Person Educación 1998, 997 paginas México.

Rivera, D.E, M. Morari y S. Skogestad; "Internal model Control 4. PID Controller Design", *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*(EUA), Vol. 25, 1986.

Smith, Carlos A, Corripio, Armando B. Principles and practice of automatic process control, Third edition. John Wiley and Sons, INC. 2006.

Stephen Boyd and Craig Barratt. Linear Controller Design: Limits of Performance, Prentice - Hall. 1991.

Swanda P. Anthony And Seborg E. Dale, Controller Performance Assessment Based on Setpoint Response Data, *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, California June 1999

Villa R, José Luis. Ajuste de modelos dinámicos. Universidad Tecnológica de Bolívar. 2006.

Wade J. Matthew And Johnson A. Michael, Towards Automatic Real-Time Controller Tuning and Robustness, University of Strathclyde.

Ziegler, J.G. and Nichols N.B (1942), Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, 64, pp. 759-768.

ZOZAYA S, ALFONSO J. Aportación a la Linealización de Amplificadores de Potencia Mediante la Teoría de la Hiperestabilidad. Cataluña - España, 2002, 139p. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña. Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones.

ANEXOS

ANEXO A. GLOSARIO

Acción de control: Hacer que un proceso actúe de una forma deseada.

Aleatorio: Relativo a todo acontecimiento incierto, por depender de la suerte o del azar. Algo que carece de todo patrón regular debido a su inmunidad a cualquier ley que la forzaría a una secuencia aunque sea levemente repetitiva que podría ser considerada como patrón. La existencia de aleatoriedad es solamente teórica, dado que no hay forma de probar que algo sea infinitamente irregular e impredecible.

Control: Selección de las entradas de un sistema de manera que los estados o salidas cambien de acuerdo a una manera deseada. Ver **Sistema de control**.

Control automático: El controlador decide la acción de control y proporciona la señal adecuada para reducir el error. Ver **Sistema de control automático**.

Controlador: Elemento que trata de mantener la señal de salida cerca de la señal de referencia (setpoint) mediante una acción correctora. Ver **Regulador**.

Control en lazo abierto: Control en el cual la salida no afecta la acción de control. Es decir, no se mide ni se realimenta la salida para compararla con la entrada. Ejemplo: control de tránsito, lavadora (el remojo, lavado y enjuague operan con base en el tiempo). La precisión del control depende de la calibración y no funciona correctamente en presencia de perturbaciones.

Control en lazo cerrado: Ver control realimentado.

Control realimentado: Operación que, en presencia de perturbaciones (impredecibles), tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continúa haciendo con base en esta diferencia. Ejemplos: control de velocidad, control de un robot, control de temperatura, sistema empresarial.

Error en estado estable: Error que presenta el sistema ante una entrada típica o de prueba. Es la incapacidad del sistema de seguir una señal. Se define como la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida.

Estabilidad: Condición en la cual las variables críticas de un sistema dinámico se mantienen invariables o permanecen dentro de unos límites determinados.

Función de transferencia: Representa la función impulso del sistema.

Función de transferencia continua: La función de transferencia de un sistema continuo descrito por medio de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes (sistema lineal invariable en el tiempo LTI) se define como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, suponiendo que todas las condiciones iniciales son iguales a cero.

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)}$$

Heurístico: De aquella condición basada en numerosos ensayos.

Hiperestable: Denota superioridad o exceso de estabilidad.

Identificación de sistemas: Conjunto de métodos para la obtención de modelos matemáticos a partir de datos experimentales de las entradas y salidas de un sistema. Así se evita la modelación teórica a partir de complejas leyes.

Linealización: Procedimiento de conversión de un modelo no lineal en uno lineal, alrededor de un punto de operación seleccionado, por medio de series de Taylor.

Perturbación: Variable no deseada aplicada a un sistema y la cual tiende a afectar adversamente el valor de una variable controlada. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, en tanto que una perturbación externa se produce fuera del sistema y es una entrada.

Planta: Cualquier objeto físico que se va a controlar (tal como un dispositivo mecánico, un horno de calefacción, un reactor químico o una nave espacial).

Principio de superposición: Sea el sistema lineal $Ly = f(x)$, donde y es la salida del sistema y $f(x)$ es la entrada. Si la respuesta con la entrada $f_1(x)$ es y_1 , con $f_2(x)$ es y_2 ,... entonces con la entrada $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ la salida será $y = y_1 + y_2 + \dots$. Es decir, la relación entre la entrada y salida del sistema es una línea recta.

Proceso: Cualquier operación que se va a controlar. Algunos ejemplos son: Los procesos químicos, económicos, biológicos, etc.

Regulador: Sinónimo de controlador, trata de mantener constante una variable.

Señal: Fluctuación de una variable física o virtual. Las señales que se puede modelar matemáticamente en el tiempo continuo o discreto se denominan *determinísticas*, las que no se pueden modelar se denominan *estocásticas*.

Señal analógica: Señal continua cuya amplitud puede adoptar un intervalo continuo de valores. Caso especial de señal continua. En la práctica se emplea el término "tiempo continuo" en lugar de "analógica", pero estrictamente hablando no son sinónimos (una señal analógica es continua pero no cuantificada).

Señal continua: Señal que se define sobre un intervalo continuo de tiempo. La amplitud puede tener un intervalo continuo de valores o solamente un número finito de valores distintos. Tipos: señal analógica, señal cuantificada.

Señal digital: Señal discreta con amplitud cuantificada. Dicha señal se puede representar mediante una secuencia de números (por ejemplo, binarios). En la práctica muchas señales digitales se obtienen mediante el muestreo de señales analógicas que después se cuantifican; la CUANTIFICACIÓN es lo que permite que estas señales analógicas sean leídas como palabras binarias. En la práctica, los términos "tiempo discreto" y "digital" a menudo se cambian, pero estrictamente hablando no son sinónimos.

Señal discreta o señal de tiempo discreto: Señal definida sólo en valores discretos de tiempo (la variable t está cuantificada). Tipos: señal de datos muestreados, señal digital. El término "señal de tiempo discreto" es más general que el término "señal digital".

Setpoint o punto de referencia: Valor deseado de la variable controlada, expresada en las mismas unidades de ésta.

Sistema: Combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Es un proceso que transforma una variable a otra.

Sistema de control: Sistema diseñado para lograr el comportamiento deseado de un sistema dinámico. Puede ser digital (microprocesado) o analógico (por ejemplo, circuitos eléctricos, sistemas hidráulicos, sistemas mecánicos, etc.), manual o automático.

Sistema de control automático: Sistema de control que funciona sin intervención humana directa.

Sistema dinámico: Sistema con un número finito de grados de libertad y que puede ser modelado matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales que dependen del tiempo.

Sistema lineal: Un sistema es lineal si se cumple el principio de superposición. Es decir, la relación entre la entrada y salida del sistema es una línea recta.

Variable controlada (La salida del sistema): Variable dinámica que se regula. Esta variable es medida por los sensores. Es la cantidad o condición que se mide y controla.

Variable de control: Variable entregada por el controlador para ser aplicada al actuador, después de ser transformada y amplificada. Esta variable depende de la variable error.

Variable de error: Desviación de la variable controlada del punto de referencia. El regulador digital responde en dependencia de esta variable.

Variable dinámica: Parámetro físico que cambia espontáneamente o por influencia externa. Algunas variables dinámicas pueden requerir regulación. Ejemplos: temperatura, presión, voltaje, etc.

Variable manipulada (La entrada del sistema): Variable dinámica que cambia como función de la variable de control y que modifica directamente la variable controlada. Por ejemplo, en el proceso de calentamiento de un líquido la variable de control es el voltaje, el cual se aplica a una resistencia, y la variable manipulada es el calor.

Variable medida: Variable dinámica dada por los sensores, proporcional a la variable controlada. Normalmente es un nivel de voltaje o corriente.

ANEXO B. Programa en Matlab para la comparación de las técnicas de sintonización de reguladores.

```
%PROGRAMA PARA LA ADQUISICION DE DATOS PROVENIENTES DE LAS  
%EXPERIMENTACIONES REALIZADAS EN EL BANCO DE PRUEBA Y COMPARACION  
%DE LAS TECNICAS DE AJUSTE DEL PID.
```

```
clear all, clc, close all,
```

```
load IAE_PI.txt; load IAE_PID.txt; load ISE_PI.txt; load ISE_PID.txt; load ITAE_PI.txt; load  
ITAE_PID.txt; load IMC_A.txt; load IMC_B.txt; load IMC_C.txt; load IMC_D.txt; load ZN.txt;  
%Cargando los datos tomados %tomados en labview
```

```
u=IAE_PI(:,1); u1=IAE_PID(:,1); u2=ISE_PI(:,1); u3=ISE_PID(:,1); u4=ITAE_PI(:,1);  
u5=ITAE_PID(:,1); u6=IMC_A(:,1); u7=IMC_B(:,1); u8=IMC_C(:,1); u9=IMC_D(:,1); u10=ZN(:,1);  
%Señales de control
```

```
t=IAE_PI(:,2); %Tiempo de muestreo (igual para todos)
```

```
h1=IAE_PI(:,3); h11=IAE_PID(:,3); h12=ISE_PI(:,3); h13=ISE_PID(:,3); h14=ITAE_PI(:,3);  
h15=ITAE_PID(:,3); h16=IMC_A(:,3); h17=IMC_B(:,3); h18=IMC_C(:,3); h19=IMC_D(:,3);  
h110=ZN(:,3);  
%Altura del tanque 1
```

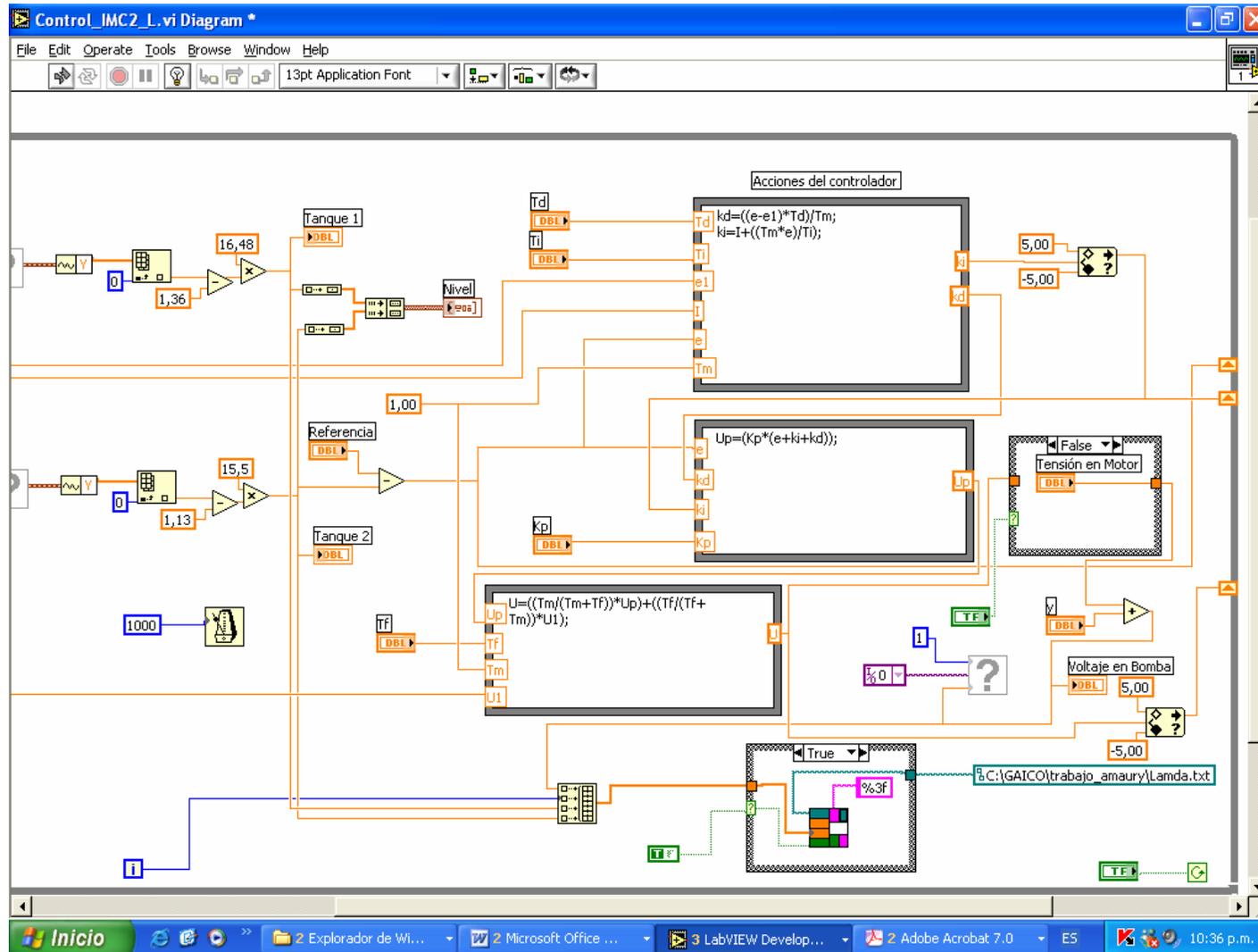
```
figure(1)  
plot(t,h1), title('Desempeño del Regulador (metodo IAE-PI)'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Altura  
(cm)'), gtext('Tanque 1'),  
figure(2)  
plot(t,h11), title('Desempeño del Regulador (metodo IAE-PID)'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Altura  
(cm)'), gtext('Tanque 1'),  
figure(3)  
plot(t,h12), title('Desempeño del Regulador (metodo ISE-PI)'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Altura  
(cm)'), gtext('Tanque 1'),  
figure(4)  
plot(t,h13), title('Desempeño del Regulador (metodo ISE-PID)'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Altura  
(cm)'), gtext('Tanque 1'),  
figure(5)  
plot(t,h14), title('Desempeño del Regulador (metodo ITAE-PI)'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Altura  
(cm)'), gtext('Tanque 1'),  
figure(6)  
plot(t,h15), title('Desempeño del Regulador (metodo ITAE-PID)'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel  
( 'Altura (cm)'), gtext('Tanque 1'),  
figure(7)  
plot(t,h16), title('Desempeño del Regulador (metodo IMC-A)'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Altura  
(cm)'), gtext('Tanque 1'),  
figure(8)  
plot(t,h17), title('Desempeño del Regulador (metodo IMC-B)'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Altura  
(cm)'), gtext('Tanque1'),
```

```

figure(9)
plot(t,h18), title("Desempeño del Regulador (metodo IMC-C)", xlabel("tiempo (seg)"), ylabel ('Altura (cm)'), gtext("Tanque 1"),
figure(10)
plot(t,h19), title("Desempeño del Regulador (metodo IMC-D)", xlabel("tiempo (seg)"), ylabel ('Altura (cm)'), gtext("Tanque 1"),
figure(11)
plot(t,h110), title("Desempeño del Regulador (metodo Z-N)", xlabel("tiempo (seg)"), ylabel ('Altura (cm)'), gtext("Tanque 1"),
figure(12) %Comparacion de las tecnicas de ajuste
plot(t,h1,'b',t,h11,'g',t,h12,'r',t,h13,'c',t,h14,'m',t,h15,'y',t,h16,'r',t,h17,'k',t,h17,'y',t,h18,'g',t,h19,'m',t,h110,'b'),
title('Comparacion de las tecnicas de ajuste'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Altura (cm)'),
h = legend('IAE-PI','IAE-PID','ISE-PI','ISE-PID','ITAE-PI','ITAE-PID','IMC-A','IMC-B','IMC-C','IMC-D','Ziegler-Nichols',4);
pause
figure(13)
plot(t,u,'b',t,u1,'g',t,u2,'r',t,u3,'c',t,u4,'m',t,u5,'y',t,u6,'r',t,u7,'k-',t,u8,'y-',t,u9,'g-',t,u10,'k')
%Comparacion de las señales de control
title('Comparacion de las señales de control'), xlabel('tiempo (seg)'), ylabel ('Voltaje aplicado a la bomba'),
h = legend('IAE-PI','IAE-PID','ISE-PI','ISE-PID','ITAE-PI','ITAE-PID','IMC-A','IMC-B','IMC-C','IMC-D','Ziegler-Nichols',1);

```

ANEXO C. Diagrama de bloque del programa en labview.



ANEXO D. Demostración de las ecuaciones utilizadas en los diagramas de bloques de las operaciones de labview.

Cálculos en el dominio del tiempo discreto

Ki:

$U(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right] e(s)$ Tomando únicamente el término integral e igualándolo con la señal de control

$U(s) = \frac{K_p}{\tau_I} \frac{e(s)}{s}$ Reorganizando la expresión $U(s)\tau_I s = K_p e(s)$, por definición $U(s)s$ es la transformada de Laplace de la derivada de $u(t)$ en el dominio del Tiempo. Aplicando transformada inversa de Laplace a toda la expresión:

$$\tau_I \frac{du(t)}{dt} = K_p e(t)$$

Recordando la definición de derivada $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(k) - u(k-1)}{\Delta t}$ aplicando la misma en la expresión anterior.

$$\tau_I \frac{u(k) - u(k-1)}{\Delta t} = K_p e(t) \Rightarrow \tau_I [u(k) - u(k-1)] = \Delta t K_p e(t)$$

$$u(k) - u(k-1) = \frac{\Delta t}{\tau_I} K_p e(t) \Rightarrow \boxed{u(k) = \frac{\Delta t}{\tau_I} K_p e(t) + u(k-1)}$$

Donde $\Delta t = Tm$ es el tiempo de muestreo, para el programa equivale a 1 segundo.

$$\mathbf{Ki} \Rightarrow \boxed{Ki = I + \frac{Tm * e}{\tau_I}}$$

Kd:

$U(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right] e(s)$ Tomando únicamente el término derivativo e igualándolo con la señal de control

$U(s) = K_p \tau_D e(s) s$, realizando un procedimiento similar al efectuado para calcular el valor de K_i , se obtiene que:

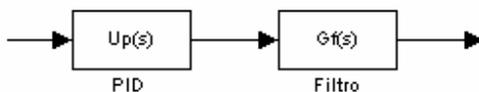
$$u(t) = K_p \tau_D \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{u(t) = K_p \tau_D \frac{e(k) - e(k-1)}{\Delta t}}$$

Donde $\Delta t = Tm$ es el tiempo de muestreo, para el programa equivale a 1 segundo.

$$\mathbf{Kd} \Rightarrow \boxed{Kd = K_p \tau_D \frac{(e - e1)}{Tm}}$$

Tf:

Este es el parámetro del filtro que se coloca en cascada con el PID ideal para determinar comportamiento del regulador con la técnica de ajuste IMC_A.



Recuérdese que la función de transferencia del filtro es: $G_f(s) = \frac{1}{\tau_F s + 1}$

Luego: $U(s) = \frac{1}{\tau_F s + 1} U_p(s)$ reorganizando esta expresión $U(s)[\tau_F s + 1] = U_p(s)$

$U(s)\tau_F s + U(s) = U_p(s)$, de forma análoga se aplican los procedimientos anteriormente expuestos a esta expresión.

$$\tau_F \frac{du(t)}{dt} + u(t) = u_p(t) \Rightarrow \tau_F \frac{u(k) - u(k-1)}{\Delta t} + u(k) = u_p(k)$$

$$\tau_F [u(k) - u(k-1)] + \Delta t u(k) = \Delta t u_p(k) \Rightarrow u(k) - u(k-1) + \frac{\Delta t}{\tau_F} u(k) = \frac{\Delta t}{\tau_F} u_p(k)$$

$$u(k) \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_F} \right] = \frac{\Delta t}{\tau_F} u_p(k) + u(k-1) \quad \Rightarrow \quad u(k) = \frac{\frac{\Delta t}{\tau_F}}{\left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_F} \right]} u_p(k) + \frac{1}{\left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_F} \right]} u(k-1)$$

Reorganizando la anterior expresión resulta:

$$u(k) = \frac{\Delta t}{\tau_F + \Delta t} u_p(k) + \frac{\tau_F}{\tau_F + \Delta t} u(k-1)$$

$$\mathbf{Tf} \Rightarrow U = \frac{Tm}{\tau_F + Tm} U_p + \frac{\tau_F}{\tau_F + Tm} U_1$$

Donde $\Delta t = Tm$ es el tiempo de muestreo, para el programa equivale a 1 segundo.

ANEXO E. Tabla de adquisición de datos con labview.

Esta tabla se elaboro con el objetivo de poder establecer una relación proporcional del voltaje de adquisición de cada uno de los canales en función de la altura de los tanques.

H2(CM) ALTURA TANQUE 2	H1(CM) ALTURA TANQUE 1	VCH2(CM) VOLTAJE EN EL CANAL 2	VCH0(CM) VOLTAJE EN EL CANAL 0
0	0	1.06	1.18
5	5	1.54	1.62
13	16	1.92	2.26
20	22	2.43	2.64
27	29	2.86	3.10
38	40	3.60	3.83
50.5	51.5	4.40	4.63
60	60	5.00	5.00

Mediante ajuste de línea recta $y = mx + b$. Se implementa fácilmente con dos bloques uno de multiplicación y otro sumador.