

**MODELAMIENTO MATEMATICO DE LA RESPUESTA MECANICA
DE PANELES ESTRUCTURALES FABRICADOS CON
MATERIALES COMPUESTOS**

FREDDY VEGA SOTO

TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

CARTAGENA DE INDIAS DT Y C

2003

**MODELAMIENTO MATEMATICO DE LA RESPUESTA MECANICA
DE PANELES ESTRUCTURALES FABRICADOS CON
MATERIALES COMPUESTOS**

FREDDY VEGA SOTO

**Trabajo De Grado Presentado Como Requisito Para Optar Por El Titulo De
Ingeniero Mecánico**

**Director
JAIRO USECHE VIVERO
Ingeniero Mecánico**

TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

CARTAGENA DE INDIAS DT Y C

2003

Cartagena, Octubre 15 de 2003

Señores

COMITÉ CURRICULAR

Atn. Profesor Miguel Romero Romero

L. C.

Respetado profesor,

Anexo a la presente el documento final del trabajo de grado titulado: *Modelamiento Matemático de la Respuesta Mecánica de Paneles Estructurales Fabricados con Materiales Compuestos*, del cual soy autor, para que sea evaluado, para optar el título de Ingeniero Mecánico.

A la espera de su respuesta

Atentamente,

FREDDY VEGA SOTO

C.C. 73'152.782 de Cartagena

Cartagena, Octubre 15 de 2003

Señores

COMITÉ CURRICULAR

Atn. Profesor Miguel Romero Romero

L. C.

Respetado profesor,

Anexo a la presente el documento final del trabajo de grado titulado: *Modelamiento Matemático de la Respuesta Mecánica de Paneles Estructurales Fabricados con Materiales Compuestos*, desarrollado por el estudiante Freddy Vega Soto y del cual soy asesor, para que sea evaluado, para opte al título de Ingeniero Mecánico.

Atentamente,

JAIRO USECHE VIVERO

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Cartagena 20 de mayo de 2003

A Dios

a mis Padres Hernán Y

Marina, a mis hermanos y en

especial a mi amada esposa

Irina y mi preciosa hija Nicole.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar sus más sinceros agradecimientos a:

Jairo useche Vivero, Ingeniero Mecánico y Director de esta Investigación, por su valiosa orientación y colaboración con sus conocimientos referentes al tema.

Omar Vega Soto, Ingeniero Eléctrico y hermano, por su valiosa colaboración e incondicional apoyo.

CONTENIDO

1. Introducción a los Materiales Compuestos

1.1. Historia general

1.2 Definición y clasificación de compuestos

1.3 Compuestos Filamentarios

1.4 Comportamiento de un Material Compuesto

2. Ecuaciones Básicas en Mecánica de Sólidos

2.1 Condiciones de Equilibrio

2.2 Definición de Tensión

2.3 Componentes de Tensión

2.4 Resultante de Fuerza Interna

2.5 Ecuaciones Diferenciales de Equilibrio

2.5.1 Esfuerzo Definido

2.6 Componentes de Deformación, Condiciones de Compatibilidad

3. Modelos que describen el comportamiento de láminas y cáscaras.

3.1. Elementos de la teoría de flexión de laminas

3.2. Comportamiento General de Laminas

3.3. Las Relaciones de Curvatura Deformación

3.4 Esfuerzos y resultantes de Esfuerzos

3.5 Placas y Laminas de Materiales Compuestos

3.6 Flexión de Laminas de Material Compuesto

3.7 Condiciones de Borde para una Placa

3.8 Soluciones de Navier para las Placas de Materiales Compuestos

3.9 Solución de Navier para una Placa Absolutamente Apoyado-Uniformemente Cargado

3.10 Solución de Levy para las Placas de Materiales Compuestos

3.11 Soluciones de perturbación para la Flexión de un Placa de Material Compuesto, con la Simetría de Medio-plano y Ninguna Flexión girando el acoplamiento.

3.12 Soluciones de perturbación para la flexión de un Placa de Material Compuesto con Flexión-girando acoplamiento y Simetría del Medio plano

3.13 Problemas de Autovalores de Placas de Componentes Materiales con Vibraciones Naturales y la Estabilidad Elástica

3.14 La Estática y el Análisis Dinámico de Placas de materiales Compuestos que Incluyen los Efectos de Deformación de Cortante Transversal

4. Las Cubiertas de Material compuesto

4.1. Introducción

4.2 historia de Cubiertas de material compuesto

4.3. Análisis de Cubiertas Cilíndricas en Materiales Compuestos Bajo Cargas Axialmente Simétricas

4.4 una solución general para las Cubiertas cilíndricas compuestas bajo cargas axialmente simétricas

1. Introducción a los Materiales Compuestos

1.1. Historia general

La combinación de materiales para formar uno nuevo, con las propiedades de un material reforzado, es un hecho histórico bien documentado. Por ejemplo, los obreros judíos antiguos durante su tenencia bajo los Faraones usaron las pajas cortadas en los ladrillos como un medio de reforzar su integridad estructural. Los guerreros del Samurai japoneses fueron conocidos por usar los metales laminados, el forjando de sus espadas para obtener las propiedades de materiales deseables. Incluso ciertos artesanos del Este mediterráneo y Lejano, usaron una forma de tecnología compuesta amoldando el arte de trabajar, donde se fabricó corte de papel en varios tamaños para producir formas deseadas y contornos.

Para introducirnos en la materia de nuevos materiales compuestos de alto rendimiento, es necesario empezar definiendo lo que constituye para la ingeniería esta clase de materiales. Además, también se debe definir el nivel de caracterización material para describir tales sistemas adecuadamente. Esto se hace entendiendo que cualquier definición y esquema de la clasificación introducido es arbitrario.

Para los propósitos de introducción al tema, muchas personas en el campo de los materiales compuestos dan una descripción algo somera, tal caso es definir un material compuesto, como simplemente ser la combinación de dos o más materiales, formado para obtener algún nuevo material útil de propiedades específicas. En algunos casos se le agrega la palabra microscópico y macroscópico para describir el nivel de caracterización del material.

La definición propuesta sobre los materiales compuestos es de una gran magnitud, basado, en que se abarca cualquier número de sistemas de materiales para los cuales, deben usarse niveles diferentes de caracterización, para así, poder especificar el sistema y dar las herramientas analíticas que puedan ser necesarias para los propósitos modelados. Como un ejemplo simplista de la definición, podemos usar una viga, que consiste en un tonelero de titanio, los elementos de materiales usados en una tira puede considerarse que están cambiando. Semejante a un sistema de materiales compuestos que puede ser considerado al nivel macroscópico, como proporcionar la conducta del material a temperatura, dependiendo esto si esta reforzado, debido a la desigualdad en los coeficientes termales de expansión entre los elementos metálicos. Estos sistemas de materiales compuestos, tienen muchas definiciones que difieren en el tipo de material base, mientras estas no serían aceptables de no ser representativo los diferentes tipos de materiales requeridos para distintas aplicaciones modernas actuales en las áreas técnicas aeroespaciales, automotores y otras.

1.2 Definición y clasificación de compuestos

Para que se pudiera estar de acuerdo en obtener una definición moderna y conveniente para los materiales compuestos avanzados, que se presentan según la clasificación estructural y según el uso de los elementos son los siguientes.

NIVELES ESTRUCTURALES	
(I)	BASICO / ELEMENTAL Moléculas sencillas, células de cristal
(II)	MICROESTRUCTURAL Cristales, fases, Componentes
(III)	MACROESTRUCTURAL Matrices, partículas, fibras.

De los tipos estructurales citados, el Tipo (III), del tipo de Macroestructural es el más importante, por lo cual será el más analizado. Continuando con la clasificación, se puede considerar una larga lista de estos, dependiendo del armazón estructural adoptado. La siguiente es una lista más definida de las clases fundamentales de compuestos.

LOS TIPOS DE COMPUESTOS

Fibra

Compuesto Continuo de Fibras Compuestas

Particular

Compuesto de Partículas

Laminar

Compuesto de Capas o de Láminas

La hojuela

Compuesto de Hojuelas Llanas

Llenado / De esqueleto

Matriz de esqueleto continua rellena por un segundo material

Uno de los más importante tipos materiales compuestos citados, desde un punto de vista de las aplicaciones, son los filamentos, es decir, esos sistemas de materiales que consisten en macro-fibras seleccionados. Estos sistemas de materiales tienen las propiedades deseables para trabajos fuertes, poseen alta resistencia y/o dureza, así mismo son ligeros en peso. Éstos son los materiales presentados en la lista anterior que son los principalmente utilizados. Para identificar estos tipos de materiales en la tabla Periódica de Elementos puede examinarse y seleccionarse esos componentes ligeros que pueden formarse de los elementos del filamento.

1.3 Compuestos Filamentos

Como un punto de referencia se puede introducir la siguiente definición, para un material compuesto fibroso. "Los compuestos son considerados como las combinaciones de elementos de materiales que difieren en la composición o forma en el nivel macroscópico con respecto a los otros. Los elementos fibrosos individuales pueden ser artificiales, que son generalmente insolubles, pero retiene sus características dentro del compuesto, y puede presentarse como continuo o discontinuo."

Un diagrama que indica la clasificación y tipos de sistemas de tipo filamentos que existen en la práctica se muestra en Fig. 1.2.

Para hacer un seguimiento de los tipos representativos de compuestos fibrosos se presenta un resumen de algunas de las fibras más comunes Fig. 1.3 y materiales de la matriz Fig. 1.4 que mas se usan en la práctica. Las inscripciones para matrices no metálicas es (NMMC) mientras que para matriz metálica es (MMC)..

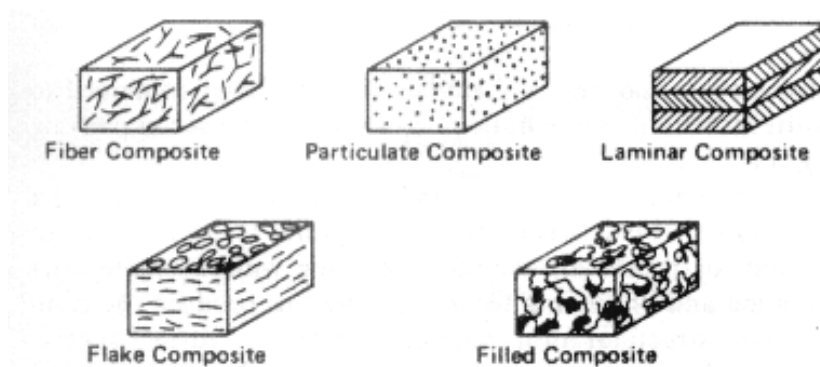


Figura 1.1. Ilustración de varios tipos de materiales compuestos

De los materiales de refuerzos, el Boro, Vidrio, Grafito, y Kevlar son los mas comunes y mas utilizados.

Los refuerzos y materiales de la matriz citados son los combinados para formar las configuraciones estructurales compuestas, como es mostrado en el diagrama Fig. 1.5.

Como fue mencionado, la combinación de matriz y los resultados de los elementos fibrosos en una estructura compuesta pueden tener diferentes formas estructurales en virtud del método por el cual se ha formado y/o método que se usa para procesar. La tecnología con que se forma y procesa el compuesto, Puede sintetizarse entonces más allá de las normas estructurales específicas obtenidas en la fabricación de él y los procedimientos de formado deben satisfacer el requerimiento de diseño y/o las aplicaciones funcionales para el cual se ha sido diseñado.

Dentro del concepto de refuerzos típicos, se pueden mencionar los pelos de bigote, fibras y alambres. Los cuales se pueden identificar por su diámetro (medio diámetro en el caso de bultos de fibra) y estos se pueden consideran y se proponen como una referencia útil.

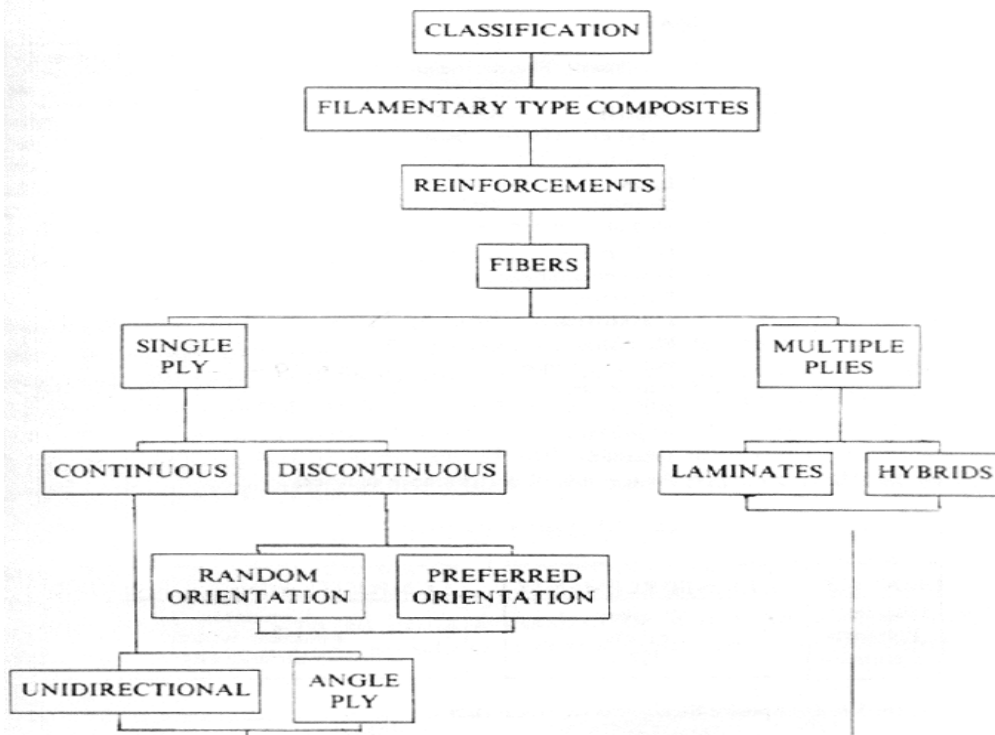


Figura 1.2 Diagrama de Varios Tipos de Filamentos de los Materiales Compuestos

COMPUESTOS REFORZADOS

Alumina	-AL ₂ O ₃
Aluminá	-Al
* Boro	-B
Boro Nitrido	-BN
Berilio	-Be
* Vidrio	-Gl
* Grafito	-Gr
*Aramid (Kevlar)	-Kv
Carburo de Silicon	-SiC
Silicon Nitrido	-Si ₂ N ₄
Titanio	-Ti
Tungsteno	-W

* Los Refuerzos principales de Alto rendimiento

Figura 1.3 Refuerzos

LOS MATERIALES DE LA MATRIZ

(Térmicos, Termoplásticos, Metales)

Los acrílico

*Aluminio

*Epoxicos

Grafitos

Níquel

Nylon

Polybezimidazoles

Poliésteres

Los polietilenos

* Phenoles

Polypropilenos

* Polymides

Poliuretanos

El silicio de Phenol

El titanio

Figura 1.4 Materiales de Matrices

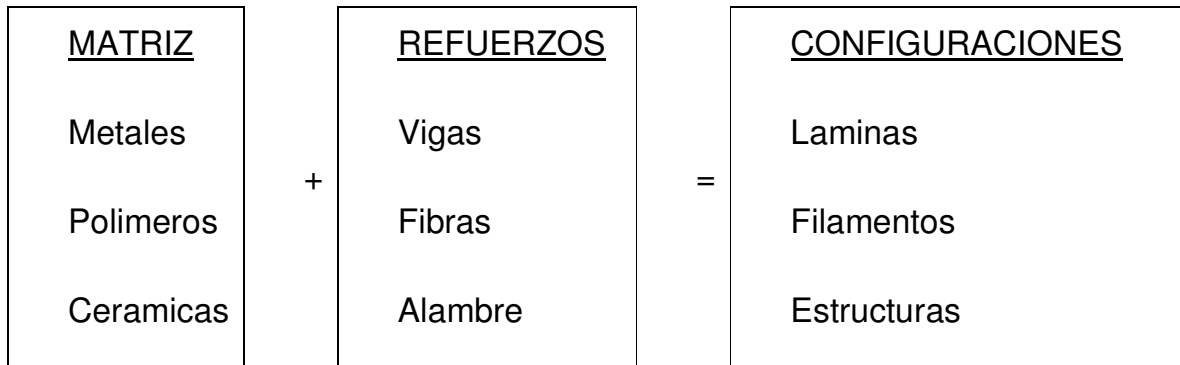


Figura 1.5 Configuraciones de compuestos estructurales

1.4 Comportamiento de un Material Compuesto

Ya se ha definido y clasificado los materiales del tipo compuesto, así como también se han descrito los procesos industriales pertinentes y asociados con ellos. Ahora volveremos la atención a definir los compuestos por lo que se refiere a su respuestas bajo las cargas aplicadas. Como un acercamiento general a caracterizar la conducta del material compuesto, se pueden describir los materiales al nivel macroscópico como se presentan en el siguiente enunciado

* el tipo:

Homogeneo/Isotropico (HI)

Homogeneo/Anisotropico (HA)

No Homogeneo/Isotropico (NHI)

No Homogeneo/Anisotropico (NHA)

Un cuerpo homogéneo es uno en que las propiedades uniformes existen a lo largo del cuerpo y para el cual las propiedades no son funcionalmente dependientes en la de la posición dentro del cuerpo. Un cuerpo isotropico es uno que tiene las mismas propiedades materiales en cualquier dirección, a cualquier punto medio dentro del material.

Así, debido a las heterogeneidades inherentes y las complejidades asociadas de describir la conducta del material compuesto, estos materiales generalmente se analizan de dos puntos de vista Fig. 1.6: A saber,

Micro mecánicos

Macro mecánicos

El análisis de Micro mecánica reconoce el elemento constitutivo básico del compuesto, es decir, la fibra y elementos de la matriz, pero no considera la estructura interior de los elementos constitutivos. Así, la heterogeneidad del caso se reconoce y se consideró para el análisis. Para desarrollar una metodología conveniente para caracterizar la composición del material a este nivel de análisis, es generalmente necesario introducir, para simplificaciones aproximaciones. Lo más importante es la fibra que condensa el arreglo dentro de la lámina para que puedan usarse las propiedades constitutivas junto con el fragmento de volumen de refuerzos para predecir las propiedades medias en la lámina. Estos valores calculados sirven entonces como una base para la entrada en el análisis por predecir las propiedades macro-estructurales.

El análisis macro-mecánico considera sólo las propiedades promediadas de la lámina como lo mas importante, en cuanto a lo que es la micro-estructura de la lámina se ignora y las propiedades a lo largo de ella y perpendicular a la dirección de la fibra se reconocen. Como resultado de esto, se considera que el elemento estructural es construido en una combinación sistemática de estas láminas con los elementos estructurales, sea en viga, lamina, o paneles analizados por las teorías orthotropicas clásicamente formuladas.

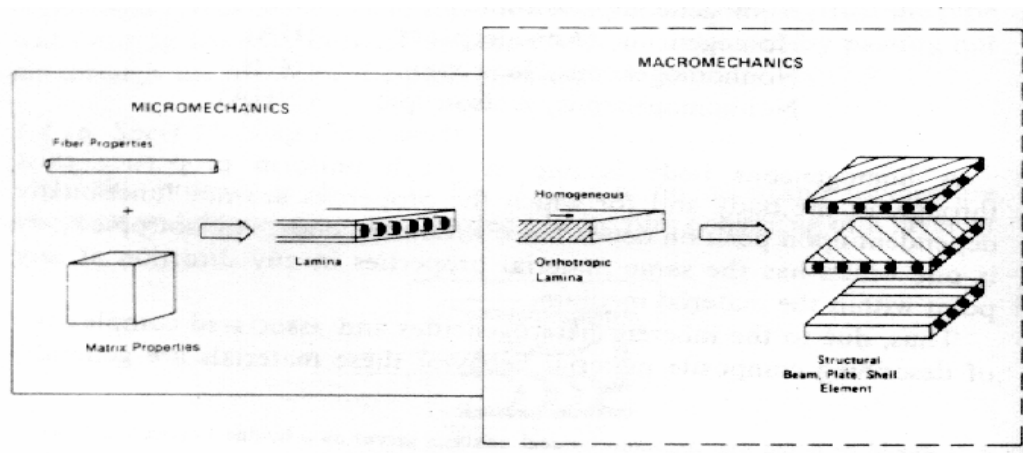


Figura 1.6 Caracterización Analítica de Materiales Compuestos

Este último punto es un concepto poderoso en el que la habilidad estructural y de orientación de la lámina son las primeras ventajas particularmente significativas del material compuesto, esto mas que todo cuando se compara con los materiales monolíticos convencionales. Principalmente entre éstos, la habilidad es entallar o emparejar las propiedades de la lámina y de orientación, dado la reunión, secuencialmente se considera que es relacionado estrechamente al material isotropico. De hecho, una serie simple de cabos apilados entre si a 60° de orientación con respecto al material posee propiedades mas elevados .

Este estudio se enfoca en la metodología analítica asociada con caracterizar la conducta del material compuesto a nivel macroscópico. Asociado con este nivel de síntesis del material, es cierta característica de la composición que distingue los materiales compuestos de los

materiales isotropicos. Dos característica de los rasgos importantes del material orthotropico se relaciona a

- Normal y acoplamiento de esfuerzos de cortante compuestos de cabo de ángulo.

- La importancia de la dirección del esfuerzo cortante en la fuerza de compuestos

2. Ecuaciones Básicas en Mecánica de Sólidos

2.1 Condiciones de Equilibrio

Las **fuerzas externas** que actúan en un miembro pueden ser clasificadas como fuerza de Superficie y fuerzas del cuerpo. Una fuerza de superficie es del tipo concentrado cuando actúa en un punto; una fuerza de superficie también puede distribuirse uniformemente o no uniformemente encima de un área finita. Las fuerza de cuerpo (fuerza gravitatoria, magnética, y la inercia) son asociadas con la masa de un miembro, en lugar de las superficies, y es distribuido a lo largo del volumen de un miembro. Ellos son especificados en términos de fuerza por unidad volumen. Todas las fuerzas que actúan en un miembro, incluso las reacciones, son consideradas como fuerzas externas. Las **fuerzas internas** son las fuerzas que unen las partículas que forman al cuerpo.

Por otra parte, asumimos que las fuerzas del cuerpo pueden despreciarse y que la fuerza de superficie es aplicada firmemente y despacio como carga estática. En el Sistema Internacional de Unidades (SI) que usaremos en este estudio, la fuerza es expresada en Newton (N). Esto debido a que los Newton sirven para medidas de cantidades pequeñas, el Kilo newton (Kn) se usa a menudo en la práctica.

Una estructura es una unidad compuesta de miembros interconectados, apoyados de una manera que son capaces de resistir las fuerzas aplicadas en el cuerpo, a través de equilibrio estático. La adopción de conducta delgado-amurallada permite hacer ciertas asunciones en el análisis estructural. El mismo peso de una estructura, a veces llamado la carga muerta, es fijo en la posición y constante en la magnitud sobre la vida de la estructura. Por otro lado, una carga viva es una carga movible que puede variar en la magnitud. Los ejemplos incluyen carga de ocupación, carga de nieve, carga del viento, carga de terremoto, carga de línea de manera alta para representar un vehículo, e impacto y carga dinámica.

Cuando un sistema de fuerzas que actúan en un cuerpo tiene resultante cero, se dice que el cuerpo está en el equilibrio. Es decir, el equilibrio de fuerzas es el estado en que las fuerzas que se aplicaron en el cuerpo están en balance. A diferencia de esto, en las tres dimensiones, las condiciones de equilibrio requieren el cumplimiento de las siguientes ecuaciones de estáticas:

(1.)

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

Éstas ecuaciones declaran que la suma de todas las fuerzas que actúan en un cuerpo en cualquier dirección deben ser cero; y la suma de todos los momentos sobre cualquier eje deben ser cero. Esto para que exista equilibrio en el cuerpo. En un problema plano en, dónde todas las fuerzas actúan un plano simple (xy), hay sólo tres ecuaciones independientes de estática:

(2.)

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

Reemplazando la sumatoria de fuerzas por una suma equivalente del momento en la Ecuación (2.), se presenta la siguiente alternativa de condiciones se obtienen:

(3.)

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_b = 0$$

Supongamos que la conexión en línea de los puntos A y B no es perpendicular al eje de x , o

(4.)

$$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0$$

Donde el punto A , B , y C no son colineales

Las ecuaciones precedentes son directamente aplicables a los cuerpos sólidos deformables. Normalmente se desprecian las deformaciones toleradas diseñando las estructuras cuando se tiene en cuenta las dimensiones globales de la estructura. Así, para los propósitos de análisis de fuerza en los miembros,

se usan las dimensiones iniciales del aun no deformado miembro en los cálculos.

Se dice que una estructura es estáticamente determinada cuando todas las fuerzas en sus miembros pueden ser obtenidas usando sólo las condiciones de equilibrio. Por otra parte, la estructura se llama estáticamente indeterminada, cuando el grado de indeterminancia estática es igual a la diferencia entre el número de fuerzas desconocidas y el número de ecuaciones de equilibrio pertinentes. Cualquier reacción que no es más que aquellos que puede encontrarse por las estáticas solo es llamado resultante. Así, el miembro de resultantes es igual al grado de indeterminancia.

Es normalmente necesario realizar idealizaciones del sistema o de la naturaleza de las fuerzas que actúan en el sistema. Éstos permiten la construcción de un diagrama de cuerpo libre en donde pueden aplicarse las ecuaciones de estática. El diagrama del cuerpo libre es un bosquejo del cuerpo aislado mostrando todas las fuerzas externas que actúan en él. Para la idealización desplazamos cuidadosamente el cuerpo libre hacia el diagrama de visualización dando la facilidad de observar las fuerzas que aquí intervienen. Esto mas cuando las fuerzas interiores son grandes, y el corte imaginario está hecho a través del cuerpo en las secciones de interés.

2.2 Definición de Tensión

Considere un cuerpo en equilibrio, sujeto al sistema de fuerzas externas (Fig. 1.1a). Para Investigar las fuerzas interiores en algún punto Q en el interior del cuerpo, realizamos un corte en Q por un plano imaginario que divide el cuerpo en dos porciones. El equilibrio de fuerzas que actúan en una porción requiere la presencia de fuerzas interiores en el lugar de la sección. Estas fuerzas interiores, aplicadas a ambas porciones, son continuamente distribuidas sobre de la superficie cortada. Este proceso recibe el nombre de método de secciones, y es el primer paso a realizar para resolver todos los problemas cuando las fuerzas interiores están averiguándose.

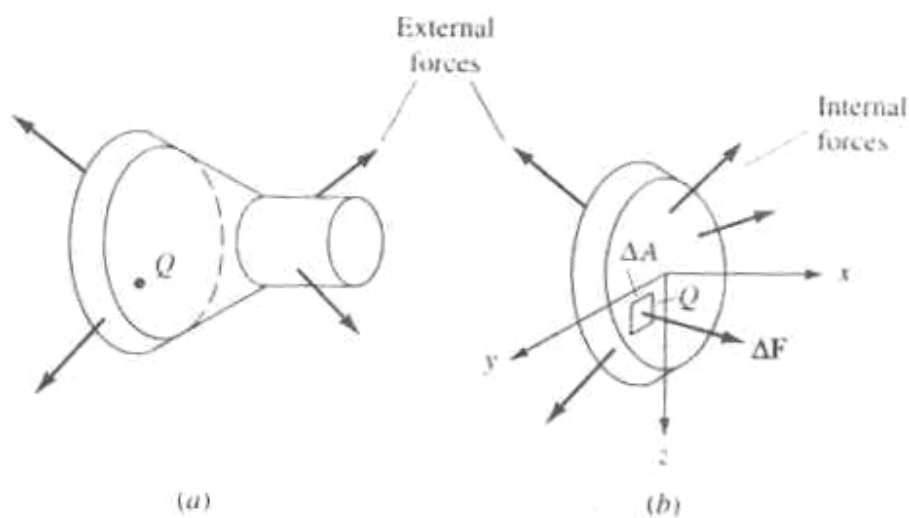


Figura 2.1

(a) Seccionamiento de un cuerpo; (b) diagrama de cuerpo libre de una de las partes seccionadas del cuerpo

La porción izquierda aislada del cuerpo se pinta en la Fig. 1.1b. Un elemento de área ΔA , localizada en el punto Q sobre la superficie cortada, es influenciada por una fuerza ΔF . En general ΔA no queda a lo largo de x , y , o z . Deja a sus componentes ser ΔF_x normal, $\Delta F_y, \Delta F_z$ tangente a ΔA . Entonces, el esfuerzo normal σ_x , y el esfuerzo cortante enfatiza en τ_{xy} y τ_{xz} pueden definirse como sigue:

(5.)

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dF_y}{dA} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{dF_z}{dA}$$

Estas expresiones proporcionan los componentes de la fuerza a un punto Q a qué el área ΔA es reducida en el límite. Note que $\Delta A \rightarrow 0$ es una idealización, porque la propia superficie no es continua en la escala atómica. Pero nuestra consideración con la tensión en áreas dónde los tamaños son grandes comparadas con la distancia entre los átomos en el cuerpo sólido. Por consiguiente, la tensión es una definición adecuada para propósitos de ingeniería.

El esfuerzo (σ o τ) se obtiene dividiendo la fuerza por el área, tiene unidades de fuerza por unidad de área. En las unidades SI, la tensión es nominada en Newton por metro cuadrado (N/m²), o pascal. El pascal es una cantidad muy pequeña, y un mega pascal (Mpa) es comúnmente usado.

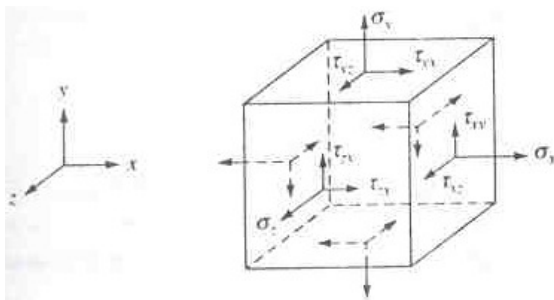


Figura 2.2

Elemento sometido a esfuerzos en tres dimensiones. Todos los esfuerzos tienen sentidos positivo.

2.3 Componentes de Tensión

Un cubo de dimensiones infinitesimales aislado de un sólido expondría el caso general del estado tridimensional de esfuerzos (Fig. 1.2.). Se considera que el esfuerzo mostrado es el mismo en las caras mutuamente paralelas, y uniformemente distribuida en cada cara. Sin embargo, en general los esfuerzos variarían de una cara a una cara

paralela y también variarían encima de una cara particular. Una cara o plano normalmente se identifica por el eje normal a él, por ejemplo las caras de x son perpendiculares al eje de x . Un total de nueve componentes de esfuerzo escalar, definiendo el estado de esfuerzo a un punto, puede escribirse en la siguiente forma:

(6.)

$$[\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Ésta es una representación en matriz del esfuerzo de tensión. Es una tensión de segunda línea que exige dos índices para identificar sus elementos. Por ejemplo, un vector es una tensión de primera línea y un escalar es de línea cero.

La anotación del subíndice doble se interpreta como sigue: El primer subíndice denota la dirección de una normal a la cara en que el componente de tensión actúa; el segundo denota la dirección del esfuerzo. Se evitarán los subíndices repetitivos, para los esfuerzos normales se designarán $\sigma_x, \sigma_y,$ y σ_z como es mostrado en la Ecuación (6.) En Sec. 2.5 Se muestra rigurosamente que, $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ y $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, o $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

En el caso de tensión bidimensional o plana, sólo las caras de x y y del elemento está sujeto a los esfuerzos, y todo los esfuerzos actúan paralelo al eje x y y (Fig. 1.3a). Para conveniencia, dibujamos a menudo una vista bidimensional del elemento de tensión plano, como es mostrado en el Fig. 1.3b. Cuando sólo dos esfuerzos normales están presentes, el estado de esfuerzo en término biaxial.

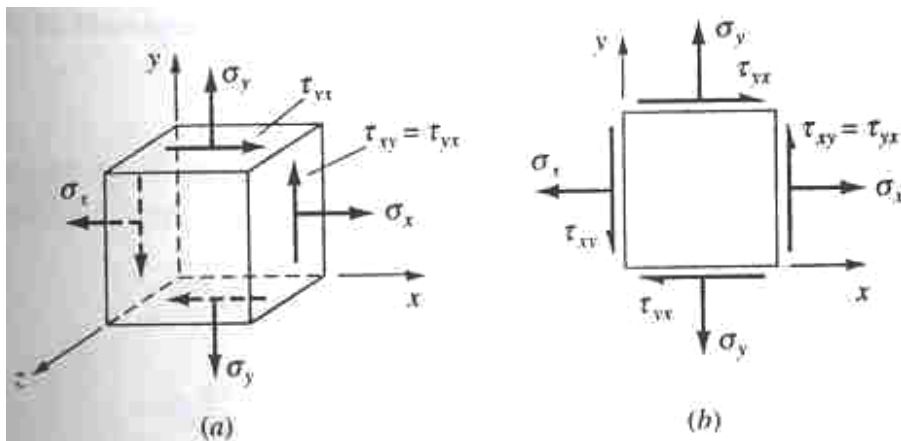


Figura 2.3.

(a) Elementos en esfuerzo plano; (b) Representación bidimensional de los elemento del esfuerzo plano.

Convención de signos

La cara de un elemento cuyo exterior normal está a lo largo del positivo (negativo) la dirección de un eje de la coordenada se define para ser positiva (negativo) la cara. Cuando el componente de esfuerzo actúa en una cara

positiva en una dirección de la coordenada positiva, el componente de esfuerzo es considerado negativo cuando actúa en una cara positiva en una dirección de la coordenada negativa (o viceversa).

De acuerdo, los esfuerzos de tensión siempre son positivos y los esfuerzos de compresión siempre son negativos. La convención de signos también puede declararse como sigue: Una componente del esfuerzo es positivo si ambos, el exterior normal del plano en que actúa y su dirección están en las direcciones de la coordenada del mismo signo; de otra forma sería negativo. Las figuras 1.1 y 1.3 muestran el normal positivo y esfuerzos cortante.

2.4 Resultante de Fuerza Interna

Fuerzas distribuidas dentro de un miembro pueden representarse por una fuerza estáticamente equivalente y un vector del momento que actúan a cualquier punto arbitrario de una sección. Éstas resultantes de fuerzas internas, también llamadas resultantes de tensión, consisten en fuerza axial. Ellos son expuestos usualmente a un corte imaginario en el plano incluyendo el centroide C a través del elemento y resultante en el componente normal y tangencial a la sección cortada (Fig. 1.4). Note que el sentido de momentos sigue la regla del tornillo de mano derecha y,

para la conveniencia, frecuentemente se representa por los vectores doble encabezados, como es indicado en la figura 1.4:

Cada fuerza interior y componente del momento refleja un efecto diferente de la carga aplicada en un miembro. Estos efectos son como sigue, con referencia a la Fig. 1.4

La fuerza axial P tiende a alargar o acortar al miembro.

Fuerzas cortantes V_y tienden a cortar una parte del miembro relativo a la parte adyacente.

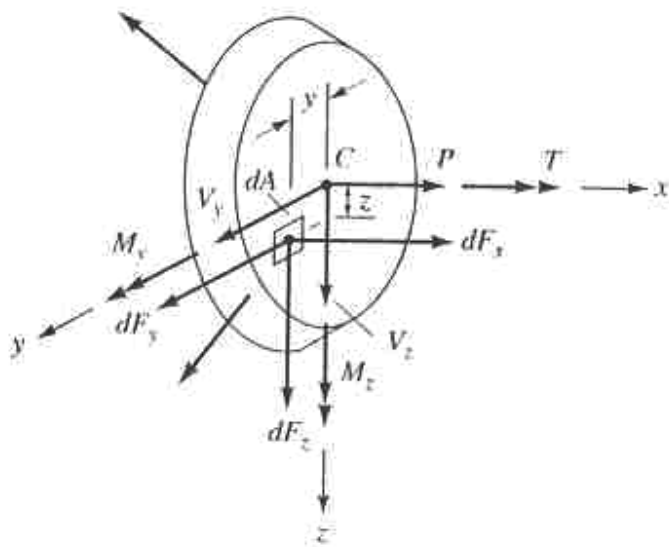


Figura 2.4

Las resultantes caras internas positivas y componentes de dF a un punto en la sección cortada de parte aislada del cuerpo mostrada en la Fig. 1.1a.

El torque T es responsable para torcer al miembro.

Los momentos de doblamiento M_y y M_z instan al miembro a doblarse.

Generalmente, es conveniente trabajar por separado con los modos precedentes de transmisión de fuerza y, si es pertinente, para combinar los resultados para la solución final. Un miembro puede estar simultáneamente bajo cualquiera o todos los modos.

La convención de signos adoptado para el esfuerzo en la Sec. 1.4 también se aplica a la fuerza y componentes del momento. Es decir, para una fuerza positiva (o momento) el componente actúa en la cara positiva en la dirección de la coordenada positiva o en una cara negativa en la dirección de la coordenada negativa, y así sucesivamente. La anotación anterior para los resultantes de fuerza interna normalmente es consistente con lo comúnmente usado en el análisis de la mayoría de los miembros estructurales.

Para establecer la relación entre los componentes de los esfuerzos y las resultantes de fuerza interiores, considere un área infinitesimal dA de la sección cortada mostrada en la Fig. 1.4. Este área típica ha actuado en los componentes de dF , expresado por Eqs. (5.) como el área típica ha actuado en los componentes de dF , expresados por Eqs. (5.) como

$dF_x = \sigma_x dA$, $dF_y = \tau_{xy}$ y $dF_z = \tau_{xz} dA$. Obviamente, los componentes de tensión en la sección cortada causan los resultantes de fuerza interna en esa sección. Por consiguiente, la suma de las fuerzas incrementales en las direcciones de x , y , y z son

$$(7.) \quad P = \int \sigma_x dA \quad V_y = \int \tau_{xy} dA \quad V_z = \int \tau_{xz} dA$$

Semejantemente, las sumas de los momentos de las mismas fuerzas sobre el eje x , y , y z dan

$$(8.) \quad T = \int (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \quad M_y = \int \sigma_x z dA \quad M_z = -\int \sigma_x y dA$$

Aquí las integraciones encima del área A de la sección cortada. Nosotros observaremos primero en Sec. 2.2 cómo Eqs. (7.) conecta los resultantes de fuerza interna y estado de los esfuerzos en un caso específico.

2.5 Ecuaciones Diferenciales de Equilibrio

Como fue previamente nombrado, los componentes del esfuerzo generalmente varían de punto a otro punto en un cuerpo cargado. Tales variaciones de esfuerzos, consideradas por la teoría de elasticidad, son gobernadas por las ecuaciones de estática. El cumplimiento de estas condiciones a las ecuaciones diferenciales de equilibrio.

Para un caso bidimensional, la acción de esfuerzos en un elemento de lados, dx , dy , y de unidad de espesor se muestra en la Fig. 1.6. Los componentes de x y y de las fuerzas del cuerpo por unidad de volumen, F_x y F_y , son independientes de z , y componente z de la fuerza del cuerpo

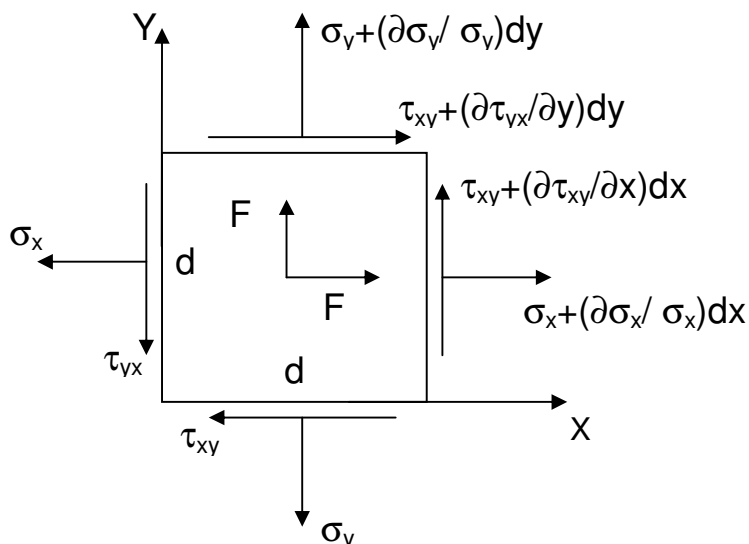


Figura 2.5

Elementos con tensiones y fuerzas de cuerpo.

$F_z = 0$. Considere, por ejemplo, la variación de un componente de esfuerzo, llámese σ_x , de un punto a otro punto. Éste puede ser expresado por la expresión de Taylor truncada:

$$(9.) \quad \sigma_x + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dX$$

La derivada parcial se requiere porque σ_x varía con x y y . Los componentes σ_y y τ_{xy} cambian de una manera analógica.

Requerimos ahora que el elemento de esfuerzo (Fig. 1.6) satisfaga la condición de equilibrio $\sum M_z = 0$. Así :

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dx dy \right) \frac{dx}{2} - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy \right) \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dx dy$$

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dy + F_y dx dy \frac{dx}{2} - F_x dx dy \frac{dy}{2} = 0$$

Descuidando el producto triple que involucra dx y dy , tenemos

$$(10.) \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Igualmente, para un estado general de esfuerzo, puede verificarse que $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ y $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. De los subíndices para los esfuerzos del cortante son conmutativos, y el tensor de esfuerzo es simétrico. Esto significa que los esfuerzos cortante en los planos mutuamente perpendiculares de elementos son iguales.

La condición de equilibrio que dirige las fuerzas de x a cero, $\sum F_x = 0$, lleva a la expresión

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dx + F_x dx dy = 0$$

Una ecuación similar es descrita para $\sum F_y = 0$. Simplificando estas expresiones, podemos obtener las ecuaciones diferenciales de equilibrio para un esfuerzo bidimensional en la formula (2.)

$$(11.) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio pueden ser generalizadas considerando el plano tridimensional de Fig. 1.6 con el siguiente resultado:

(12.)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0$$

Aquí cada componente de fuerza del cuerpo puede estar en función de x , y , y z . Notamos que en muchas aplicaciones prácticas, el peso del miembro es la única fuerza del cuerpo. Si tomamos el eje de Y como ascendente y denotamos p la densidad de masa por el volumen de la unidad del miembro y por g , la aceleración gravitatoria, entonces $F_x = F_z = 0$ y $F_y = pg$ en Eqs. (11.) y (12.).

Nos damos cuenta desde las dos condiciones de equilibrio Eqs. (11.) que se involucran las tres incógnitas ($\sigma_x, \sigma_y, Y_{xy}$) y las tres relaciones de Eqs. (12.) contiene los seis componentes de esfuerzos desconocidos, los problemas en el análisis de esfuerzos se dan internamente y son estáticamente indeterminados. En la mecánica de acercamiento de los

materiales, esta indeterminación se elimina introduciendo supuestos simplificadores con respecto a la distribución de esfuerzos y de la tensión, y considerando el equilibrio de los elementos finitos de carga que transporta el miembro estructural.

3.5.1 Esfuerzo Definido

Como resultado de la deformación, la extensión, reducción, o cambio en la forma de un cuerpo puede ocurrir. Para determinar la distribución de esfuerzos actual dentro de un cuerpo, es necesario entender el tipo de deformación que ocurre en ese cuerpo. Esto requiere la descripción del concepto de esfuerzo. Los componentes de desplazamiento a un punto dentro de un cuerpo en las direcciones de x , y , y z son descritos por u , v , y w , respectivamente. Los esfuerzos que son el resultado de las deformaciones pequeñas son comparado con la unidad y sus productos, las condiciones del orden superiores, son abandonados.

Las primicias de lo asumido son precedentes a uno de los principios de mecánica sólida llamado el principio de superposición. Esta regla es válida siempre que la cantidad (deformación o esfuerzo) obtenida sea directamente proporcional a las cargas aplicadas. En tales situaciones, la cantidad total dada a todas las cargas que actúan simultáneamente en un miembro pueden encontrarse determinando separadamente la cantidad dada a cada carga y

combinando los resultados entonces obtenidos. El principio de superposición se usará repetidamente en este estudio. Este permite reemplazar una carga compleja por dos o más cargas simples y por consiguiente presenta un problema más dócil a la solución.

El concepto de esfuerzo normal puede ilustrarse considerando la deformación de la barra prismática mostrada en la Fig. 1.1a. Una barra prismática es un miembro recto que tiene las áreas constantes a lo largo de su longitud. La longitud inicial del miembro es L . Siguiendo la aplicación de la carga, la deformación total es δ . El esfuerzo normal está definido como el cambio de longitud en la unidad de longitud:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Un signo positivo significa alargamiento; un signo negativo, reducción. El estado de la tensión precedente es el esfuerzo uniaxial último.

Cuando un cuerpo sin tensión se sujeta a un cambio de temperatura, un esfuerzo normal también se desarrolla. La deformación térmica para un material homogéneo e isotrópico se da por

$$\varepsilon_1 = \alpha (\Delta T)$$

El coeficiente de dilatación α es aproximadamente constante encima de un cambio de temperatura moderado. Representa una cantidad por el grado Celsius ($1/^{\circ}\text{C}$) cuando es ΔT moderado en $^{\circ}\text{C}$

El esfuerzo cortante es la tangente del cambio total en el lugar de la toma angular entre dos líneas perpendiculares en un cuerpo durante la deformación. Para los desplazamientos pequeños, nosotros podemos poner

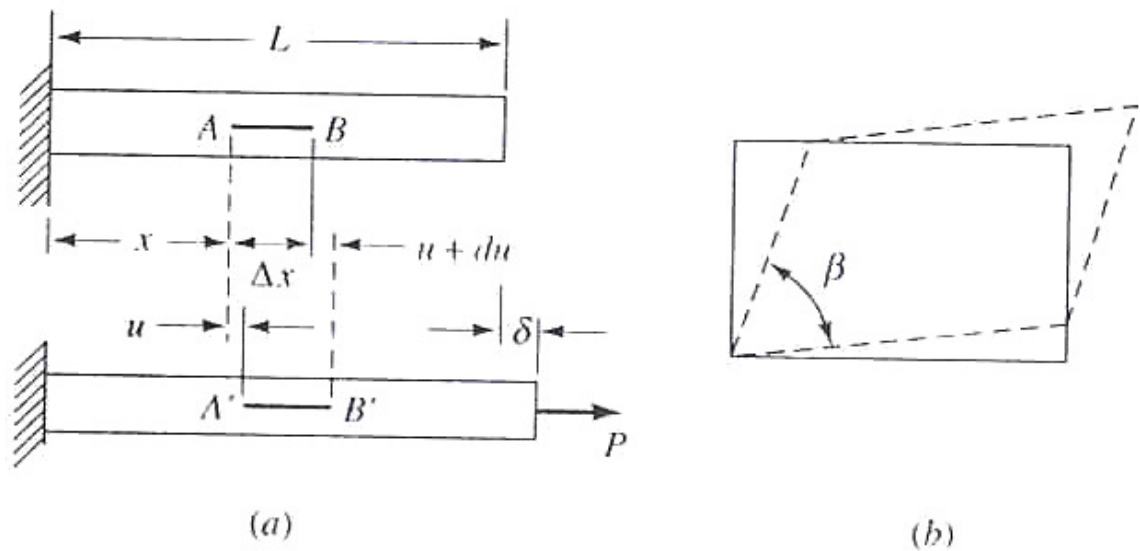


Figura 2.6

(a) Deformación de una barra prismática; (b) Distorsión de un lamina rectangular.

La tangente del ángulo de distorsión igual al ángulo. Por consiguiente, para un lamina rectangular (Fig. 2. 6b), el esfuerzo cortante medido en los radianes está definida como

$$\gamma = \frac{\Pi}{2} - \beta$$

donde β representa el ángulo entre los dos bordes girados. El esfuerzo cortante es positivo si el ángulo recto entre las líneas de referencia disminuye, como es mostrado en la figura; por otra parte, el esfuerzo cortante es negativo. Indicaremos ambos normal y los esfuerzos cortantes como las cantidades dimensionales. Ellos raramente exceden valores de 0.002, o 2000u, en el rango elástico de la mayoría de materiales de ingeniería. Esto se lee como "2000 micras".

2.6 Componentes de Deformación, Condiciones de Compatibilidad

Cuando la deformación uniforme no ocurre, los esfuerzos varían de punto a punto en un cuerpo. Entonces, la expresión para el esfuerzo debe relacionar a una línea AB de longitud Δx que tiene un estiramiento por un valor u bajo debido a la carga axial, como es mostrado en la Fig. 1.11a. En esta base, el esfuerzo normal está definido por

$$(13.) \quad \varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Esta ecuación representa el esfuerzo en un punto en el que Δx se encoge.

Cuando el esfuerzo bidimensional o plano ocurre, todos los puntos en el cuerpo, antes de y después de la aplicación de la carga, permanecen en el mismo plano. Así, la deformación de un elemento de dimensiones dx , dy , que posee unidad de espesor, pueden contener los esfuerzos lineales (Fig. 1.12a) y un esfuerzo cortante (Fig. 1.12b). Aquí la anotación derivativa parcial se usa, desde los desplazamientos u y v son funciones de x y y . Refiriéndose a las Figuras 1.12, y Eq. (13.), escribimos:

Eq. (14.)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

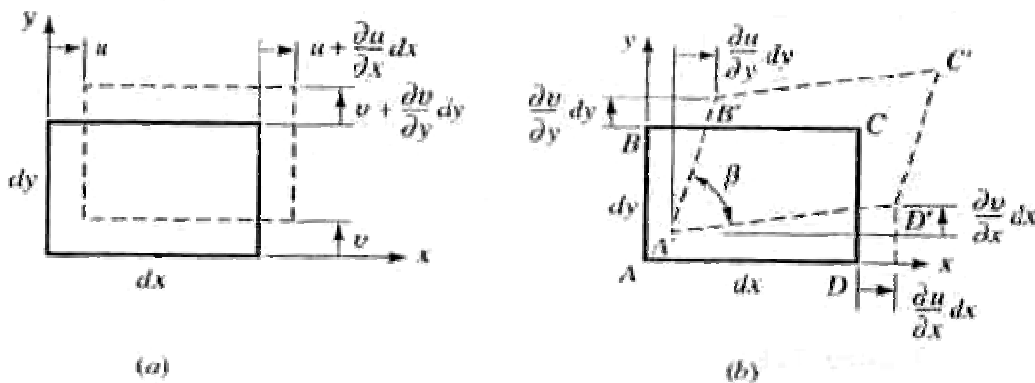


Figure 2.7 Deformaciones de elemento bidimensional: (a) tensión lineal; (b) esfuerzo cortante.

Claramente, $Y_{xy} = \Pi / 2 - \beta$ representa el esfuerzo cortante entre los ejes x y y (o y y x) ejes y de $Y_{xy} = Y_{yx}$

En el caso de un elemento rectangular delgado de lados Δx y Δy la versión aproximada de Eq. (14.) puede expresarse en la formula

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{Eq. (15.)}$$

donde $Y_{xz} = Y_{zx}$ y $Y_{yz} = Y_{zy}$. La ecuación (15.) representa los componentes de un esfuerzo de tensión, que es análogo al esfuerzo de tensión discutidos.

La definiciones anteriores muestran que los seis componentes del esfuerzo dependen linealmente en los derivados de los tres componentes del desplazamiento. Así, el esfuerzo no puede ser entre si independiente de otro. Pueden desarrollarse seis ecuaciones, llamando a estas las condiciones de compatibilidad, mientras mostrando las relaciones mutuas entre E_x , E_y , E_z , Y_{xy} , Y_{xz} , y Y_{yz} [1.2]. El número de tales ecuaciones se vuelve uno para un problema bidimensional. Las condiciones de compatibilidad nos dicen que los desplazamientos son continuos. Físicamente, esto significa que el cuerpo debe deformarse uniformemente.

Cabe anotar que el método de la teoría de elasticidad esta basado en los requisitos: compatibilidad de esfuerzo, equilibrio de esfuerzo [Eqs. (12.)];

La ley generalizada de Hook; nos muestra el límite de condiciones para un problema dado. Por otro lado, en el método de mecánicas de acercamiento de los materiales, la asunción básica es en conjunto hecho acerca de la distribución de esfuerzos en el cuerpo o en la porción finita del cuerpo. De las soluciones de Eq. (15.), las condiciones de compatibilidad, y Eq, (12.) no se requieren.

3. Modelos que describen el comportamiento de láminas y cáscaras.

3.1. Elementos de la teoría de flexión de laminas

Las laminas son los elementos estructurales inicialmente planos, teniendo el espesor mucho más pequeño que las otras dimensiones, Incluido entre los ejemplos más familiares de laminas los cubre mesa, los tableros laterales y tejados de edificios, discos de la turbina, mamparos, y fondos del tanque. Muchos problemas de la ingeniería prácticos entran en las categorías “las laminas en doblamiento” o “cubiertas en doblamiento.” Trataremos las laminas de tal forma que sea común dividir el grueso t en las mitades de un mismo plano paralelo a las caras. Este plano recibe el nombre de plano medio de laminas. El espesor del plano es moderado en una dirección normal al medio plano. Las propiedades

de flexión de un lamina dependen grandemente de su espesor comparado con sus otras dimensiones.

Las laminas pueden ser clasificadas en tres grupos: laminas delgadas con las desviaciones pequeñas, laminas delgadas con las desviaciones grandes y la lamina de espesor. Según el criterio a menudo aplicado para definir un lamina delgada (para los propósitos de cálculos técnicos) la proporción del espesor a la longitud del plano debe ser menos que $1/20$. Consideraremos sólo desviaciones pequeñas de laminas delgadas, unas simplificaciones consistentes con la magnitud de deformación normalmente encontrada en las estructuras de las lamina. Para la claridad, sin embargo, las desviaciones y espesor de laminas se mostrarán grandemente exagerados en algunos diagramas. Como es notado previamente, a menos que por otra parte especificado, asumiremos que el lamina y materiales de la cubierta son homogéneos e isotropicos.

Determinar la distribución de tensión y desplazamiento para un plano sujeto a un juego dado de fuerzas requiere la consideración de los principios básicos perfilados en la Sec 1.2, perteneciendo a ciertas leyes físicas, propiedades de materiales, geometría, y fuerzas de la superficie. Se usan estas condiciones, declaradas matemáticamente, para resolver los problemas del torcimiento de laminas. Es a menudo ventajoso, dónde la forma de la lamina o la configuración de la carga evita una solución teórica o donde la comprobación

se busca, para emplear los métodos experimentales. El aproximado numérico y la energía se acerca, es instantáneamente eficaz para este propósito. Para los casos de uniformidad y laminas orthotropicos, respectivamente, se requiere rederivación de algunas relaciones básicas y la ecuación gobernante.

Fondo histórico

El primer tratamiento significativo de laminas ocurrió en los años 1800s. Desde entonces un gran numero de casos de problemas de doblamiento de laminas han funcionado: la teoría fundamental (principalmente por Navier, Kirchhoff, y Lévy) y los acercamientos numéricos (por Galerkin y Wahl, y otros). La literatura relacionada con las laminas y cubiertas es bastante extensa.

Lévy aplicó el análisis de la gran definición clásica de Kirchhoff a las laminas de espesor. Prescott comenzó una teoría más exacta para doblamiento de laminas considerando los esfuerzos del plano medio. Una teoría de las lamina rigurosa que tiene en cuenta las deformaciones usadas por las fuerzas del cortante transversas se introdujo por Reissner.

En 1956 Turner, Clough, Martin y Topp introdujeron el elemento finito medio que permite la solución numérica de laminas complejas y problemas de las cubiertas de manera económica. Las numerosas contribuciones en éste área debido a Argyris y Zienkiewicz. La reciente tendencia en el desarrollo de las teorías de las lamina se caracterizaron por la confianza extrema en las computadoras de gran velocidad y por la introducción de teorías más rigurosas. Los métodos numéricos aplicados tienen su apoyo principal en los programas por medio de las computadoras digitales electrónicas.

3.2. Comportamiento General de Laminas

Considere una lamina libre de carga, mostrado en la Fig. 3.1a, en que el plano xy coincide con el medio plano y que la desviación de x es cero. Los componentes de desplazamiento a un punto, ocurriendo en las direcciones de x , y , y z , se denota por u v y w , respectivamente. Cuando debido a la carga lateral, la deformación tiene lugar, el medio plano a cualquier punto $A(x_a, y_a)$ tiene desviación w (Fig. 3.1b). Las asunciones fundamentales de la teoría de la desviación pequeña de doblamiento o llamada clásica o teoría de costumbre para isotropicos, laminas homogéneas, elásticas, delgadas, esta basado en la geometría de deformaciones. Ellos pueden empezarse como sigue:

1. La desviación de la superficie media es pequeña comparada con el espesor de la lamina. La cuesta de la superficie desviada es por consiguiente muy pequeña y el cuadrado de la cuesta es una despreciable cantidad comparado con la unidad.

2. El plano medio sigue sin tensión subsiguiente a doblamiento.

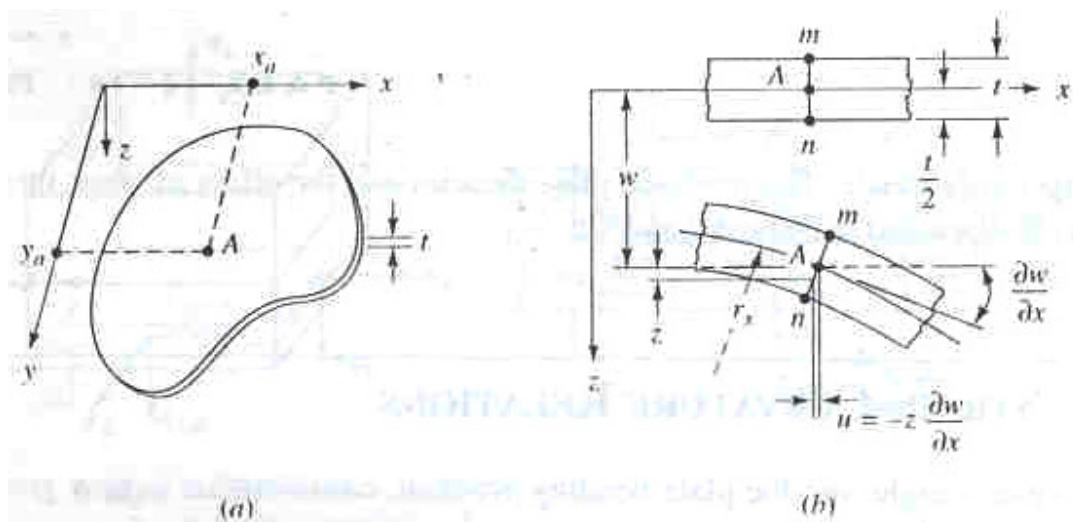


Figura 3.1.

(a) Un lamina de espesor constante; (b) la parte del lamina antes y después de la desviación.

3. Las secciones planas (mn) inicialmente normal a la cara media permanecen en el plano normal a esa superficie después del torcimiento. Esto significa que el cortante vertical de elasticidad tensiona y_{xz} y y_y son despreciables. La desviación de la lamina es así principalmente asociada

con los esfuerzos por flexión. Se deduce por consiguiente que la tensión normal E_z que también es el resultado de la carga transversal puede ser omitido.

4. El esfuerzo normal al plano medio, σ_z , es pequeño comparado con los otros componentes del esfuerzo y puede despreciarse. Así la suposición se pone inestable favorablemente en la medida que exista una alta concentración de las cargas transversas.

El asumir lo anterior, como en las hipótesis de Kirchhoff, nos da que sean análogos con la teoría del torcimiento simple de vigas. En la inmensa mayoría de diseños las aplicaciones y la justificación adecuada puede encontrarse para las simplificaciones declaradas con respecto al estado de deformación y esfuerzo. Debido a la disminución resultante en la complejidad, un problema de laminas tridimensional reduce a uno involucrando sólo a dos dimensiones. Por consiguiente, la ecuación de laminas gobernante se deriva de una forma conducida y sencilla.

Cuando las desviaciones no son pequeñas, el torcimiento de laminas se acompaña por los esfuerzos en el plano medio, asumimos que 1 y 2 son inaplicables. Una excepción, sin embargo, se aplica cuando un lamina dobla en una superficie diseñable (por ejemplo, las superficies de conos y cilindros). Este tipo de superficie puede doblarse atrás a un plano sin la variación en la distancia entre cualquiera de dos puntos en la superficie.

Si el plano medio de una lamina libremente o absolutamente apoyado y cargado tiene una forma diseñable, permanece lo distensionada igual para desviaciones que son iguales o más grande que el espesor, pero todavía es pequeño comparado con otras dimensiones de la lamina. Sólo bajo esta limitación en las desviaciones de los cuadrados de cuestas debe ser pequeño comparado con la unidad; de la expresión aproximada usada para las curvaturas es suficientemente exacto.

En los espesores de laminas, los esfuerzos cortantes son importantes, como para abreviar, las vigas profundas. Tal lamina se trata por medio de una teoría más general que se debe al hecho que lo asumido en 3 y 4 ya no es apropiado.

3.3. Las Relaciones de Curvatura Deformación

En orden o visión en el problema del torcimiento de laminas, se da la consideración ahora a la geometría de deformación. Como consecuencia de la adopción 3 de la sección anterior, las relaciones de esfuerzo-desplazamiento. Eqs. (15.) se reducen a

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 (3.1a-f) \quad \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & Y_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\
 Y_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & Y_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0
 \end{aligned}$$

Donde $Y_{ij} = Y_{ij}(i, j = x, y, z)$. Note que esta expresión también es llamada las relación de la cinemática, mientras tratando la geometría de esfuerzo en lugar de la materia de causa y efecto. Integrando Eq. (3.1d), obtenemos

$$(a) \quad w = w(x, y)$$

Indicando que la desviación lateral no varía encima del espesor del lamina. En una manera, integrando las expresiones para Y_{xz} y Y_{yz} da

$$(b) \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y)$$

Está claro que $u_0(x, y)$ y $v_0(x, y)$ representa, respectivamente, los valores de u y v en el plano medio. Basado en la asunción 2 de Sec 3.2, nosotros concluimos ese $u_0 = v_0 = 0$. Así

$$(3.2) \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

La expresión anterior para u se representa en la Fig. 3.1b a la sección mn que atraviesa el punto arbitrario $A(x_a, y_a)$. Una ilustración similar solicita v en el plano zy . Nosotros vemos que Eqs. (3.2) es consistente con la asunción 3. La substitución de Eqs. (3.2) en el primero y en tres de Eqs. (3.1) nos quedaría

$$(3.3a) \quad \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad Y_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Estas fórmulas proporcionan los esfuerzos a cualquier punto en el lamina.

La curvatura (igual al recíproco del radio de curva) de una curva plana esta definido como la proporción de cambio del ángulo de la pendiente de la curva con respecto a la distancia a lo largo de la curva. Debido a lo asumido en 1 de la Sec. 3.2, el cuadrado de la pendiente puede considerarse despreciable, y las derivadas parciales de Eqs. (3.3a) representan las curvaturas de la lamina. Por consiguiente las curvaturas k (kappa) al medio plano, en los planos paralelo a los planos xy , yz y xy , son respectivamente

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = K_x \\
 (3.4) \quad & \frac{1}{r_y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = K_y \\
 & \frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = K_{xy}
 \end{aligned}$$

Donde $K_{xy} = K_{yx}$. La curvatura K_x , y radio de curvatura R_x a cara media en el plano xy es mostrando en la Fig. 2.1.b. Semejantemente, el K_y y T_y pueden ser mostrados en el plano yx . La designación R_{xy} se escoge traerlo en la línea con los radios de curvatura; r_x tiene las dimensiones de una longitud como R_x , y R_y . Claramente, Eqs. (3.4) son las proporciones a que las pendientes varían encima de la lamina. La última de estas expresiones también recibe el nombre de torcedura del plano medio con respecto a los ejes x y y . La torcedura local del elemento de la lamina se muestra en el Fig. 3.2.

Nótese que, si una pendiente positiva $\partial w / \partial x$ de la superficie elástica se vuelve más positiva, como los aumentos de x , la curvatura k_x es positiva (Fig.3.1b). Una conclusión idéntica aplica al K_y y K_{xy} . Así, la curvatura de media cara es positiva cuando la lamina es de concavidad torcida descendente y negativa cuando es hacia arriba la concavidad torcida.

Las relaciones de la tensión-curvatura, por medio de Eqs. (3.3a) y (3.4) puede expresarse en la forma

$$(3.3b) \quad \varepsilon_x = -zk_x \quad \varepsilon_y = -zk_y \quad Y_{xy} = zk_{xy}$$

Desde que ninguna de las propiedades mecánicas esté involucrada, derivando las ecuaciones precedentes, estas relaciones pueden usarse para el inelástico así como para los problemas elásticos. Las ecuaciones (3.3) muestran el estado que los esfuerzos en la lamina varían linealmente con la distancia z del plano medio.

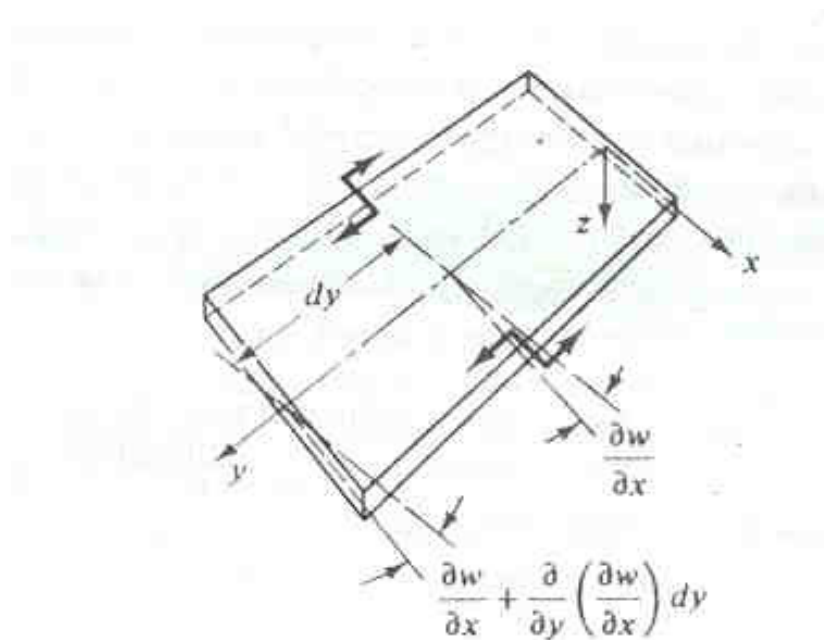


Figura 3.2. La torcedura de un elemento plano

3.4 Esfuerzos y resultantes de Esfuerzos

En el caso de un estado tridimensional de tensión, la tensión y la fatiga están relacionadas por la ley de Hook generalizada, válido para un isotropito de material homogéneo

$$(1.34) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad Y_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad Y_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad Y_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

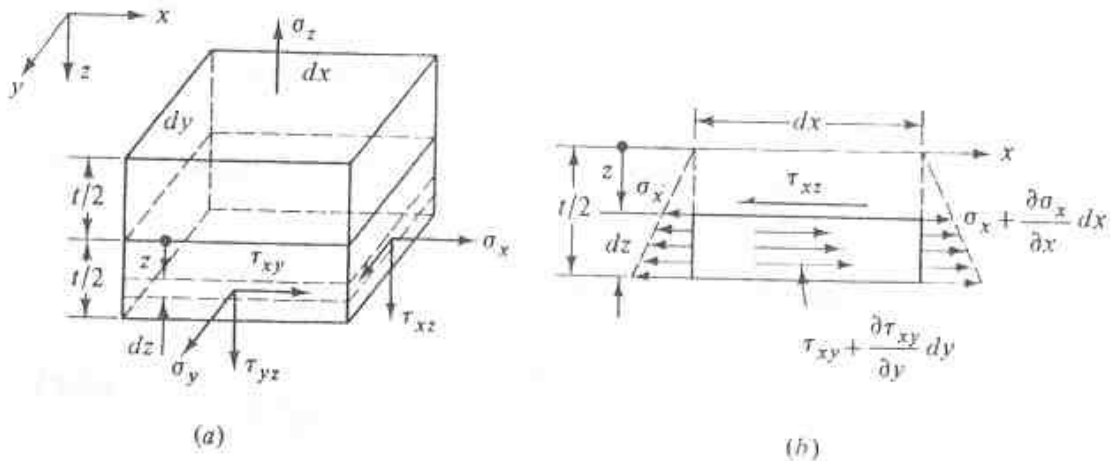


Figura 3.4 Esfuerzos en el fondo medio y esfuerzo normal al plano medio de un elemento de la lamina.

Donde $\tau_{ij} = \tau_{ij}(i, j = x, y, z)$. Las constantes E y G representan el módulo de elasticidad, la proporción de Poisson, y el módulo de elasticidad del cortante, respectivamente. Las expresiones que uno son

$$(1.35) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

La anotación del subíndice doble para la tensión se interpreta como sigue, el primer subíndice indica la dirección de la normal al plano o cara sobre el que actúan los componentes de tensión; el segundo subíndice relaciona a la dirección de la propia tensión. Se omitirán los subíndices repetidos en este caso. Es decir, la tensión normal σ_{xx} , σ_{yy} y σ_z (Fig. 3.4a). Una cara, plano, o superficie normalmente se identifica por el eje normal a él, ejemplo, la cara x es perpendicular al eje de x.

Recordando que la convención de signos para los esfuerzos cuenta en la relación entre la dirección de un exterior normal atraída a una superficie particular. De acuerdo con esto, si el exterior normal y el componente de tensión están en una dirección positiva (o negativa) relativa a la coordenada del eje, la tensión es positiva. Si los puntos normales exteriores en una dirección positiva mientras la tensión apunta en una dirección negativa (o viceversa), la tensión es negativa. Basándonos en

esto, todos los componentes de tensión mostrados en la Fig. 3.4a son positivos.

Substitución de $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ en Eqs. (1.34) rinde las siguientes relaciones de tensión-fatiga para un lamina delgada

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$(3.6) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Introduciendo las curvaturas de la lamina, Eqs. (3.3b) y (3.4), nosotros encontramos que lo anterior aparece en la formula

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (k_x + \nu k_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$(3.7) \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (k_y + \nu k_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Ez}{1+\nu} K_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Observemos en estas formulas, que los esfuerzos desaparecen en la superficie media y varían linealmente sobre el espesor del lamina.

Los esfuerzos distribuidos encima del espesor de los laminas produce momentos de torcimiento, momentos de giro, y las fuerzas del cortante son verticales. También se llaman estos momentos y fuerzas por la longitud de la unidad como los resultantes de tensión. Refiriéndose al Fig. 3.4a, tenemos

$$\int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dy dz = dy \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz = M_x dy$$

Semejantemente, se derivan expresiones para los otros resultantes así:

$$(3.8a) \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz$$

Donde $M_{xy} = M_{yx}$, y

$$(3.8b) \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

La convención de signos para la fuerza de cortante es igual que para el esfuerzo de cortante. Un momento positivo es aquel en que los resultados de los esfuerzos positivos están en el fondo de la mitad de la lamina. De acuerdo con todos los momentos y fuerzas de cortante que actúan en el elemento en el Fig. 3.6 de la Sec. 3.6 son positivos. Así, la curvatura inducida por un momento positivo está opuesta a eso asociado con la curvatura positiva de la superficie elástica.

Es importante mencionar que mientras la teoría de laminas delgadas omite el efecto de los componentes de tensión $Y_{xz} = \tau_{xz} / G$ y $Y_{yz} = \tau_{yz} / G$ sobre el doblamiento, las fuerzas verticales Q_x y Q_y no son despreciables. De hecho, ellos son del mismo orden y magnitud como la carga de superficie y los momentos, y están incluidos en la derivación de las ecuaciones de equilibrio (Sec. 3.6).

Sustituyendo Eqs. (3.7) en Eq. (3.8a) derivamos las fórmulas siguientes para los momentos de torcimiento y giro por lo que se refiere a las curvaturas y la desviación

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D(k_x + \nu k_y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
 (3.9) \quad M_y &= -D(k_y + \nu k_x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu)k_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}
 \end{aligned}$$

Donde

$$(3.10) \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Es la rigidez flexionante de la lamina. El signo negativo está de acuerdo con la convención para el momento y curvatura. La fuerza de cortante vertical Q_x y Q_y se relacionan en w , y en la derivación de las ecuaciones de equilibrio.

Cabe anotar que si un elemento de la lamina, de ancho la unidad y con su eje paralelo al eje x , es libre de mover la cara bajo la carga transversal, la cima y superficies del fondo se deformarían en forma de silla o superficie antielastica, aparecería una curvatura K_y . La rigidez flexionante sería entonces $Et^3/12$, como en el caso de la viga. El resto de la lamina previene la curvatura, sin embargo; debido a esta acción,

una parte de la lamina presenta rigidez mayor que una viga por un factor $1/(1-\nu^2)$, aproximadamente 10 por ciento.

Los componentes de tensión bidimensionales se encuentran de Eqs. (3.7) sustituyendo Eqs. (3.9) y empleando Eq. (3.10). De esta manera nosotros obtenemos

$$(3.11) \quad \sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3} \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3} \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3}$$

Los esfuerzos máximos ocurren en el fondo y superficies de la cima (a $z = \pm t/2$) de la lamina. En el SI, la tensión es moderada en newton por metro cuadrado (N/m²) o pázcales (Pa). Los momentos y fuerzas por la unidad de longitud tienen las unidades N-m/m, o simplemente N, y N/m, respectivamente.

3.5 Placas y Laminas de Materiales Compuestos

Volviendo ahora a (3.1), descuidando la forma del cuerpo los términos, F_x , que integra término por término por cada cabo, y sumando por lamina se tiene

$$(3.6) \quad \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{xk}}{\partial x} dz + \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{yxk}}{\partial y} dz + \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{zxk}}{\partial z} dz = 0$$

En los dos primeros términos integraciones y diferenciación puede intercambiarse, los dos términos N , y Nyx , aparecen explícitamente. En el tercer término está claro que entre mas se aplica la fuerza las tensiones del cortante laminar se cancelarán. Si se definen las tensiones del cortante de superficie aplicadas en la cima ($x=hn$) y fondo ($z=ho$) quedaran entonces las superficies definidas debajo (vea Figura 2.1):

$$(3.8) \quad \sigma_{zx}(h_N) \equiv \tau_{1x} \quad y \quad \sigma_{zx}(h_0) \equiv \tau_{2x}$$

Por lo cual también se puede escribir como:

$$(3.9) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0$$

Igualmente, integrando la ecuación de equilibrio en las direcciones de y resulta

$$(3.10) \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0$$

Donde

$$(3.11) \quad \sigma_{zy}(h_N) \equiv \tau_{1y} \quad y \quad \sigma_{zy}(h_0) \equiv \tau_{2y}$$

Así mismo, el equilibrio en las direcciones de z, y realizando una integración y sumando nos proporciona

$$(3.12) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_1 - p_2 = 0$$

Donde

$$(3.13) \quad \sigma_z(h_N) \equiv p_1 \quad y \quad \sigma_z(h_0) \equiv p_2$$

Además de las ecuaciones de equilibrio sobre fuerzas integradas, también se necesitan dos ecuaciones de equilibrio del momento, uno para la dirección de x y uno a la dirección de y. Multiplicando La ecuación 3.1 por el zdz , y luego integrando por cada cabo y al final sumando por toda la lamina resultan lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{xk}}{\partial x} z dz + \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{yxk}}{\partial y} z dz + \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{zxk}}{\partial z} z dz = 0$$

De nuevo, en las primeras dos integraciones de los términos y sumas puede intercambiarse con las diferenciaciones con el resultado que la primera vuelve a los términos $(\partial M_x / \partial x) + (\partial M_{xy} / \partial y)$. Sin embargo, el tercer término debe integrarse por las partes como sigue:

$$\sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{zxk}}{\partial z} z dz = \sum_{k=1}^N \left\{ z \sigma_{zx} \Big|_{h_{k-1}}^{h_k} - \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{zx} dz \right\}$$

Aquí el último término es claramente-Qx. De nuevo en el primer término en el derecho claramente los momentos de todas las tensiones del íter laminar entre los cabos se cancelan fuera, y sólo los términos que no son cero son los momentos de tensión del cortante aplicados en la superficie que enfatiza que ese término se vuelve

$$\frac{h}{2} [\tau_{1x} + \tau_{2x}] = h_N \tau_{1x} - h_0 \tau_{2x}$$

Usando la expresión anterior, las ecuaciones de equilibrio de momentos en las direcciones de x son

$$(3.14) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \frac{h}{2}[\tau_{1x} + \tau_{2x}] = 0$$

Semejantemente en la dirección y las ecuaciones de equilibrio de momento son

$$(3.15) \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \frac{h}{2}[\tau_{1x} + \tau_{2x}] = 0$$

Donde todas las condiciones están anteriormente definidas. Hay cinco ecuaciones de equilibrio así, para una lamina rectangular, sin tener en cuenta qué material es, se utilizan los materiales en la lamina: (3.9), (3.19), (3.12), (3.14) y (3.15).

3.6 Flexión de Laminas de Material Compuesto

Considere un chapado compuesto de un material laminado que es el medio-plano simétrico, ése es $B_{if}=0$, y no tiene ninguno otro término de acoplamiento, ninguna tensión de cortante de superficie y no tiene efectos hidrotérmicos.

Las ecuaciones de equilibrio de la lamina para el torcimiento, debido a la carga lateral esta dada por (3.14), (3.15) y (3.12) :

$$(3.16) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$(3.17) \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

$$(3.18) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0$$

Las ecuaciones, (3.16) y (3.17) pueden sustituirse en (3.18) resultándonos:

$$(3.19) \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y)$$

Donde $p(x, y) = p_1(x, y) - p_2(x, y)$

Las ecuaciones anteriores se derivan exclusivamente de las consideraciones de equilibrio. Desde (2.62) y para el caso de simetría del medio-plano ($B_{ij}=0$), las relaciones constitutivas son:

$$(3.20) \quad M_x = D_{11}k_x + D_{12}k_y$$

$$(3.21) \quad M_y = D_{12}k_x + D_{11}k_y$$

de donde (2.44)

$$(3.22) \quad k_x = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y}, \quad k_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right)$$

Es bien conocido que la deformación del cortante transversal (esto es $\epsilon_{xz} \neq 0$, $\epsilon_{yz} \neq 0$) tiene efectos importantes en las laminas compuestas de material compuesto, determinando las desviaciones máximas, vibración natural de las frecuencias y teniendo en cuenta la carga crítica, pero haciendo un análisis de tensión más simple, un plan preliminar que excluiría estos efectos para determinar un "primer corte" para las tensiones, la secuencia de apilamiento global y el espesor de los laminas requerido es apropiado.

Si, en el acto, la deformación del cortante transversal se ignora, entonces de (2.42)

$$\epsilon_{xz} = 0 = \frac{1}{2} \left(\bar{\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \text{y} \quad \epsilon_{yz} = 0 = \frac{1}{2} \left(\bar{\beta} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

De

$$\bar{\alpha} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad \bar{\beta} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{y} \quad k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$(3.23) \quad \text{y}, \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Así, sustituyendo (3.23) en (3.20) a través de (3.22) los resultados son:

$$(3.24) \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$(3.25) \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$(3.26) \quad M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo estas tres ecuaciones a su vez en (3.19) los resultados son;

$$(3.27) \quad D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

Los coeficientes anteriores pueden simplificarse a:

$$(3.28) \quad D_{11} \equiv D_1, \quad D_{22} \equiv D_2, \quad (D_{12} + D_{66}) \equiv D_3$$

Con el resultado este (3.27) se vuelve

$$(3.29) \quad D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

Esta es la ecuación diferencial gobernante para el torcimiento de una lamina compuesta de un material compuesto, excluyendo la deformación del cortante transversal, ningún término de acoplamiento (eso es $B_{ij} = 0$), y ninguna condición hidrotérmica (es decir, $\Delta T = \Delta m = 0$) esta sujeta a una carga lateral distribuida $p(x, y)$. Como declarado previamente, mientras descuidando la deformación del cortante

transversal y los efectos hidrotérmicos pueden llevar a los errores significantes, como se mostrará, en el plan preliminar para el “tamaño” de la lamina inicial.

Las soluciones de (3.29) generalmente puede obtenerse de dos maneras: la solución directa de la ecuación diferencial gobernante (3.29), o utilización de una solución de principio de energía. Las últimas ofrecen más latitud encontrando las soluciones aproximadas, a menudo necesitadas.

Las soluciones directas de ecuaciones diferenciales gobernantes para las laminas de material compuesto van hacia tres categorías: las soluciones de Navier, soluciones de la Levy y soluciones de perturbación. Cada uno tiene sus ventajas y desventajas. Sin embargo, estas condiciones del límite necesitan ser discutidas.

3.7 Condiciones de Borde para una Placa

En la “clásica” (es decir, ignorando la deformación del cortante transversal) teoría de las laminas de la Sección 3.3., se necesitan dos y sólo dos condiciones del límite a cada borde para la lamina. Las condiciones limitantes para un borde absolutamente apoyado y un borde sujeto mostrado abajo es idéntico a aquellos de teoría de la viga clásica

dónde n es la dirección normal al borde de la lamina y t es la dirección paralelo o tangente al borde:

Borde absolutamente apoyado

$$w = 0 \text{ y } M_n = 0$$

$M_n = 0$ implica $\partial^2 w / \partial n^2 = 0$, porque en (3.24) y (3.25), no hay ninguna curvatura (eso es $\partial^2 w / \partial t^2$) a lo largo del borde del lamina absolutamente apoyado,, porque el $w=0$.

Borde sujeto

$$w = 0 \text{ y } \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

Borde libre

Para un borde libre de una lamina, eso es, uno en que no hay ninguna carga ni existe cualquier tipo de desplazamiento o requisito de cuesta, está claro que M_n, Q_n y M_{nt} todos deben ser cero. Sin embargo con la teoría de las laminas clásicas pueden satisfacerse sólo dos condiciones

límite. Éste era un problema mayor para el Ingeniero Mecánico en el estudio de sólido en los noventa. El Kirchhoff formuló una solución aproximada brillantemente al problema que se desarrolla en muchas partes. Él razonó que para el borde libre.

$$M_n = 0$$

Donde ahora se presenta curvatura a lo largo del borde, deben utilizarse las expresiones (3.24) y (3.25). La expresión aproximada para la segunda condición del límite es

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = 0$$

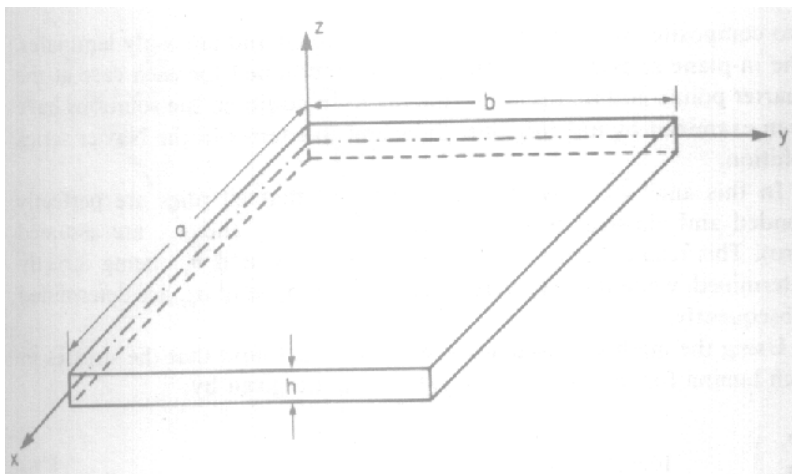


Figura 3.2

Donde V_n es el “eficaz” el resultante del cortante, y Q_n se da por (3.26) o (3.17). M_n se da por (3.24) o (3.5), y M_{nn} se da por (3.26)

3.8 Soluciones de Navier para las Placas de Materiales Compuestos

Las soluciones directas para el torcimiento de laminas rectangulares como la mostrada en la Figura 3.2 de materiales compuestos, es decir, la solución para (3.29), puede ser clasificado en tres acercamientos. En el acercamiento de Navier para el caso del ser de las laminas absolutamente soportado en todos los cuatro bordes, uno extiende la desviación lateral, $w(x, y)$ y la carga lateral aplicada, $p(x, y)$, doblemente la media seria hacia el infinito del seno, en un rango de esa serie que satisface todas las condiciones del límite (3.30) exactamente:

$$(3.34) \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(3.35) \quad p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

3.9 Solución de Navier para una Placa Absolutamente Apoyado-Uniformemente Cargado

El caso de un uniformemente cargado, $p(x, y) = -p_0$ es cuando la lamina esta absolutamente soportada, se resuelve por medio de la solución de series de Navier de la Sección 3.5, para dos sistemas de materiales compuestos: unidireccional y la lamina tejido. Los esfuerzos en el plano σ_x, σ_y y σ_{xy} son determinados en cada caso en el cuarto punto y medio punto de la lamina. Además, las soluciones se han examinado utilizando adelante, tres y cinco términos en la solución de series de Navier.

En este análisis, es claro el supuesto que todos los cabos son de la teoría absolutamente garantizada y clásica en usó (es decir, ε_{xz} y ε_{yz} son asumidas como cero). Esto produce los esfuerzos en un plano, σ_x , σ_y y σ_{xy} y siendo directamente determinado, mientras los esfuerzos del cortante transversal σ_{xz} y σ_{yz} son determinadas consecuentemente.

Usando los métodos discutidos previamente se encuentra que las tensiones en cada lámina para el caso de $p(x, y) = -p_0$ se da por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = + \frac{16_0 Z}{\pi^4} \sum_{m=1.3.5}^{\infty} \sum_{n=1.3.5}^{\infty} \frac{1}{mnD}$$

Donde

$$D = D_{11} \left(\frac{m}{n} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4$$

En este ejemplo numérico en una lamina cuadrada de a=b=12" es considerado el espesor total de la lamina es 0.008": ocho cabos de espesor 0.01" ($h_k = 0.01$ ").

El primer sistema de material considerado es el vaso E , con las siguientes propiedades:

$$E_{11} = 8.8 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$E_{22} = 3.6 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu_{12} = 0.23$$

$$G_{12} = 1.74 \times 10^6 \text{ psi}$$

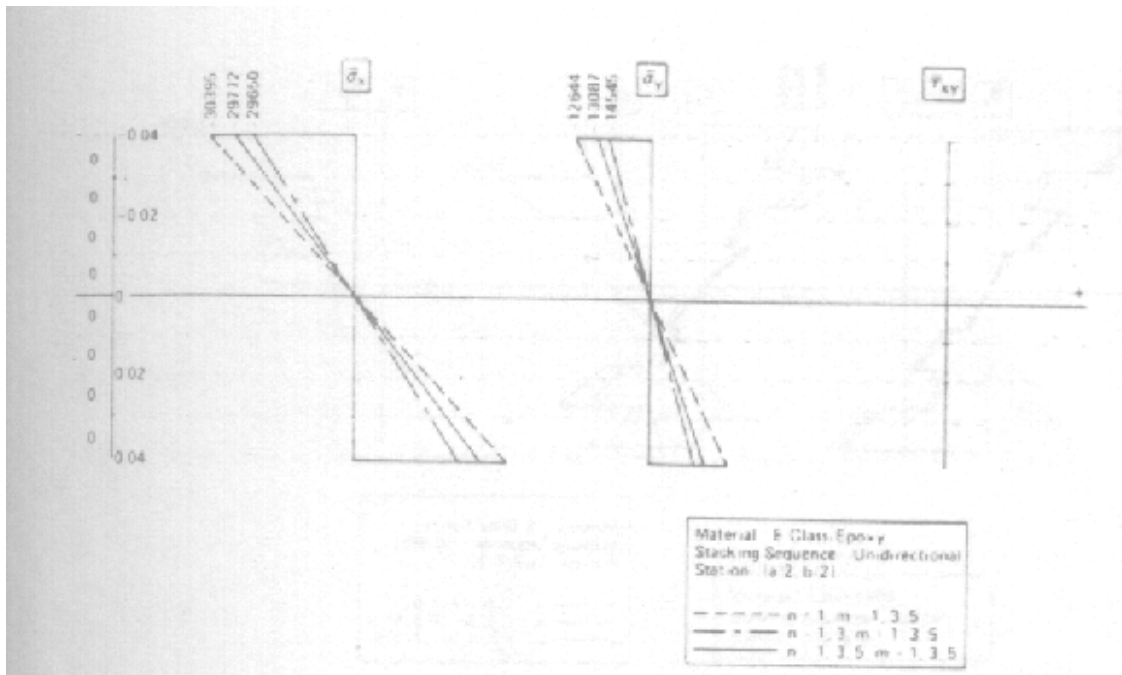


Figura 3.3

Para un fragmento de volumen de fibra de 0.70, la dureza Q_{ij} son

0° ply (psi)

90° ply (psi)

$$Q_{11} = 9.0 \times 10^6 \quad Q_{11} = 3.68 \times 10^6$$

$$Q_{12} = 0.85 \times 10^6 \quad Q_{12} = 0.85 \times 10^6$$

$$Q_{22} = 3.68 \times 10^6 \quad Q_{22} = 9.0 \times 10^6$$

$$Q_{66} = 1.74 \times 10^6 \quad Q_{66} = 1.74 \times 10^6$$

En las siguiente figuras, las tensiones se han normalizado como $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} / p_0$. En la figura 3.3 las tensiones normalizadas se muestran al punto medio del plano ($x = a/2, y = b/2$) para un laminado unidireccional ($\theta = 0^\circ$). En la Figura 3.4 se muestran las tensiones normalizadas al punto medio de la lamina para un tejido simétrico de medio plano laminado. En figura 3.5, estas tensiones se muestran en la cuarta ubicación del punto para la lamina de tejido.

Un tejido laminado de *T300-5208* grafito-epoxy se ha usado para la comparación con el vaso/laminar epoxico *E*. Las propiedades del grafito-epoxico laminado son:

$$E_{11} = 22.2 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$E_{22} = 1.58 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu_{12} = 0.12$$

$$G_{12} = 0.81 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$V_f = 70\%$$

Se han mostrado las tensiones de nuevo normalizadas en las Figuras 3.6 y 3.7 a ambos el cuarto punto y punto medio de la lamina.

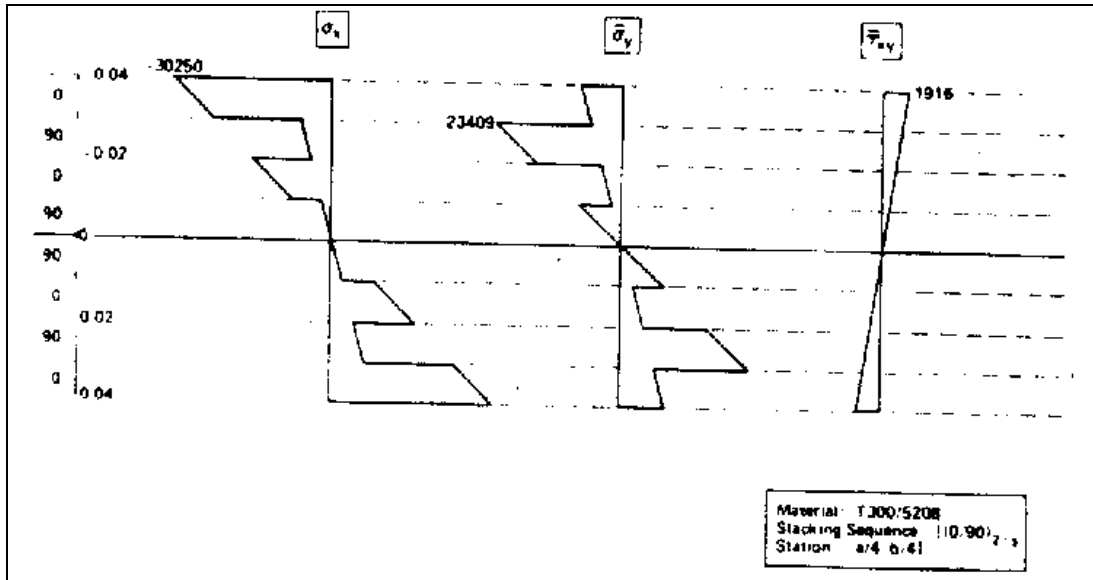
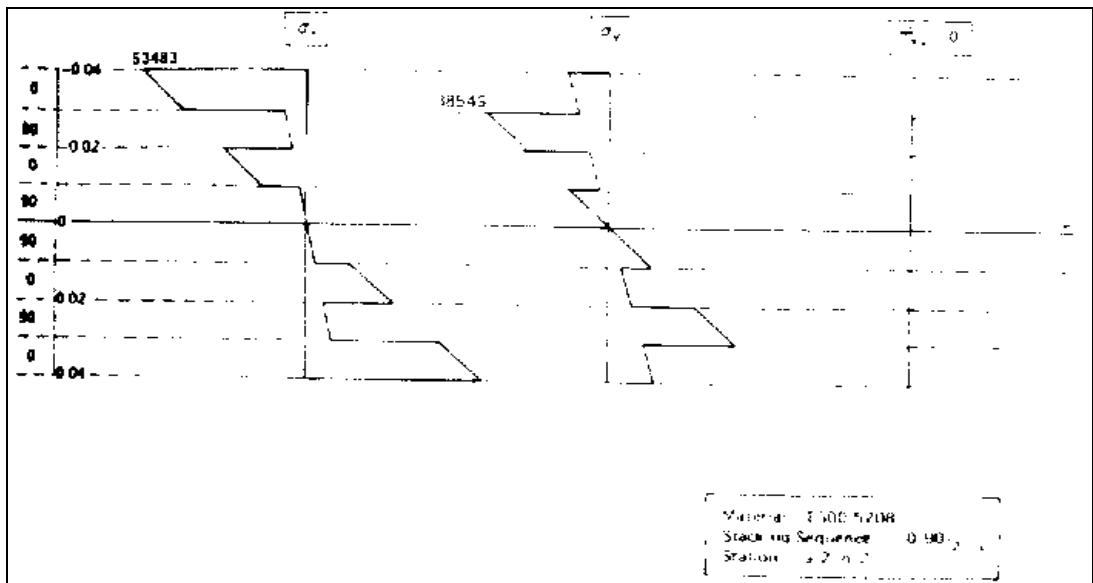


Figura 3.4 – 3.5

Figura 3.6 – 3.7



Algunas conclusiones pueden deducirse para este ejemplo puesto que:

1. La convergencia de la solución es rápida dentro del armazón, de tomar tres términos para m y n para evaluación $\bar{\sigma}_x$, pero no es tan rápido calculando $\bar{\sigma}_y$.

2. Para el mismo material hay diferencia pequeña entre el valor máximo de la tensión $\bar{\sigma}_x$, para ambos el tejido unidireccional recorre los compuestos a las situaciones de las laminas similares, sin embargo, la tensión $\bar{\sigma}_y$ difiere significativamente.

3. La tensión $\bar{\sigma}_y$ a una situación fija para el grafito/epoxico laminado es relativamente menor al valor $\bar{\sigma}_x$ (10%), comparado con el vaso/epoxico laminado E donde $\bar{\sigma}_y$ es 33% del valor de $\bar{\sigma}_x$ en la misma situación.

Este ejemplo se realizó por Wenn-Jinn Liou, un estudiante en la Universidad de Florida.

3.10 Solución de Levy para las Placas de Materiales Compuestos

El segundo es el método directo de solución para el torcimiento de las laminas rectangulares debido a las cargas laterales, el autor es Maurice Levy, quién en 1899 introdujo un simple método de series infinitas a los problemas isotropicos en laminas. El método también puede usarse para resolver (3.29) para una lamina de material compuesto.

Considere una lamina de material compuesto, mostrado en la Figura 3.2, con el $y=0$ afilado y $y=b$ absolutamente apoyado. El límite condicional de esos bordes es

$$(3.37) \quad \begin{aligned} w(x,0) &= w(x,b) = 0 \\ M_y(x,0) &= M_y(x,b) = 0 \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$(3.38) \quad \frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x,b)}{\partial y^2} = 0$$

Levy asumió la siguiente forma de solución: un simple seno de rango infinito medio que satisficiera las condiciones del límite en ambos bordes de y :

$$(3.39) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Donde $\phi_n(x)$ es a estas alturas una función desconocida de x . Una carga lateralmente distribuida $p(x, y)$ puede expresarse como sigue:

$$(3.40) \quad P(x, y) = g(x)h(y)$$

Donde $g(x)$ y $h(y)$ es especificado. La forma de (3.39) requiere que la porción $h(y)$ de la carga también se extienda en términos de una serie media de rango de seno, como sigue

$$(3.41) \quad h(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Donde

$$(3.42) \quad A_n = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

Sustituyendo (3.39) a través de (3.41) en (3.29), y observando que la ecuación sólo existe si es cierto término, se ve que, después de dividir por D_1 :

$$(3.43) \quad \phi_n^{IV}(x) - \frac{2D_3}{D_1} \lambda_n^2 \phi_n''(x) + \frac{D_2}{D_1} \lambda_n^4 \phi_n(x) = \frac{A_n g_n(x)}{D_1}$$

Donde $\lambda_n = n\pi / b$.

Note que (3.43) se derivó sin especificar alguna condición del límite en los bordes de x . De hecho, la solución homogénea de (3.43) rinde cuatro constantes de integración que son determinadas a través de satisfacer las condiciones del límite en esos bordes.

Para obtener la solución homogénea de (3.43), al lado derecho se hace igual a cero:

$$(3.44) \quad \phi_n^{IV}(x) - \frac{2D_3}{D_1} \lambda_n^2 \phi_n''(x) + \frac{D_2}{D_1} \lambda_n^4 \phi_n(x) = 0$$

Después de dejar $\phi_n(x) = e^{xy}$, y dividiendo el resultado por e^{xy} , (3.44) se vuelve en:

$$(3.45) \quad s^4 - \frac{2D_3}{D_1} \lambda_n^2 s^2 + \frac{D_2}{D_1} \lambda_n^4 = 0$$

Al contrario del caso de una lamina isotropica donde $D_1 = D_2 = D_3$, tal que las raíces s son fáciles para obtener $\pm \lambda_n$ y $\pm \lambda_n$ (raíces repetidas), para este caso hay tres juegos de raíces que dependen en si de $(D_2/D_1)^{1/2}$, son mayor que, igual o menor de D_3/D_1 . Para la lamina compuesta que usa la solución de Levy, tres formas diferentes para la solución homogénea de $\phi_n(x)$ para ser usadas en (3.39), existe dependiendo de la dureza relativa de la lamina en las varias direcciones.

Para el caso, $((D_2/D_1)^{1/2} < (D_3/D_1))$

$$(3.46) \quad \phi_{nII}(x) = C_1 \cosh(\lambda_n S_1 x) + C_2 \sinh(\lambda_n S_1 x) \\ + C_3 \cosh(\lambda_n s_2 x) + C_4 \sinh(\lambda_n s_2 x)$$

Donde las raíces son:

$$s_2 = \sqrt{\left(\frac{D_3}{D_1}\right) + \sqrt{\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2 - \frac{D_2}{D_1}}}, s_2 \sqrt{\frac{D_3}{D_1} - \sqrt{\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2 - \frac{D_2}{D_1}}}$$

Para el caso, $(D_2 / D_1)^{1/2} = (D_3 / D_1)$

$$(3.47) \quad \phi_{nII}(x) = (C_5 + C_6 x) \cosh(\lambda_n S_3 x) + (C_7 + C_8 x) \sinh(\lambda_n S_3 x)$$

Donde las raíces son:

$$s_3 = \pm \sqrt{\frac{D_3}{D_1}}$$

Para el caso , $(D_2 / D_1)^{1/2} < (D_3 / D_1)$

$$(3.48) \quad \begin{aligned} \phi_{nII}(x) = & (C_9 \cos \lambda_n s_5 x + C_{10} \sin \lambda_n s_5 x) \cosh(\lambda_n s_4 x) \\ & + (C_{11} \cos \lambda_n s_5 x + C_{12} \sin \lambda_n s_5 x) \sinh(\lambda_n s_4 x) \end{aligned}$$

Donde las raíces son:

$$s_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{1/2} + \frac{D_3}{D_1} \right]}, s_5 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{1/2} - \frac{D_3}{D_1} \right]}$$

Obviamente, para una lamina dada, cuyos materiales y orientación ya han sido especificados (el problema de análisis) solo uno de los tres casos existe. Sin embargo, si uno está intentando determinar el mejor material y orientación (el problema de diseño) entonces más de un caso puede ser involucrado, con la necesidad de determinar no sólo cuatro constantes, si no ocho o todas las doce para satisfacer el límite del borde de la condición y poder determinar qué construcción es mejor para el diseño.

Acerca de la solución particular, es asignado que la carga lateral, $p(x,y)$ es a lo sumo lineal en x , desde (3.40), $g_n(x)$, entonces desde (3.43) la solución particular es:

$$\phi_{n_p}(x) = \frac{A_n g_n(x)}{\lambda_n^4 D_2}$$

Por otra parte, uno debe buscar una solución particular. En cualquier caso, uno debe agregar el pertinente ϕ_{n_p} , para satisfacer cualquier juego de condiciones del límite en los bordes de x de la lamina. Por ejemplo,

suponga que el borde en $x=0$ es absolutamente soportado, entonces desde (3.30) las condiciones del límite es:

$$(3.49) \quad w(0, y) = 0, \quad \text{y} \quad M_x(0, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = 0$$

Sin embargo cuando el $w(x, y)$ tiene la forma de (3.39) esto entonces implica:

$$(3.50) \quad \phi_n(0) = \phi_n''(0) = 0$$

Semejantemente, las expresiones apropiadas se encuentran para el borde sujetado y para el borde libre. Entonces, cualquier forma pertinente al límite condicional en el $x=0$ y $x= a$, el total $\sigma_n(x) = \phi_{nII} + \phi_{nP}$ y del $w(x, y)$ es conocido desde (3.39). Entonces, para un material laminado compuesto de la lamina, sobre el que debe calcular las curvaturas se tiene

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \text{y} \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Sabiendo esto, uno puede calcular las tensiones en cada lámina k a través de lo siguiente:

$$(3.51) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}_k$$

Deben compararse las tensiones así derivadas para cada lámina con la tensión permitida, determinado a través de algún criterio para ver la integridad estructural, y así saber si se retiene bajo una carga dada (problema del análisis) o si esta clase de material y orientación es suficiente para una carga objetiva (problema de diseño).

Finalmente, la solución de Levy está bien para una lamina compuesta sin doblar ni estirar el acoplamiento, con la simetría del plano medio y con dos bordes opuestos absolutamente apoyado. Si dos bordes opuestos simplemente no son la condición, el límite causaría los problemas.

3.11 Soluciones de perturbación para la Flexión de un Placa de Material Compuesto, con la Simetría de Medio-plano y Ninguna Flexión girando el acoplamiento.

Como es mostrado en las dos secciones anteriores, el acercamiento de Navier es excelente para las laminas con todos los cuatro bordes absolutamente soportados o apoyados, sin tener en cuenta las condiciones del límite en los otros dos bordes. Pero para una lamina compuesta con dos bordes apropiados absolutamente soportados, incluso el acercamiento de Levy rinde tres soluciones distintas que dependen de las magnitudes relativas de D_1 , D_2 , y $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$. Además, hay numeroso libros y papeles disponibles para la solución de problemas de lamina de isotropicos, una lista que está prontamente disponible.

Consciente de todo lo anterior, en base al hecho que la solución del segundo caso de la solución de Levy de (3.47) tiene la misma forma como del caso isotropico, Vinson mostró que los casos de (3.46) y (3.48) puede repartirse como las perturbaciones sobre la solución de las mismas laminas compuestas de materiales isotropicos.

Considere la ecuación gobernante para el torcimiento de un material compuesto que exhibe la simetría del plano medio ($B_{ij} = 0$), ningún torcimiento girando el acoplamiento ($D_{16} = D_{26} = 0$), y ninguna

deformación del cortante transversal (eso es la aplicación de (3.23)). Entonces la ecuación, (3.29) está después de dividir ambos lados por D_1 :

$$(3.52) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2D_3}{D_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_2}{D_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D_1}$$

Si se usa un estiramiento coordinado quedaría definido lo siguiente; así

$$(3.53) \quad \bar{y} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{\frac{1}{4}} y, \quad \bar{b} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{\frac{1}{4}} b$$

Sustituyendo (3.53) en (3.52) resulta

$$(3.54) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{-1/2} \left(\frac{D_3}{D_1} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \bar{y}^2} = \frac{p(x, \bar{y})}{D_1}$$

Definiendo luego una cantidad α para ser

$$(3.55) \quad \alpha = 2 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{-1/2} \left(\frac{D_3}{D_1} \right) \right]$$

Se ve que sustituyendo (3.55) en (3.54) resulta:

$$(3.56) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4} - \frac{\alpha \partial^4 w}{\partial x^2 \partial \bar{y}^2} = P \frac{(x, \bar{y})}{D_1}$$

Si uno define el operador bi-armónico, usado en todos los problemas de laminas isotropicas, para estar, en el sistema de coordenadas estirado:

$$(3.57) \quad \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4}$$

Entonces (3.56) se vuelve en

$$(3.58) \quad \nabla^4 w - \frac{\alpha \partial^4 w}{\partial x^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{y}^4}$$

Finalmente, asume la forma de la solución para $w(x, \bar{y})$, para ser entonces

$$(3.59) \quad w(x, \bar{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, \bar{y}) \alpha^n$$

Qué es una solución de perturbación que emplea el “pequeño” parámetro α . Sustituyendo (3.59) en (3.58) e igualando todos los coeficientes de α^n a cero, entonces se encuentra fácilmente que:

$$(3.60) \quad \nabla^4 w_0 = \frac{p(x, \bar{y})}{D_1}$$

$$(3.61) \quad \nabla^4 w_n = \frac{\partial^4 w_{n-1}(x, \bar{y})}{D_1} \quad n \geq 1$$

Se ve que (3.60) es la ecuación diferencial gobernante para una lamina isotropica de dureza D_1 , sujeta a la carga lateral real $p(x, \bar{y})$, con la coordenada \bar{y} estirada definida en (3.53). Es probable que, sin tener en cuenta las condiciones del límite en cualquier borde, la solución este disponible, exactamente o aproximadamente. Entonces todas las w 's subsecuentes, tal como w_1 , w_2 , w_3 y así sucesivamente está disponible de resolver (3.61) una lamina cuya carga lateral es $-D_1(\partial^4 w_{n-1} / \partial x^2 \partial \bar{y}^2)$, dónde w_{n-1} es conocido, cuya dureza flexural es

D_1 y que las condiciones del límite están igual que aquéllas de la lamina actual.

Esta técnica es muy útil porque en la “pequeña” perturbación el parámetro no necesita ser tan pequeño; ha sido probado que cuando $|\alpha| < 1$, (3.59) es otra forma de la solución exacta, y $|\alpha| < 1$ cubre mucho del régimen de construcción de material compuesto práctico. También desde un punto de vista de cálculo, raramente es necesario incluir términos pasados $n=1$ nombrado desde (3.59):

$$(3.62) \quad w(x, \bar{y}) = w_0 + w_1 \alpha$$

No sólo es útil la técnica anterior, pero si $|\alpha| \geq 1$, entonces el compuesto puede caer dentro de otro rango dónde para un $(D_2 / D_1) \ll 1$, la lamina se comporta como un lamina en la dirección x, pero debido a $(D_2 / D_1) \ll 1$, se comporta como una membrana en la dirección y, con la siguiente ecuación diferencial gobernante más simple,

$$(3.63) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{D_3}{D_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{p(x, y)}{D_1}$$

Con la solución en la formula siguiente para una lamina absolutamente apoyada en los bordes de y.

$$(3.64) \quad w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \sin \lambda_n^* y^*$$

Donde

$$y^* = \left(\frac{2D_3}{D_1} \right)^{-1/2} \cdot \lambda_n^* = \frac{n\pi}{b^*}, \quad b^* = \left(\frac{2D_3}{D_1} \right)^{-1/2} b$$

Finalmente, si $(\bar{b}/a) = (D_2/D_1)^{-1/4} (b/a) > 3$, entonces la lamina se comporta puramente como una viga en la dirección x, sin tener en cuenta las condiciones del límite el borde y, tan lejos como la desviación máxima y tensión máxima. De las soluciones de las vigas tienen fácil aplicación a la solución de muchos problemas de laminas compuestas.

A propósito, las técnicas descritas en esta sección son el primer uso de técnicas de perturbación que involucran la perturbación de propiedad material, aunque se ha utilizado la perturbación geométrica durante muchas décadas.

3.12 Soluciones de perturbación para la flexión de un Placa de Material Compuesto con Flexión-girando acoplamiento y Simetría del Medio plano

En 1971, Farshad y Ahmadi extendieron el uso de soluciones de perturbación a través de estudiar laminas de material compuesto que tienen el torcimiento girando el acoplamiento, es decir, $D_{16} \neq 0$, $D_{26} \neq 0$, perturbando la solución de laminas sin tal acoplamiento como aquellos de la sección anterior y/o aquellos que se describen por (3.29).

Parecido a (2.62) las relaciones de curvatura de momento para una lamina rectangular con el torcimiento girando acoplamiento son:

$$\begin{aligned}M_x &= D_{11}K_x + D_{12}K_y + 2D_{16}K_{xy} \\M_y &= D_{12}K_x + D_{22}K_y + 2D_{26}K_{xy} \\M_z &= D_{16}K_x + D_{26}K_y + 2D_{66}K_{xy}\end{aligned}$$

Donde como antes de, si la deformación del cortante transversal es ignorada

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Por consiguiente las relaciones de curvatura de momento se vuelven:

$$(3.65) \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$(3.66) \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$(3.67) \quad M_{xy} = -D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Compare éstos con (3.24) a través de (3.26)

$$(3.68) \quad D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

Comparando esto con (3.27), se ve que debido a la existencia de D_{16} y D_{26} , los numerados derivados impares aparecen en la ecuación diferencial gobernante. Claro que, evita el uso de ambos, el acercamiento de Navier de la Sección 3.5 y el uso del acercamiento de la Levy de Sección 3.7.

Farshad y Ahmadi se restringen a una lamina delgada de $h_0 = -h/2$, $h_1 = +h/2$, dónde h es el espesor del lamina (vea la Figura 3.5). Por consiguiente

$$D_{ij} = \frac{\bar{Q}_{ij}h^3}{12}$$

Y de esa expresión se puede estar seguro de lo siguiente, dónde $m = \cos \theta$ y $n = \sin \theta$.

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= D_1 m^4 + D_2 n^4 + 2D_3 m^2 n^2 \\
 D_{22} &= D_1 n^4 + D_2 m^4 + 2D_3 m^2 n^2 \\
 D_{16} &= mn \{-D_2 n^2 + D_1 m^2 - D_3 (m^2 - n^2)\} \\
 D_{26} &= mn \{-D_2 m^2 + D_1 n^2 + D_3 (m^2 - n^2)\} \\
 D_{12} &= (D_1 + D_2 - 2D_{66}) m^2 n^2 + D_{12} (m^4 + n^4) \\
 D_{66} &= (D_1 + D_2 - 2D_{12}) m^2 n^2 + D_{66} (m^2 + n^2)^2
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

Qué está de acuerdo exactamente con (2.62), si para la sola lamina de la capa se define lo siguiente, qué es consistente con la Sección 2.6

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, D_3 = D_{12} + 2D_{66}$$

$$D_{12} = D_1\nu_{21} = D_2\nu_{12} \quad D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12}$$

Suponga que θ es suficientemente pequeña que no se puede extender $\sin \theta$ y $\cos \theta$ en las series de poder de θ , y retener los primeros términos como una aproximación. En ese caso,

$$(3.70) \quad \begin{aligned} D_{11} &= D_1 + 2\alpha_1\theta^2 + \beta_1\theta^4 + \dots \\ D_{22} &= D_2 + 2\alpha_2\theta^2 + \beta_2\theta^4 + \dots \\ D_{16} &= -\alpha_1\theta - \beta_1\theta^3 + \gamma_1\theta^5 + \dots \\ D_{26} &= \alpha_2\theta + \beta_2\theta^3 + \gamma_2\theta^5 + \dots \\ D_{12} &= D_{12} + \alpha_3\theta^2 + \beta_3\theta^4 + \dots \\ D_{66} &= D_{66} + \alpha_3\theta^2 + \beta_3\theta^4 + \dots \end{aligned}$$

En que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= D_3 - D_1 & \beta_1 &= -\left(\frac{5}{3}\alpha_1 + d_2\right) & \gamma_1 &= -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{2}{15}\alpha_1\right) \\
\alpha_2 &= D_3 - D_2 & \beta_2 &= -\left(\alpha_1 + \frac{5}{3}\alpha_2\right) & \gamma_2 &= -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{2}{15}\alpha_2\right) \\
\alpha_3 &= -(\alpha_1 + \alpha_2) & \beta_3 &= -\frac{4}{3}(\alpha_1 + \alpha_2) & &
\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.70) en (3.68) y reteniendo los términos arriba a través de θ^4 , nosotros obtenemos

$$(3.71) \quad L(w) + \theta M(w) + \theta^2 N(w) + \theta^3 P(w) + \theta^4 Q(w) = p(x, y)$$

Donde los operadores del diferencial se dan por

$$(3.72) \quad L(w) = D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$(3.73) \quad M(w) = 4\alpha_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - 4\alpha_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3}$$

$$(3.74) \quad N(w) = 2\alpha_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6\alpha_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\alpha_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$(3.75) \quad P(w) = 4\beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - 4\beta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3}$$

$$(3.76) \quad Q(w) = \beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6\beta_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

Obviamente los término a través de θ^4 es arbitrario, y dependiendo del tamaño de θ , uno podría retener más o menos el poder de θ .

Subsecuentemente θ es asumida como pequeña, se puede asumir una solución de perturbación a (3.71) de la siguiente forma.

$$(3.77) \quad w = w_0 + w_1\theta + w_2\theta^2 + w_3\theta^3 + w_4\theta^4 = \sum_{n=0}^N w_n\theta^n$$

Sustituyendo (3.77) en (3.71) e igualando los coeficientes de poner la potencia de θ a cero, se obtiene

$$(3.78) \quad L(w_0) = p(x, y)$$

$$(3.79) \quad L(w_1) = -M(w_0)$$

$$(3.80) \quad L(w_2) = -M(w_1) - N(w_0)$$

$$(3.81) \quad L(w_3) = -M(w_2) - N(w_1) - P(w_0)$$

$$(3.82) \quad L(w_4) = -M(w_3) - N(w_2) - P(w_1) - Q(w_0)$$

En cada caso w_n se encuentra resolviendo las ecuaciones de las laminas de la forma dada en (3.72), claro que es idéntico para resolver (3.29), de los acercamiento de Navier, el acercamiento de Levy, o el acercamiento de la Sección 3.8 que puede usarse dependiendo de las condiciones del límite. En el primero, se tiene como función de la fuerza la carga real, $p(x,y)$. En la solución subsiguiente se encuentra w_n usando el mismo previamente encontrado w_m y $m < n$.

Como en la solución de perturbación de la sección precedente, no-homogénea de la condición del límite debe satisfacerse en la solución w_0 , para que el $n=1,2,\dots$, todas las condiciones del límite sean homogéneas.

3.13 Problemas de Autovalores de Placas de Componentes Materiales con Vibraciones Naturales y la Estabilidad Elástica

A este punto los problemas estudiados hasta ahora, se han concentrado en encontrar la desviación máxima en las vigas del material compuesto y laminas, para asegurarse que ellos no son demasiado grandes para una desviación limitada o dureza crítica de la estructura, y determinando las tensiones máximas en la viga o estructura de la lamina para aquellos que poseen fuerza crítica. Sin embargo, Hay otras dos maneras en que una estructura puede dañarse o volverse inútil; una es a través de una respuesta dinámica para cronometrar la carga dependiente, resultando de nuevo en una desviación demasiado grande o las tensiones demasiado altas, y la otra a través de la ocurrencia de una inestabilidad elástica (abroche).

En la formula, la carga dinámica en una estructura puede variar de un ciclo de ocurrencia de la misma magnitud, tal como una estructura que soporta un motor desequilibrado que esta corriendo es decir esta a 100 revoluciones por minuto, por ejemplo, al otro extremo de un tiempo corto intenso, no hay recurrencia de carga, carga de impacto, como un pájaro que golpea un componente del avión durante el vuelo. Una continua infinidad de cargas dinámicas existen entre estos extremos de oscilación armónica e impacto.

Un volumen entero pudo y debe escribirse en la respuesta dinámica de estructuras de material compuesto para cronometrar la carga dependiente. Sin embargo, un hilo común a todas las respuestas dinámicas se presenta en esto y es referente a las frecuencias naturales de vibración de vigas compuestas, laminas y cubiertas.

Cualquier estructura continua tiene una infinidad de frecuencias naturales y formas de modo matemático. Si una estructura oscila a una frecuencia que corresponde a la frecuencia natural, responderá con un rápido crecimiento de la amplitud con el tiempo, requiriendo muy poca entrada de energía, hasta tanto como la estructura se vuelva sobre presionada y falle, o hasta que las oscilaciones se vuelvan tan grandes que los efectos no-lineales pueden limitar la amplitud a una grande, pero normalmente es poco satisfactorio porque entonces un daño por fatiga considerable ocurrirá.

Así, para cualquier estructura, analizándolo para la integridad estructural, las frecuencias naturales deben determinarse para compararlos alguna vez con una carga dependiente a la que la estructura se sujetará para asegurar que las frecuencias impuestas y las frecuencias naturales que difieren de la estructura no se sobre desviará, o se vuelve sobre presionada, el cuidado debe tenerse para evitar las resonancias (que se impusieron cargas que tienen la misma frecuencia como una o más frecuencias naturales).

El ejemplo más fácil para ilustrar está en la conducta previamente estudiada de la lamina de material compuesto, en donde la simetría de medio-plano existe ($B_{ij} = 0$), no otros término de acoplamiento, $(\)_{16} = (\)_{26} = 0$, y no existe deformación del cortante transversal ($\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$). En este caso las ecuaciones gobernantes se dan por (3.29) mostrado como sigue.

$$(3.83) \quad D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

Si el principio de D'Alembert fuera usado entonces uno podría agregar un término a (3.83) igual al producto de masa por unidad de área y aceleración por unidad de longitud. En ese caso, el lado derecho de (3.83) se vuelve

$$(3.84) \quad D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

Donde aquí w y p ambos en función de tiempo así como de espacio, ρ es la densidad de masa del material, y h es el espesor de la lamina. En lo anterior $p(x, y, t)$ ahora es la variación espacial de tiempo dependiente de la función de fuerza causando una respuesta dinámica, y podría ser algo de una oscilación armónica a una intensidad en tiempo de impacto.

Si la lamina es un híbrido (diferenciando los materiales por el espesor) compuesto, es el promedio de la densidad de masa por el espesor, que es

$$(3.85) \quad p = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N p_k (h_k - h_{k-1})$$

Eso debe usarse en (3.84)

Para investigar la conducta de vibración natural, la función de fuerza $p(x, y, t)$ es tomada como cero.

De nuevo, asumiremos que el modo vibracional de forma de una lamina de material compuesto absolutamente apoyada en todos los cuatro lados es idéntico a una lamina isotropica con las mismas condiciones en su límite. Una función dependiente de tiempo es incluido debajo para representar la oscilación armónica esperada en la vibración lineal.

$$(3.86) \quad w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos w_n t$$

Sustituyendo éstas formulas en (3.83) y (3.84) con $p(x, y, t)=0$ proporciona las frecuencias naturales correspondientes:

$$(3.87) \quad w_{mn} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\rho h}} \sqrt{D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^4}$$

La frecuencia fundamental ocurre con $m= n = 1$ que es para una onda media del seno en cada dirección. También note que la amplitud A_{mn} no puede determinarse de esta teoría de Eigen, y que (3.83) y (3.84) forma una ecuación homogénea cuando el $p(x, y, t) = 0$.

Además las desviaciones máximas, tensiones máximas y frecuencias naturales al analizar una estructura, se debe investigar bajo qué condiciones de carga puede ocurrir una inestabilidad, que también es genéricamente llamado abrochamiento.

Para una lamina hay cinco ecuaciones asociadas con la carga dentro del plano N_x , N_y y N_{xy} y el desplazamiento en plano que causa, u_0 y v_0 . Estas ecuaciones se dan por (3.9), (3.10), y de (2.62) para el caso de simetría del plano medio (Bif =0) se ve que

$$(3.88) \quad N_x = A_{11} \epsilon_x^0 + A_{12} \epsilon_y^0 + 2A_{16} \epsilon_{xy}^0$$

$$(3.89) \quad N_y = A_{12} \epsilon_x^0 + A_{22} \epsilon_y^0 + 2A_{26} \epsilon_{xy}^0$$

$$(3.90) \quad N_{xy} = A_{16} \epsilon_x^0 + A_{26} \epsilon_y^0 + 2A_{66} \epsilon_{xy}^0 \quad 3$$

Igualmente la seis ecuaciones gobernantes que involucran $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, Q_{xy}$ y w , se da por (3.12), (3.14), (3.15), (3.65), (3.66) y (3.67). De todos modos aquí no hay acoplamiento entre el plano interno y la acción lateral para la lamina con la simetría de medio plano. Todavía es bien conocido y a menudo es observado que la carga de plano interno a través del abrochamiento d causa desviaciones laterales que son normalmente desastrosas.

La respuesta a la paradoja es completamente a través de este estudio, a este punto se tiene una teoría de elasticidad lineal, y el evento físico de *abrochamiento* es un problema no lineal. Para la brevedad, el desarrollo de la teoría no lineal no será incluido.

El resultado de incluir los términos para predecir el advenimiento o principio de abrochamiento para la lamina, modificando (3.83) queda

$$(3.91) \quad D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Donde claramente hay un acoplamiento entre las cargas del plano interno y la desviación lateral.

El abrochamiento de carga, así como las frecuencias naturales son independientes de las cargas laterales, junto con la carga del plano interno podría causar sobre tensión y fracaso antes de que el abrochamiento del plano interno sea alcanzado. Sin embargo, el abrochamiento de carga es independiente de la carga lateral, como son las frecuencias naturales. A propósito, dictado por el sentido común que si uno está diseñando una estructura para resistir una carga compresiva, con la posibilidad de abrochar siendo el modo fracaso, uno tiene mejor diseño para la estructura, para ser simétrica de medio plano, para que $B_{ij} = 0$, por otra parte el torcimiento-estiramiento del acoplamiento causaría la sobre tensión probablemente antes de el abrochamiento de carga se alcanza.

Buscando ahora a (3.91) por el abrochamiento de la lamina compuesta bajo una carga axial N_x , solo, e ignorando $p(x, y)$ la ecuación se vuelve:

$$(3.92) \quad D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Asumiendo el modo de abrochamiento para una lamina de material compuesto laminado para serlo de lamina isotropica con las mismas condiciones límite, entonces para el caso de la lamina absolutamente apoyada en todos los cuatro bordes, se asume que

$$(3.93) \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Sustituyendo (3.93) en (3.92) se ve que para la carga crítica $N_{x_{cr}}$

$$(3.94) \quad N_{x_{cr}} = -\frac{\pi^2 a^2}{m^2} \left[D_1 \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]$$

Donde de nuevo varias cosas están claras: (3.92) es una ecuación homogénea, y no se puede determinar el valor de A_{mn} , y de nuevo sólo el valor más bajo de $N_{x_{cr}}$ es de alguna importancia normalmente. Sin embargo no está claro qué valor de m y n produzca el abrochamiento de carga crítica más baja. Todos los valores de n aparecen en el

numerador, así $n=1$ es el valor necesario. Pero m aparece en varios lugares, y dependiendo del valor de la dureza flexural D_1 , D_2 y D_3 , y la longitud a la anchura proporcional de la lamina, a/b , no está claro qué el valor de m proporcionará el valor más bajo de $N_{x_{cr}}$. Sin embargo para una lamina dada es fácilmente determinado computacionalmente.

Así, se ve que los problemas de valor de Eigen difieren de las consideraciones en las secciones anteriores porque la abertura, vibración natural o abrochamiento, ocurra a sólo ciertos valores. Las frecuencias naturales y el abrochamiento de carga son los valores de Eigen; el modo vibracional y el modo de abrochamiento son las funciones de Eigen.

Analizando cualquier estructura uno por consiguiente determina cuatro cosas: la desviación máxima, las tensiones máximas, las frecuencias naturales (si hay cualquier carga dinámica a la estructura o cerca a la estructura) y el abrochamiento de carga (si hay son alguna carga compresiva)

¿Qué hay acerca de las vibraciones naturales y el abrochamiento de cargas de laminas de materiales compuestos con las condiciones límites y otras que simplemente soportan? Se ve que para los casos tratados en esta sección que se usaron las series del seno dobles, porque éstos son

los modos vibracionales y los modos de abrochamiento de laminas simplemente soportado en todos los bordes.

Todas las combinaciones de vigas de modo vibracionales y formas son aplicables para el uso de laminas con varias condiciones límite. Éstos se han desarrollado por Warburton, y todas las derivadas e integrales de esas funciones catalogadas convenientemente por Young y Felgar para fácil uso.

Las expresiones similares por modos de abrochamiento y vibracional están en general disponibles, tan igualmente ellos pueden usarse para (3.86) y (3.93).

Debe hacerse énfasis de nuevo que las frecuencias naturales y las cargas de abrochamiento calculadas en esta sección no incluyen los efectos del cortante transversal, y son por consiguiente sólo son aproximadas, pero ellos son útiles para el diseño preliminar, debido a su simplicidad relativa. Si la deformación del cortante transversal fuera incluido, ambas, frecuencias naturales y abrochamiento de carga serían más bajos que aquellos que se calcularon en esta Sección, para que las cargas de abrochamiento calculadas, descuidando la deformación del cortante transversal, no sean conservativa.

3.14 La Estática y el Análisis Dinámico de Placas de materiales Compuestos que Incluyen los Efectos de Deformación de Cortante Transversal

En la sección precedente, todos los análisis han descuidado los efectos de deformaciones de cortante transversal, que entre estos análisis y resultados son aproximados, pero debido a que su simplicidad relativa es útil para el diseño preliminar para “el tamaño” de la estructura. Ahora estos efectos se tendrán en cuenta para una lamina de material compuesto sujeto a las cargas de la estática y las cargas dinámicas. El abandono de la deformación del cortante transversal simplemente media como fue declarado previamente.

$$(3.95) \quad \begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

Desde el desplazamiento del plano interno $u(x, y, z)$ y $v(x, y, z)$ tiene como más una traducción y una rotación, su formula más general que es

$$(3.96) \quad \begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\bar{\alpha}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\bar{\beta}(x, y) \end{aligned}$$

Desde (3.95) se ve que

$$(3.97) \quad \bar{\alpha} = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad \bar{\beta} = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

Y subsecuentemente

$$(3.98) \quad k_x = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \quad \text{y} \quad k_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right)$$

Entonces

$$(3.99) \quad k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad k_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Como se mostró previamente en (3.23)

Mirando las ecuaciones de equilibrio de la lamina y las ecuaciones constitutivas, ahora el juego completo se da como sigue, para el caso estático:

$$(3.100) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \tau_{1x} - \tau_{2x} = 0$$

$$(3.101) \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0$$

$$(3.102) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0$$

$$(3.103) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \frac{h}{2} [\tau_{1x} + \tau_{2x}] = 0$$

$$(3.104) \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \frac{h}{2} [\tau_{1y} + \tau_{2y}] = 0$$

Para una lamina que esta en el plano medio simétrico ($B_{ij} = 0$), y no tiene ningún acoplamiento [$()_{16} = ()_{26} = ()_{45} = 0$], las ecuaciones constitutivas son

$$(3.105) \quad N_x = A_{11} \epsilon_x^0 + A_{12} \epsilon_y^0$$

$$(3.106) \quad N_y = A_{12} \epsilon_x^0 + A_{22} \epsilon_y^0$$

$$(3.107) \quad N_{xy} = 2A_{66} \epsilon_{xy}^0$$

$$(3.108) \quad M_x = D_{11} k_x + D_{12} k_y$$

$$(3.109) \quad M_y = D_{12} k_x + D_{22} k_y$$

$$(3.110) \quad M_{xy} = 2D_{66} k_{xy}$$

$$(3.111) \quad Q_x = 2A_{55} \epsilon_{xy} = 2A_{55} \left(\bar{\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$(3.112) \quad Q_y = 2A_{44} \epsilon_{yz} = 2A_{44} \left(\bar{\beta} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Porque la lamina en el plano medio simétrico no tiene ningún acoplamiento, torcimiento o estiramiento, las cargas del plano interno y las desviaciones son desacopladas (separadas) de las cargas laterales,

desviación y rotación. Para la acción lateral, (3.102) a través de (3.104) y (3.108) a través de (3.112) se utilizan: 8 ecuaciones y 8 incógnitas.

Sustituyendo (3.108) a través de (3.112) en (3.102) a través de (3.104) y usando (3.98) resulta el siguiente juego de ecuaciones diferenciales gobernantes para una lamina compuesta de laminado sujeta a una carga lateral, en que $(B_{ij} = 0), (\)_{16} = (\)_{26} = (\)_{45} = 0$, y no presenta ninguna tensión cortante en la superficie.

$$(3.113) \quad D_{11} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial x \partial y} - 2A_{55} \left(\bar{\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$(3.114) \quad (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial y^2} - 2A_{44} \left(\bar{\beta} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

$$(3.115) \quad 2A_{55} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2A_{44} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p(x, y) = 0$$

Dobyns ha empleado los acercamientos de Navier para resolver estas ecuaciones para una lamina compuesta absolutamente apoyada en

todos los cuatro bordes sujeta a una carga lateral, mientras usando las funciones siguientes

$$(3.116) \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(3.117) \quad \bar{\alpha}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(3.118) \quad \bar{\beta}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$(3.119) \quad p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Qué satisface las condiciones del límite en todos los bordes tal que

$$w = 0, \quad \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} = 0 \quad \text{ó} \quad x = 0, a \quad \text{y} \quad \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} = 0 \quad \text{ó} \quad y = 0, b$$

Sustituyendo estas funciones en la ecuación diferencial gobernante anterior

resulta lo siguiente:

$$(3.120) \quad \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \end{Bmatrix}$$

Donde, si $\lambda_m = m\pi/a$ y $\lambda_n = n\pi/b$ y q_{mn} es el coeficiente de carga lateral

$$L_{11} = D_{11}\lambda_m^2 + D_{66}\lambda_n^2 + 2A_{55}$$

$$L_{12} = (D_{12} + D_{66})\lambda_m\lambda_n$$

$$L_{13} = 2A_{55}\lambda_m$$

$$L_{22} = D_{66}\lambda_m^2 + D_{22}\lambda_n^2 + 2A_{44}$$

$$L_{23} = 2A_{44}\lambda_n$$

$$L_{33} = 2A_{55}\lambda_m^2 + 2A_{44}\lambda_n^2$$

Resolviendo (3.120), se obtiene

$$(3.121) \quad A_{mn} = \frac{(L_{12}L_{13} - L_{22}L_{13})q_{mn}}{\det}$$

$$(3.122) \quad B_{mn} = \frac{(L_{12}L_{13} - L_{11}L_{23})q_{mn}}{\det}$$

$$(3.123) \quad C_{mn} = \frac{(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)q_{mn}}{\det}$$

Donde det es el determinante de la matriz en la Ecuación (3.120)

Habiendo resuelto el problema para obtener, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ y w , las curvaturas $k_x = (\partial\bar{\alpha}/\partial x)$, $k_y = (\partial\bar{\beta}/\partial y)$ y $k_{xy} = 1/2[(\partial\bar{\alpha}/\partial y) + (\partial\bar{\beta}/\partial x)]$, pueden obtenerse. Entonces para una lamina compuesta de laminado, las tensiones en cada lámina pueden obtenerse por:

$$(3.124) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_\lambda = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_\lambda z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

Si la carga lateral $p(x, y)$ es distribuido encima de la superficie lateral entera, entonces,

$$(3.125) \quad q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy$$

Si esa carga es uniforme, entonces

$$(3.126) \quad q_{mn} = \frac{4p_0}{mn\pi^2} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)$$

Para una carga concentrada localizada a $x = \xi$ y $y = \eta$

$$(3.127) \quad q_{mn} = \frac{4p}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

Donde el P es la carga total.

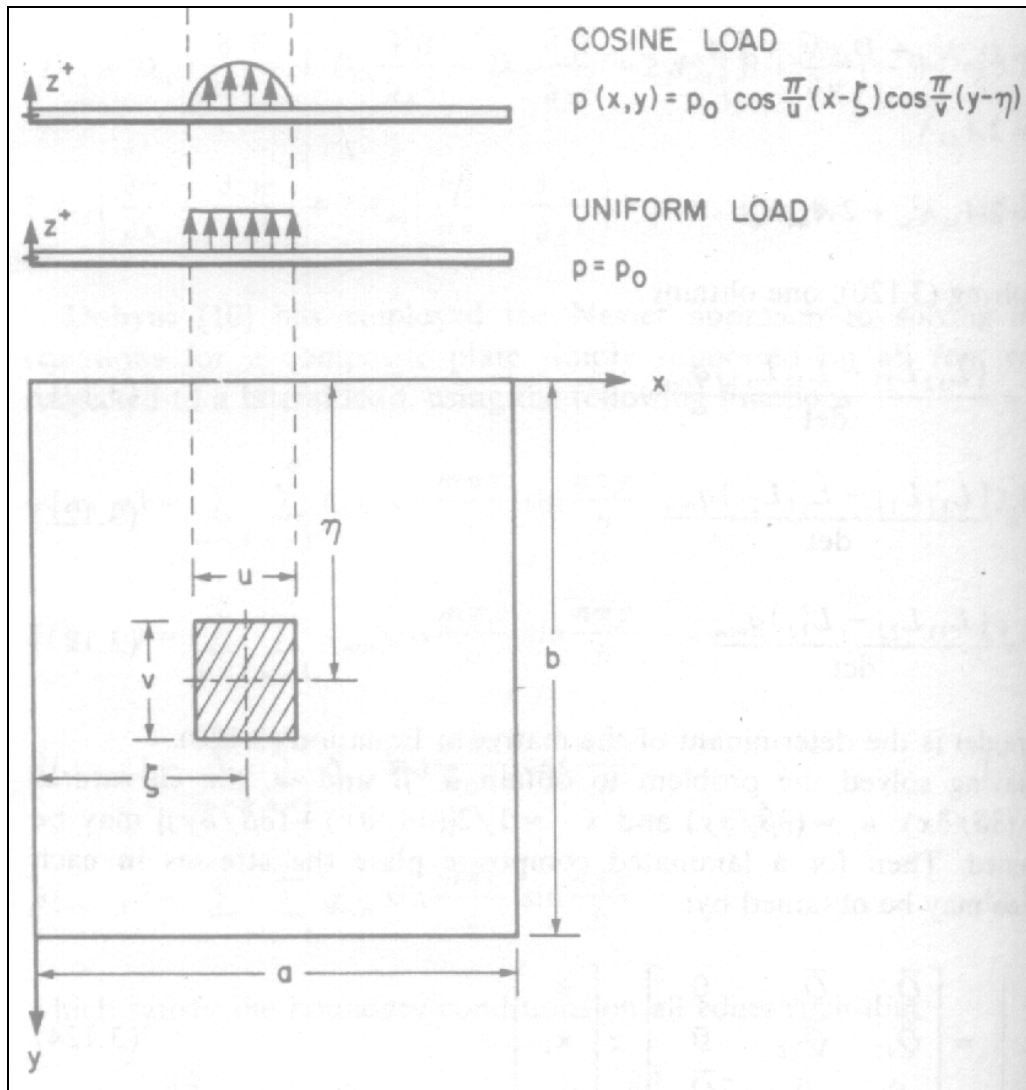


Figura 3.8

Para las cargas encima de un rectangular es de longitud lateral u y v en cuyo centro está ξ y η , como es mostrado en Figura 3.8

q_{mn} se da un sigue

para $\frac{n}{b} \neq \frac{1}{v}$ t $\frac{m}{a} \neq \frac{1}{u}$, entonces

$$(3.128) \quad q_{mn} = \frac{4p(xy) \sin\left(\frac{m\pi\eta}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi\nu}{2b}\right) \cos\left(\frac{m\pi u}{2a}\right)}{abu^2v^2 \left(\frac{n}{b} - \frac{1}{v}\right) \left(\frac{n}{b} + \frac{1}{v}\right) \left(\frac{m}{a} - \frac{1}{u}\right) \left(\frac{m}{a} + \frac{1}{u}\right)}$$

Cuando $n/b = 1/v$, $m/a = 1/u$, entonces $q_{mn} = 0$

Claro que cualquier otra carga lateral puede obtenerse a través del uso de (3.125).

Si ahora se desea encontrar las frecuencias naturales de esta lamina compuesta laminada, que tiene la simetría de media superficie ($B_{ij} = 0$), ningún otro acoplamiento puede darse, $()_{16} = ()_{26} = ()_{45} = 0$, pero incluye la deformación del cortante transversal, $\epsilon_{xz} \neq 0, \epsilon_{xy} \neq 0$, entonces uno coloca $p(x, y) = 0$, en (3.115), pero agrega $-ph(\partial^2 w / \partial t^2)$ al lado de la mano derecha de la ecuación. Además, porque $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ son ambas variables dependientes, pero son independiente de w , habrá un movimiento oscilatorio del elemento lineal por el espesor de la lamina sobre la superficie media de la lamina que resulta en el lado derecho de (3.113) y (3.114) volviéndose $I(\partial^2 \bar{\alpha} / \partial t^2)$ y $I(\partial^2 \bar{\beta} / \partial t^2)$ respectivamente, como es mostrado en la siguiente ec.

$$(3.129) \quad D_{11} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} - 2A_{55} \left(\bar{\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = I \left(\frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial t^2} \right)$$

$$(3.130) \quad (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} - 2A_{44} \left(\bar{\beta} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = I \left(\frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial t^2} \right)$$

$$(3.131) \quad 2A_{55} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2A_{44} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = ph \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Donde p se da por (3.85) y (3.132) $I = ph^3 / 12$

Similar al procedimiento usado en la Sección 3.5, para la lamina absolutamente soportada, queda

$$(3.133) \quad w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C'_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}$$

$$(3.134) \quad \bar{\alpha}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A'_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}$$

$$(3.135) \quad \bar{\beta}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B'_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{b} e^{i\omega t}$$

Sustituyendo éstos en las ecuaciones gobernantes dinámicas sobre los resultados, en un juego de ecuaciones homogéneas que pueden resolverse a las frecuencias naturales de vibración, se tiene

$$(3.136) \quad \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A'_{mn} \\ B'_{mn} \\ C'_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Donde las cantidades no impresas estaban definidas anteriormente y

$$L'_{11} = L_{11} - \frac{ph^3}{12} w_{mn}^2$$

$$L'_{22} = L_{22} - \frac{ph^3}{12} w_{mn}^2$$

$$L'_{33} = L_{33} - phw_{mn}^2$$

Como se había mostrado anteriormente los tres valores de Eigen (las frecuencias naturales), resultado de resolver (3.136) para cada valor de m y n . Sin embargo, dos de las frecuencias son sumamente superiores que las otras, porque ellos son asociadas con los términos de inercia

rotatorias, eso es, los lados de la mano derecha de (3.129) y (3.130) son muy raramente importante en las respuestas estructurales. Si ellos son descuidados entonces $L'_{11} = L_{11}$ y $L'_{22} = L_{22}$, y el cuadrado de la frecuencia natural restante puede encontrarse fácilmente para convertirse en

$$(3.137) \quad w_{mn}^2 = [QL_{33} + 2L_{12}L_{33}L_{13} - L_{22}L_{13}^2 - L_{11}L_{23}^2] / phQ$$

Cuando, aquí, $Q = L_{11}L_{22} - L_{12}^2$

También,

$$A'_{mn} = \frac{(L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13})}{Q} C'_{mn}$$

$$B'_{mn} = \frac{(L_{12}L_{13} - L_{11}L_{23})}{Q} C'_{mn}$$

Si el efecto de deformación del cortante transversal fuera abandonado (3.137) sería idéntico al cuadrado de (3.87)

Dobyns sigue desarrollando las soluciones en la lamina del compuesto laminado absolutamente soportado usado a lo largo de esta Sección para la lamina sujeta a una carga de materiales dinámicos $p(x, y, t)$, descuidando a los términos de inercia rotatorias discutidos anteriormente, utilizando una circunvolución integral $P(t)$ como se ve debajo: a propósito de la circunvolución integral también es conocido como superposición integral y el integral de Duhamel

$$(3.138) \quad w(x, y, t) = \frac{1}{ph} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_{mn}}{w_{mn}} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} P(t)$$

$$(3.139) \quad \bar{\alpha}(x, y, t) = \frac{1}{ph} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_{mn}}{w_{mn}} \right) \frac{(L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13})}{Q} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} P(t)$$

$$(3.140) \quad \bar{\beta}(x, y, t) = \frac{1}{ph} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_{mn}}{w_{mn}} \right) \frac{L_{12}L_{13} - L_{11}L_{23}}{Q} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} P(t)$$

Donde

$$(3.141) \quad P(t) = \int_0^t F(\tau) \sin w_{mn}(t - \tau) d\tau$$

y q_{mn} es el coeficiente de la función de carga lateral extendido en forma de series, vea (3.119).

Así para una carga distribuida lateral $P(x, y, e/ t)$, si es una solución de la forma dada por (3.138) a través de (3.140) es aplicable, entonces las curvaturas, k_x , k_y , y k_{xy} para la lamina puede encontrarse a través de (3.99), y las tensiones en cada lámina pueden encontrarse de (3.124).

La función $P(t)$ se ha resuelto analíticamente para varias representativas funciones de fuerza mostradas en Figura 3.9.

Para el pulso del *seno* la función de fuerza $F(t)$ y la circunvolución integral $P(t)$ es:

$$F(t) = F_0 \sin(\pi t / t_1) \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$F(t) = 0 \quad t > 1$$

$$(3.142) \quad P(t) = \int_0^t F(\tau) \sin w_{mn}(t - \tau) d\tau = \frac{F_0 t_1 [\pi \sin w_{mn} t - w_{mn} t_1 \sin(\pi t / t_1)]}{(\pi^2 - t_1^2 w_{mn}^2)}$$

para $0 \leq t \leq t_1$

$$(3.143) \quad P(t) = \frac{F_0 \pi t_1 [\sin w_{mn} t + \sin w_{mn} (t - t_1)]}{(\pi^2 - t_1^2 w_{mn}^2)}$$

Para $t \geq t_1$

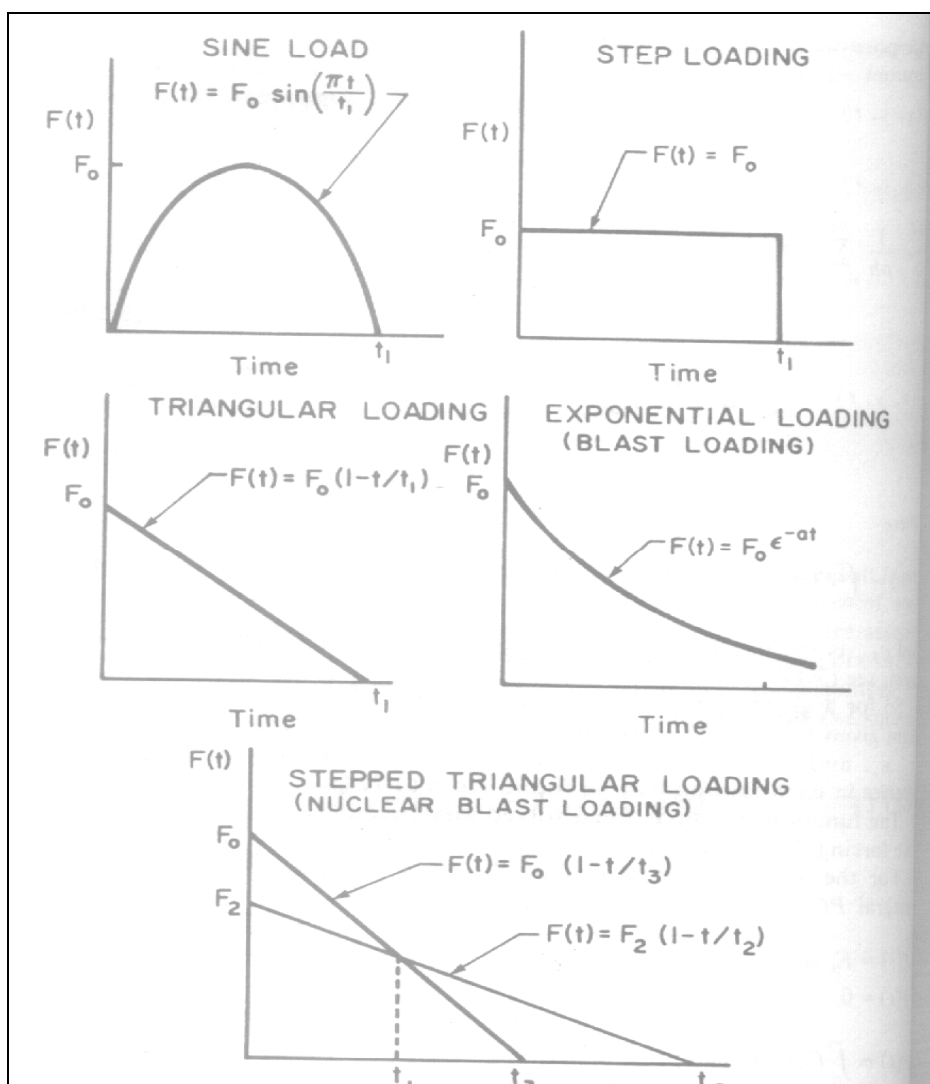


Figura 3.9

Para el pulso caminado la función de fuerza $F(t)$ y la circunvolución integral $P(t)$ se da por:

$$F(t) = F_0 \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$F(t) = 0 \quad t > t_1$$

$$(3.144) \quad P(t) = \int_0^t F(\tau) \sin w_{mn}(t - \tau) d\tau = \frac{F_0}{w_{mn}} [1 - \cos w_{mn}t] \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$(3.145) \quad P(t) = \frac{F_0}{w_{mn}} [\cos w_{mn}(t - t_1) - \cos w_{mn}t] \quad t > t_1$$

Para un pulso triangular:

$$F(t) = F_0(1 - t/t_1) \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$F(t) = 0 \quad t > t_1$$

$$(3.146) \quad P(t) = \int_0^t F(\tau) \sin w_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$= \frac{F_0}{w_{mn}} \left[1 - \cos w_{mn}t + \frac{1}{w_{mn}t} \sin w_{mn}t - t/t_1 \right] \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$(3.147) \quad P(t) = F_0 \left[-\frac{1}{w_{mn}} \cos w_{mn}t + \frac{2}{w_{mn}^2 t_1} \cos w_{mn}(t - t_{1/2}) \right] \quad t > t_1$$

El pulso triangular de la Figura 3.9 simula una carga de explosión nuclear donde el pulso de presión consiste en una fase de duración larga de varios segundos debido a la sobre presión y una fase de duración corta de unos cuantos milisegundos debido a la reflexión de ola de shock. La fase de duración corta tiene dos veces la presión de la fase de duración larga.

$$F(t) = F_0(1 - t/t_3) \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$F(t) = F_0(1 - t/t_2) \quad 0 \leq t \leq t_2$$

$$F(t) = 0 \quad t > t_2$$

$$(3.148) \quad P(t) = \int_0^t F(\tau) \sin w_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$= \frac{F_0}{w_{mn}} \left[1 - \cos w_{mn} t + \frac{1}{w_{mn} t_3} \sin(w_{mn} t) - t/t_3 \right] \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$(3.149) \quad P(t) = F_0 \left[-\frac{1}{w_{mn}} (1 - t/t_3) \cos w_{mn} (t - t_1) \right. \\ \left. - \frac{1}{w_{mn}} \cos w_{mn} t - \frac{1}{w_{mn}^2 t_3} \sin w_{mn} (t - t_1) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{w_{mn}^2 t_2} \sin w_{mn} (t - t_1) \right]$$

$$(3.150) \quad P(t) = F_0 \left[-\frac{1}{w_{mn}} (1 - t_1/t_3) \cos w_{mn} (t - t_1) \right. \\ \left. - \frac{1}{w_{mn}} \cos w_{mn} t + \frac{1}{w_{mn}^2 t_3} \{ \sin w_{mn} (t - t_1) \} \right] \quad t > t_2 \\ + F_2 \left[-\frac{1}{w_{mn}} (t_1/t_2 - 1) \cos w_{mn} (t - t_1) \right. \\ \left. - \frac{1}{w_{mn}^2 t_2} \{ \sin w_{mn} (t - t_2) - \sin w_{mn} (t - t_1) \} \right]$$

Por último el pulso exponencial de la Figura 3.9 puede usarse para simular una alta explosión (no nuclear), la carga de la explosión cuando el parámetro de decaimiento α se determina empíricamente para encajar el pulso de presión de la explosión real. Las ecuaciones son

$$F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$$

$$(3.151) \quad P(t) = \int_0^t F(\tau) \sin w_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$= \frac{F_0}{w_{mn}} \frac{[w_{mn} e^{-\alpha t} + \alpha \sin w_{mn} t - w_{mn} \cos w_{mn} t]}{(\alpha^2 + w_{mn}^2)} \quad t > 0$$

Para esto debe notarse que aunque las ecuaciones de función de fuerza dadas antes, son aquí usadas para investigar la respuesta dinámica de una lamina de material compuesto, estas ecuaciones son útiles para muchos otros propósitos.

Varios problemas del ejemplo hechos por Dobyms, aparecen en su obra, incluyendo el impacto de una pelota esférica elástica, que también es un problema no lineal también detallado aquí. Él también comparó sus soluciones de forma cerrada a aquéllas obtenidas del STAGS-C, soluciones diferenciales finitas.

Dobyms concluye que las ecuaciones presentadas en esta sección permiten analizar una tablero de material compuesto sujeto a cargas dinámicas sólo con un poco más de esfuerzo que se requiere para el mismo tablero sujeto a cargas estáticas. Se define el desarrollo de un lenguaje básico de programación para una computadora de escritorio,

para estudiar las varias cargas dinámicas sobre un material. Se define no tener que contar las curvas de diseño aproximadas o los factores de amplificación arbitraria de carga dinámica.

Con la información presentada aquí, pueden hacerse las ecuaciones necesarias para el estudio de un lamina de material compuesto sin varios acoplamientos, pero incluyendo la deformación del cortante transversal, sujetó a varias cargas laterales estáticas y a una variedad de cargas dinámicas que pueden usarse individualmente o sobrepuesta, para describir una entrada dinámica compleja. (Esas mismas configuraciones de carga). Con las soluciones para $\bar{\alpha}(x,y)$, $\bar{\beta}(x,y)$ y w , las desviaciones máximas y tensiones pueden ser determinadas para la desviación (la dureza) crítica y fuerza crítica en las estructuras.

4. Las Cubiertas de Material compuesto

4.1. Introducción

Una Cubierta es un cuerpo amurallado delgado, así como una viga o una lamina, cuya superficie media se encorva en por lo menos una dirección. Por ejemplo una Cubierta cilíndrica y una Cubierta cónica tiene sólo una dirección en que la superficie media se encorva. Hay curvatura por otro lado en una Cubierta esférica en ambas direcciones. Hay tales Cubiertas

mas simples, como un guardabarros delantero de un automóvil o una Cubierta (cáscara) de huevo son ejemplo de curvatura doble en la superficie.

La teoría de la Cubierta es muy complicada, comparado a la teoría de la lamina, esto debido a la forma de la curvatura. Incluso derivar las ecuaciones diferenciales gobernantes para una Cubierta de una curvatura general de principios primarios requieren varias lecturas en topología.

Entonces, para compilar la teoría de la Cubierta con todas las complejidades asociadas con materiales laminados compuestos hacen de la teoría de materiales compuestos una teoría muy complicada, y un gran desafío.

4.2 historia de Cubiertas de material compuesto

Un tratado histórico bastante completo en el análisis de las Cubiertas de materiales compuestos, utilizando la teoría de la Cubierta clásica y Cubiertas que incluyen la deformación de cortante transversal se dio en el año de 1974 compilado por Vinson y Chou. Por consiguiente, trataremos sólo los adelantos hechos desde ese tiempo en el análisis estático de Cubiertas compuestas.

En 1975, Wilkins y Love examinaron la condensación combinada y conducta de abrochamiento del cortante de compuestos laminados de la Cubierta cilíndrica y características de las de estructuras del fuselaje de los aviones. Boro-epoxico y los epoxicos de grafito, ambos son materiales que descascaran, se realizaron pruebas de laminaciones [$\pm 45^\circ$], y [0° ; $\pm 45^\circ$]. Los tamaños de las muestras eran 15" de diámetro y 15" en longitud, con el espesor de la pared de 0.0212" - 0.0336". Se obtuvieron todas las curvas de interacción de Condensación-cortante para lo anterior. Comparado a la teoría de abrochamiento clásica, la condensación real que abrochaba los valores era 65% del valor teórico. La disparidad se atribuyó a las imperfecciones. El acuerdo bueno entre la teoría y el experimento se comprendió por el abrochamiento de cortante. Fue observado que la interacción de condensación-cortante era esencialmente lineal.

En 1976, los Srs. Waltz y Vinson presentaron métodos de análisis para la determinación de tensiones del íter laminar en la Cubierta cilíndrica laminada de materiales compuestos.

También en 1976, Naschie investigó la conducta de la desviación grande de la Cubierta del material compuesto, determinando el más bajo límite de abrochamiento a la carga asimétrica.

En 1977, Ecord escribió sobre una estructura de Cubierta compuesta muy práctica, a saber los vasos de presión para el orbitar del trasbordador espacial. Aquí, un Kevlar de 49 se usa encima de un titanio e Inconel en la estructura de sobre cubierta de un vaso de presión esférica. La sobre cubierta de Kevlar fue diseñada para retener la presión interior sin el material metálico. Usando el Kevlar 49 sobre cubierta se ahorra en el orbitar 400 lbs; 1750 lbs sin los compuestos y 1350 lbs con el Kevlar 49 sobre cubierta.

En 1978, se publicaron muchos detalles notables, involucrando las Cubiertas de material compuesto. Johnson, Reck, y Davis publicaron un tratado, referente a fabricación y comprobación de 10 pie de largo por 10 pie de anillo de diámetro duro arrugado en grafito epoxico en la Cubierta cilíndrica, típico de una estructura espacial grande, capaz de resistirse abrochar. Los resultados del proyecto establecieron la viabilidad de utilizar los compuestos eficazmente en las aplicaciones de la Cubierta estructurales. Comparado con uno en aluminio para la misma aplicación, el uso de compuestos producía una 23% reducción de peso.

En este mismo año, Booton investigó el abrochando de compuesto imperfecto en los cilindros de materiales compuestos bajo las cargas combinadas, teóricamente y “experimentalmente”. Las cargas combinadas involucraron condensación axial, presión externa y torsión. La teoría de Donnell-Mushtari fue usada. Las imperfecciones eran más

críticas en la condensación axial que en la presión externa o torsión, como era lo esperado.

Raju, Chandra y Rao estudiaron la determinación de temperaturas transeúntes en las Cubiertas cónicas compuestas laminadas, causadas por la calefacción aerodinámica.

En 1978, Varadan estudió el chasquido a través del abrochamiento del compuesto de la Cubierta esférica poco profunda. Él calculó la presión externa de abrochamiento crítica, como una función de la geometría de la Cubierta y de las propiedades del material. También, Rhodes y Mariscal estudiaron el abrochamiento asimétrico del compuesto cargado, en su parte lateral de las Cubiertas materiales. Montague estudió la conducta del compuesto doble desollado experimentalmente, las Cubiertas cilíndricas redondas se sujetaron a la presión externa.

En 1979, Humphrey investigó los efectos del hidrotermal experimentalmente en los vasos de presión de materiales compuestos, para ser usado en casos como cohetes y motores. Las pruebas muestran que los compuestos de Kevlar sufren menos degradación que la fibra de vidrio.

Más recientemente, Ben y sus colegas han sido muy prolíficos en el área de la teoría de la Cubierta de materiales compuestos. Él se ha concentrado hasta cierto punto en la conducta de compuestos que tienen

las propiedades apropiadas diferentes a la tensión y la condensación, diferente a los compuestos de condiciones bi-módulares. Éstos son típicos de algunos compuestos como fibra que refuerza los neumáticos, y algunos materiales biológicos.

También, Yuceoglu y Updike han estudiado la concentración de tensiones en multi-capas de la Cubierta cilíndrica

4.3. Análisis de Cubiertas Cilíndricas en Materiales Compuestos Bajo Cargas Axialmente Simétricas

La más simple de todas las formas geometrías de Cubiertas es la cilíndrica redonda mostrada en la Figura 5.1. Las direcciones positivas de los desplazamientos que se muestran u , v , y w , así como las direcciones positivas de las coordenadas x y ξ . La coordenada restante es la circunferencial θ . El valor positivo de todos los resultantes de esfuerzos y parejas de tensión se muestra en Figura 5.2 .

En la teoría de Cubiertas clásica, se usan todos los valores asumidos en la teoría de las laminas:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} = \epsilon_{\xi} = \epsilon_{x\xi} = \epsilon_{\theta\xi} = 0 \\ u(x, \theta, \xi) = u_0(x, \theta) + \xi\beta_x(x, \theta) \\ v(x, \theta, \xi) = v_0(x, \theta) + \xi\beta_{\theta}(x, \theta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde todas las condiciones se han explicado en los capítulos anteriores.

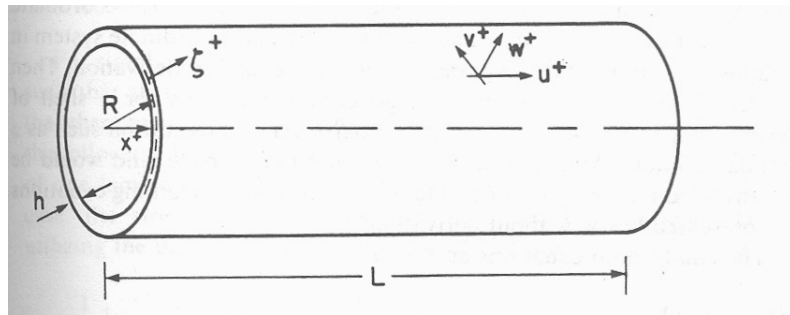


Figura A, la Cubierta Cilíndrica Redonda.

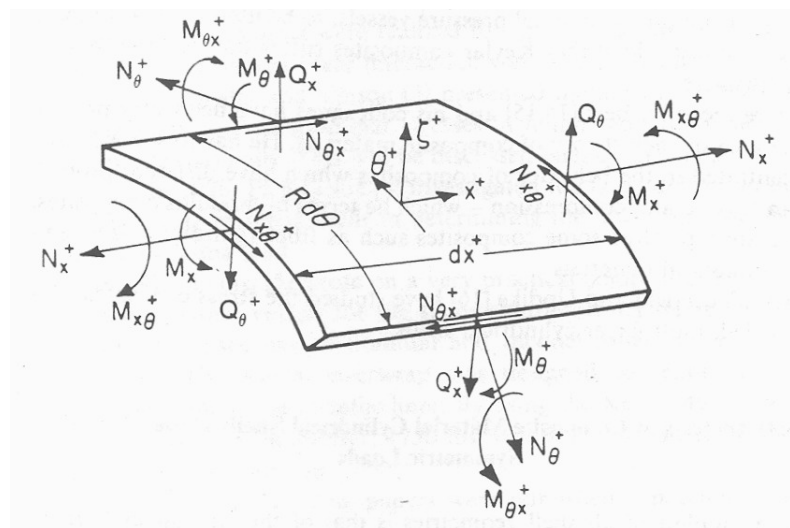


Figura B, la dirección positiva de la resultante de esfuerzos y parejas de tensiones,

Hay que tener en cuenta la Primera Aproximación de Amor, que consiste con el abandono de la deformación del cortante transversal:

$$(4.2) \quad h/R \ll 1.$$

Es verdad que el análisis exacto de Cubiertas de materiales compuestos debe incluir la deformación del cortante transversal, debido al hecho que el modulo de elasticidad a la dirección de la fibra es una la propiedad dependiente, mientras el módulo del cortante transversal es que una matriz domine la propiedad. Sin embargo, para el plan preliminar, uno puede descuidar deformaciones del cortante transversal, con las simplificaciones resultantes.

Para derivar las ecuaciones del diferencial gobernantes para el cilíndrico, se debe empezar por las ecuaciones de elasticidad en un sistema de coordenadas curvilíneo, así como las ecuaciones de elasticidad en un sistema de coordenada Cartesiano; anteriormente eran el punto de arranque para la derivación de la ecuación de la lamina. Entonces uno podría proceder desarrollar las ecuaciones gobernantes para una Cubierta de forma general, pero adaptándolo a cualquier configuración particular como una Cubierta cilíndrica redonda. Esto requeriría mucho espacio. Por consiguiente, las ecuaciones gobernantes se presentan abajo sin la derivación.

$$(4.3) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x = 0$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} + q_\theta = 0$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + p(x, \theta) = 0$$

$$(4.6) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - (Q_x - m_x) = 0$$

$$(4.7) \quad \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - (Q_\theta - m_\theta) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned}
 q_x &= \sigma_{zx}(h/2) - \sigma_{zx}(-h/2) = \tau_{1x} - \tau_{2x} \\
 q_\theta &= \sigma_{z\theta}(h/2) - \sigma_{z\theta}(-h/2) = \tau_{1\theta} - \tau_{2\theta} \\
 m_x &= \frac{h}{2} [\sigma_{zx}(h/2) + \sigma_{zx}(-h/2)] = \frac{h}{2} [\tau_{1x} + \tau_{2x}] \\
 m_\theta &= \frac{h}{2} [\sigma_{z\theta}(h/2) + \sigma_{z\theta}(-h/2)] = \frac{h}{2} [\tau_{1\theta} + \tau_{2\theta}].
 \end{aligned}$$

Éstas ecuaciones de equilibrio son independientes del sistema material. Ellos podrían escribirse por lo que se refiere al ds , distancia del arco dónde $ds = R d\theta$. El q_x, q_θ, m_x y m_θ las cantidades de m son funciones de las tensiones de cortante de superficie.

Para el caso de ninguna deformación del cortante transversal. la relación entre las rotaciones β_x y β_θ , y los desplazamientos se dan por:

$$(4.8) \quad \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$(4.9) \quad \beta_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} = 0.$$

Para la simplicidad, nosotros asumiremos que la laminación que apila la sucesión es tal, que no hay ningún acoplamiento que presente torcimiento o estiramiento, (eso es $[B] = 0$), y que no hay ninguna otra condición de acoplamiento, esto es $(\beta)_{16}$ y $(\beta)_{26} = 0$. También, para la derivación siguiente, el caso más simple se estudiará en el de una Cubierta de una lámina. Como consecuencia, pueden hacerse las generalizaciones. En este caso, las relaciones de esfuerzo-tensión y las de tensión-desplazamiento, utilizan lo asumido por el desplazamiento de (4.1) es:

$$(4.10) \quad \epsilon_x = \frac{1}{E_x} [\sigma_x - \nu_{x\theta} \sigma_\theta] = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \beta_x}{\partial x}$$

$$(4.11) \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{E_\theta} [\sigma_\theta - \nu_{\theta x} \sigma_x] = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w \right] + \frac{\zeta}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta}$$

$$(4.12) \quad \epsilon_{x\theta} = \frac{1}{2G_{x\theta}} \sigma_{x\theta}$$

La curvatura del plano y las flexión de las curvas se dan como sigue:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} K_x &= \frac{E_x h}{(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}, & K_\theta &= \frac{E_\theta h}{(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})} \\ D_x &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}, & D_\theta &= \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}. \end{aligned}$$

La relación con el orthotropico y los sostenimientos serían

$$(4.14) \quad \frac{\nu_{x\theta}}{E_x} = \frac{\nu_{\theta x}}{E_\theta}$$

asumimos ahora que las cargas son axialmente simétricas, $\partial(\cdot)/\partial\theta = 0$.

Haciendo la integración usual de (4.10) y (4.11), multiplicando cada uno por el dz e integrando de -h/2 y h/2, y utilizando las definiciones de los resultados de resultantes de tensión en:

$$N_x - \nu_{x\theta} N_\theta = E_x h \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad N_\theta - \nu_{\theta x} N_x = E_\theta h \frac{w}{R}.$$

Reestructurando éstos, surge lo siguiente

$$(4.15) \quad N_x = K_x \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu_{\theta x} \frac{w}{R} \right]$$

$$(4.16) \quad N_\theta = K_\theta \left[\nu_{x\theta} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w}{R} \right].$$

Semejantemente, multiplicando (4.10) y (4.11) por $\xi d\xi$ e integrando de $-h/2$ al $h/2$, los resultados son:

$$M_x - \nu_{x\theta} M_\theta = - \frac{E_x h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$M_\theta - \nu_{\theta x} M_x = 0.$$

Reestructurando estos rendimientos, se obtiene lo siguiente

$$(4.17) \quad M_x = - D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$(4.18) \quad M_{\theta} = \nu_{\theta,x} M_x.$$

Si llevamos esto más allá, asumimos para la derivación siguiente que no hay tensiones de cortante de superficie,

$$q_x = q_{\theta} = m_x = m_{\theta} = 0.$$

De lo anterior, se pueden simplificar las ecuaciones a lo siguiente:

$$(4.19) \quad \frac{dN_x}{dx} = 0$$

$$(4.20) \quad \frac{dQ_x}{dx} - \frac{N_{\theta}}{R} + p(x) = 0$$

$$(4.21) \quad \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0$$

$$(4.22) \quad \beta_x + \frac{dw}{dx} = 0$$

$$(4.23) \quad \beta_\theta = 0$$

$$(4.24) \quad N_x = K_x \left[\frac{du_0}{dx} + \frac{\nu_{\theta x}}{R} w \right]$$

$$(4.25) \quad N_\theta = K_\theta \left[\nu_{x\theta} \frac{du_0}{dx} + \frac{w}{R} \right]$$

$$(4.26) \quad M_x = -D_x \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$(4.27) \quad M_\theta = \nu_{\theta x} M_x$$

$$(4.28) \quad Q_x = -D_x \frac{d^3 w}{dx^3}$$

De (4.19) y (4.24), se tiene

$$(4.29) \quad \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\nu_{\theta x}}{R} \frac{dw}{dx} = 0.$$

De (4.28), (4.25) y (4.20), uno obtiene:

$$(4.30) \quad -D_x \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{K_\theta}{R} \left[\nu_{\theta} \frac{du_0}{dx} + \frac{w}{R} \right] + p(x) = 0.$$

De (4.29) y (4.30) la ecuación gobernante resultante es

$$(4.31) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12(1 - \nu_{\theta} \nu_{\theta x})}{h^2 R^2} \frac{D_\theta}{D_x} w = \frac{1}{D_x} \left[p(x) - \nu_{\theta x} \frac{N_x}{R} \right].$$

Definiendo ahora

$$(4.32) \quad \epsilon^4 \equiv \frac{3(1 - \nu_{\theta} \nu_{\theta x})}{h^2 R^2} \frac{D_\theta}{D_x},$$

las ecuaciones del diferencial gobernantes para la desviación lateral w , y los desplazamientos del plano u_0 se vuelven

$$(4.33) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + 4\epsilon^4 w = \frac{1}{D_x} \left[p(x) - \frac{\nu_{\theta x}}{R} N_x \right]$$

$$(4.34) \quad \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\nu_{\theta x}}{R} \frac{dw}{dx} = 0.$$

La forma de (4.33) es deseable desde que es el acoplamiento de la otra ecuación gobernante (4.34). N_x es una constante (vea (4.19)) y se determinó por las condiciones del límite. De hecho, se ve de (4.33) que la presencia de una fuerza en el plano axial es debida a una presión lateral equivalente hasta donde el desplazamiento lateral w está induciendo.

Al determinar w y u de (4.33) y (4.34), los resultantes de tensión y parejas de tensión pueden obtenerse de (4.24) y (4.28). pueden determinarse las Tensiones entonces de lo siguiente

$$(4.35) \quad \sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{M_x \zeta}{h^3/12}$$

$$(4.36) \quad \sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{h} + \frac{M_{\theta} \zeta}{h^3/12}$$

$$(4.37) \quad \sigma_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 + \left(\frac{\zeta}{h/2} \right)^2 \right]$$

También se ve que la ecuación del diferencial gobernante (4.33) tiene la misma forma como de una viga en una fundación elástica, es decir, reemplazando D_x por la dureza del flexural de una viga. Reemplazando $4\epsilon^4 D_x$ por k y EI por el módulo de fundición de la viga.

Así, la intuición física de todas las soluciones para las vigas en una fundición elástica puede utilizarse.

Por los métodos normales, las raíces de la cuarta ecuación del orden (4.33) se obtiene para ser $\pm E(1 \pm i)$ donde $i = \sqrt{-a}$. La solución general puede escribirse como

$$(4.38) \quad w(x) = A e^{-\epsilon x} \cos \epsilon x + B e^{-\epsilon x} \sin \epsilon x + C e^{\epsilon x} \cos \epsilon x + E e^{\epsilon x} \sin \epsilon x + w_p(x)$$

donde $A, B, C,$ y E son las constantes de integración determinadas por las condiciones del límite, y $w_p(x)$ es la integral particular.

El desplazamiento del plano puede obtenerse a través de integrar (4.24) como sigue

$$(4.39) \quad u_0(x) = \frac{N_x x}{K_x} - \frac{\nu_{\theta x}}{R} \int w dx + F$$

donde N_x es constante y F es una constante de integración.

Por consiguiente, se ve que para las Cubiertas cilíndricas redondas bajo las cargas simétricas axiales hay seis límite que lo condicionan, tres a cada extremo. El límite natural que condiciona para este caso es:

O U_x se prescribe o $N_x = 0$

Cualquiera $\frac{dw}{dx}$ se prescribe $Q_x = 0$

O w se prescribe o $Q_x = 0$.

De lo anterior se dedujo, con los apoyos simples, sujetó y con los bordes libres.

Resolviendo (4.33) de otra manera tal que (4.38), se use en el que se llamó torcimiento límite de la capa. En ese caso, la solución puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
w(x) = & \frac{M_0}{2\epsilon^2 D_x} e^{-\epsilon x} (\sin \epsilon x - \cos \epsilon x) - \frac{Q_0}{2\epsilon^3 D_x} e^{-\epsilon x} \cos \epsilon x \\
& + \frac{M_L}{2\epsilon^2 D_x} e^{-\epsilon(L-x)} [\sin \epsilon(L-x) - \cos \epsilon(L-x)] \\
& + \frac{Q_L}{2\epsilon^3 D_x} e^{-\epsilon(L-x)} \cos \epsilon(L-x) + w_p(x)
\end{aligned}
\tag{4.40}$$

donde en lugar de UN, B, C y E se han las constantes de integración de (4.38) M_0, Q_0, M_L y Q_L se hagan constantes de la integración.

La ventaja particular de usar (4.40) en lugar de (4.38) se ve fácilmente. Puede mostrarse que cada término de la solución homogénea contiene condiciones trigonométricas que oscilan entre ± 1 multiplicadas por un término exponencial con un exponente negativo, de un decaimiento exponencial. Se puede decir que cualquier término es despreciable cuando $e^{-\epsilon x} \leq 0.006$ o $e^{-\epsilon(L-x)} \leq 0.006$. Si era entonces 0.09, esa condición se reúne siempre que

$$\begin{aligned}
(4.41) \quad & x > 4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}} \\
& L - x > 4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Esto es muy importante porque fuera de cualquier extremo de la Cubierta a una distancia mayor que $4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}}$ la solución homogénea

entera de (4.40) va a poner en cero ostensiblemente, y es abandonado. En el caso de cargas continuas, $p(x)$, la solución particular es una, sólo llevando a menudo a las tensiones de la membrana a este $0 \leq x \leq 4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}}$ y $0 \leq L - x \leq 4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}}$, se llama el "doblando la capa del límite". se ve que la longitud de la capa de límite de torcimiento es una función de la dureza flexural D_x y D_θ .

Computacionalmente, (4.40) es muy útil. Para una Cubierta más larga, tal que la capa de límite de torcimiento es $L \leq 4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}}$, en la región $0 \leq x \leq 4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}}$, las condiciones que involucran M_L y Q_L es abandonado; en la región $0 \leq (L - x) \leq 4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}}$ las condiciones que involucran M_0 y Q_0 puede ignorarse; y en la región $4\sqrt{Rh(D_x / D_\theta)^{1/2}} \leq x \leq L - 4\sqrt{(Rh/1)(D_x / D_\theta)^{1/2}}$ las condiciones involucrando M_0 , Q_0 , M_L , Q_L , puede ignorarse. También, cuando $d^1 p(x) / dx^2 = d^2 p(x) / dx^3 = 0$ la Cubierta es más larga que la capa de límite de torcimiento y sólo entonces,

$$M_0 = M_x(0), \quad M_L = M_x(L)$$

$$Q_0 = Q_x(0), \quad Q_L = Q_x(L)$$

Aunque la derivación anterior es para un material de orthotropico de solo capa, puede extenderse fácilmente a una Cubierta compuesta laminada,

1 si todos los acoplamientos son cero. En ese caso, la solución general puede escribirse como sigue.

4.4 una solución general para las Cubiertas cilíndricas compuestas bajo cargas axialmente simétricas

$$\begin{aligned}
 (4.42) \quad w(X) = & \frac{M_{11}}{2\epsilon^2 D_{11}} e^{-xy} (\sin \epsilon x - \cos \epsilon x) - \frac{Q_{11}}{2\epsilon^3 D_{11}} e^{-xy} \cos \epsilon x \\
 & + \frac{M_L}{2\epsilon^2 D_{11}} e^{-\epsilon(L-x)} [\sin \epsilon (L-x) - \cos \epsilon (L-x)] \\
 & + \frac{Q_{11}}{2\epsilon^3 D_{11}} e^{-\epsilon(L-x)} \cos \epsilon (L-x) + \frac{1}{4\epsilon^4 D_{11}} \left[p(x) - \frac{v_\theta}{R} N_x \right]
 \end{aligned}$$

de donde

$$- Q_1 e^{-\epsilon(L-x)} [-\cos \epsilon(L-x) + \sin \epsilon(L-x)] - \frac{1}{4\epsilon^4} \frac{d^3 p(x)}{dx^3}$$

(4.46) $N_x = \text{constante.}$

En el caso que axialmente la carga sea simétrica $\partial(\)/\partial\theta = k_\theta = 0$, las tensiones en cada lámina se dan por

$$(4.47) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\epsilon_x^0 = \frac{du}{dx}$, $\epsilon_\theta^0 = W/R$ y $k_x = -d^2 w/dx^2$. Si la Cubierta es de una capa del orthotropico, u se da por (4.39).

Waltz y Vinson han mostrado que en una Cubierta cilíndrica laminada $d^2 p(x)/dx^2 = 0$, todos los inter laminar cortantes de las tensiones van a ser cero fuera de la capa límite de torcimiento, es decir $4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}} \leq x \leq L - 4\sqrt{Rh(D_x/D_\theta)^{1/2}}$.

CONCLUSIONES

- Se establecieron las ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento del carácter anisotrópico de los materiales compuestos en las láminas, estas nos permiten determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones, bajo distintas condiciones de operación láminas estructurales.
- Se establecieron las soluciones a través de sistemas de ecuaciones que determinan los modelamientos del comportamiento de los materiales compuestos cuando están bajo la acción mecánica.
- Se llegó a medir la funcionalidad del modelamiento en el diseño de los buques o artefactos navales.
- Se presentó como resultado de la investigación en formato de documento de consulta (texto guía) para su uso en labores de diseño, investigación y docencia.

LISTA DE FIGURAS

Capitulo I

Figura 1.1 Ilustración de varios tipos de materiales compuestos.

Figura 1.2 Diagrama de varios tipos de filamentos de los materiales compuestos.

Figura 1.3 Refuerzos de alto rendimiento.

Figura 1.4 Materiales de matrices.

Figura 1.5 Configuraciones de compuestos estructurales.

Figura 1.6 Caracterización analítica de materiales compuestos.

Capitulo II

Figura 2.1 Seccionamiento de un cuerpo.

Figura 2.2 Elemento sometido a esfuerzo en tres dimensiones.

Figura 2.3 Elementos en esfuerzo plano.

Figura 2.4 Resultante de fuerzas.

Figura 2.5 Elemento con tensiones y fuerzas de un cuerpo.

Figura 2.6 Deformación de lamina y barra.

Figura 2.7 Deformación por tensión lineal y esfuerzo cortante.

Capitulo III

Figura 3.1 Desviación de una lamina.

Figura 3.2 Torsión de un elemento plano.

Figura 3.4 Esfuerzos medios y normales.

Figura 3.5 Elemento en sistema de coordenadas.

Figura 3.6 Lamina en plano coordenado.

Figura 3.7 Tensiones normalizadas.

Figura 3.8 y 3.9 Tensiones normalizadas a puntos medios de las laminas.

Figura 3.10 Análisis de placa con carga localizada.

Figura 3.11 Pulsos de presión simulando pequeñas cargas nucleares.

Capitulo IV

Figura A. Cubierta cilíndrica redonda.

Figura B. Resultante de esfuerzos y pareja de tensiones.

BIBLIOGRAFÍA

VINSON, J. R. – SIERAKOWSKI, R. L. The Behavior of Structures Composed of Composite Material.

ZIENKIEWICZ, O. C. – TAYLOR, R. L. El Metodo de los Elementos Finitos. Volumen 2. 4ta. Edición. McGraw Hill.

FELIPPA, C. A. Advanced Finite Element Method-Lecture. Notes University of Colorado. 2001.

TZENG, Y. – LIN, Ch. – CUTSHAW, C. Materials Research Society. Vol. 621. Mat. Res. Soc. Symp. Proc.

HTTP:// [WWW.Millipore.com/](http://WWW.Millipore.com/Publications.nsf/Docs) Publications.nsf/Docs.

HTTP:// WWW.mrs.org/membership/preview/proc621

HTTP:// WWW.Famsi.org/reports/99026/section12. FAMSI Foundation for the Advancement of Mesoamerican Studies, inc.

HTTP:// WWW.Tensacorp.com/download/bro.tet.spn

HTTP:// [WWW.eafit.edu.co/mecanica desolidos/flexi3n/combinados.html-8k](http://WWW.eafit.edu.co/mecanica%20desolidos/flexi3n/combinados.html-8k). FAMSI Foundation for the