

CAPA LÍMITE, SU IMPORTANCIA EN EL FLUJO DE FLUIDOS Y EL DISEÑO DE
TUBERÍAS

DAVID ALBERTO ANZOÁTEGUI CASTELLANOS

ERIC ALONSO ORDOSGOITIA OLIVARES

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECÁNICA
MINOR EN DISEÑO
CARTAGENA DE INDIAS D.T H. Y C
2004

CAPA LÍMITE, SU IMPORTANCIA EN EL FLUJO DE FLUIDOS Y EL DISEÑO DE
TUBERÍAS

DAVID ALBERTO ANZOÁTEGUI CASTELLANOS

ERIC ALONSO ORDOSGOITIA OLIVARES

Monografía presentada para optar al título de
Ingeniero Mecánico

Asesor

JULIO C. CANTILLO TORRES

Ingeniero Mecánico

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECÁNICA
MINOR EN DISEÑO
CARTAGENA DE INDIAS D.T H. Y C
2004

Cartagena de Indias D.T.H. y C, Junio de 2004

Ingeniero

JUSTO RAMOS MADRID

Director Programa de Ingeniería Mecánica.

Universidad Tecnológica de Bolívar

Ciudad

Cordial Saludo.

Nos permitimos presentar a usted nuestra monografía titulada: *capa límite, su importancia en el flujo de fluidos y el diseño de tuberías.*

Monografía que es el resultado de la profundización de los conceptos aprendidos en el menor de diseño de ingeniería mecánica acerca de la capa límite.

Atentamente,

David Alberto Anzoátegui Castellanos

C.C 8.834.023

Cartagena

Eric Alonso Ordosgoitia Olivares

C.C 73.184.335

Cartagena

Cartagena de Indias D.T.H. y C, Junio de 2004

Ingeniero

JUSTO RAMOS MADRID

Director Programa de Ingeniería Mecánica.

Universidad Tecnológica de Bolívar

Ciudad

Ciudad

Cordial Saludo.

Me permito presentarle la monografía titulada: *capa límite, su importancia en el flujo de fluidos y el diseño de tuberías.*, realizada por David Alberto Anzoátegui Castellanos y Eric Alonso Ordosgoitia Olivares.

Atentamente,

Julio C. Cantillo Torres

Asesor

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	7
1. RESEÑA HISTÓRICA	9
1.1 La Mecánica de Fluidos	9
1.2 Mecánica de Fluidos Antes y Después de la Capa Limite	9
2. EL FLUJO DE FLUIDOS	13
2.1 Fluidos	13
2.1 Propiedades de los Fluidos	14
2.1. 1 Presión	14
2.1.3 Temperatura	15
2.1.4 Densidad y volumen específico	16
2.1.5 Módulo volumétrico de elasticidad	16
2.1.6 Viscosidad	16
2.1.6.1 Viscosidad Cinemática	18
2.1.7 Tensión Superficial	18
2.2 Flujos	19
2.2.1 Flujo uniforme y no uniforme:	19
2.2.2 Flujo permanente y no permanente:	19
2.2.3 Flujo uniforme permanente:	19
2.2.4 Flujo uniforme no permanente:	19
2.2.5 Flujo variado permanente:	19

2.2.6 Flujo variado no permanente:	20
2.2.7 El Número de Reynolds	20
2.2.8 Régimen de flujo laminar:	21
2.2.9 Régimen de flujo turbulento:	21
2.2.10 Régimen de flujo en transición:	21
3. LA CAPA LÍMITE EN EL FLUJO DE FLUIDOS	23
3.1 Flujos Externos	23
3.2 Flujos Sobre Cilindros y Esferas	24
3.3 Capas Límite	30
3.4 Flujo Sobre Cuerpos Aerodinámicos	33
3.5 Calculo de la Capa Limite para Flujo Sobre una Placa Plana	39
3.5.1 Flujo laminar sobre una placa plana	41
3.5.2 Flujo turbulento sobre una placa plana	44
4. CAPA LÍMITE EN EL DISEÑO DE TUBERIAS	50
4.1 Flujos Internos	50
4.2 Flujo- Pared Sólida	50
4.2 Esfuerzos En Tuberías Circulares	52
4.3 Distribución De Velocidades (Tuberías Circulares)	55
4.4 Flujo Laminar	56
4.4.1 Capa limite en el desarrollo del Flujo Turbulento	57
4.4.2 Subcapa limite laminar viscosa (flujo laminar)	58
4.4.3 Zona de Transición	60
4.4.4 Zona Turbulenta	64
4.5 Perfiles de Velocidad	65
• Flujo Laminar	66

• Flujo hidráulicamente liso	66
• Flujo hidráulicamente rugoso	67
4.6 Diseño de Tuberías Circulares	70
4.6.1 Flujo Laminar	71
4.6.2 Flujo Turbulento	77
4.7 Pérdidas debido a la fricción	82
4.8 El Factor De Fricción Para Flujo Laminar	85
4.9 Clasificación Hidráulica de Flujos	86
4.9.1 Diagrama de Nikuradse	88
4.9.2 Diagrama de Moody	89
4.9.3 Flujo Hidráulicamente Liso	94
4.9.4 Flujo Hidráulicamente Rugoso	99
4.9.5 Flujos Hidráulicamente en Transición	102
4.10 Clasificación de las rugosidades en tuberías. Trabajos de Colebrook – White	103
5. conclusiones	110
Bibliografía	112

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura.1 Cubo de acero	13
Figura 2. Experimento de Reynolds	21
Figura 3. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds, para el flujo sobre una esfera.	24
Figura 4. Flujo en torno a una esfera, en el régimen de "flujo de cedencia".	25
Figura 5. Flujo laminar en torno a una esfera, con separación.	26
Figura 6. Inversión de flujo en una zona separada.	27
Figura 7. Distribución de la presión en torno a una esfera (flujo laminar).	29
Figura 8. Distribución de la presión en torno a una esfera (flujo turbulento).	29
Figura 9. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds, para el flujo sobre un cilindro circular.	29
Figura 10. Desarrollo de una capa límite, cerca de una pared.	31
Figura 11. Comparación entre perfiles de velocidad laminar y turbulenta.	32
Figura 12. Vista de un flujo en torno a un objeto aerodinámico.	34
Figura. 13. Capa límite sobre el cuerpo de un cohete dirigido $M=3$.	35
Figura 14. Características de arrastre y ascenso de un perfil aerodinámico a varios ángulos de incidencia: a) sección del ángulo de incidencia; b) sección del coeficiente de ascenso.	36
Figura 15. Control de la separación del flujo en un perfil aerodinámico, mediante succión de la capa límite: a) flujo separado en torno del perfil; b) flujo en torno del perfil de la parte a, después de aplicar la succión de la capa límite.	38

Figura 16. Volumen de control para el flujo sobre una placa plana.	40
Figura 17. Velocidad adimensional en función de la distancia adimensional, para el flujo sobre una placa plana.	42
Figura 18. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds, para flujo laminar sobre una placa plana.	44
Fig. 19 Flujo incompresible uniforme sobre una placa plana.	45
Figura 20. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds para un flujo sobre una placa plana y lisa.	47
Figura 21. Capa Límite.	50
Figura 22 Desarrollo de una capa límite turbulenta mostrando la subcapa laminar.	51
Figura 23. Flujos hidráulicamente lisos e hidráulicamente rugosos.	51
Figura 24. fuerzas que actúan en un fluido contenido en un volumen de control.	52
Figura 25. Distribución lineal del esfuerzo debido a la capa limite en tuberías.	54
Figura 26. Distribución de velocidades para flujo laminar en un tubería de circular	57
Figura 27. Capa limite en la Distribución de esfuerzos y velocidades.	57
Figura 28. Efecto de la rugosidad de la pared interna de la tubería en la distribución de velocidades.	63
Figura 29. Perfiles de velocidad. Velocidad media igual para todos los casos	67
Figura 30. Perfiles de velocidad. Transición de flujo laminar a hidráulicamente liso.	69
Figura 31. Perfiles de velocidad. Transición de flujo hidráulicamente liso a rugoso.	69
Figura 32. Efecto de la rugosidad absoluta sobre los perfiles de velocidad .	70
Figura 33. Esquema de flujo laminar en tuberías.	72
Figura 34. Resultados de Nikuradse	88

Figura 35. Factor de fricción para flujo altamente turbulento.	90
Figura 36. Diagrama de Moody modificado	92
Figura 37 Diagrama de Moody.	93
Figura 38. El espesor de la subcapa laminar viscosa.	94
Figura 39 Distribución para el flujo hidráulicamente liso desarrollado en una tubería de sección circular.	96
Figura 41. Esquema parcial del diagrama de Nikuradse mostrando la diferencia de comportamiento entre las tuberías reales y tubos de Nikuradse en la zona de flujo transicional.	103
Figura 42. rugosidad relativa como función del factor de fricción f y el número de Reynolds en la zona de flujo transicional.	106

INTRODUCCIÓN

Dos fuentes motivaron la elaboración de esta monografía sobre la capa límite y su importancia en el flujo de fluidos y el diseño de tuberías; la primera de ellas fue la cátedra introductoria, expuesta en el módulo de diseño y cálculo de redes de tuberías, la cual creó en nosotros incógnitas que, aseguramos desaparecerían con la realización de un documento recopilativo que profundizara conceptos importantes para el buen entendimiento de las causas que llevaron a el descubrimiento de la capa límite y las consecuencias que esta trajo en pro del desarrollo de la mecánica de fluidos. La segunda y quizás la de mayor trascendencia, fue nuestro deseo de realizar un escrito que pudiera ser tomado por profesores afines en el tema, como un texto guía que sirviera de soporte en futuras cátedras, y por estudiantes como material de consulta e investigación.

La etapa inicial de la monografía hace referencia a la reseña histórica de la mecánica de los fluidos, antes y después de la capa límite, esta nos plantea las primeras dudas que surgieron en base a las investigaciones y contribuciones hechas en ese entonces por: Galileo, pascal, newton, Pitot, Bernoulli, Euler y de Alembert; que propusieron varias teorías, basadas en experimentos rudimentarios, lo que traía como consecuencia la poca relación de los hechos físicos y las ecuaciones resultantes.

Por supuesto destacamos la contribución más importante hecha por Prandtl. Cuando en 1904 introdujo el concepto que daría un cambio de dirección a lo concerniente a la mecánica de fluidos, el cual fue: *La Capa Límite*. En la segunda etapa se introducen conceptos básicos de la mecánica de fluidos tales como: definición de fluido, propiedades de los fluidos, definición de flujo, y tipos de flujo. Para dar un preámbulo de los factores que influyen en la formación y estudio de la capa límite.

La tercera etapa se subdivide en dos partes, en la primera (flujo externo) se define la capa límite y se estudian todas aquellas situaciones en las que esta aparece tales como: flujos sobre cilindros y esferas, flujos sobre cuerpos aerodinámicos, y flujos sobre placa

plana. Y en la segunda parte (flujo interno) destacamos la importancia de la capa limite en el diseño de tubería explicando, las ecuaciones por las cuales se rige.

1. RESEÑA HISTÓRICA

1.1 La Mecánica de Fluidos

Es la parte de la física que se ocupa de la acción de los fluidos en reposo o en movimiento, así como de las aplicaciones y mecanismos de ingeniería que utilizan fluidos. La mecánica de fluidos es fundamental en campos tan diversos como la aeronáutica, la ingeniería química, civil y mecánica, la meteorología, las construcciones navales y la oceanografía.

La mecánica de fluidos puede subdividirse en dos campos principales: la estática de fluidos, o hidrostática, que se ocupa de los fluidos en reposo, y la dinámica de fluidos, que trata de los fluidos en movimiento. El término de hidrodinámica se aplica al flujo de líquidos o al flujo de los gases a baja velocidad, en el que puede considerarse que el gas es esencialmente incompresible. La aerodinámica, o dinámica de gases, se ocupa del comportamiento de los gases cuando los cambios de velocidad y presión son lo suficientemente grandes para que sea necesario incluir los efectos de la compresibilidad.

1.2 Mecánica de Fluidos Antes y Después de la Capa Limite

El deseo del hombre de comprender los fenómenos en los fluidos, surgió cuando tuvo problemas de suministro de agua, de irrigación, de navegación, y de energía hidráulica. Con sólo una rudimentaria apreciación de la física de los fluidos, cavó pozos, construyó canales, operó ruedas hidráulicas y dispositivos de bombeo rudimentarios y, al aumentar el tamaño de sus ciudades, construyó acueductos cada vez más grandes, los que alcanzaron su mayor dimensión y grandeza en la ciudad de Roma. Pero, a excepción de las ideas de Arquímedes (287-212 A. de C.) sobre los principios de flotación, en la mecánica de fluidos moderna aparece muy poco del escaso conocimiento de los antiguos.

Después de la caída del Imperio Romano (476 D. de C.) no existe, hasta la época de Leonardo da Vinci (1452-1519), registró alguno de progreso en la mecánica de fluidos.

Este gran genio proyectó y construyó la primera esclusa de cámaras para un canal, cerca de Milán, e introdujo una nueva era en la ingeniería hidráulica; estudió también el vuelo de las aves y desarrolló algunas ideas sobre el origen de las fuerzas que soportaban a éstas en el aire. Sin embargo, hasta la época de Leonardo, los conceptos sobre el movimiento de los fluidos deben considerarse más como un arte que como una ciencia. Después de la época de Leonardo, la acumulación de conocimiento sobre hidráulica ganó momentum rápidamente, siendo sobresalientes las contribuciones de Galileo, Torricelli, Mariotte, Pascal, Newton, Pitot, Bernoulli, Euler, y D'Alembert a los principios básicos de la ciencia. Aunque las teorías propuestas por estos científicos se confirmaban en general por experimentos rudimentarios, las divergencias entre la teoría y la realidad condujeron a D'Alembert a declarar en 1744, "La teoría de los fluidos deberá basarse necesariamente en la experimentación". D'Alembert demostró que no existe resistencia al movimiento de un cuerpo cuando éste se mueve a través de un fluido ideal (no viscoso o invíscido), pero es obvio que esta conclusión no puede aplicarse a los cuerpos que se mueven a través de fluidos reales.

Esta discrepancia entre la teoría y el experimento, que se denominó la paradoja de D'Alembert, ha sido ya resuelta. No obstante, demuestra con claridad las limitaciones de la teoría de esa época para la resolución de problemas sobre fluidos. Con motivo del conflicto entre la teoría y la experimentación, surgieron dos escuelas de pensamiento para el estudio de la mecánica de los fluidos, una que trataba acerca de los aspectos teóricos y otra acerca de los aspectos prácticos del flujo de los fluidos. En cierto sentido, estas escuelas de pensamiento han subsistido hasta la actualidad, lo que ha tenido como resultado el campo matemático de la hidrodinámica, y la ciencia práctica de la hidráulica.

Antes del principio de siglo XX. , se hicieron notables contribuciones a la hidrodinámica teórica, por Euler, D'Alembert, Navier, Coriolis, Lagrange, Saint-Venant, Stokes, Helmholtz, Kirchhoff, Rayleigh, Rankine, Kelvin y Lamb. En un sentido amplio, la hidráulica experimental llegó a ser el estudio de los fenómenos de flujo ocurrientes en orificios, tubos y canales abiertos. Entre los muchos investigadores precursores que dedicaron sus energías a la iniciación de este campo, se encuentran Chezy, Bosut, Borda,

Du Boat, Coulomb, Venturi, de Prony, Eytelwein, Bidone, Belanger, Hagen y Poiseuille. A mediados del siglo anterior, Navier y Stokes tuvieron éxito al modificar las ecuaciones generales del movimiento de un fluido ideal para adaptarlas a las de un fluido viscoso y, al hacerlo así, demostraron la posibilidad de explicar las diferencias entre la hidráulica y la hidrodinámica. Casi al mismo tiempo, los estudios teóricos y experimentales sobre el movimiento de vórtice y sobre el flujo separado, hechos por Helmholtz y Kirchhoff, ayudaban a explicar muchos de los resultados divergentes entre la teoría y el experimento.

Mientras tanto, continuaba progresando la investigación hidráulica y se acumularon grandes cantidades de excelente información o se propusieron fórmulas por Darcy, Bazin, Weisbach, Ganguillet, Kutter, Manning, Francis y otros. Infortunadamente, las investigaciones conducían con frecuencia a fórmulas empíricas obtenidas por él sólo ajuste entre gráficas e información experimental, o por la sola presentación de los resultados en forma tabular, y en muchos casos, no era aparente la relación entre los hechos físicos y la fórmula resultante. Hacia fines del siglo pasado, surgieron nuevas industrias que demandaron información sobre el flujo de fluidos diferentes al agua; este hecho, aunado a los muchos adelantos significativos en el conocimiento, tendió a detener el empirismo en la hidráulica. Estos adelantos fueron: (1) las investigaciones teóricas y experimentales de Reynolds; (2) el desarrollo, por Rayleigh, del análisis dimensional; (3) el uso de modelos en la solución de problemas sobre fluidos, por Froude, Reynolds, Vernon-Harcourt, Fargue y Engels; y (4) el rápido progreso de la aeronáutica teórica y experimental, debido a los estudios de Lanchester, Lilienthal, Kutta, Joukowski, Betz y Prandtl. Estos adelantos proporcionaron nuevas herramientas para la solución de problemas, y dieron nacimiento a la moderna mecánica de fluidos.

La contribución singular más importante fue hecha por Prandtl, cuando en 1904 introdujo el concepto de la capa límite. En su corto pero descriptivo documento, Prandtl proporcionó, de una sola vez, un eslabón esencial entre los movimientos ideal y real de los fluidos de baja viscosidad (por ejemplo, el agua), y suministró la base de una gran parte de la mecánica de fluidos moderna. En el siglo XX ha decaído el empirismo puro, y

los problemas sobre fluidos se han resuelto mejorando constantemente los métodos racionales; estos métodos han producido muchos resultados fructíferos y han colaborado al conocimiento creciente de los detalles de los fenómenos en los fluidos. Esta tendencia, ciertamente tendrá que continuar. Otra tendencia persistente es la del surgimiento de complejidades cada vez mayores y de más grandes desafíos en los problemas sobre fluidos. Subsisten los problemas sobre suministro de agua, irrigación, navegación y energía hidráulica, pero ahora a una escala nunca imaginada por los ciudadanos de Roma precristiana.

La gama de nuevos problemas aparecidos en los tiempos modernos es virtualmente infinita, incluyendo el estampido sónico del aeroplano supersónico, la dispersión de los desechos de la humanidad en los lagos, ríos y océanos, el flujo de la sangre en las venas, arterias, riñones, corazones y aparatos de corazón y de riñón artificiales, el flujo de bombeo de combustible y de escape en los cohetes lunares, el diseño de superbarcos-tanque petroleros de una megatonelada, en lo relativo a velocidad, eficiencia del bombeo de la carga y seguridad; y el análisis y simulación del clima de la Tierra y de las corrientes oceánicas. Así, la mecánica de fluidos ha llegado a ser parte esencial de campos tan diversos como la medicina, la meteorología, la astronáutica y la oceanografía, así como el de las disciplinas tradicionales de la ingeniería.

2. EL FLUJO DE FLUIDOS

2.1 Fluidos

Para empezar ha estudiar el flujo de fluidos debe quedar claro el concepto de fluido, el cual ha sido definido como una sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante, sin importar cuán pequeño sea ese esfuerzo. En esta definición no se hace ninguna diferencia entre un líquido y un gas, por dos razones: Primeramente, los principios de la mecánica de fluidos se aplican igualmente a líquidos y gases como los distinguimos normalmente. En segundo lugar, aunque la diferencia entre un líquido y un gas es muy clara, a presiones inferiores a la crítica; por encima de esta no hay una diferencia marcada entre líquidos y vapores.

Para redondear el concepto de fluido podemos decir que: Un fluido se diferencia de otro tipo de sustancias en la forma como responden a la aplicación de esfuerzos cortantes, por ejemplo, tomemos el caso de un bloque rectangular de acero al que se le aplica una fuerza en dirección paralela a la superficie superior

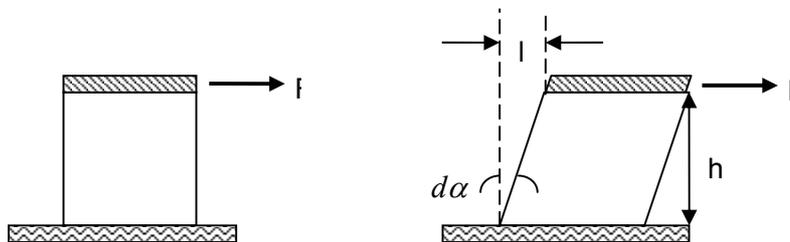


Figura.1 Cubo de acero

Éste, responde al esfuerzo cortante con una deformación finita no continua proporcional al modulo de rigidez del material, y una vez retirada la fuerza que causa la deformación puede o no recuperar su forma inicial a diferencia de un fluido que carece de dicha cualidad.

2.1 Propiedades de los Fluidos

2.1. 1 Presión

Aunque el concepto de presión se comprende generalmente, es conveniente aclarar algunos puntos relacionados con el uso del término. Al analizar las fuerzas que actúan sobre un fluido, podría hacerse en relación con la fuerza por unidad de área o el esfuerzo que actúa sobre una porción de superficie del elemento fluido. Conviene recordar que el esfuerzo es una cantidad vectorial que tiene tanto magnitud como dirección.

Si elegimos un punto arbitrario en un fluido, podemos trazar, a través de él, un elemento de área orientado en una dirección particular. El esfuerzo ejercido sobre este elemento de área puede descomponerse en tres componentes, dos de las cuales están en el plano del área y la otra es normal al área. En resumen, podemos descomponer el vector esfuerzo del elemento de área en tres componentes perpendiculares entre sí, procedimiento que puede aplicarse a cualquier vector. Las dos componentes situadas en el plano del área se llaman esfuerzos tangenciales. La componente de esfuerzo normal al área se denomina esfuerzo normal.

Tomemos un punto arbitrario de un fluido en reposo; haremos pasar un elemento de área por dicho punto y se establecerá un esfuerzo normal en un lado de dicha área. Luego, hacemos girar el elemento de área sobre un eje que pasa a través del punto y reposa sobre el área. El esfuerzo normal debe determinarse en cada nueva orientación del área. Encontramos que, en tanto el fluido esté en reposo, la magnitud de la componente vectorial del esfuerzo normal no varía. Se puede demostrar que esto es consecuencia del equilibrio de fuerzas ejercidas sobre un elemento de volumen que rodea al punto. Esta magnitud invariable del esfuerzo normal se llama, simplemente, presión en un punto del fluido y se designa por P . El vector de esfuerzo normal correspondiente está dirigido hacia un elemento de área y, por lo tanto, al actuar sobre una partícula de fluido, se considerará como un esfuerzo de compresión.

Suponga que ahora se escoge un punto de un fluido en movimiento y se calcula de nuevo el esfuerzo normal sobre un elemento de área para diversas orientaciones del elemento. En este caso, el resultado no es tan sencillo como en el de uno estático. Encontramos ahora que, en general, la magnitud del esfuerzo normal es función de la orientación del elemento de área. Así, el elemento de área puede tener un valor de esfuerzo normal, en posición horizontal, y otro distinto, cuando se coloca en posición vertical. En consecuencia, no podemos referirnos a la "presión" en un punto con el mismo sentido que en el caso estático, a menos que revisemos la definición de presión. En lugar de hacer tal cosa, se acostumbra dividir un esfuerzo normal dado en dos partes o componentes. Una de ellas es la "componente de presión", esto es, la que no cambia con la orientación del elemento fluido. La otra se conoce, casi siempre, como "esfuerzo normal viscoso" y varía con la orientación del elemento de área, siendo una función de la viscosidad del fluido. Es importante tener presente que siempre que se hace cualquier referencia al término presión, se está considerando la componente invariable del esfuerzo normal. La presión definida así está relacionada con otras propiedades de los fluidos, tales como la densidad y la temperatura, mediante las leyes de termodinámica.

Hay otro aspecto importante que debe tomarse en consideración. Si un fluido permanece en reposo, en relación al medio que lo rodea, el efecto de la viscosidad no se manifiesta. Tanto el esfuerzo normal viscoso como el tangencial dependen del movimiento del fluido.

2.1.3 Temperatura

La propiedad que nos es muy familiar y a la que llamamos temperatura, se define de una forma bastante indirecta. Se habla, más bien, de la "igualdad de temperatura" entre dos sustancias que de la temperatura de una de ellas, intrínsecamente. Esta igualdad de temperatura se alcanza, poniendo en contacto térmico a dos sustancias y observando los cambios de sus propiedades físicas (por ejemplo, la longitud y la resistencia eléctrica). Cuando dejan de observarse cambios posteriores en las propiedades, se dice que las sustancias tienen la misma temperatura.

2.1.4 Densidad y volumen específico

La densidad ρ de un fluido, en un punto, se ha definido como:

$$\text{Densidad} = \rho = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta V}$$

Donde δV es el volumen mínimo alrededor del punto para el cual es aplicable el concepto de continuo.

La densidad de un gas ideal está dada por la conocida ecuación de estado de un gas ideal, esto es:

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

2.1.5 Módulo volumétrico de elasticidad

A temperatura constante, la variación de la densidad en relación con la presión, se expresa mediante el módulo volumétrico de elasticidad, que se define de la siguiente manera:

$$B_T = -\nu \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T$$

2.1.6 Viscosidad

De todas las propiedades de los fluidos, la viscosidad requiere la mayor consideración en el estudio del flujo de fluidos. La naturaleza y características de la viscosidad se tratan en esta sección. La viscosidad es aquella propiedad de un fluido por virtud de la cual ofrece

resistencia al corte. La ley de viscosidad de Newton $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ afirma que dada una

rapidez de deformación angular en el fluido, el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la viscosidad. La melaza y la brea son ejemplos de líquidos altamente viscosos; el agua y el aire tienen viscosidades muy pequeñas.

La viscosidad de un gas aumenta con la temperatura, pero la viscosidad de un líquido disminuye con la temperatura. Las variaciones en las tendencias de la temperatura se pueden explicar por el examen de las causas de la viscosidad. La resistencia de un fluido al corte depende de su cohesión y de su rapidez de transferencia de la cantidad de movimiento molecular. Un líquido, cuyas moléculas dejan espacios entre ellas mucho más cerrados que las de un gas, tiene fuerzas cohesivas mucho mayores que un gas. La cohesión parece ser la causa predominante de la viscosidad en un líquido; y ya que la cohesión decrece con la temperatura, la viscosidad decrece también. Por otro lado, un gas tiene fuerzas cohesivas muy pequeñas. Mucha de su resistencia al esfuerzo cortante es el resultado de la transferencia de la cantidad de movimiento molecular.

Dentro de un fluido siempre hay transferencia de moléculas en ambas direcciones a través de cualquier superficie ficticia trazada en él. Cuando una capa se mueve en relación a una capa adyacente, la transferencia molecular de la cantidad de movimiento lleva a ésta de un lado a otro, de manera que se establece un esfuerzo cortante aparente, el cual resiste el movimiento relativo y tiende a igualar las velocidades de las capas adyacentes.

La medida del movimiento de una capa relativa a una capa adyacente es $\frac{\partial u}{\partial y}$.

La actividad molecular da origen a un esfuerzo cortante aparente en los gases que es más importante que las fuerzas cohesivas y, como la actividad molecular aumenta con la temperatura, la viscosidad de un gas también aumenta con la temperatura.

Para presiones ordinarias la viscosidad es independiente de la presión y depende solo de la temperatura. Para presiones muy grandes, los gases y la mayor parte de los líquidos han mostrado variaciones erráticas con la presión.

2.1.6.1 Viscosidad Cinemática

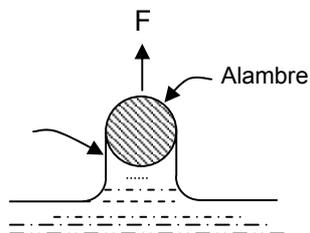
A la viscosidad μ frecuentemente se denomina viscosidad absoluta o viscosidad dinámica para evitar confundirla con la viscosidad cinemática ν , que es la razón de viscosidad a densidad de masa.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

La viscosidad cinemática ocurre en muchas aplicaciones, por ejemplo, en el número de Reynolds adimensional para el movimiento de un cuerpo a través de un fluido, $\frac{Vl}{\nu}$ en el cual V es la velocidad del cuerpo y l es una medida lineal representativa del tamaño del cuerpo.

2.1.7 Tensión Superficial

En el bien conocido experimento en que se demuestra que el acero puede flotar, se coloca cuidadosamente una aguja o una hoja de afeitar sobre la superficie del agua contenida en un vaso. Este experimento es una excelente demostración de la propiedad de los fluidos conocida como tensión superficial. Se sabe que la superficie libre de los fluidos está sometida a un estado de esfuerzo, de manera que si por ella se trazase una línea imaginaria, existiría una fuerza de cada lado de la línea. La magnitud de esta fuerza puede medirse por la fuerza necesaria para elevar de la superficie del líquido un anillo de alambre. Si S es la tensión superficial del líquido a ambos lados del alambre, como se muestra en la Figura, la fuerza total F , requerida para levantar el alambre, será:



$$F = \pi D \times 2S$$

en donde D es el diámetro del anillo. Por consiguiente, la tensión superficial S estará dada por:

$$S = \frac{F}{2\pi D}$$

2.2 Flujos

En el proceso de deformación continua al que se ve sometido un fluido al aplicársele una fuerza, se presenta un cambio de posición de las diferentes partes de este; a dicho movimiento relativo se le conoce como flujo y según las características de este movimiento se le puede clasificar como:

2.2.1 Flujo uniforme y no uniforme: Se refiere a los cambios de las cualidades del flujo con respecto al espacio.

2.2.2 Flujo permanente y no permanente: Se refiere a los cambios de las cualidades del flujo con respecto al tiempo.

En la realidad estos cuatro tipos de flujos se encuentran combinados como sigue:

2.2.3 Flujo uniforme permanente: Ninguna de las características del flujo (presión y velocidad) varían en el espacio y/o el tiempo.

2.2.4 Flujo uniforme no permanente: Las características no varía con el espacio pero si con el tiempo. Es muy difícil encontrar este tipo de flujo en la naturaleza, debido a que los cambio tendrían que ocurrir en forma simultanea a todo lo largo de la tubería (la velocidad de la señal de cambio tendría que ser infinita).

2.2.5 Flujo variado permanente: Las características del flujo varían con el espacio pero no con el tiempo. Existen dos subtipos de flujos:

Gradualmente variado: Los cambios en las características del flujo son graduales a lo largo de la dirección principal de este. Por ejemplo, las contracciones y expansiones suaves en tuberías, el flujo a través de tubos Venturi.

Rápidamente variado: Los cambios en las características del flujo son abruptos a lo largo de la dirección principal de este. Por ejemplo, las contracciones abruptas en tuberías, el flujo a través de válvulas y los rotores de bombas. Generalmente este tipo de flujo va acompañado de gran turbulencia.

2.2.6 Flujo variado no permanente: Las características del flujo varían con el espacio y con el tiempo. Debido a que el flujo uniforme no permanente no existe este nuevo tipo se conoce como flujo no permanente.

Definido los tipos de flujos, introduciremos un concepto muy importante: el número de Reynolds; el cual es decisivo para el dimensionamiento de nuestro tema principal importancia de la capa límite y todo lo relacionado con el tratamiento de flujos de fluidos, limitados y no limitados por fronteras.

2.2.7 El Número de Reynolds

Históricamente se conocían dos tipos de flujos, los cuales se diferenciaban por su comportamiento en lo concerniente a las pérdidas de energía. En 1840 G.H.L. Hagen había establecido los principios y diferencias de estos dos tipos de flujos. Sin embargo, la correcta descripción y formulación solo fue planteada entre 1880 y 1884 por Osborne Reynolds de la Universidad de Cambridge, Inglaterra.

La siguiente figura describe gráficamente el experimento de Reynolds

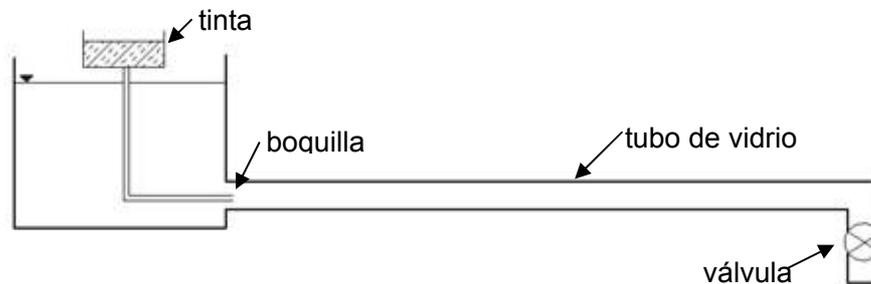


Figura 2. Experimento de Reynolds

Con este experimento repetido con diferentes diámetros de tubería y fluidos se observa la existencia de tres regímenes de flujo correspondientes a la estructura interna del mismo, a saber:

2.2.8 Régimen de flujo laminar: El flujo se mueve en capas (láminas) sin intercambio de “paquetes” de fluidos entre ellas.

2.2.9 Régimen de flujo turbulento: Se presenta intercambio de “paquetes” de fluido entre las capas que se mueven a diferente velocidad. Las partículas no tienen un vector velocidad muy definido y se caracteriza por los movimientos tridimensionales, aleatorios, de las partículas de fluido, superpuestos al movimiento promedio.

2.2.10 Régimen de flujo en transición: Los flujos que inicialmente se mueven en capa sin intercambio comienzan a tomar velocidades aleatorias en las tres dimensiones provocando un cambio en las características del flujo laminar a turbulento.

O. Reynolds usando el concepto de similaridad y considerando las tres fuerzas más importantes que intervenían en el experimento anteriormente descrito (Fuerzas de presión, Fuerzas viscosas y Fuerzas inerciales). Expreso matemáticamente un factor con el cual se podría definir el régimen fluido para cierto caso específico, hoy llamado el número de Reynolds, que es la razón de las fuerzas inerciales a las fuerzas viscosas.

$$R_e = \frac{VD}{\nu}$$

Hallar este número implica una distinción entre regímenes de flujo, tales como flujo laminar y flujo turbulento

El flujo dentro de una capa límite puede ser también laminar o turbulento; las definiciones de flujo laminar y flujo turbulento dadas anteriormente se aplican también en este caso. Como veremos más adelante, las características de un flujo pueden ser significativamente diferentes dependiendo de que la capa límite sea laminar o turbulenta. Los métodos de análisis también son diferentes para un flujo laminar que para un flujo turbulento. Por lo tanto, al iniciar el análisis de un flujo dado es necesario determinar primero si se trata de un flujo laminar o de un flujo turbulento. Veremos más detalles a este respecto más adelante.

3. LA CAPA LÍMITE EN EL FLUJO DE FLUIDOS

3.1 Flujos Externos

A continuación nos ocuparemos del flujo sobre objetos inmersos en una corriente. Como en el capítulo siguiente, sobre flujos internos, el objetivo primordial, en éste, será presentar varios conceptos básicos, que serán útiles al efectuar análisis de flujos.

Para empezar haremos una pregunta. ¿Cuáles son los fenómenos importantes en el estudio del flujo sobre objetos? Para el flujo al exterior de vehículos o para el diseño de pelotas de golf, un fenómeno evidente sería el arrastre o la resistencia al flujo. Enfocando nuestra atención al flujo sobre un avión, podemos interesarnos por las fuerzas ascensionales, que se originan por las diferencias de presión en los dos lados de las alas y las superficies ascendentes. Otro problema interesante sería el del calentamiento de los vehículos espaciales, al atravesar la atmósfera terrestre. En este caso, pueden apreciarse dos clases de fenómenos. Uno de ellos incluye las influencias de las fuerzas superficiales sobre el movimiento de un objeto a través de un fluido (como el empuje ascendente y el arrastre). El otro es el de la disipación de la energía cerca de una superficie que produce efectos de calentamiento. En efecto, la mayoría de los problemas de flujos externos, pertenecen a dos categorías: una consiste en determinar las fuerzas ejercidas sobre un objeto y la otra en investigar las características superficiales de transferencia de calor.

Suponga que deseamos hallar la fuerza de arrastre que se ejerce sobre un objeto complejo, por ejemplo, en forma de cohete dirigido. ¿Cómo empezar? Muy seguramente tomaríamos la decisión de realizar pruebas experimentales, bien sea con modelos a escalas o programas de modelado computacional. Después de efectuar pruebas de este tipo, podríamos tratar de aplicar algún tipo de análisis teórico, para explicar el comportamiento observado. En general, los análisis se basarían, en parte, en la teoría y, en parte, en resultados obtenidos a bases de experimentos.

Por su conveniencia, este será el enfoque general en este capítulo. Primeramente, se presentará resultados experimentales para el arrastre de formas bastante básicas, tales

como cilindros y esferas. A partir del comportamiento observado experimentalmente, presentaremos conceptos que expliquen el comportamiento del flujo.

3.2 Flujos Sobre Cilindros y Esferas

Supongamos que una esfera se sumerge en una corriente "infinita", que fluye más allá de la esfera, con una velocidad uniforme, corriente arriba, de U_0 . Supondremos que la velocidad del flujo es lo bastante baja para poder desprestigiar los efectos de la compresibilidad. Nos interesa determinar la fuerza de arrastre que se ejerce sobre la esfera. Puede considerarse que la fuerza de arrastre, F_D , es una función de U_0 , la densidad, ρ , el diámetro de la esfera, D , y la viscosidad del fluido, μ . La aplicación del teorema π da como resultado:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 A} = f(R_e)$$

En donde, A , es el área de la sección de corte transversal de la esfera. Efectuando cierto número de experimentos sobre el flujo por encima de esferas, podemos obtener un coeficiente de arrastre, en función del número de Reynolds, como se ilustra en la figura.

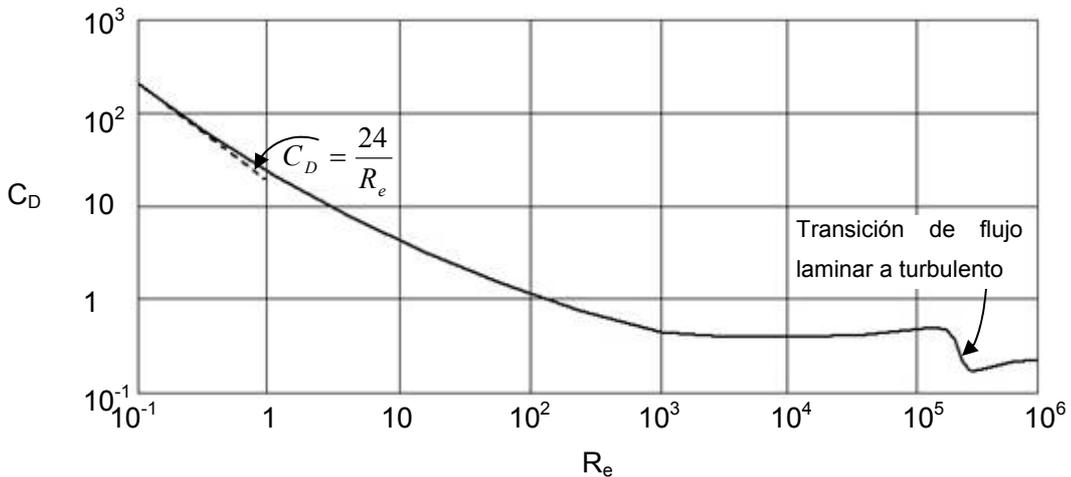


Figura 3. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds, para el flujo sobre una esfera.

En esta curva hay dos regímenes que tienen un interés particular. El régimen para el que $R_e \leq 1$ se denomina régimen de "flujo de cedencia", y los puntos de la gráfica caen, casi en línea recta, al valor $R_e = 1$. El análisis demostró que el coeficiente de arrastre para este régimen está relacionado con el número de Reynolds por la ecuación:

$$C_D = \frac{24}{R_e}$$

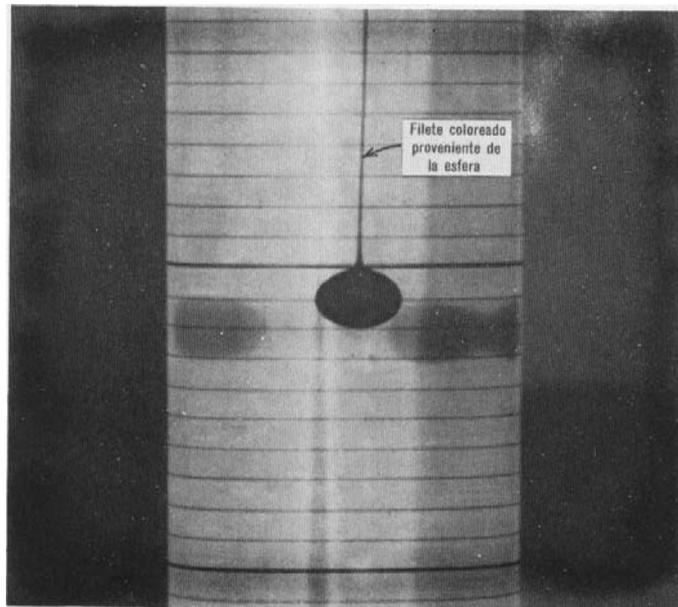


Figura 4. Flujo en torno a una esfera, en el régimen de "flujo de cedencia".

En la Figura se muestra una pequeña esfera, recubierta con tinta, que se deja caer en un tubo lleno de glicerina muy viscosa. Prevalece el régimen de 'flujo de cedencia'. Observamos que la glicerina pasa muy suavemente en torno a la esfera y escurre de la misma como una corriente muy fina.

El segundo régimen interesante es la región, cerca de $R_e = 10^5$. Entre $R_e = 10^3$ y $R_e = 10^5$, el coeficiente de arrastre tiende a hacerse horizontal y, luego, repentinamente, baja. ¿Cuál es la causa de ese comportamiento insólito? Una comparación de valores

reales de arrastre para una esfera específica, antes y después de la caída repentina, indica que el arrastre se ha reducido verdaderamente, a pesar de que se ha incrementado la velocidad del flujo.

Los estudios muestran que en el régimen de flujo para el que R_e es algo menor de 10^5 , el flujo cercano a la parte frontal de la superficie de la esfera es laminar. Conforme el flujo se acerca a la parte superior de la esfera, se divide o "separa", causando, en esa forma, una estela grande y turbulenta, corriente abajo de la esfera. Este fenómeno se muestra en la Figura 5.

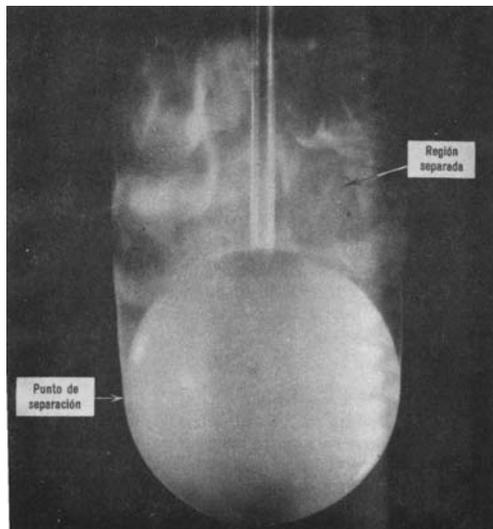


Figura 5. Flujo laminar en tomo a una esfera, con separación.

En la que el flujo sobre una esfera se ha hecho visible, utilizando humo. En la región separada, el flujo puede invertirse verdaderamente. En la Figura 6., se ilustra una región separada de flujo, detrás de un cuerpo romo en donde precisamente, ocurre, una inversión del flujo.



Figura 6. Inversión de flujo en una zona separada.

En la región separada, detrás de la esfera, la presión superficial es relativamente constante y es la diferencia de presiones entre la porción frontal y la posterior de la esfera, la que más contribuye al arrastre. En la Figura 7., se muestra una gráfica real de presiones medidas sobre una esfera, en comparación con una distribución teórica, que resultaría de un análisis de flujo no viscoso.

Conforme se permite que los valores del número de Reynolds aumenten y sobrepase $R_e = 10^5$, se reduce repentinamente el tamaño de la estela, detrás de la esfera, y la zona en la que las distribuciones de presión real se acercan a la distribución teórica de presiones, se extiende sobre una porción mayor de la esfera. En la Figura 8., se muestra una distribución típica de presiones medidas, en este régimen de flujo.

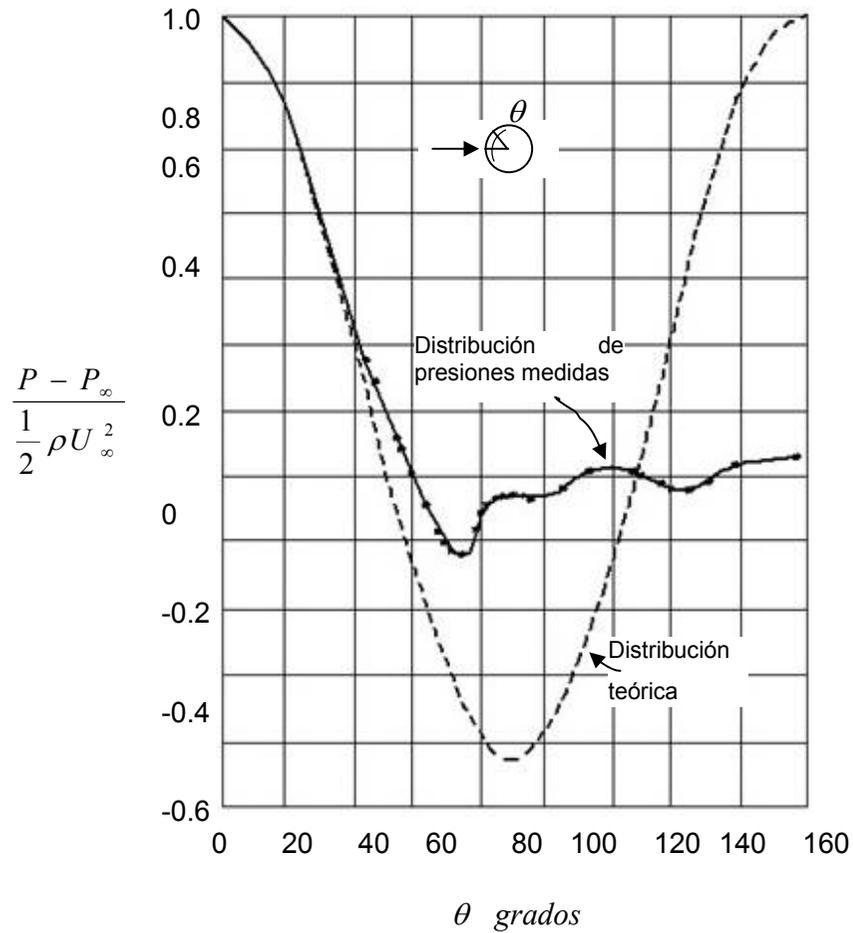


Figura 7. Distribución de la presión en torno a una esfera (flujo laminar). Distribución de presiones medidas por A. Faze, según informe presentado ante el British Research Council R&M 1766, 1937.

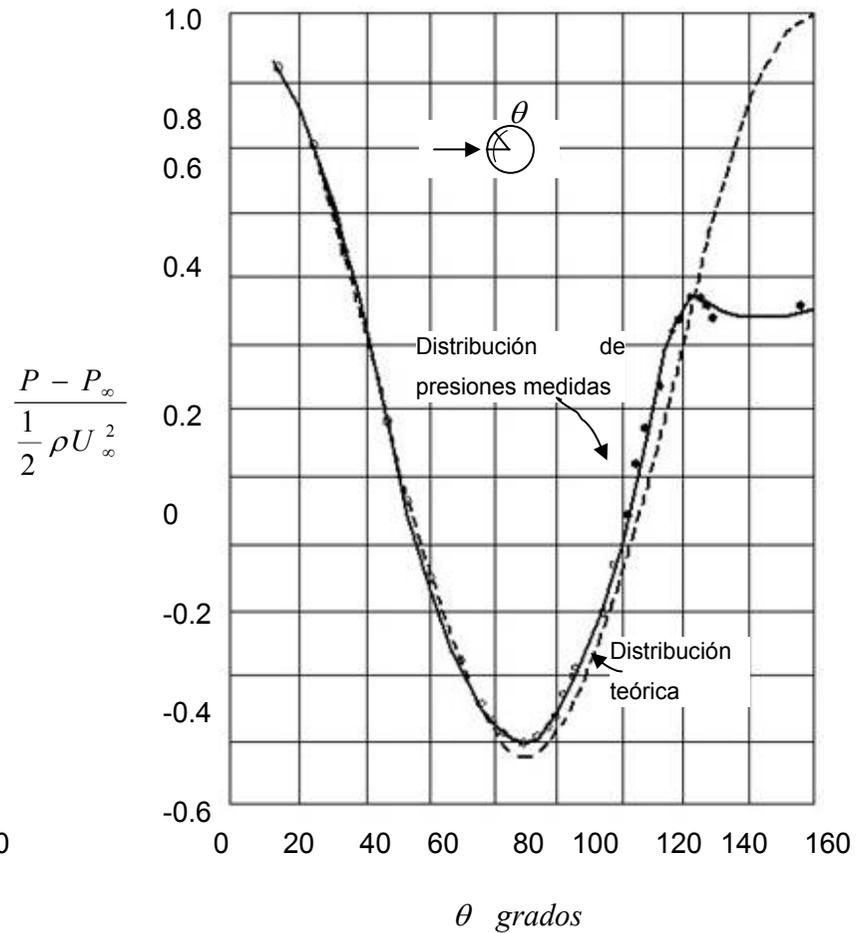


Figura 8. Distribución de la presión en torno a una esfera (flujo turbulento). Distribución de presiones medidas por A. Faze, según informe presentado ante el British Research Council R&M 1766, 1937.

Debido a ese cambio en la distribución de presiones, tanto el arrastre como el coeficiente de arrastre disminuyen. Puede hacerse notar que el mismo comportamiento de C_D en función del número de Reynolds, existe para el flujo sobre cilindros circulares (Figura 9).

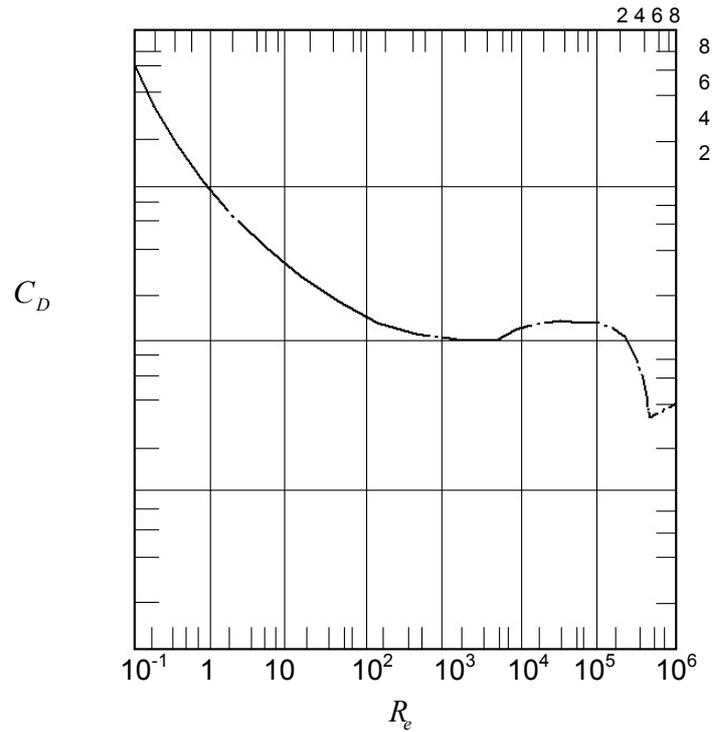


Figura 9. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds, para el flujo sobre un cilindro circular.

¿Por qué se produce el cambio repentino de tamaño de la estela detrás de la esfera (o el cilindro circular)? Para responder a esta pregunta, nos referimos al estudio de uno de los conceptos más importantes de la mecánica de fluidos; el flujo en la capa límite.

3.3 Capas Límite

Uno de los avances más importantes en la historia de la mecánica de fluidos tuvo lugar en 1904. En este año, el gran especialista alemán en aerodinámica, Ludwig Prandtl, presentó un artículo en un congreso de matemáticas, que tuvo lugar en Heidelberg, sobre el movimiento de los fluidos con "muy poca fricción". De manera más precisa, Prandtl analizó los flujos sobre objetos, para los cuales era muy alto el número de Reynolds, basado en una dimensión característica del objeto y la velocidad de flujo corriente arriba, era elevada.

Para tales flujos, hizo las siguientes observaciones:

Los efectos de la fricción quedan confinados a una capa muy fina, denominada capa límite y cercana a la superficie del objeto.

El flujo externo al límite puede considerarse prácticamente como carente de fricción.

La variación de presión de la corriente principal está "impresa" en esta última y afecta al comportamiento de la capa límite.

En la Figura 10., que representa el flujo sobre una superficie plana, se ilustra el desarrollo de una capa límite. La hilera vertical de puntos indica la posición de las partículas del fluido en el tiempo $t = 0$, y el patrón curvo muestra la posición de las partículas del fluido, tal y como quedó indicada más tarde, mediante una línea de tinta. Puesto que la posición relativa de las partículas es una función de la velocidad del fluido, puede formarse un perfil de velocidad del tipo mostrado en la figura.

El perfil de velocidad mostrado en la figura 10., es típico de un flujo laminar. Cuando se incrementan los números de Reynolds de los flujos, la capa límite tiende a hacerse turbulenta, en forma muy similar al caso de un flujo laminar, en una tubería, que se hace turbulento, al aumentar el número de Reynolds. Cuando se produce la transición de un

flujo laminar a turbulento, el perfil de velocidad de la capa límite se hace más complejo y se incrementan los esfuerzos tangenciales en la superficie.

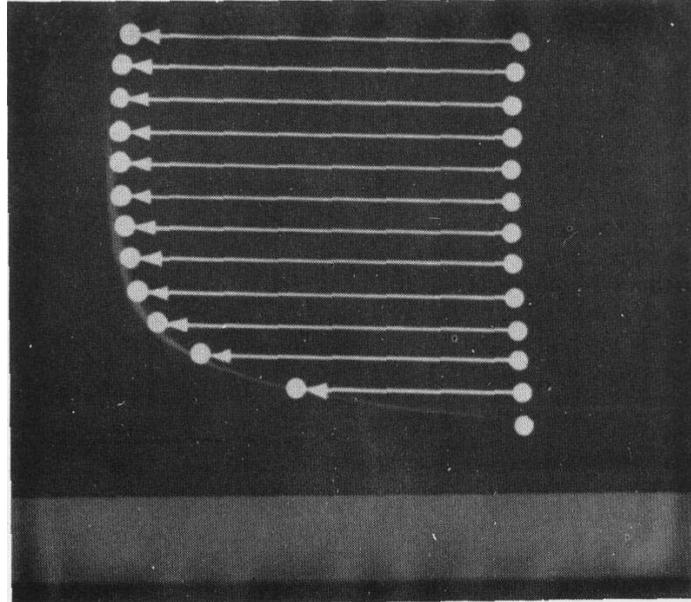
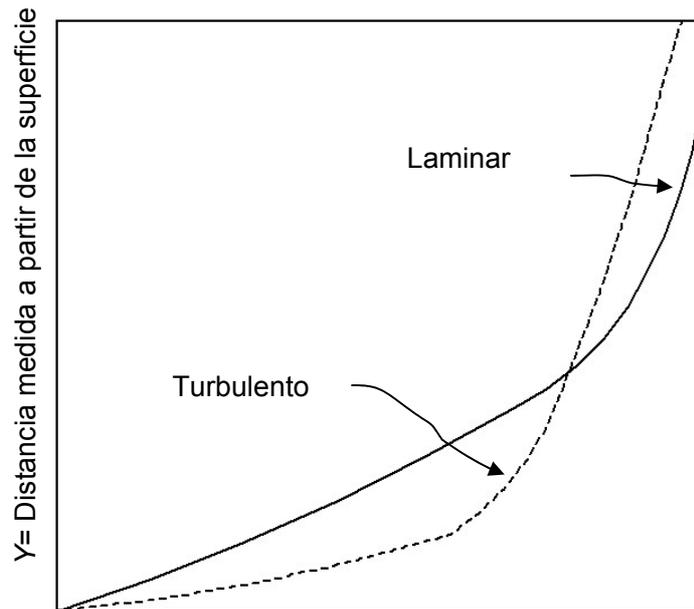


Figura 10. Desarrollo de una capa límite, cerca de una pared. Por cortesía de Educational Services, Inc.

Los perfiles típicos de velocidad de régimen laminar o turbulento, para flujos sobre un objeto, antes y después de la transición, es probable que tengan formas muy parecidas a las mostradas en la Figura 11. En un flujo de capa límite, el cambio de velocidad de la corriente principal a cero, sobre la superficie, se produce, habitualmente, en el curso de una fracción de centímetro.



$$\frac{u}{U_0} = \frac{\text{Velocidad en la capa límite}}{\text{Velocidad en la corriente libre}}$$

Figura 11. Comparación entre perfiles de velocidad laminar y turbulenta.

¿De qué modo la transición del flujo laminar de capa límite explica el comportamiento del coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds? La respuesta es que un gradiente de presión adversa hace que una capa límite laminar se frene gradualmente, con la consiguiente inversión y separación del flujo. Esto es, precisamente, lo que ocurre en los flujos sobre una esfera, cuando los números de Reynolds tienen valores inferiores a 10^5 . Cuando el número de Reynolds sobrepasa 10^5 , el flujo se hace turbulento y el intercambio de impulso turbulento entre la capa límite y la corriente principal le permite a la capa límite avanzar, a lo largo de la superficie de la esfera, antes de la separación. Así pues, para un objeto tal y como una esfera, es conveniente contar con un flujo turbulento de capa límite, para asegurar un arrastre bajo. Con frecuencia, se realiza la transición del flujo laminar al turbulento, haciendo artificialmente que una superficie sea rugosa: es precisamente por esa razón que las pelotas de golf tienen hoyuelos. Una pelota de golf lisa, con tendencia a tener una capa límite laminar durante una parte de su vuelo, experimentaría un mayor arrastre que una pelota rugosa.

Debe observarse que los objetos extremadamente romos, como los discos planos perpendiculares al flujo, no tienen posibilidades de sufrir ningún cambio en la distribución de las presiones, a causa del ajuste de la estela. Para todos los valores del número de Reynolds superiores a 10^3 , el coeficiente de arrastre para un disco circular, normal al flujo, permanece constante en $C_D = 1.12$. En general, los objetos muy achatados tienen coeficientes de arrastre que son constantes para la mayoría de los valores de los números de Reynolds que se encuentran en la práctica.

3.4 Flujo Sobre Cuerpos Aerodinámicos

Al extremo opuesto de los objetos romos, en el espectro, se encuentran los objetos aerodinámicos. Por definición, un objeto aerodinámico es aquel que tiene una región pequeña de estela, incluso con números elevados de Reynolds. En la figura 12., se muestra un flujo sobre un objeto de forma aerodinámica, hecho visible por medio de humo. Observe la pequeña región de estela, en comparación con la que aparece detrás de la esfera, en la Figura 5. Aunque la distribución de las presiones determinaba en gran parte las características de arrastre para los flujos sobre objetos romos, no sucede lo mismo para los flujos sobre objetos aerodinámicos. El arrastre de los objetos aerodinámicos se debe, principalmente, a las fuerzas tangenciales viscosas que se ejercen sobre la superficie, por la llamada fricción superficial. La naturaleza de la capa límite desempeña un papel muy importante en la determinación de la magnitud del esfuerzo tangencial. Dichos esfuerzos tangenciales son, habitualmente, mucho más bajos para los flujos laminares que para los turbulentos y, en consecuencia, es conveniente que en objetos de forma aerodinámica se conserve lo más posible el flujo laminar. Sobre un objeto pueden existir, simultáneamente, tanto capas límite laminares como turbulentas. En la Figura 13., se muestra la fotografía espectrográfica del cuerpo de un proyectil dirigido, en un flujo de Mach 3. Cerca del frente del cuerpo, la capa límite es laminar, mientras que la transición al flujo turbulento se produce cerca de la parte posterior.

El hecho de que un objeto aerodinámico dependa de las características de capa límite, explica por qué un avión puede "perder sustentación" durante un ascenso pronunciado. Al aumentar el ángulo de incidencia del flujo sobre un ala, el perfil aerodinámico se acerca cada vez más a la forma de un cuerpo romo. Finalmente, se produce una separación de la capa límite, se forma una gran región de estela y el arrastre aumenta (no siendo ya dependiente principalmente de la fricción superficial). Simultáneamente, la región de presión constante que acompaña a un flujo separado hace que disminuya el ascenso, que es una función de la distribución superficial de las presiones.

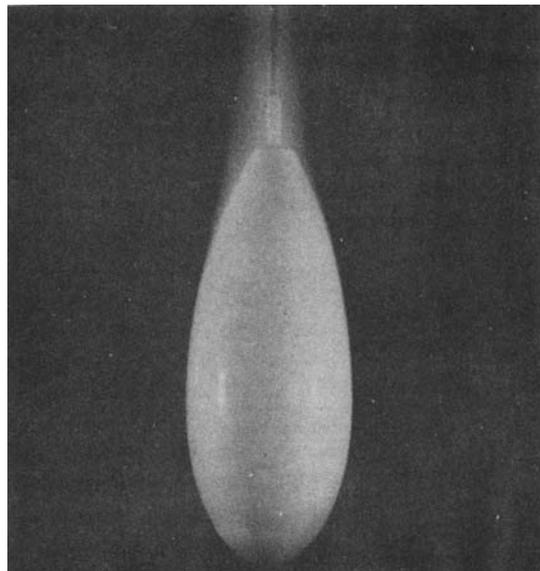


Figura 12. Vista de un flujo en torno a un objeto aerodinámico. Por cortesía de Educational Services, Inc

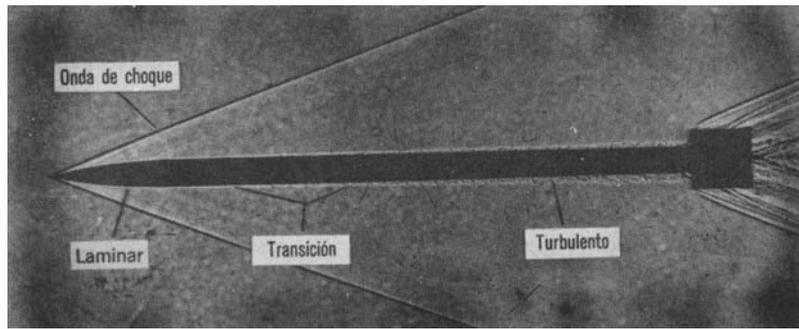


Figura. 13. Capa límite sobre el cuerpo de un cohete dirigido $M=3$. Cortesía de la NASA.

En la figura 14a, se muestra una curva de ascenso en función del ángulo de incidencia, para una superficie de sustentación, y en la 14b, se muestra una curva de arrastre en función del ascenso. Observamos que la curva de ascenso en función del ángulo de incidencia varía casi linealmente hasta el punto en que tiene lugar la separación del flujo y, luego, repentinamente, se aplana, al iniciarse la separación. El arrastre simultáneo aumenta, como se muestra en la figura. 14b.

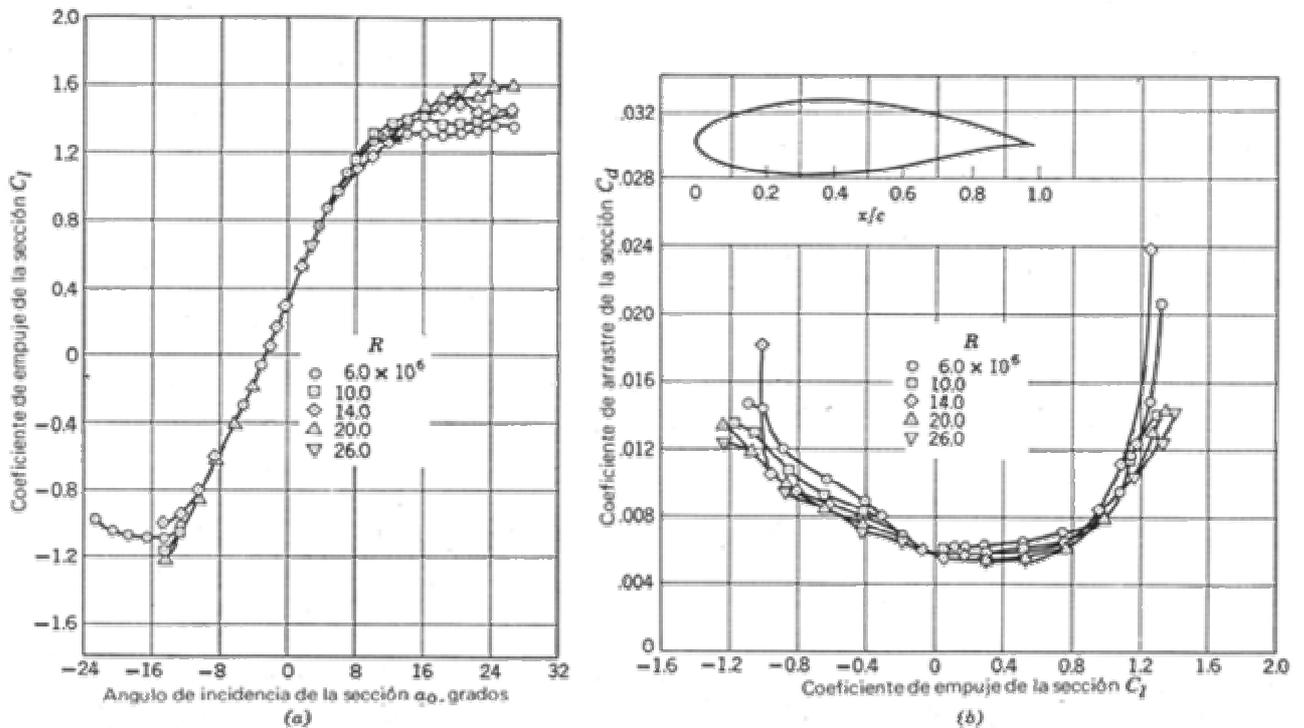


Figura 14. Características de arrastre y ascenso de un perfil aerodinámico a varios ángulos de incidencia: a) sección del ángulo de incidencia; b) sección del coeficiente de ascenso. De Theory of Living Sections, de I. H. Abbott y A. E. Von Doenhoff.

El control del comportamiento de la capa límite es la base para la mayoría de los dispositivos de "alto ascenso" para la aviación. Por ejemplo, en la figura 15a, se muestra una superficie de sustentación en ángulo tan pronunciado de incidencia, que ya ha tenido lugar la separación del flujo. Si se instalan ranuras de succión en el ala y se retira el aire de bajo impulso de la zona separada, el flujo puede adherirse nuevamente al ala, restaurándose el empuje de ascenso adecuado. El cambio del patrón de flujo se ilustra con mucha claridad en la Figura 15b, donde la succión superficial se ha aplicado al ala en el flujo representado en la Figura 15a.

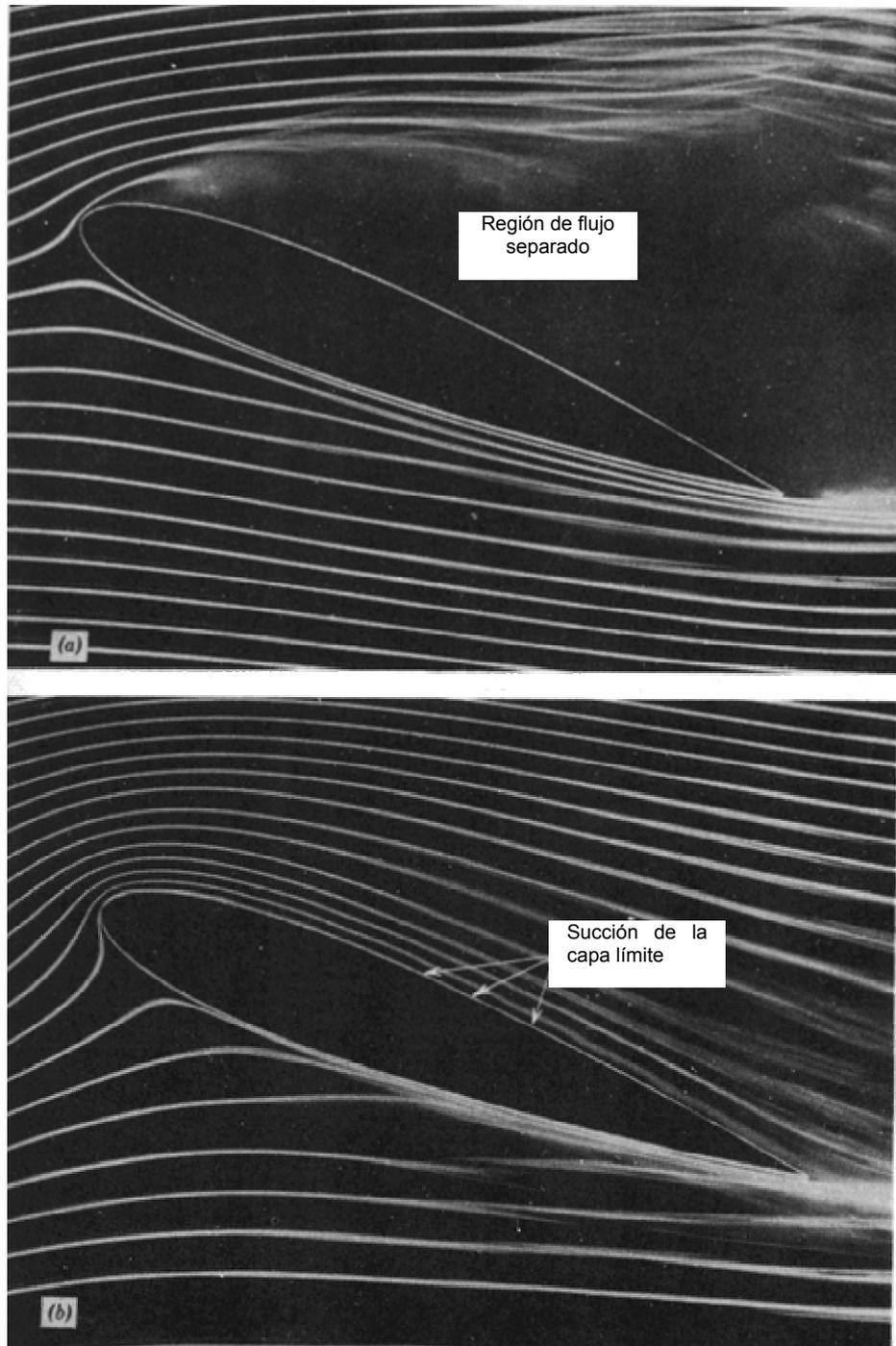


Figura 15. Control de la separación del flujo en un perfil aerodinámico, mediante succión de la capa límite: a) flujo separado en torno del perfil; b) flujo en torno del perfil de la parte a, después de aplicar la succión de la capa límite. Cortesía de Educational Services, Inc.

Hemos presentado resultados experimentales que proporcionan cierta perspectiva sobre los fenómenos asociados con el flujo sobre objetos, en una corriente de un fluido. Ahora, podemos hacer la pregunta más importante, desde el punto de vista de la ingeniería: ¿Podemos predecir analíticamente algunos de los efectos observados? He aquí unos cuantos problemas típicos que un ingeniero pudiera desear resolver:

¿Podemos calcular la fuerza de arrastre que se ejerce sobre un objeto romo, cuando dicho arrastre se debe, principalmente, a fuerzas de presión?

Para el flujo sobre un objeto aerodinámico, ¿podemos predecir los diversos regímenes de flujo laminar y turbulento y el momento en que tiene lugar la transición?

Una vez hecho esto, ¿podemos calcular la fuerza de arrastre?

¿Podemos predecir el punto en el que una capa límite tiene probabilidades de separarse de un cuerpo?

Estas preguntas tienen una gran importancia y se han efectuado muy numerosas investigaciones, para hallar respuestas satisfactorias. En la actualidad, no se ha encontrado una respuesta satisfactoria para la primera pregunta. Para los cuerpos muy romos, es conveniente, con frecuencia, efectuar una prueba con un modelo a escala reducida y confiar en el hecho de que el coeficiente de arrastre, en gran parte, es independiente del número de Reynolds. Esta es la base para probar modelos a escala reducida de automóviles en túneles aerodinámicos.

Con el paso de los años, ha ido aumentando constantemente la capacidad para predecir las características de los flujos de capa límite sobre objetos de formas aerodinámicas. En la actualidad, el cálculo de flujos laminares se ha perfeccionado considerablemente, mediante el empleo de computadoras de alta velocidad. Queda todavía mucho por hacer en lo que respecta al cálculo de los flujos turbulentos de capa límite; aunque se están logrando progresos también en este campo. Para fines prácticos, la predicción de la

transición del flujo es desconcertante. Por ejemplo, una cosa es predecir la transición sobre un ala lisa, en un túnel aerodinámico, y otra muy diferente el tomar en consideración la transición de flujo en un ala real, en vuelo, puesto que puede haberse vuelto rugosa, debido al polvo o los insectos. Examinemos ahora algunas de las teorías y los métodos que pueden ser útiles para efectuar análisis de los tipos que acabamos de mencionar.

3.5 Cálculo de la Capa Límite para Flujo Sobre una Placa Plana

Uno de los tipos más simples de objetos que pueden colocarse en una corriente, es una placa plana, paralela a la dirección del flujo. Iniciaremos nuestro estudio del cálculo de la capa límite, investigando la fuerza de arrastre de esa placa y el desarrollo del flujo sobre su superficie, para un fluido de densidad constante. Dada una placa plana de longitud x , inmersa en un flujo uniforme, de velocidad U_0 , un método directo de análisis de la fuerza de arrastre ejercida sobre la placa, es colocar un volumen de control en el flujo, como se muestra en la Figura 16. Supondremos que la placa tiene una anchura b y que la altura de la capa límite, en cualquier posición, está designada por $\delta = \delta(x)$.

Si aplicamos la ecuación de la cantidad de movimiento al volumen de control y observamos que el gradiente de presión es cero, debido a que el flujo externo tiene una velocidad constante, tenemos:

$$-b \int_0^x \tau_w dx = b \left(\int_0^{\delta} \rho U^2 dy - \int_0^{\delta} U_0^2 dy \right) + \text{Flujo de cantidad de movimiento a través de AB}$$

en donde τ_w es el esfuerzo tangencial sobre las paredes. Reconocemos que, en la corriente principal, a lo largo de AB, el esfuerzo tangencial desaparece.

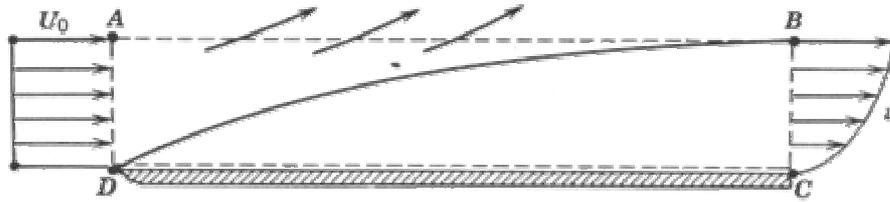


Figura 16. Volumen de control para el flujo sobre una placa plana.

Existe un flujo a través de la zona AB, como lo indica la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned}
 \text{Gasto en masa} &= b \left(\int_0^{\delta} \rho U_0 dy - \int_0^{\delta} \rho u dy \right) \\
 \text{a través de AB} &= b \int_0^{\delta} \rho (U_0 - u) dy \quad (3.0)
 \end{aligned}$$

Puesto que la componente de velocidad en la dirección x , a lo largo de AB, es U_0 , el flujo de impulso a través de AB es simplemente:

$U_0 \times$ gasto en masa a través de AB

$$= b \int_0^{\delta} \rho U_0 (U_0 - u) dy \quad (3.1)$$

De acuerdo con las ecuaciones 1 y 1.1,

$$\int_0^x \tau_w dx = \int_0^{\delta} \rho u (U_0 - u) dy \quad (3.2)$$

Dividiendo la ecuación 1.2 por U_0^2 , tenemos:

$$\frac{1}{\rho U_0^2} \int_0^x \tau_w dx = \frac{\text{arrastre}}{b \rho U_0^2} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0} \right) dy \quad (3.3)$$

Cambiamos la variable de integración en la ecuación 1.3, haciendo que $\eta = y/\delta$. Así, podemos escribir:

$$\frac{C_D}{2} = \frac{\delta}{x} \int_0^1 \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) d\eta \quad (3.4)$$

Gracias a la ecuación 1.4, vemos que en cuanto se conoce la variación adimensional de la velocidad, u/U_0 como función de la distancia adimensional de la placa, puede determinarse el coeficiente de arrastre, η .

3.5.1 Flujo laminar sobre una placa plana

Sigamos con nuestro análisis del flujo sobre una placa plana, suponiendo que el flujo sobre la placa es laminar. Nuestro objetivo será el de encontrar una forma del perfil de velocidad que pueda emplearse en ecuaciones tales como la 3.4

En general, podemos esperar que la componente de velocidad de capa límite, u sea una función de las variables siguientes:

$$u = f_1(\mu, \rho, U_0, y, x) \quad (3.5)$$

Aplicando el teorema π a las variables de la ecuación 3.5, encontramos el conjunto

siguiente de términos π :

$$\pi_1 = \frac{u}{U_0}$$

$$\pi_2 = \frac{U_0 \rho x}{\mu}$$

$$\pi_3 = \frac{y}{x}$$

Resulta conveniente definir una nueva variable π , π_4 , de tal modo que:

$$\pi_4 = \pi_3 \sqrt{\pi_2} = y \sqrt{U_0 / \nu x} \quad (3.6)$$

Designemos con η^* a π_4 . Entonces,

$$\frac{u}{U_0} = f_2\left(\eta^*, \frac{y}{x}\right) \quad (3.7)$$

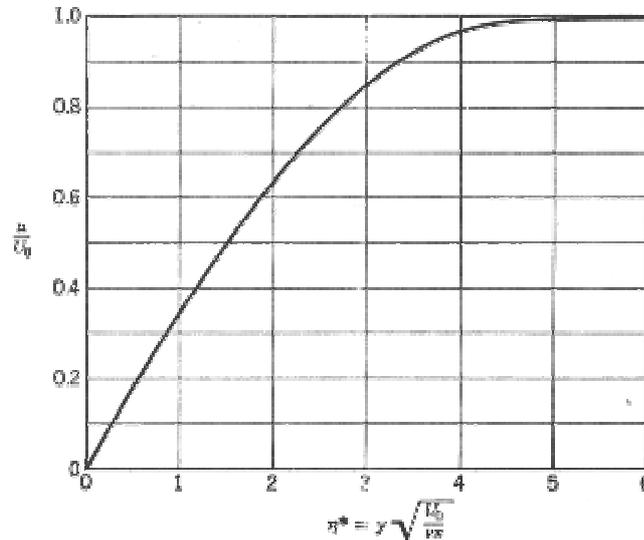


Figura 17. Velocidad adimensional en función de la distancia adimensional, para el flujo sobre una placa plana.

Los experimentos y análisis de flujos laminares indican que u/U_0 es sólo una función de η^{*2} . En la Figura 17., se muestra un diagrama de u/U_0 en función de η^* . Los experimentos confirman este resultado de manera notable. Habitualmente, se define como "borde" de la capa límite a la altura donde $u/U_0 \approx 0.99$. En la Figura 17 vemos que este valor se presenta para $\eta^* = \eta_\delta^*$ aproximadamente igual a 5. Si δ representa el espesor de la capa límite, podemos escribir:

$$\eta_\delta^* = \delta \sqrt{U_0/\nu x}$$

Por ende,

$$\delta = 5 \sqrt{\nu x/U_0} \quad (3.8)$$

Asimismo, podemos escribir la ecuación 3.8 en la forma:

$$\frac{\delta}{5} = \frac{5}{\sqrt{R_{e,x}}} \quad (3.9)$$

en donde, $R_{e,x} = U_0 x / \nu$ es el número de Reynolds, basado en la longitud del borde frontal de la placa. Así pues, podemos escribir ahora el parámetro $\eta = y/\delta$, como:

$$\eta = \frac{y}{\eta_\delta^* \sqrt{\nu x / U_0}} = \frac{\eta^*}{\eta_\delta^*} \quad (3.10)$$

Por lo tanto, podemos reorganizar la ecuación 3.4, como:

$$\frac{x C_D}{2} = \int_0^{\eta_\delta^*} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} d\eta^* \quad (3.11)$$

Sin establecer ningún límite tope superior para η_δ^* , al determinar el borde superior de la capa límite (dejando, en esa forma, que η_δ^* , sea tan grande como lo deseemos) y utilizando la relación funcional representada en la figura 17, la ecuación 3.11 puede integrarse, para dar:

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{R_{e,x}}} \quad (3.12)$$

En la Figura 18 se presenta un diagrama para C_D , para el flujo laminar sobre una placa plana.

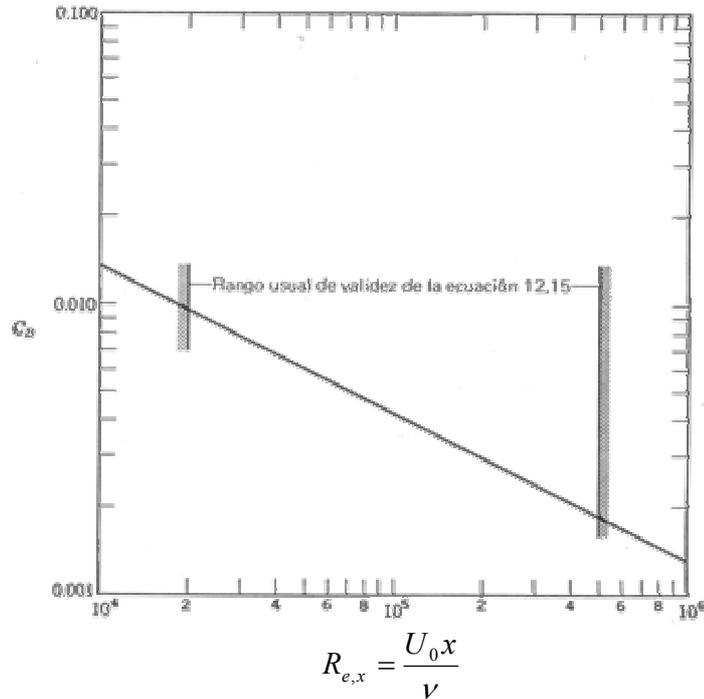


Figura 18. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds, para flujo laminar sobre una placa plana.

3.5.2 Flujo turbulento sobre una placa plana

Puesto que el número de Reynolds basado en la longitud, aumenta conforme el flujo avanza sobre una placa, la capa límite sufre una transición de flujo laminar a turbulento. Como veremos, el espesor de la capa límite se incrementa. Esta variación se presenta gráficamente en la Figura 19.

Desgraciadamente, los métodos analíticos del flujo de capa límite que pudieran aplicarse en el caso laminar no sirven para el flujo turbulento. Una de las razones es que las fluctuaciones turbulentas causan intercambios de la cantidad del movimiento del fluido equivalentes a esfuerzos. Estos esfuerzos equivalentes, llamados esfuerzos de Reynolds, no son dependientes de las propiedades del fluido y no pueden predecirse en la misma forma que los esfuerzos debidos a la viscosidad del fluido. En consecuencia, las relaciones empleadas en el análisis del flujo turbulento de capa límite, tiene una base empírica firme.

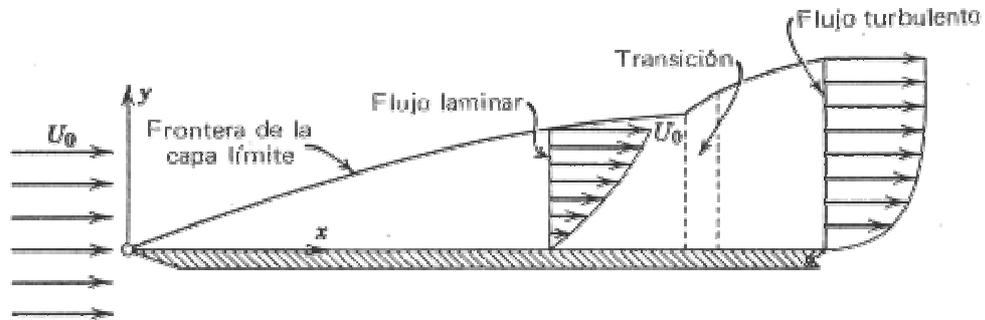


Fig. 19 Flujo incompresible uniforme sobre una placa plana.

Los resultados experimentales típicos, que tienen valor en el presente caso, indican que los perfiles de velocidad para flujos turbulentos de capa límite sobre placas planas y lisas, se aproximan mucho a las variaciones de perfil halladas en el flujo turbulento por tuberías.

Ambas "distribuciones de potencia" del tipo $u/U_0 = (y/\delta)^{1/n}$, y los perfiles logarítmicos coinciden con los resultados experimentales.¹ Una variación típica del perfil para la gama del número de Reynolds de $5 \times 10^5 \leq R_e, x \leq 10^7$, es:

$$\frac{u}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (3.13)$$

De manera similar, se ha descubierto que el esfuerzo tangencial para el flujo sobre las placas lisas está relacionado con el factor de fricción para el flujo a través de tuberías lisas, en la forma:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = 0.045 \left(\frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{1/4} \quad (3.14)$$

¹ Debemos tener siempre en cuenta que la componente de velocidad u es la componente media en función del tiempo, sin fluctuaciones turbulentas.

Una expresión similar sirve para el flujo por tuberías, reemplazando U_0 por la velocidad media y δ por R .

Suponiendo que un perfil con potencia de un séptimo es suficientemente exacto, calculemos el coeficiente de arrastre para el flujo sobre una placa, suponiendo que dicho flujo es turbulento, a partir del borde frontal de la placa. Substituyendo, la variación del perfil de potencia en la ecuación 3.4, tenemos:

$$C_D = \frac{2\delta}{x} \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$C_D = \frac{14}{72} \frac{\delta}{x} \quad (3.15)$$

Vemos que el coeficiente de arrastre no puede determinarse únicamente en función de x , en tanto no se haya evaluado δ en función de x . Esto puede hacerse como sigue: diferenciando ambos lados de la ecuación 3.3, tenemos:

$$\frac{\tau_w}{\rho U_0^2} = \frac{d}{dx} \delta \int_0^1 \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) d\eta \quad (3.16)$$

Sin embargo, a partir de las ecuaciones 3.14 y 3.16:

$$0.0225 \left(\frac{\nu}{U_0 \delta}\right)^{1/4} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} \quad (3.17)$$

La ecuación 3.17 es una ecuación diferencial ordinaria para 5, que puede resolverse para que dé:

$$\delta(x) = \frac{0.37x}{(U_0 x/\nu)^{1/5}} = \frac{0.37x}{(R_e, x)^{1/5}} \quad (3.18)$$

De paso, vemos, de acuerdo con la ecuación 3.18, que la capa límite crece con una potencia de cuatro quintos de x . Usando la expresión para δ en la ecuación 3.15, obtenemos:

$$C_D = 0.072(R_{e,x})^{-1/5}$$

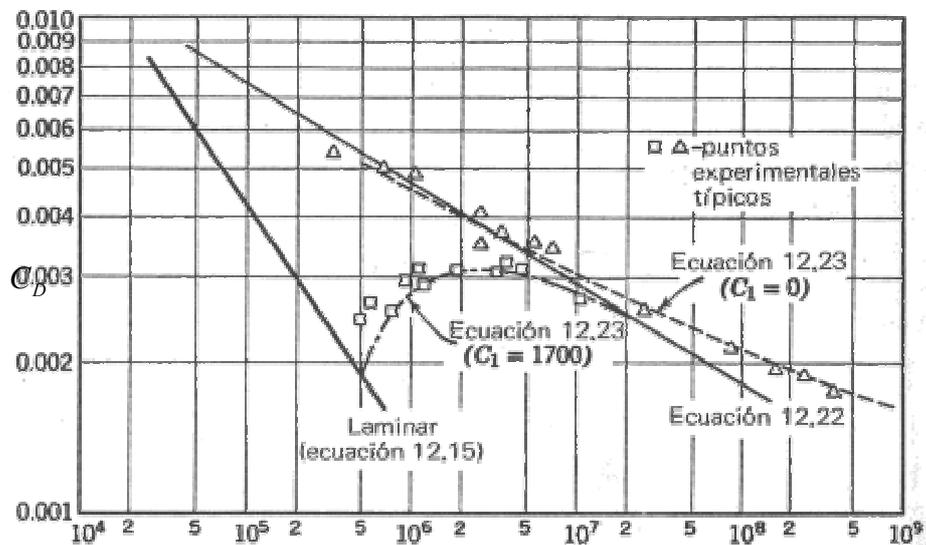
Los resultados experimentales indican que la variación del coeficiente de arrastre coincide más exactamente con los datos, si se modifica dicho coeficiente de 0.072 a 0.074. Así,

$$C_D = 0.072(R_{e,x})^{-1/5} \quad (3.19)$$

Se ha descubierto que la gama de posibilidades de aplicación de esta ecuación es;

$$5 \times 10^5 \leq R_{e,x} \leq 10^7$$

En la Figura 20 se ilustra gráficamente esa variación.



$$R_{e,x} = \frac{U_0 x}{\nu}$$

Figura 20. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds para un flujo sobre una placa plana y lisa.

Se muestra el coeficiente de arrastre, C_D , junto con numerosos puntos obtenidos experimentalmente. Aunque la ecuación 1.19 es razonablemente exacta para valores del número de Reynolds que se acercan a 107, tiende a desviarse de los datos para valores mayores y menores. Una mejor expresión, debida a H. Schlichting, se basa en una variación logarítmica de velocidad y tiene en cuenta el hecho de que la capa límite es primeramente laminar y, después, turbulenta:

$$C_D = \frac{0.455}{(\log R_{e,x})^{2.58}} - \frac{C_1}{R_{e,x}^{-1}} \quad (3.20)$$

En donde C_1 depende del número de Reynolds para el que ocurre la transición al flujo turbulento. He aquí varios valores para una selección de números de Reynolds de transición posible:

Número de Reynolds	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
C_1	1050	1700	3300	8700

La curva obtenida a partir de la ecuación 3.20, con $C_1 = 1700$, se muestra también en la Figura 20, y puede observarse que está de acuerdo con los datos. Puede hacerse que la curva pase por los puntos situados en la parte superior de la gráfica, seleccionando un valor de C_1 suficientemente pequeño o haciéndolo igual a cero.

Puede esperarse que la rugosidad de la superficie ocasione cambios en el arrastre y que altere los esfuerzos tangenciales de las paredes, como en el caso del flujo por una tubería. Además, la superficie de una placa puede considerarse rugosa, cuando la altura de los elementos de rugosidad se proyecta a través de la subcapa laminar de un flujo turbulento. En general, la altura de una subcapa laminar se determina por medio de una fórmula equivalente a la empleada en los flujos por tuberías:

$$\frac{V^* y}{\nu} = 5$$

Así pues, una altura e de un elemento de rugosidad que asegure un flujo hidráulicamente suave, debe satisfacer

$$\frac{V^* y}{\nu} < 5$$

Al tomar en consideración el flujo por tuberías, podemos referirnos a la rugosidad relativa, ε/D , como parámetro clave; pero para el flujo sobre una superficie, un parámetro razonable es ε/δ . Para una altura dada de rugosidad, esta cantidad disminuirá conforme avance el flujo por la placa. Así pues, un flujo tendrá tendencia a hacerse hidráulicamente suave en los puntos situados a cierta distancia del borde frontal de la placa. Por supuesto, esos factores pueden tomarse en consideración, expresando V^* en términos del coeficiente de fricción superficial local y calculando ε en diversos puntos. No obstante, H. Sthlichting propuso una fórmula muy sencilla para determinar la rugosidad admisible y que es válida para toda una placa de longitud l .

$$\varepsilon_{adm} \leq l \frac{100}{R_{e,l}} \quad (3.21)$$

en donde

$$R_{e,l} = \frac{U_0 l}{\nu}$$

Las fórmulas tales como la 3.21 son importantes, debido a que 1) pueden extrapolarse para dar una idea cualitativa de la rugosidad admisible sobre otras configuraciones y 2) proporcionan una guía práctica del grado de acabado de las superficies que se requiere en una operación, para establecer una superficie lisa.

4. CAPA LÍMITE EN EL DISEÑO DE TUBERIAS

4.1 Flujos Internos

En el presente enfocaremos nuestro esfuerzo en presentar los conceptos y teorías donde la capa límite es de vital importancia para el diseño de tuberías.

Aunque los procesos de flujos externos y flujos internos, sean sustancialmente diferentes entre si; comparten en el origen de sus investigaciones una inquietud común. Esta, es la determinación cualitativa y cuantitativa de la resistencia y por ende lo relacionado con el perfil de velocidades, la distribución de presiones, y el campo de flujo; en los flujos externos se estudia la resistencia experimentada por un cuerpo al avanzar al través de un flujo, el arrastre del cuerpo al oponerse al flujo y las fuerzas de ascenso. Por otra parte, en los flujos internos estudiaremos la resistencia experimentada por el fluido al entrar en contacto con las paredes o fronteras que lo contienen.

4.2 Flujo- Pared Sólida

Siempre que un flujo en movimiento interactúa con una pared sólida, el esfuerzo cortante que se genera afecta principalmente una zona de dicho flujo. Esta zona recibe el nombre de capa límite, la cual puede ser laminar o turbulenta (ver figura 21).

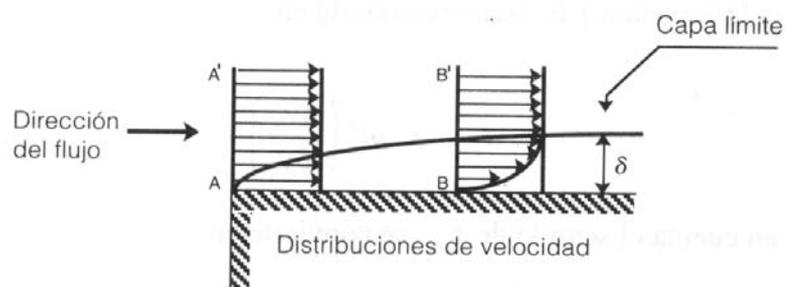


Figura 21. Capa Límite. La presencia de pared sólida afecta la distribución de velocidades del flujo. La velocidad es cero en al superficie sólida y crece a medida que el flujo se aleja de ésta.

En el caso de flujo turbulento la superficie sólida impide que cerca de ella ocurran las vibraciones de V1 en forma libre, generándose así una zona de flujo laminar. Ésta se conoce con el nombre de la Subcapa Laminar Viscosa (figura 22) y siempre se presenta en flujo turbulento. Se denomina viscosa porque en ella priman las fuerzas inerciales.

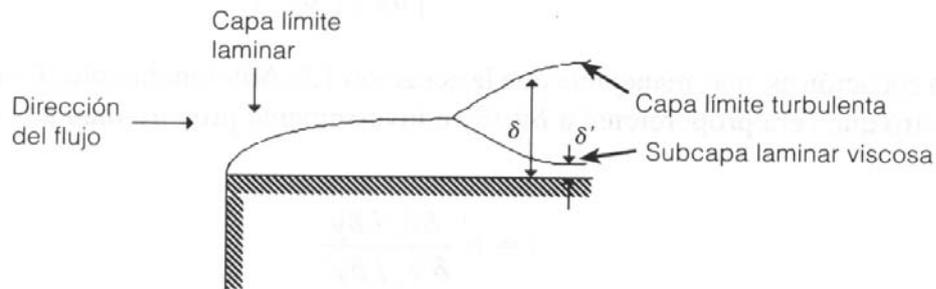


Figura 22 Desarrollo de una capa límite turbulenta mostrando la subcapa laminar que se genera cerca al superficie.

El espesor de la subcapa laminar es mucho menor que el de la capa límite ($\delta' \ll \delta$). La relación existente entre δ' y el tamaño medio de la rugosidad de las paredes establece la diferencia entre los flujos hidráulicamente lisos y los hidráulicamente rugosos (ver figura 23)

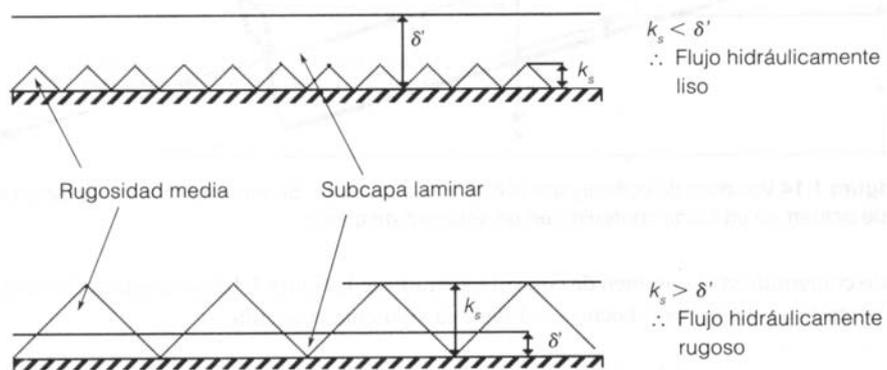


Figura 23. Flujos hidráulicamente lisos e hidráulicamente rugosos. El tipo de flujo depende del tamaño relativo entre el espesor de la subcapa laminar δ' y el tamaño de la rugosidad media k_s .

4.2 Esfuerzos En Tuberías Circulares

Si se utiliza la ecuación de Bernoulli para el flujo en tuberías se puede encontrar que las pérdidas de energía se manifiestan como pérdidas en la cabeza piezométrica, la cual se define como

$$\frac{p^*}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + z$$

Donde

- p^* = presión piezométrica = $p + \rho g z$
- p = presión
- z = altura hasta un nivel de referencia:
- ρ = densidad del fluido
- g = gravedad

Estas pérdidas son consecuencias del esfuerzo cortante que existe entre el fluido en movimiento y la pared sólida. Para encontrar la distribución de este esfuerzo en la sección transversal del flujo, se debe tomar el fluido contenido en un tramo de tubería (volumen de control) e indicar todas las fuerzas que actúan en él (ver figura 24).

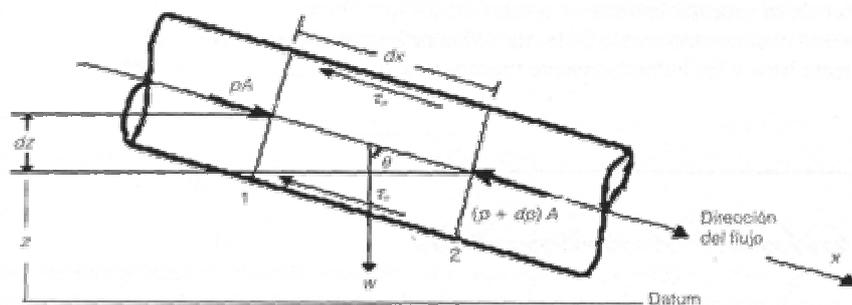


Figura 24. Volumen de control para el flujo en una tubería. Se muestran todas las fuerzas que actúan en un fluido contenido en un volumen de control.

Si el fluido contenido en el volumen de control mostrado en la figura 24 no se está acelerando, entonces $\sum F_x = 0$. Teniendo en cuenta este hecho se obtiene la siguiente ecuación:

$$pA - (p + dp) A + W \cos \theta - \tau_0 P dx = 0$$

Donde

p = perímetro mojado (perímetro interno del tubo)

W = peso del fluido en el volumen de control

El peso del volumen de control es:

$$W = \rho g A dx$$

Luego

$$- dpA + \rho g A dx \cos \theta - \tau_0 P dx = 0$$

Pero, de acuerdo con la figura

$$dx \cos \theta = -dz \quad (\text{Ver figura 24})$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} - dpA - \rho g A dz - \tau_0 P dx &= 0 \\ \tau_0 P dx &= A (dp + \rho g dz) \end{aligned}$$

Como $(p + \rho g z) = p^*$, la presión piezométrica es entonces:

$$\tau_0 P dx = A dp^*$$

De donde finalmente se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{A}{P} \frac{dp^*}{dx} \quad (4.0)$$

Para conocer el esfuerzo cortante en las paredes de la tubería (τ_0) sólo hay que conocer la caída en la presión piezométrica en una determinada longitud de la misma tubería, así como su geometría.

Para tuberías circulares

$$A = \pi r_0^2$$

$$P = 2\pi r_0$$

Luego

$$\tau_0 = \frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0} x \frac{dp^*}{dx} = \frac{r_0}{2} x \frac{dp^*}{dx}$$

Además, si se aplica un razonamiento similar a un “tubo” de fluido de radio $r < r_0$ (ver figura 25) se obtiene

$$\tau_r = \frac{r}{2} x \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \quad (4.0')$$

Al dividir esta última ecuación para τ_0 se obtiene la expresión:

$$\frac{\tau_r}{\tau_0} = \frac{r}{r_0}$$

Esta última indica una variación lineal de τ con respecto a r , tal como se muestra en la siguiente figura:

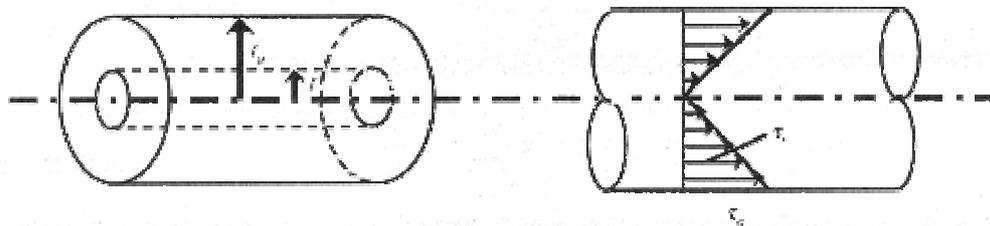


Figura 25. Distribución lineal del esfuerzo cortante debido a la capa límite en tuberías circulares.

Si se utiliza la ecuación 4.0 se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{A}{p} x \frac{pgh_f}{l} \quad (4.1)$$

Donde

h_f = pérdidas por fricción

l = longitud del tramo de tubería

Nuevamente, par tubos circulares

$$\tau_0 = \frac{pgh_f r_0}{2l}$$

Esta última ecuación establece una relación directa entre el esfuerzo cortante en la pared de una tubería y la caída en la cabeza piezométrica h_f . De ahí que sea un primer paso para la deducción de una ecuación de diseño. Es importante tener en cuenta que dicha caída de cabeza es la que ocurre en un tramo de la tubería de longitud L , el cual deber ser recto, estar hecho de un solo material y no debe tener ningún tipo de accesorios que produzcan pérdidas adicionales de energía.

4.3 Distribución De Velocidades (Tuberías Circulares)

En este aparte se examinan las distribuciones de velocidad en las secciones transversales de tuberías circulares. Posteriormente, dichas distribuciones son utilizadas para establecer las diferencias entre los tipos de flujo y, por último, para establecer las ecuaciones de resistencia fluidas, las cuales se utilizarán para el diseño de sistema de tubería.

4.4 Flujo Laminar

En el caso de flujo laminar en tuberías, el esfuerzo cortante está definido por la ecuación de Newton para fluidos viscosos.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr}$$

Para tuberías circulares, de acuerdo con a la distribución de esfuerzos, se tiene:

$$\tau_r = \mu \frac{dv}{dr} = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$

Donde

$$r < r_0$$

De esta última ecuación se obtiene:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\tau_0}{\mu} \times \frac{r}{r_0}$$

Cuando se integra con respecto al radio r se obtiene la distribución de velocidades

$$V = \int dv = \frac{\tau_0}{\mu r_0} \int_0^r r dr$$

$$V = \frac{\tau_0}{\mu r_0} \left(\frac{r^2}{2} \right) + c_1$$

Para evaluar la constante de integración se utiliza el hecho de que cuando $r = r_0$, $v = 0$; luego con su máximo en el centro y su mínimo ($v=0$) en las paredes internas de la tubería.

$$C_1 = -\frac{\tau_0}{2\mu} r_0$$

Finalmente

$$V = \frac{\tau_0}{2\mu} \left(\frac{r^2}{r_0} - r_0 \right) \quad (4.1)$$

La cual es una distribución parabólica de la velocidad. En flujo laminar, la velocidad sigue esta distribución con su máximo en el centro y su mínimo ($v=0$) en las paredes internas de la tubería.

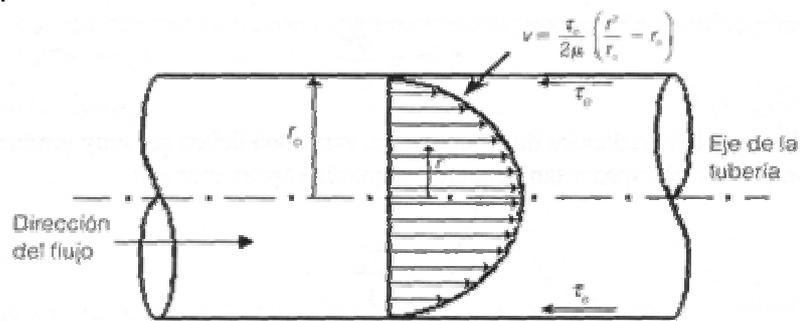


Figura 26. Distribución de velocidades para flujo laminar en un tubería de sección circular

4.4.1 Capa limite en el desarrollo del Flujo Turbulento

La presencia de esfuerzos cortantes en las fronteras fluidos-sólidos y entre las diferentes capas del fluido afecta la distribución de velocidades que, en principio, debería ser uniforme. En flujos turbulentos, la presencia de la subcapa laminar viscosa (capa limite) modifica aún más dicha distribución. En una tubería con flujo turbulento se distinguen tres capas, tal como se muestra a continuación:

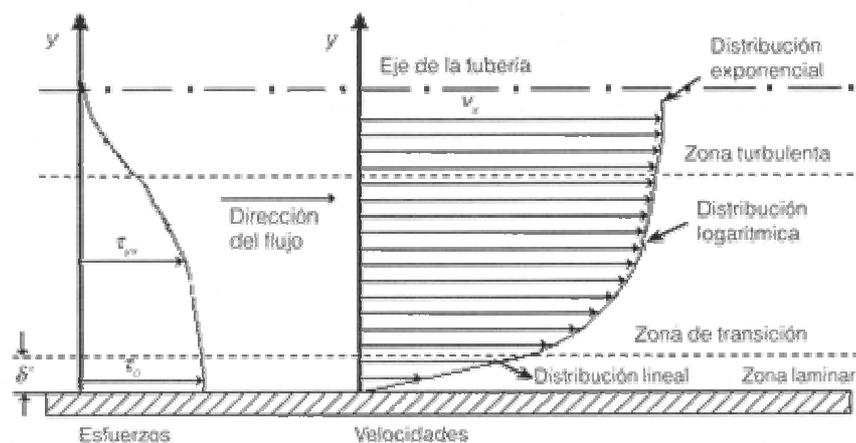


Figura 27. Capa limite en la Distribución de esfuerzos y velocidades para flujo turbulento en una tubería de sección circular (se muestra media tubería).

Para cada una de las tres zonas mostradas (la figura debería ser simétrica en el sentido vertical con el fin de incluir toda la sección transversal de la tubería) las distribuciones de velocidades son:

4.4.2 Subcapa límite laminar viscosa (flujo laminar)

En esta capa, la magnitud del esfuerzo es prácticamente constante e igual a τ_0 . Por ser flujo laminar, el esfuerzo debe estar gobernado por la ecuación de viscosidad de Newton:

$$\tau_0 = \mu \frac{dv}{dy}$$

Tal hecho implica que los gradientes de velocidad en esta zona deben ser muy grandes. Igualmente, en la capa límite laminar, por ser espesor tan pequeño, se puede aproximar así:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v_x}{y}$$

Luego

$$\tau_0 = \mu \frac{v_x}{y}$$

Dividiendo por la densidad:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} x \frac{v_x}{y} = \nu \frac{v_x}{y}$$

Donde ν = viscosidad cinemática

La raíz cuadrada del término τ_0 / ρ , localizado en la parte derecha de esta última ecuación, tiene las siguientes dimensiones:

$$\left[\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right] = \frac{m}{s} \text{ (Dimensiones de velocidad)}$$

Por definición

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V_*$$

Donde

V_* = velocidad de corte

Esta velocidad (que no existe en la realidad) mide la magnitud relativa del esfuerzo cortante en la superficie sólido-fluido; es muy importante en el estudio de transporte de sedimentos por arrastres en ríos y canales o en el diseño de tuberías utilizadas para el transporte de material sólido en suspensión. Es interesante observar la semejanza entre esta última ecuación y el esfuerzo turbulento de Reynolds; la velocidad de corte corresponde a la raíz cuadrada del promedio temporal del producto de las vibraciones aleatorias en las velocidades en x y y (v_x y v_y).

Luego

$$V_*^2 = v \frac{v_x}{y}$$

De donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{V_* y}{\nu} \tag{4.2}$$

La ecuación 4.2 indica que la velocidad sigue una distribución lineal con respecto a y (ver figura 27), siempre y cuando $y < \delta$; el espesor de la subcapa límite laminar viscosa. Esta ecuación ha probado ser válida hasta el siguiente límite:

$$\frac{v_x}{v_*} = 11.6$$

lo cual implica que

$$\frac{v_* y}{\nu} = 11.6$$

El último resultado permite establecer una ecuación para el cálculo del espesor de la subcapa límite laminar viscosa, lo que a su vez hará posible con claridad la diferencia entre flujos hidráulicamente lisos e hidráulicamente rugosos.

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{v_*} \quad (4.3)$$

4.4.3 Zona de Transición

Entre la subcapa límite laminar viscosa y la zona completamente turbulenta existe una zona de transición donde el flujo deja de ser laminar para convertirse en turbulento. Se ha encontrado (While ,1994) que esta zona se extiende entre los siguientes límites.

$$5 \frac{\nu}{v_*} \leq y \leq 70 \frac{\nu}{v_*}$$

El flujo no pasa de laminar a turbulento en forma súbita, sino de modo gradual a medida que las fuerzas viscosas pierden importancia frente a las inerciales. En esta zona, los esfuerzos cortantes deben seguir la definición de Prandtl dada anteriormente:

$$\tau_{yx} = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2$$

De alguna manera l, la longitud de mezcla, debe ser función de y, la longitud significativa del problema en la zona de transición. Luego:

$$l = ky$$

Donde k es la constante de Prandtl-von Kármán, igual a 0.4 además, Prandtl supuso que el esfuerzo cortante es constante e igual a τ_0 . Esto ha sido verificado experimentalmente.

Luego

$$\tau_0 = \rho k^2 y^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2$$

Al dividirse por la densidad ρ se obtiene:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = k^2 y^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = v_*^2$$

Al reordenarse se llega a:

$$\frac{dv_x}{v_*} = \frac{1}{k} \frac{dy}{y}$$

Para encontrar la distribución de velocidades se debe integrar la ecuación anterior, proceso luego del cual se obtiene:

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{k} \ln y + C_1 \quad (4.4)$$

Para evaluar la constante de integración se supone que en el límite de las zonas laminar y de transición las ecuaciones 4.2 y 4.4 son válidas al mismo tiempo; en consecuencia:

V_l = Velocidad en el límite

Al aplicar la ecuación 4.2:

$$\frac{V_l}{V_*} = \frac{V_* \delta'}{\nu} = 11.6 \quad (4.5)$$

y, además, utilizar la ecuación 4.4:

$$\frac{V_l}{V_*} = \frac{1}{k} \ln \delta' + C_1$$

y la ecuación 4.3, se llega a:

$$\frac{V_l}{V_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{11.6v}{V_*} + C_1 \quad (4.6)$$

Luego, al reemplazar la ecuación 4.5 en la ecuación 4.6:

$$11.6 = \frac{1}{k} \ln \frac{11.6v}{V_*} + C_1 \quad (4.7)$$

y finalmente, al sustituir la ecuación 4.7 en la ecuación 4.4, se obtiene:

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{V_* y}{v} + C_2$$

en donde:

$$C_2 = 11.6 - \frac{1}{k} \ln(11.6)$$

Si se desarrollan los cálculos, se tiene el siguiente valor para la constante C_2 :

$$C_2 = 5.47$$

Por consiguiente, la distribución de velocidades en la zona de transición está definida por la siguiente ecuación:

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{V_* y}{v} + 5.47 \quad (4.8)$$

El anterior análisis es válido si la rugosidad en la superficie no afecta la subcapa laminar viscosa ($k_s < \delta/y$); éste es el caso de los tubos con flujo hidráulicamente liso. Si se hace

una gráfica de la ecuación 2.8 en la cual las abscisas representen $\ln\left(\frac{V_* y}{\nu}\right)$ y las ordenadas $\frac{V_x}{V_*}$, se obtiene una línea recta como la mostrada en la siguiente figura:

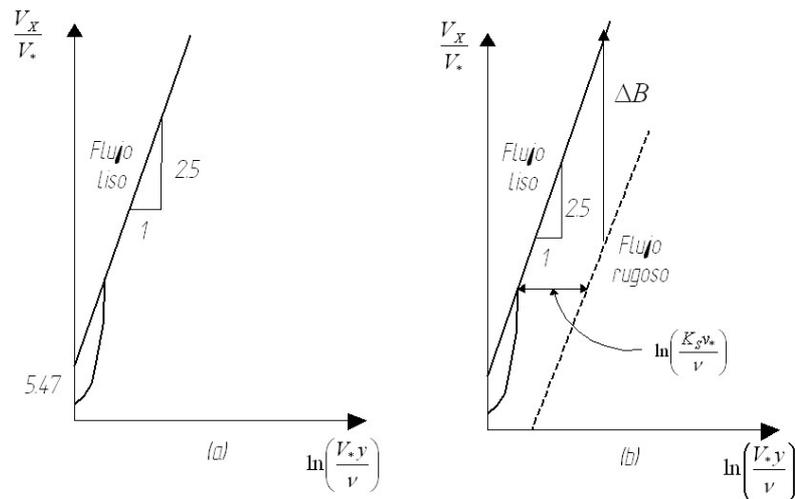


Figura 28. Efecto de la rugosidad de la pared interna de la tubería en la distribución de velocidades (a) Flujo turbulento hidráulicamente liso (ecuación 4.8) (b) Flujo turbulento hidráulicamente rugoso comparado con el liso. Nikuradse demostró que el corrimiento hacia la derecha era igual al logaritmo natural de $(k_s v^*/\nu)$.

Para el caso del flujo hidráulicamente rugoso, J. Nikuradse demostró que aunque la distribución de velocidades seguía siendo logarítmica, dependía de la rugosidad absoluta k_s de la tubería. Tal como se muestra en la figura 2.8 relación entre $\ln\left(\frac{V_* y}{\nu}\right)$ y v_x/v^* se corría hacia la derecha en una cantidad igual a $\ln\frac{k_s V_*}{\nu}$; este resultado fue igual para todas las tuberías, con sus diferentes rugosidades absolutas, que probó en el laboratorio. El corrimiento hacia la derecha generaba una diferencia vertical entre las líneas lisa y rugosa, la cual se representaba por ΔB en la figura 28 (b). Nikuradse encontró que:

$$\Delta B = \frac{1}{0.4} \ln \frac{k_s V_*}{V} - 3.01 \quad (4.9)$$

En consecuencia, es claro que el valor de la relación v_x/v para un valor de \ln en un flujo hidráulicamente rugoso debe ser un ΔB menor que el valor de la misma relación en un flujo hidráulicamente liso. Es decir:

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{.04} \ln \frac{k_s V_*}{v} + 5.47 - \Delta B$$

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{V_* y}{v} + 5.47 - \frac{1}{0.4} \ln \frac{k_s V_*}{v} + 3.01$$

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48 \quad (4.10)$$

4.4.4 Zona Turbulenta

Algunos investigadores afirman que la distribución de velocidades en la zona turbulenta es muy similar a la de la zona de transición, especialmente en el caso de flujo en tuberías. Esto significa que la distribución logarítmica antes encontrada es aplicable a esta nueva zona. Otros autores afirman que dicha distribución es exponencial, regida por la siguiente ecuación:

$$\frac{V_x}{\bar{V}_x} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^n$$

Donde

$$\bar{V}_x = \text{velocidad media} = \frac{Q}{A}$$

r_0 = radio total de la tubería

Además, se tiene que:

$$n = \frac{1}{7} \text{ si } Re < 100000$$

Si el número de Reynolds (Re) aumenta, el exponente n empieza a disminuir. Esta distribución de velocidades se conoce como la ley de la potencia 1/7.

Finalmente, es importante establecer que el perfil lineal de velocidades de la subcapa laminar viscosa sólo conforma un 2%, o menos, del perfil total de velocidades en una sección transversal; de ahí que su presencia pueda omitirse en los análisis de flujo en tubería. Las ecuaciones logarítmicas 4.8 y 4.10 describen muy bien el perfil de velocidades aun en la zona complementemente turbulenta, excepto en el caso en que la presión se incremente aguas abajo, como ocurriría de tratarse de un difusor. Por estas dos razones suele considerarse que la distribución de velocidades es logarítmica para todas las secciones transversales de tuberías circulares con flujo turbulento.

Una vez desarrolladas las anteriores ecuaciones para la distribución de esfuerzos y de velocidades en flujos en tuberías, y conocida la interacción entre el fluido y la pared sólida del ducto, es posible establecer las ecuaciones de resistencia fluida que permiten el diseño de sistemas de tuberías. En el siguiente numeral se establecen dichas ecuaciones empezando por ecuaciones empíricas utilizadas para descubrir los fluidos más simples. Igualmente, se hace uso de la técnica de análisis dimensional para deducir la forma de la ecuación que gobierna la caída de cabeza piezométrica por unidad de longitud para flujo en tuberías.

4.5 Perfiles de Velocidad

Una vez determinados los diferentes perfiles de velocidad para el flujo en tuberías circulares, es interesante hacer una comparación entre éstos con el fin de establecer algunas conclusiones cualitativas que servirán para entender los procesos de diseño. Si

se utilizan las ecuaciones 4.1 y 4.8 y 4.10 que describen los perfiles de velocidad determinados por la capa limite para flujos laminar, hidráulicamente rugoso:

$$V = \frac{\tau_0}{2\mu} \left(\frac{r^2}{r_0} - r_0 \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{V_* Y}{\nu} + 5.47 \quad (4.8)$$

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48 \quad (4.10)$$

Se puede establecer las siguientes relaciones entre la velocidad y la velocidad media $\bar{v} = Q/A$ para cada uno de los tres tipos de flujo. (El procedimiento, relativamente largo, se deja como ejercicio al lector).

- Flujo Laminar

$$\frac{V}{\bar{V}} = 2 \left(2 \frac{y}{r_0} - \frac{y^2}{r_0^2} \right) \quad (4.11)$$

Donde

y = Distancia medida desde la superficie interna de la tubería en

Dirección hacia el eje de ésta

r_0 = Radio total de la tubería.

- Flujo hidráulicamente liso

$$\frac{V}{\bar{V}} = \frac{\frac{1}{.04} \ln \frac{V_* y}{\nu} + 5.47}{\frac{1}{0.4} \ln \frac{V_* r_0}{\nu} + 1.72} \quad (4.12)$$

- Flujo hidráulicamente rugoso

$$\frac{V}{\bar{V}} = \frac{\frac{1}{0.04} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48}{\frac{1}{0.4} \ln \frac{r_0}{k_2} + 4.73} \quad (4.13)$$

Si se utilizan estas dos últimas ecuaciones es posible construir la gráfica adimensional mostrada en la figura 29, en donde la velocidad media es igual para todos los tipos de flujo. Mediante la gráfica es posible establecer las siguientes conclusiones cualitativas:

El perfil correspondiente al flujo laminar muestra una menor uniformidad de velocidades. Esto indica que efecto viscoso de las paredes de la tubería influyen sobre todo el campo de flujo.

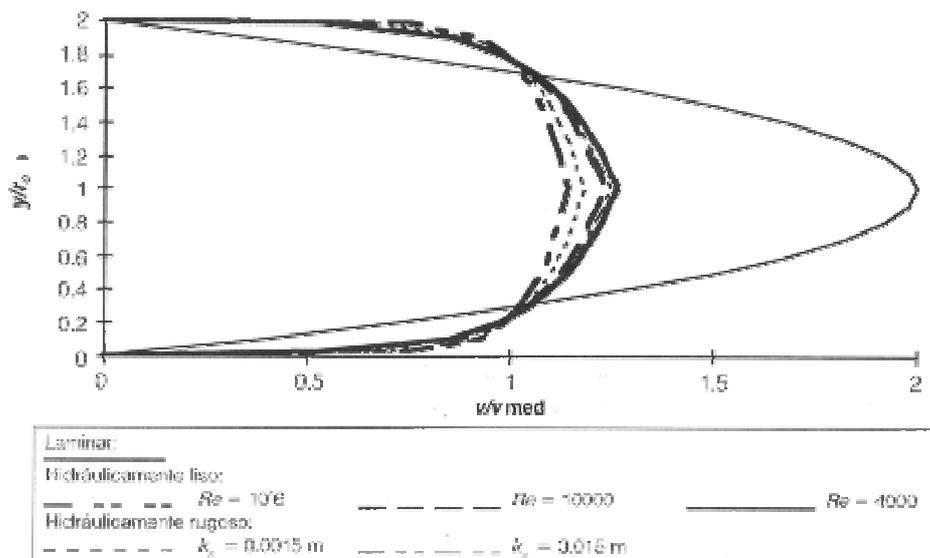


Figura 29. Perfiles de velocidad. Velocidad media igual para todos los casos

El cambio en la distribución de velocidades de flujo laminar a flujo hidráulicamente liso con número de Reynolds bajo ($Re = 4000$) es el más brusco de todos. Este hecho sugiere que la generación de turbulencia es un proceso rápido. El paso del orden al caos es súbito una vez se supera el límite de dominio de las fuerzas viscosas.

A medida que aumenta el número de Reynolds en flujo hidráulicamente liso, disminuye la relación entre la velocidad máxima y la velocidad media. Es decir, el perfil se achata más y la distribución se torna más uniforme. Dicho fenómeno se explicaría por el hecho de que las vibraciones turbulentas de la velocidad hacen que las partículas de fluido choquen con mayor momentum contra la subcapa laminar disminuyendo su espesor. Sin embargo, los cambios en el perfil son sutiles comparados con el cambio entre flujo laminar y flujo hidráulicamente liso.

La diferencia más marcada entre los perfiles lisos y los rugosos radica en que en los primeros el efecto viscoso de la pared se siente más que en los segundos. Los perfiles rugosos son ligeramente más uniformes que los lisos.

El efecto de la rugosidad absoluta de la tubería estriba del flujo se vuelve cada vez más uniforme.

En las figuras 30 y 31 se muestra la evolución de los perfiles de velocidad desde flujo laminar hasta flujo turbulento hidráulicamente rugosos para una tubería de concreto ($k_s = 0.0003$ m) con diámetro de 36 pulgadas, que transporta agua a una temperatura de 15°C ($\nu = 1.14 \times 10^{-6}$ m²/s). Los caudales y velocidades medias utilizados en dichas gráficas son:

Re (-)	Q (l/s)	V (m/s)
500	0.4094	0.0006234
1000	0.8188	0.001247
2000	1.638	0.002493
4000	3.275	0.004986
100000	81.88	0.1247
150000	122.82	0.1871
200000	163.76	0.250
250000	204.7	0.312

La figura 30 muestra el cambio de los perfiles de velocidad de flujo laminar (números de Reynolds de 500, 1000 y 2000) a hidráulicamente liso (números de Reynolds igual a 4000). Una vez más claro el efecto de la aparición súbita de la turbulencia sobre los perfiles. En el caso de flujo hidráulicamente liso, el perfil se vuelve más uniforme reduciendo de manera considerable el efecto viscoso causado por la presencia de las paredes. Por otro lado, la figura 31 ilustra los perfiles de velocidad correspondientes al cambio de flujo hidráulicamente liso (números de Reynolds de 100000) a hidráulicamente rugoso (números de Reynolds de 150000, 200000 y 250000). En la situación, el efecto del aumento de la turbulencia es menos apreciable, aunque sigue disminuyendo la zona de flujo afectada por la presencia de la pared interna de la tubería.

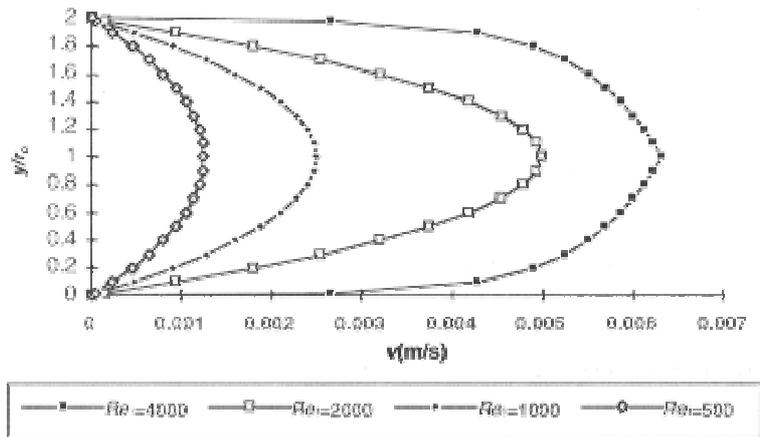


Figura 30. Perfiles de velocidad. Transición de flujo laminar a hidráulicamente liso.

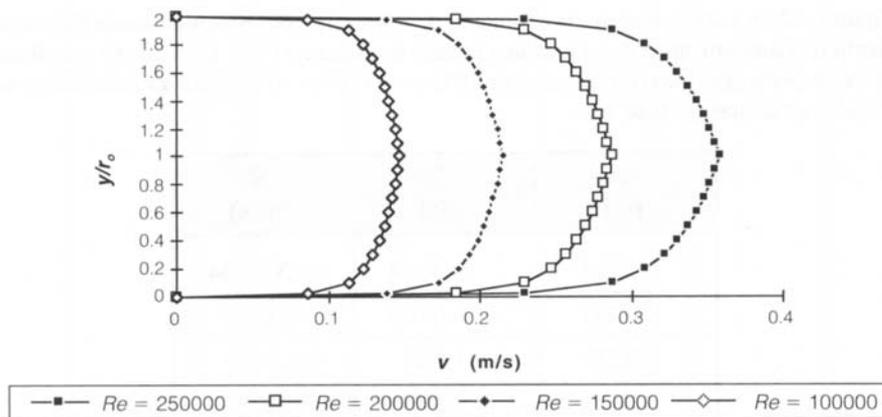


Figura 31. Perfiles de velocidad. Transición de flujo hidráulicamente liso a hidráulicamente rugoso.

Por último, la figura 32 muestra el efecto de la rugosidad de la tubería sobre los perfiles de velocidad. Se utiliza tres tuberías de material diferente: acero ribeteado ($k_s = 0.009\text{m}$), concreto ($k_s = 0.0003\text{m}$) y PVC ($k_s = 0.0000015\text{m}$). Para los tres casos se utiliza un diámetro de 36" y un caudal de 122.82 l/s correspondiente a un número de Reynolds de 150000. En la figura resulta claro que cuanto más rugosa sea la tubería mayor es el efecto de las paredes de ésta y, por consiguiente, el perfil de velocidades es menos uniforme. Esta relación se explica por el hecho de que cuanto mayores son las protuberancias rugosas de la pared de la tubería, menor posibilidad de vibración tiene los paquetes de fluido y como consecuencia es menor la posibilidad de que el flujo disminuya el espesor de la subcapa laminar viscosa.

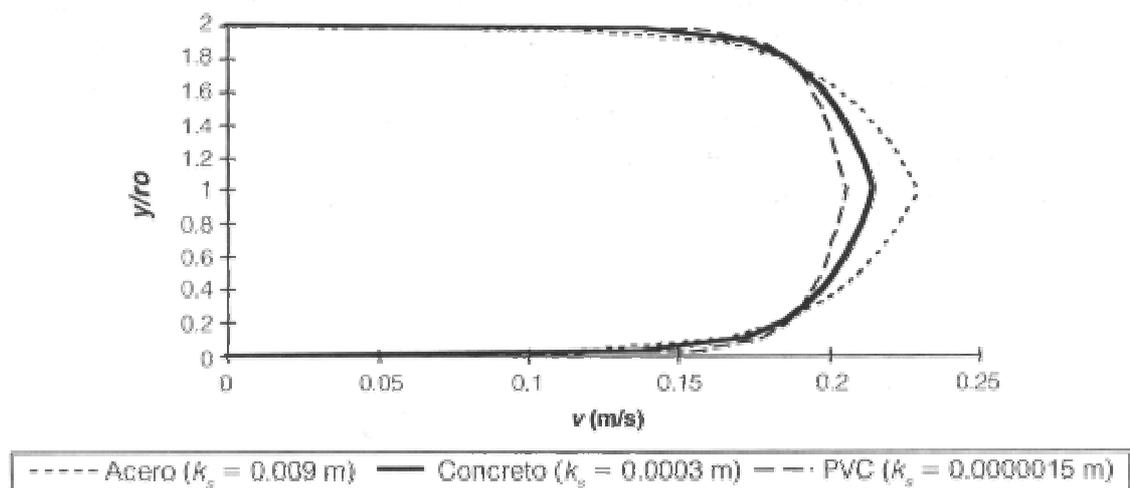


Figura 32. Efecto de la rugosidad absoluta sobre los perfiles de velocidad ($d = 36''$, $Re = 150000$).

4.6 Diseño de Tuberías Circulares

Los objetivos de este numeral son, por un lado, establecer más utilidades para el diseño de tuberías circulares, tanto para el flujo laminar como para flujo turbulento y, por el otro, establecer en forma clara la frontera que diferencia el flujo hidráulicamente liso del flujo hidráulicamente rugoso. Para lograr estos dos objetivos, se hace uso de técnicas como el análisis dimensional. Las consecuencias que se plantean serán utilizadas con el fin de diseñar sistemas de tuberías.

4.6.1 Flujo Laminar

Para establecer las condiciones y principios que gobiernan el flujo en tuberías bajo el régimen de flujo laminar se deben tener en cuenta dos principios:

En este tipo de flujo las fuerzas viscosas priman sobre las fuerzas inerciales.

En este caso se cumple la ecuación de Newton para fluidos viscosos.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Las ecuaciones que controlan el flujo laminar fueron desarrolladas por dos investigadores en forma simultánea e independiente: G. Hagen (ingeniero alemán, 1794 - 1884) trabajó en tubos de cobre y encontró que la pérdida de cabeza era proporcional al causal que pasaba por la tubería e inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro de ésta.

$$\Delta h \propto \frac{Q}{d^4}$$

J. Poiseuille (médico francés, 1799 -1869), al investigar en 1840 el flujo de sangre en las venas llegó a las mismas conclusiones. Lo interesante es que los resultados no son aplicables al cuerpo humano, ya que la sangre es un fluido no newtoniano y las venas y arterias no son tubos rígidos; pero en cambio sí son aplicables a la ingeniería.

El proceso seguido por los dos investigadores se puede resumir de acuerdo con el siguiente planteamiento. Con base en la figura 33, y suponiendo que el flujo se encuentra completamente desarrollado, es decir, se consideran secciones (a una distancia apreciable de la entra) se aplica la ecuación 4.0 de distribución de esfuerzos en tuberías circulares:

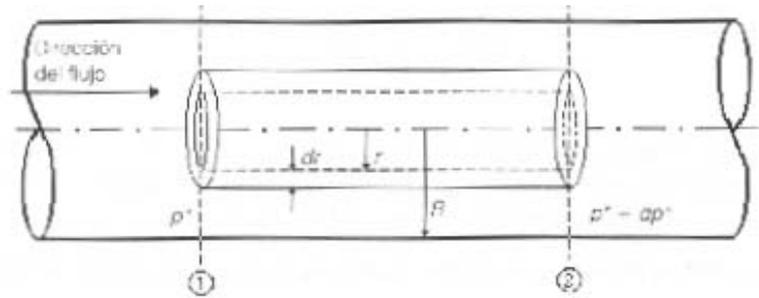


Figura 33. Esquema de flujo laminar en tuberías tal como el utilizado por Hagen y Poiseuille. Se muestra un cilindro de corriente dentro del flujo general en la tubería. R es el radio total; r es un radio variable que describe los diferentes cilindros de corriente.

$$\tau_r = \frac{r}{2} x \frac{\delta p^*}{\delta x} \quad (4.0')$$

Donde

$$p^* = p + \rho g z$$

y

$$\tau = \mu \frac{\delta v}{\delta r}$$

Luego, se llega con facilidad a las siguientes ecuaciones:

$$\mu \frac{\delta v}{\delta r} = \frac{r}{2} x \frac{\delta p^*}{\delta x}$$

Para el caso del flujo laminar en tuberías, debido a que la velocidad sólo es función del radio y la presión piezométrica es constante en la sección transversal de la tubería, los diferenciales pueden remplazarse por diferenciales totales:

$$\frac{\delta v}{\delta r} = \frac{dv}{dr}$$

y

$$\frac{\delta p^*}{\delta x} = \frac{dp^*}{dx}$$

Si se reemplaza estas dos expresiones en la anterior ecuación se obtiene:

$$\mu \frac{dv}{dx} = \frac{r}{2} x \frac{dp^*}{dx} \quad (4.14)$$

y por consiguiente:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{r}{2\mu} x \frac{dp^*}{dx}$$

De esta última ecuación se obtiene la siguiente expresión para el diferencial de velocidad:

$$dv = \frac{1}{2\mu} x \frac{dp^*}{dx} r dr \quad (4.15)$$

Si se integra esta última ecuación en una sola sección transversal (figura 33, por ejemplo), con respecto al radio se obtiene

$$v = \int_0^r dv = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \int_0^r r dr$$

En consecuencia:

$$v = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} + c_1 \quad (4.16)$$

Para evaluar la constante e integración es utiliza la siguiente condición de frontera:

$r = R$ entonces $v = 0$

Luego:

$$0 = \frac{R^2}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} + c_1$$

De donde

$$c_1 = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp^*}{dx}$$

Al remplazar en la ecuación 4.16, para el cálculo de la velocidad en función del radio se obtiene la siguiente ecuación:

$$V = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 - r^2) \quad (4.17)$$

Para longitudes no diferenciales de la tubería, esta ecuación se puede aproximar como:

$$V = \frac{1}{4\mu} \frac{(p_1^* - p_2^*)}{l} (R^2 - r^2) \quad (4.17')$$

El signo negativo de la ecuación 4.17 significa que el valor velocidad tiene dirección contraria al vector esfuerzo cortante. Esta ecuación se conoce como la ecuación de Hagen-Poiseuille, en honor a los dos investigadores. En su forma original no es muy útil; es más usada bajo otra forma que se obtiene a través del siguiente procedimiento:

Se define un diferencial de caudal que pasa por el anillo del área diferencial de la figura 33:

$$dQ = v2\pi r dr$$

Se reemplaza la velocidad v utilizando la ecuación 2.17

$$dQ = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$dQ = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 r - r^3) dr \quad (4.18)$$

Se encuentra el caudal total que pasa a través de la sección transversal integrando la ecuación 4.18 con respecto al radio r variando entre 0 y R.

$$Q = \int_0^R dQ = \int_0^R -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} (R^2 r - r^3) dr$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} \frac{R^4}{4}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dp^*}{dx} = -\frac{p_1^* - p_2^*}{l}$$

Aproximadamente válida para flujo uniforme (permanente) unidimensional en tuberías, se llega a lo siguiente:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu l} (p_1^* - p_2^*) \quad (4.19)$$

Dado que en el diseño de tuberías no es usual trabajar con el radio sino con el diámetro, la última ecuación se convierte en:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128\mu l} (p_1^* - p_2^*) \quad (4.20)$$

Esta ecuación es la forma más usual de la ecuación de Hagen-Poiseuille.

La diferencia en la presión piezométrica puede ser remplazada por la diferencia en cabeza piezométrica (caída de la línea de gradiente hidráulico entre los puntos 1 y 2), con lo cual se obtiene la siguiente expresión:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128\mu l} \rho g \Delta h$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128} \frac{\rho g}{\mu} \frac{\Delta h}{l} \quad (4.21)$$

La relación entre la caída piezométrica y la longitud es la pendiente de fricción:

$$\frac{\Delta h}{l} = S_f$$

Luego

$$Q = \frac{\pi d^4}{128 \mu} \rho g S_f \quad (4.21')$$

Otro resultado interesante que puede ser calculado mediante la ecuación de Hagen-Poiseuille es la magnitud de la velocidad media en una tubería bajo condiciones de flujo laminar; al utilizar la ecuación 4.17 se tiene:

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{(p_1^* - p_2^*)}{l} (R^2 - r^3)$$

La velocidad máxima se presenta en el centro de la tubería, es decir cuando $r = 0$:

$$v_{\max} = \frac{R^2}{4\mu} \frac{(p_1^* - p_2^*)}{l} \quad (4.22)$$

La velocidad media se calcula al dividir el caudal (ecuación 4.9 por el área mojada):

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{\pi R^2}{8\mu l} (p_1^* - p_2^*)}{\pi R^2}$$

Luego

$$\bar{v} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{(p_1^* - p_2^*)}{l} \quad (4.23)$$

Si se comparan as ecuaciones 4.22 y 4.23, se llega al siguiente resultado:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{\max} \quad (4.24)$$

Para calcular el sitio donde se debería colocar un tubo de Pitot a fin de medir la velocidad media y poder calcular fácilmente el caudal se debe igualar las ecuaciones 4.23 y 4.17

$$\frac{R^2}{8\mu} \frac{p_1^* - p_2^*}{l} = \frac{1}{4\mu} \frac{(p_1^* - p_2^*)}{l} (R^2 - r^2)$$

$$\frac{R^2}{2} = (R^2 - r^2)$$

$$r^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0.707R$$

Esta última ecuación establece que la velocidad media en un flujo laminar se debe medir a una distancia igual al 70% del radio, medida desde el centro de la tubería.

4.6.2 Flujo Turbulento

Las ecuaciones de fricción régimen de flujo turbulento utilizadas para el diseño de tuberías son mucho más generales que la ecuación de Hage-Poiseuille. Su naturaleza es muy similar a la de las ecuaciones que gobiernan el flujo uniforme en cualquier tipo de conductos; en particular las ecuaciones para tuberías son aplicables aun si se trata de canales, a pesar de que las fuerzas que tratan de acelerar el flujo en los dos casos que son distintas (gravitaciones en el caso de canales y de presión en las tuberías). En ambos tipos de conductos las fuerzas que tratan de frenar el flujo son las de fricción causada por el esfuerzo cortante turbulento.

Para plantear la ecuación general de resistencia fluida en tuberías circulares bajo condiciones de flujo uniformes es necesario hacer un análisis dimensional en el cual se involucren todas las variables relevantes al fenómeno. La variable dependiente es h_f la pérdida de cabeza por la fricción debido al esfuerzo cortante.

La pérdida de cabeza debido a la fricción que experimenta un flujo cuando fluye por una tubería circular depende del diámetro de ésta (d), de la longitud en que se mida la pérdida de la cabeza fricción (l), de la velocidad media en la tubería (v), de la rugosidad absoluta de la tubería que depende de la capa límite (k_s), de la aceleración de la gravedad (g), de la densidad (ρ) y de la viscosidad del fluido (μ). Por medio del análisis dimensional se determina a continuación la forma de la ecuación que permite el cálculo de las pérdidas por fricción.

Variables	Dimensiones
H_f (Dep)	L
d	L
l	L
v	L
k_s	L
g	LT^{-2}
ρ	ML^{-3}
μ	$ML^{-1}T^{-1}$
n = 8	m = 3

Entonces, el número de parámetros adimensionales es: # Π 's = n - m = 8 - 3 = 5

Las variables repetitivas son: d, ya que es la variable que mejor describe la geometría del problema; V, porque es la variables cinemática más importante; y μ , puesto que el fenómeno del flujo en tuberías está gobernado de origen viscoso.

Primer Π : contiene la variable no repetitiva / (longitud)

$$\Pi_1 = d^{x_1} v^{y_1} \mu^{z_1}$$

$$M^0 T^0 L^0 = L^{x_1} (LT^{-1})^{y_1} (ML^{-1}T^{-1})^{z_1} L$$

Para M : $z_1 = 0$

Para T: $-y_1 - z_1 = 0$ entonces $y_1 = 0$

Para L: $x_1 + y_1 - z_1 + 1 = 0$ entonces $x_1 = -1$

Luego el primer parámetro adimensional es:

$$\Pi_1 = \frac{l}{d}$$

Segundo Π : contiene la variable repetitiva k_s (rugosidad absoluta):

$$\Pi_2 = \frac{k_s}{d} \text{ (Rugosidad relativa de la tubería)}$$

Tercer Π : contiene la variable no repetitiva g (aceleración de la gravedad):

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= d^{x_3} v^{y_3} \mu^{z_3} g \\ M^0 T^0 L^0 &= L^{x_3} (LT^{-1})^{y_3} (ML^{-1}T^{-1})^{z_3} LT^{-2} \end{aligned}$$

Para M: $z_3 = 0$

Para T: $-y_3 - z_3 - 2 = 0$ entonces $y_3 = -2$

Para L: $x_3 + y_3 + z_3 + 1 = 0$

$x_3 + 2 + 1 = 0$ entonces $x_3 = -3$

Por consiguiente, el tercer parámetro adimensional es:

$$\Pi_3 = \frac{gd}{v^2} \text{ (Inverso cuadrado del número de Froude)}$$

Cuarto Π : Contiene la variable no repetitiva p (densidad del fluido):

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= d^{x_4} v^{y_4} \mu^{z_4} p \\ M^0 T^0 L^0 &= L^{x_4} (LT^{-1})^{y_4} (ML^{-1}T^{-1})^{z_4} ML^{-3} \end{aligned}$$

Luego el cuarto parámetro adimensional es:

$$\Pi_4 = \frac{dvp}{\mu} \text{ (Número de Reynolds)}$$

Quinto Π : contiene la variable no repetitiva dependiente h_f (pérdida de cabeza por fricción):

$$\begin{aligned} \Pi_5 &= d^{x_5} v^{y_5} \mu^{z_5} h_f \\ M^0 T^0 L^0 &= L^{x_5} (LT^{-1})^{y_5} (ML^{-1}T^{-1})^{z_5} L \end{aligned}$$

Para M: $z_5 = 0$

Para T: $-y_5 - z_5 = 0$ entonces $y_5 = 0$

Para L: $x_5 + y_5 - z_5 + 1 = 0$ entonces $x_5 = -1$

Luego el último parámetro adimensional es:

$$\Pi_5 = \frac{h_f}{d}$$

Entonces, al utilizar todos los números adimensionales encontrados se puede establecer la siguiente relación matemática:

$$\exists F / F \left(\frac{h_f}{d}, \frac{l}{d}, \frac{dg}{v^2}, \frac{k_s}{d}, \text{Re} \right) = 0 \quad (a)$$

Los tres primeros números adimensionales de la ecuación (a) pueden combinarse en la siguiente forma:

$$\Pi_5 = \frac{h_f}{d}, \Pi_1 = \frac{l}{d}, \Pi_3 = \frac{dg}{v^2}$$

$$\Pi_6 = \frac{\Pi_5 \Pi_3}{\Pi_1} = \frac{h_f}{d} \frac{dg}{v^2} \frac{d}{l}$$

$$\Pi_7 = 2\Pi_6 = \frac{2h_f dg}{v^2 l}$$

Este nuevo número adimensional puede ser remplazado en la ecuación (a) para obtener la siguiente expresión:

$$\exists F'' / F' \left(\frac{2h_f dg}{v^2 l}, \frac{k_s}{d}, \text{Re} \right) = 0$$

lo cual implica que:

$$\exists F'' / \frac{2h_f dg}{v^2 l} = F'' \left(\frac{k_s}{d}, \text{Re} \right)$$

De esta última ecuación se puede despejar la variable dependiente h_f :

$$h_f = \frac{l v^2 2g}{d} f'' \left(\frac{k_s}{d}, \text{Re} \right) \quad 4.25$$

Teniendo en cuenta que la ecuación 4.25 se dedujo mediante el análisis dimensional y que éste se basa en las ecuaciones de la física clásica ($\vec{F} = m\vec{a}$) se puede decir que es la ecuación de resistencia fluida más general que existe. Cualquier otra ecuación utilizada para calcular las pérdidas de energía en un flujo debe ser, necesariamente, un caso particular de la ecuación 4.25

Debido a que los argumentos de la función F'' de la ecuación 4.25 (rugosidad relativa y número de Reynolds) son números reales adimensionales, el resultado de la ecuación también debe ser adimensionales. Si éste se denomina f se obtiene:

$$F'' \left(\frac{k_s}{d}, R \right) = f$$

$$h_f = f \frac{l v^{-2}}{d 2g} \quad (4.26)$$

Esta ecuación fue deducida por Henry Darcy, ingeniero francés del siglo XIX y por Julios Weisbach, científico e ingeniero alemán de la misma época. Weisbach propuso el uso del coeficiente adimensional f y Darcy llevó a cabo numerosos experimentos en tuberías con

flujo de agua. Por esta razón, la ecuación 4.26 se conoce como la ecuación de Darcy-Weisbach, la cual es la más general para explicar la pérdida de energía ocurrida durante el movimiento de fluidos.

4.7 Pérdidas debido a la fricción

Cuando se trata de conductos cerrados, el único tipo de energía que puede perderse por razón del movimiento del fluido es la energía de presión, ya que la energía cinética debe permanecer constante si el área es constante, y la energía potencial sólo depende de la posición. La energía de presión expresada como energía por unidad de peso del fluido tiene unidades de cabeza (h), tal como se encontró en el análisis dimensional anterior, la pérdida de cabeza por fricción es:

$$h_f = f \frac{l v^2}{d 2g} \quad (4.26)$$

Donde

- h_f = energía por unidad de peso perdida por fricción
- f = factor de fricción de Darcy
- l = longitud del tramo de la tubería
- d = diámetro de la tubería
- v = velocidad medid

Si se utiliza el radio hidráulico (R) en lugar del diámetro de la tubería (d), la ecuación 4.26 se convierte en:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{\pi d^2}{4d\pi} = \frac{d}{4} \text{ Entonces } d = 4R$$

$$h_f = f \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}$$

en donde el factor de fricción, tal como se estableció anteriormente, es una función compleja del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

$$f = F(\text{Re}, k_s / d) \quad (4.27)$$

Una vez establecida esta relación de dependencia entre el factor de fricción f y el número de Reynolds del flujo (Re) y la rugosidad relativa de la tubería (k_s / d), el siguiente paso obvio era determinar la forma exacta de la función de relación. Este trabajo probó ser altamente complejo y sólo hasta finales de la década de 1920 se culminó. Sin embargo, después de los trabajos de Darcy y Weisbach muchos investigadores llevaron a cabo estudios que constituyeron pasos clave en el desarrollo de la teoría del flujo en tuberías. En los siguientes numerales se resumen dichos trabajos, los cuales mostraron dos tendencias: trabajos basados en desarrollos teóricos y trabajos de laboratorio.

Relación entre f y τ_0

El factor de fricción de Darcy debe estar relacionado directamente con el esfuerzo cortante, ya que este último es el responsable de las pérdidas de energía por fricción. Ese argumento fue desarrollado por Darcy en la siguiente forma:

Si se toma la longitud de la tubería como un diferencial de longitud dl , las pérdidas de cabeza que ocurrirían en ese tramo serían:

$$dh_f = f \frac{dl}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Al despejar el factor de fricción se obtiene la siguiente expresión:

$$f = \frac{2dg}{v^2} \frac{dh_f}{dl} \quad (4.28)$$

Si se utiliza el radio hidráulico en lugar del diámetro de la tubería:

$$f = \frac{8gR}{v^2} \frac{dh_f}{dl} \quad (4.29)$$

Tal como se encontró antes, se tiene que:

$$\tau_0 = \frac{A}{P} \frac{dp^*}{dx} = R \frac{dp^*}{dl} \quad (4.0)$$

De donde:

$$\begin{aligned} \frac{dp^*}{dl} &= \frac{\tau_0}{R} = pg \frac{dh_f}{dl} \\ \frac{dh_f}{dl} &= \frac{\tau_0}{pgR} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Si se reemplaza la ecuación 4.30 en la ecuación 4.29, se obtiene:

$$f = \frac{8gR}{v^2} \frac{\tau_0}{pgR}$$

de donde se obtiene fácilmente la siguiente expresión que relaciona el factor de fricción con el esfuerzo cortante en la pared de la tubería:

$$f = \frac{8\tau_0}{pv^2} \quad (4.31)$$

Esta última ecuación indica que el factor de fricción debe disminuir a medida que la velocidad v aumenta, es decir, cuando el número de Reynolds (Re) se hace mayor, lo cual no implica que el esfuerzo cortante sea menor. Este resultado se debe entender de la siguiente manera: a medida que la velocidad aumenta, las pérdidas de energía por unidad de peso (cabeza) disminuyen; es decir; es más eficiente mover un fluido, por unidad de peso, con números de Reynolds altos que con números de Reynolds bajos en una tubería dada.

4.8 El Factor De Fricción Para Flujo Laminar

Una vez establecida la ecuación general para las pérdidas por fricción en tuberías, Weisbach pudo determinar el factor de fricción para el caso del flujo laminar. Para hacer esto utilizó la ecuación de Hagen-Poiseuille (ecuación 4.21) en conjunto con la ecuación (4.26).

Si se toma la ecuación

$$Q = \frac{\pi d^4 pg S_f}{128 \mu} \quad (4.21)$$

En donde:

$$S_f = h_f/l$$

Se puede despejar la energía por unidad de peso pérdida:

$$Q = \frac{\pi d^4 pg h_f}{128 \mu l}$$
$$h_f = \frac{128 \mu l Q}{\pi d^4 pg} = \frac{128 \mu l v}{4 d^2 pg} \quad (4.32)$$

Por otro lado:

$$h_f = f \frac{l v^2}{d 2g} \quad (4.26)$$

si se igualan las ecuaciones 4.32 y 4.26 se obtiene la relación que describe el factor de fricción f para flujo laminar:

$$f \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{128\mu l v}{4d^2 p g}$$

$$f = \frac{64\mu}{v d p}$$

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (4.33)$$

Esta última ecuación indica que para flujo laminar en tuberías el factor de fricción únicamente es función del número de Reynolds. En este caso, la rugosidad relativa del ducto no influye en las pérdidas por fricción.

4.9 Clasificación Hidráulica de Flujos

Para el caso de flujos hidráulicamente lisos se sabía que el factor de fricción f sólo era función del número de Reynolds Re , P, R, H, Blassius, alumno de Prandtl, en 1911 encontró empíricamente que para números de Reynolds entre 5000 y 100000, el factor de fricción se podía calcular de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$f = \frac{0.316}{\text{Re}^{0.25}} \quad (4.34)$$

A pesar del limitado rango de aplicación de la ecuación de Blassius, sirvió para entender los resultados encontrados por Reynolds 30 años antes. Si se utiliza la ecuación de Darcy – Weisbach y se reemplaza en ella la ecuación de Blassius, se llega a:

$$h_f = f \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (4.26)$$

$$h_f = \frac{0.316}{\text{Re}^{0.25}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

de donde:

$$h_f = \frac{0.316v^{0.25}lv^2}{v^{0.25}d^{0.25}d2g}$$

$$h_f = \frac{0.158v^{0.25}lv^{1.75}}{d^{1.25}g}$$

Al dividir por la longitud y multiplicar por el peso específico se obtiene:

$$\frac{h_f}{l} = \frac{0.158v^{0.25}pv^{1.75}}{d^{1.75}}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 0.158v^{0.25}pv^{1.75}d^{-1.25}$$

Esta última ecuación indica que la caída de presión por unidad de longitud del flujo en una tubería es proporcional a la potencia 1.75 de velocidad para flujo hidráulicamente liso; si la ecuación se multiplica y divide por le área transversal de la tubería elevada a la potencia 1.75 se obtiene:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{0.0158v^{0.25}pQ^{1.75}4^{1.75}}{\pi^{1.75}d^{4.75}}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 0.241v^{0.25}pQ^{1.75}d^{-4.75}$$

Resulta claro que la mejor forma de reducir las pérdidas de presión por unidad de longitud consiste en aumentar el diámetro de la tubería. Es decir, la potencia requerida por una bomba sería menor si la tubería fuera más grande; sin embargo, una tubería de diámetro mayor sería más costosa. Para un caudal dado, un aumento del 50% en el diámetro reducirá las perdidas de presión en un factor de 6.86%.

4.9.1 Diagrama de Nikuradse

Con el fin de estudiar la naturaleza del factor de fricción f , el ingeniero alemán Johann Nikuradse, en 1933, hizo una serie de experimentos en los cuales utilizó tubos de diferentes diámetros en cuyo interior pegó arenas de granulometría uniforme, de tal manera que obtuvo varias relaciones k_s/d (relación conocida como rugosidad relativa) perfectamente determinadas. En cada uno de los tubos varió el caudal, de modo que cubrió un amplio rango de números de Reynolds, con flujos que cubrían el intervalo desde laminar hasta turbulento hidráulicamente rugoso. Sus resultados se esquematizan en la figura 34. y se pueden resumir así:

Cuando el número de Reynolds es menos a 2000, es decir cuando el flujo es laminar, el factor de fricción f varía en forma lineal con respecto al número de Reynolds; es una función inversa de Re , independiente de la rugosidad relativa k_s/d . esto corroboraba los resultados de Weisbach para flujo laminar

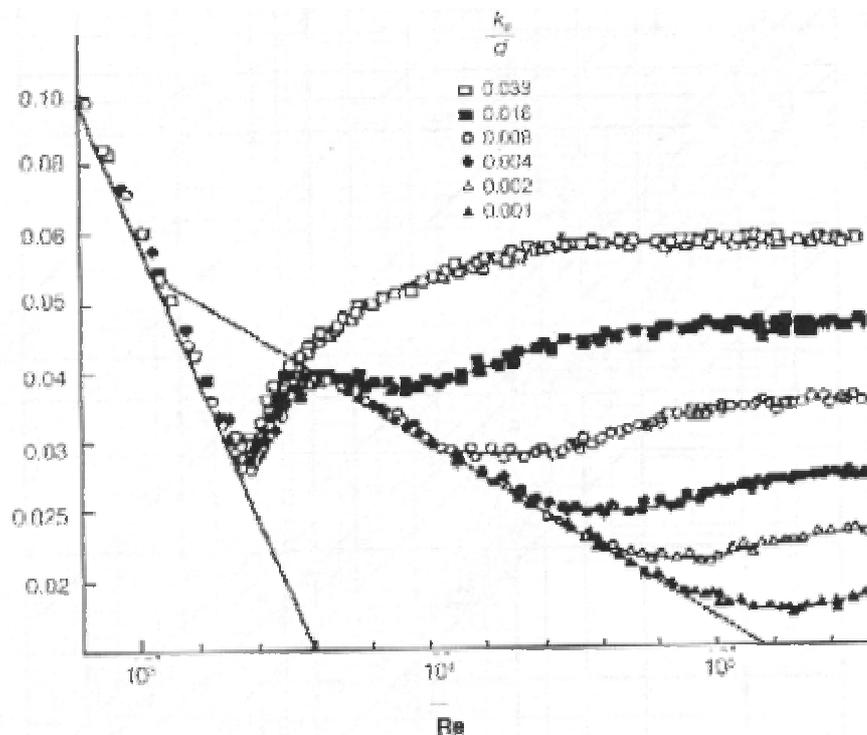


Figura 34. Resultados de Nikuradse

Cuando el flujo es turbulento, el comportamiento de f se vuelve complejo, mostrando las siguientes características:

Cerca al Re crítico (2200) todas las curvas coinciden. Existe una curva límite desde la cual se separa poco a poco las curvas correspondientes a diferentes valores de k_s/d .

Los tubos con mayor rugosidad relativa se separan más rápidamente de la curva “lisa”, lo cual se debe a que a medida que aumenta el Re , disminuye el espesor de la subcapa laminar viscosa, pasando así los flujos en forma gradual de hidráulicamente lisos a rugosos; esto ocurre más rápido en los tubos de mayor rugosidad relativa k_s/d .

Una vez que el flujo se separa de la curva “lisa” el factor de fricción f empieza a ser una función compleja de Re y de k_s/d . en esta zona, el flujo se conoce como flujo transicional.

A medida que el Re sigue aumentando, las curvas individuales correspondientes a cada k_s/d se vuelven horizontales, lo cual implica que el factor f deja de ser función de Re y pasa a ser sólo función de k_s/d .

4.9.2 Diagrama de Moody

Tal vez el trabajo experimental más importante fue el desarrollado por el ingeniero norteamericano Lewis F. Moody a principios de la década de 1940, cuyos resultados conformaron un artículo clásico (Moody, 1944):

Moody se basó en los resultados de Nikuradse y de C. F. Colebrook con el fin de investigar las pérdidas por fricción de tuberías con rugosidades reales y no artificiales. Sus trabajos se pueden resumir en los siguientes puntos:

En primer lugar Moody observó que en el diagrama de Nikuradse el factor de fricción f solo era de la rugosidad relativa (k_s/d) para flujos hidráulicamente rugosos. Esto correspondía a la parte horizontal de las curvas correspondientes a cada una de dichas

rugosidades. Al tomar los puntos (k_s/d , f) del extremo derecho del diagrama de Nikuradse, pudo producir la curva del factor fricción para flujo hidráulicamente rugoso que aparece en la figura 35.

Una vez establecida la curva anterior, tomó tuberías comerciales de diferentes materiales (acero, acero ribeteado, hierro dulce, hierro galvanizado, concreto, etc.) y diámetros, las cuales llevó al laboratorio a fin de medir las pérdidas por fricción y calcular su factor de fricción para flujo hidráulicamente rugoso. Con el factor de fricción calculó la rugosidad relativa utilizando la figura 35. Finalmente, con esta rugosidad y con el diámetro de la tubería pudo calcular la rugosidad absoluta k_s .

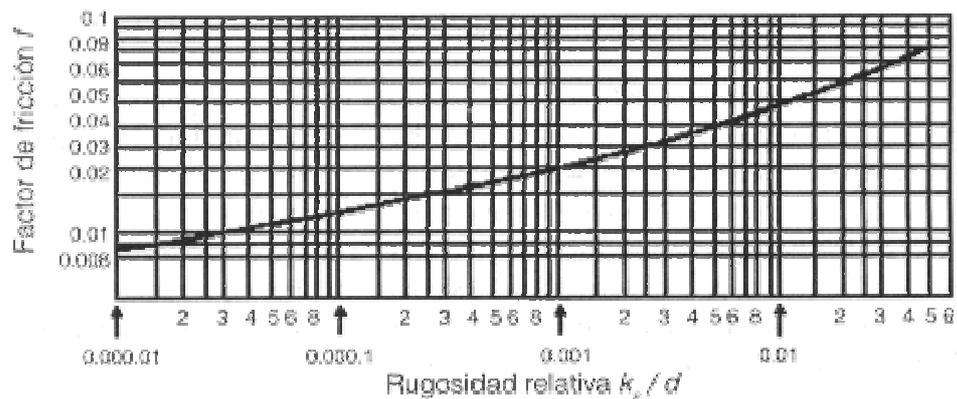


Figura 35. Factor de fricción para flujo altamente turbulento.

Moody encontró que a pesar de que la rugosidad real de las tuberías comerciales era muy diferente a la rugosidad artificial obtenida pegando arena en el perímetro interno de tuberías, se podía obtener una rugosidad equivalente a la rugosidad de arena para cada material. Es decir, encontró que independientemente del diámetro, cada material se comportaba siempre como arena (en cuanto a la rugosidad) de diámetro constante. Por consiguiente, cada material tenía una rugosidad equivalente que establecía su comportamiento hidráulico. Por ejemplo, estableció que el acero comercial se comportaba hidráulicamente como un tubo con arena de 0.045 mm de diámetro y que el hierro dulce equivalía a una arena de 0.26 mm de diámetro.

Con estos resultados produjo el diagrama mostrado en la figura 36, el cual se conoce hoy en día como el diagrama de Moody modificado o diagrama de rugosidades relativas. En éste, la relación establecida en la figura 35 aparece como la correspondencia biunívoca entre las dos escalas verticales. Es importante aclarar que hasta este punto los resultados de Moody sólo eran aplicables al caso de flujo hidráulicamente rugoso.

Utilizando sus resultados y la ecuación de Colebrook-White, Moody pudo producir una nueva gráfica en la cual incluía todo el rango de flujo, desde laminar hasta turbulento hidráulicamente rugoso, con el fin de estudiar el comportamiento del factor de fricción f para tuberías comerciales. Esta gráfica (figura 37) se conoce como el diagrama de Moody. Durante mucho tiempo fue la única herramienta práctica para el cálculo del factor de fricción que debía utilizarse en conjunto con la ecuación Darcy-Weisbach, ya que las ecuaciones matemáticamente deducidas resultaron ser tan complejas que requirieron métodos numéricos para su solución. En la época anterior a la masificación del uso de computadores y calculadoras programables, el tener que utilizar métodos iterativos para el diseño de tuberías resultaba engorroso y poco práctico.

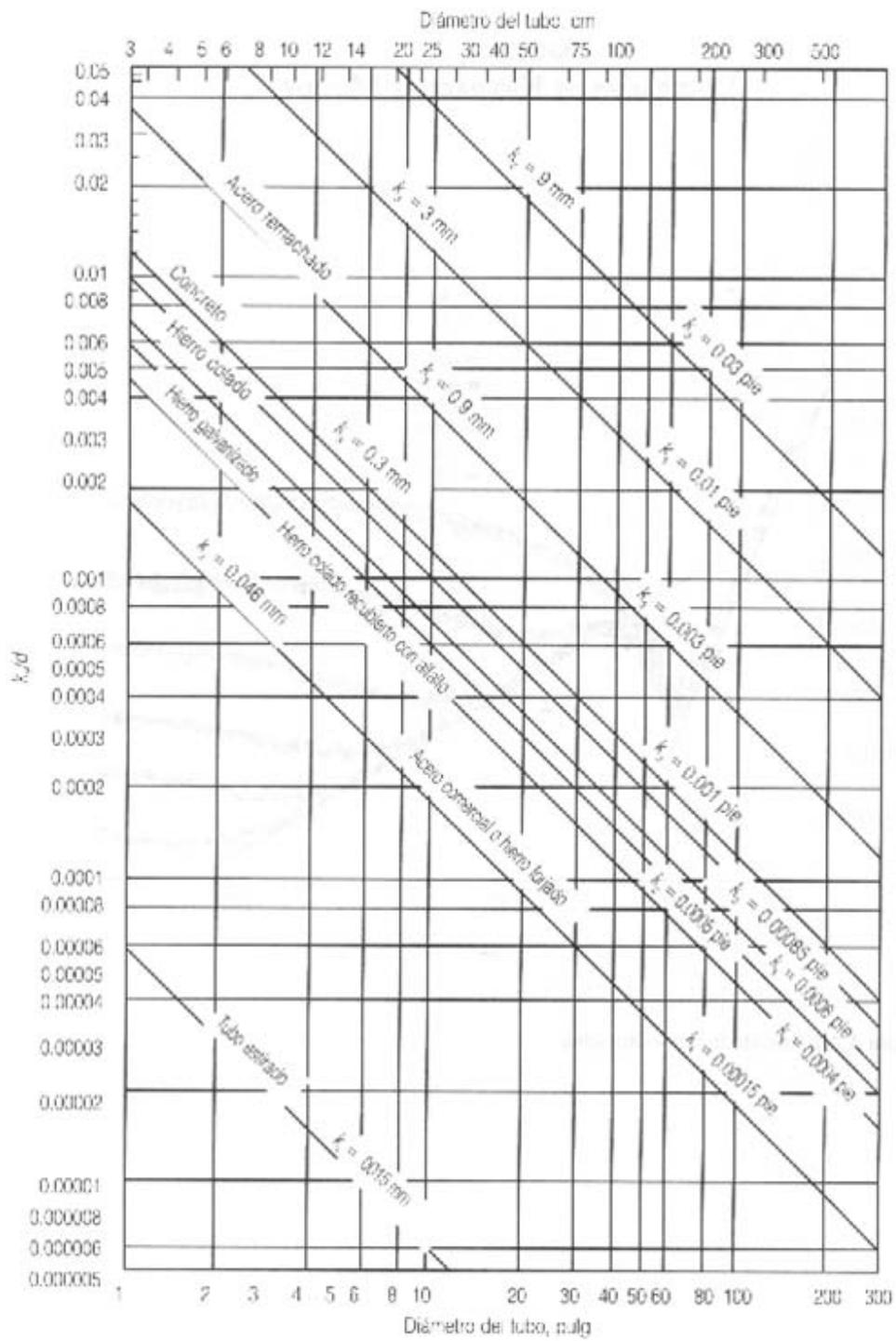
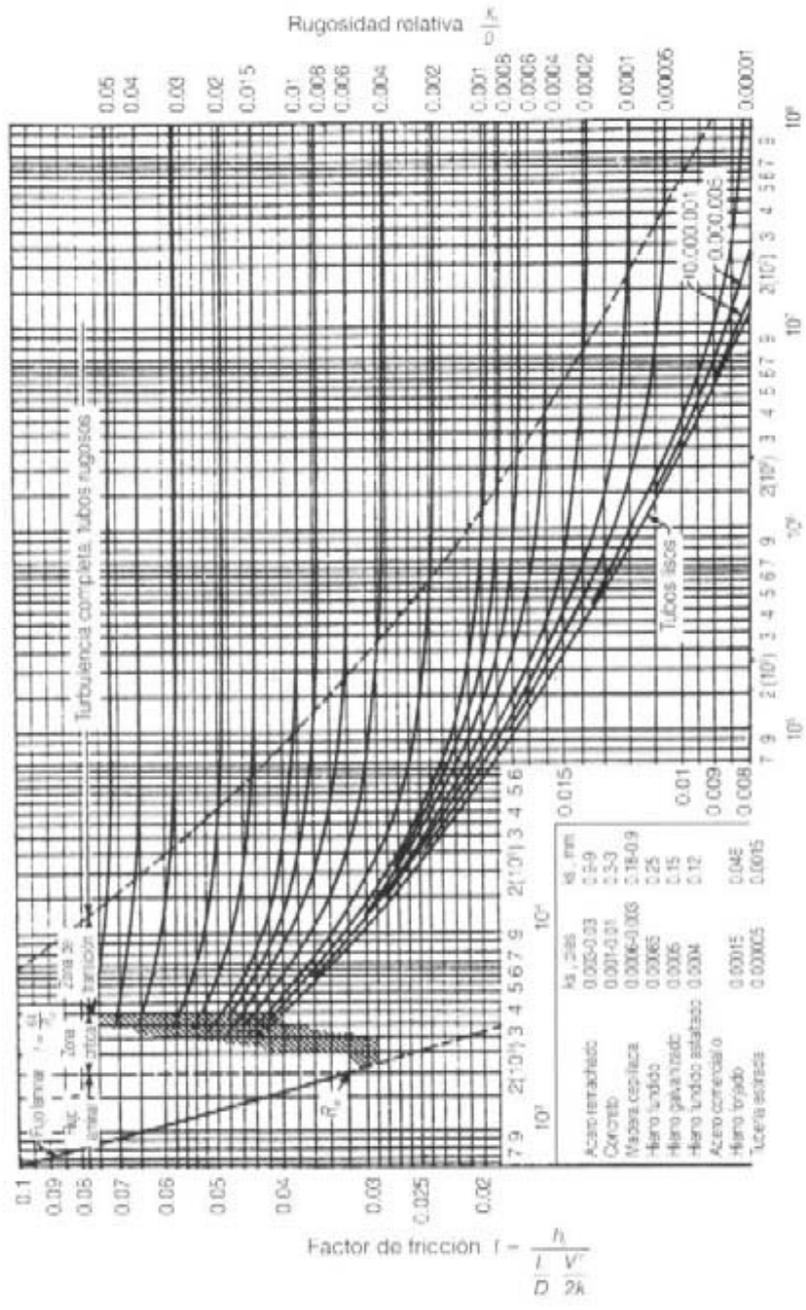


Figura 36. Diagrama de Moody modificado



Numero de Reynolds $R = \frac{VD}{\nu}$, unidades compatibles

Figura 37 Diagrama de Moody.

La semejanza entre los diagramas de Nikuradse y de Moody salta a la vista. En ambos existen la zona laminar, la curva correspondiente al flujo hidráulicamente liso y las líneas horizontales que describen el flujo hidráulicamente rugoso para cada rugosidad relativa. Así mismo, en ambos existe la zona de flujo transicional, aunque es en esa zona en donde se aprecia una marcada diferencia. En el diagrama de Nikuradse cada curva correspondiente a una rugosidad relativa se separa en forma abrupta de la curva hidráulicamente lisa. En el diagrama de Moody las curvas correspondientes a cada rugosidad relativa se aproximan en forma asintótica a la curva lisa. Esto sucede por que en los tubos de Nikuradse la rugosidad tiene un tamaño uniforme y, por consiguiente, al aumentar el número de Reynolds y disminuir el espesor de las subcapa laminar viscosa, el efecto de la rugosidad se siente simultáneamente. En los tubos reales la rugosidad no es uniforme, lo cual implica que su efecto sobre la hidráulica del fondo es gradual. Este planteamiento se esquematiza en la figura 38.

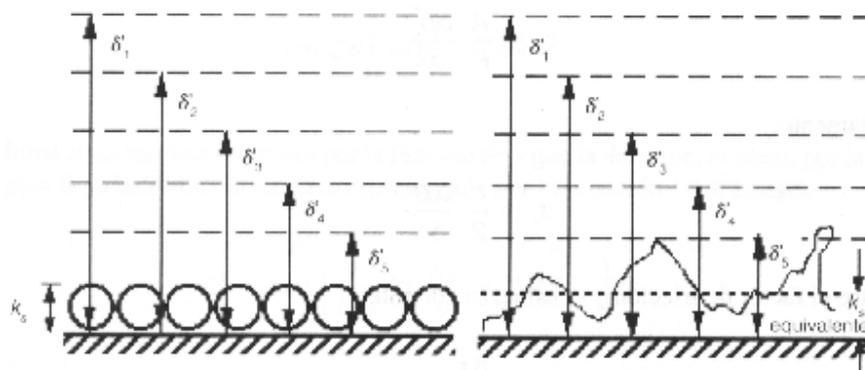


Figura 38. El espesor de la subcapa laminar viscosa (δ) disminuye a medida que el número de Reynolds y el caudal aumentan. En los tubos Nikuradse la rugosidad afecta en forma simultánea la hidráulica de flujo. En los tubos reales, ese efecto es gradual, es decir, las mayores prominencias de la rugosidad afectan el flujo antes que las menores.

4.9.3 Flujo Hidráulicamente Liso

Las ecuaciones usadas por Prandtl y Von Kármán, ya deducidas a lo largo de este capítulo, son las siguientes:

Espesor de la subcapa límite laminar viscosa:

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{V_*} v \quad (4.3)$$

Distribución de velocidades en flujo turbulento

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{k} \ln y + C_1 \quad (4.4)$$

$$\frac{V_x}{V_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{V_* y}{\nu} + 5.47 \quad (4.8)$$

Esfuerzo cortante en la pared de la tubería:

$$\tau_0 = \frac{A}{P} \frac{dp^*}{dx} \quad (4.0)$$

o aproximadamente:

$$\tau_r = \frac{r}{2} \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \quad (4.0')$$

Relación entre el factor de fricción y el esfuerzo cortante

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho v_0^2} \quad (4.31)$$

El primer paso fue calcular la velocidad media del flujo mediante la distribución de velocidades representada por la ecuación 4.8. Para esto se toma el diferencial dy de la figura 39 y, teniendo en cuenta que la tubería es circular, se puede establecer el siguiente diferente de área:

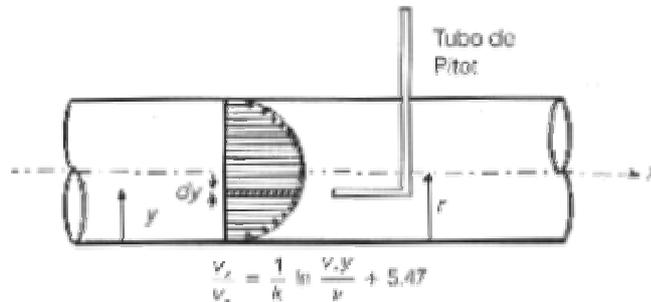


Figura 39 Distribución para el flujo hidráulicamente liso desarrollado por completo en una tubería de sección circular.

$$dA = 2\pi(r - y) = dy$$

Por este diferencial de área pasa el siguiente diferencial de caudal:

$$dQ = v dA$$

$$dQ = v 2\pi(r - y) dy$$

Si se integran los diferenciales de caudal se obtiene el caudal total que pasa a través de toda la sección transversal de la tubería. Por consiguiente:

$$Q = \int_A dQ = \int_0^r 2\pi v(r - y) dy$$

$$Q = 2\pi \int_0^r v(r - y) dy$$

En esta última ecuación v se reemplaza por la función de y que la describe, es decir, por la distribución de velocidades para flujo hidráulicamente liso representada por la ecuación 4.18. Luego:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left(\frac{V_*}{0.4} \ln \frac{V_* y}{r} + 5.47 V_* \right) (r - y) dy$$

Al expandir los paréntesis de esta última integral se obtiene:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left(\frac{V_* r}{0.4} \ln \frac{V_*}{v} + \frac{V_* r}{0.4} \ln y + 5.47 V_* r - \frac{V_* y}{0.4} \ln \frac{V_*}{v} - \frac{V_* y}{0.4} \ln y - 5.47 V_* y \right) dy$$

Si se lleva a cabo el proceso de integración se obtiene la siguiente expresión:

$$Q = 2\pi \left(\frac{V_* r}{0.4} y \ln \frac{V_*}{v} + \frac{V_* r}{0.4} y \ln \frac{V_* r}{0.4} y + 5.47 V_* r y - \frac{V_* y^2}{0.4} \ln \frac{V_*}{v} - \frac{V_* y^2}{0.4} \ln y + \frac{V_* y^2}{0.4} - 5.47 V_* \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^r$$

$$Q = 2\pi \left(\frac{V_*}{0.4} r^2 \ln \frac{V_*}{v} + \frac{V_*}{0.4} r^2 \ln r - \frac{V_*}{0.4} r^2 + 5.47 V_* r^2 - \frac{V_* r^2}{0.4} \ln \frac{V_*}{v} - \frac{V_* r^2}{0.4} \ln r + \frac{V_* r^2}{0.4} - 5.47 V_* \frac{r^2}{2} \right)$$

$$Q = 2\pi \left(\frac{V_* r^2}{0.4} \ln \frac{V_*}{v} + \frac{V_* r^2}{0.4} \ln r - \frac{3}{4} \frac{V_* r^2}{0.4} + 5.47 V_* \frac{r^2}{2} \right)$$

$$Q = \pi r^2 \left(\frac{V_*}{0.4} \ln \frac{V_* r}{v} + 1.720 V_* \right) \quad (4.35)$$

La ecuación 4.35 representa el caudal total que pasa por una tubería circular de radio r cuando el flujo es hidráulicamente liso. Con este caudal se puede calcular la velocidad media al dividírsele por el área transversal de la tubería.

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

$$V = \frac{V_*}{0.4} \ln \frac{V_* r}{v} + 1.720 V_* \quad (4.36)$$

En esta última ecuación se tiene una especie de número de Reynolds conocido como Re_* :

$$Re_* = \frac{V_* r}{v} \quad (4.37)$$

Por definición se tiene que:

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

Y si se despeja de la ecuación 4.31:

$$\tau_0 = \frac{\rho y^{-2}}{8} f \quad (4.31)$$

Mediante estas dos últimas ecuaciones se obtiene la siguiente expresión por la velocidad de corte en flujo hidráulicamente liso:

$$V_* = \sqrt{\frac{f}{8}} \bar{V} \quad (4.38)$$

Si se reemplaza la ecuación 4.38 en la ecuación 4.37 se llega a:

$$\text{Re} = \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{r}{\nu} \bar{V}$$

o:

$$\text{Re}_* = \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{d}{2} \frac{1}{\nu} \bar{V} \quad (4.39)$$

Finalmente, al reemplazar las ecuaciones 4.38 y 4.39 en la ecuación 4.36 se obtiene:

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{f}{8}} \bar{V} \left[\frac{1}{0.4} \ln \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{d}{2} \bar{V} + 1.72 \right]$$

Al desarrollar esta última ecuación:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{8}{f}} &= 2.5 \ln \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{1}{2} \text{Re} + 1.72 \\
\frac{1}{\sqrt{f}} &= 0.88388 \ln \frac{\sqrt{f} \text{Re}}{5.6569} + 0.6081 \\
\frac{1}{\sqrt{f}} &= 0.88388 \ln \text{Re} \sqrt{f} + 0.88388 \ln \frac{1}{5.6569} + 0.6081 \\
\frac{1}{\sqrt{f}} &= 0.88388 \ln \text{Re} \sqrt{f} - 0.924
\end{aligned} \tag{4.40}$$

La ecuación 4.40 es la forma original de la ecuación de Prandtl-Von Kármán para el cálculo del factor de fricción f en fluidos hidráulicamente lisos. Es importante tener en cuenta que todo el análisis está basado en la teoría de longitud de mezcla de Prandtl, la cual ha probado ser muy exacta. Como último paso estos dos investigadores decidieron cambiar la base del logaritmo de la ecuación 4.40 de base e a base 10. Al parecer las razones de este cambio obedecieron sólo al hecho de que en una época sin calculadoras electrónicas y si computadores, trabajar con logaritmos en base 10 era más sencillo. Al efectuar el cambio de base la ecuación 4.38 se transforma a:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log_{10} \text{Re} \sqrt{f} - 0.924 \tag{4.41}$$

Después de confrontar su teoría contra datos de laboratorio, Prandtl y Von Kármán establecieron la forma de la ecuación para el cálculo del factor de fricción en flujos hidráulicamente lisos. Esta ecuación no explícita para f es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \text{Re} \sqrt{f} - 0.8 \tag{4.42}$$

4.9.4 Flujo Hidráulicamente Rugoso

De nuevo, le primer paso fue calcular la velocidad media mediante la distribución de velocidades representada por la ecuación 4.10, válida para el caso hidráulicamente rugoso. Si se toma el diferencial dy de la figura 40 se establece de área:

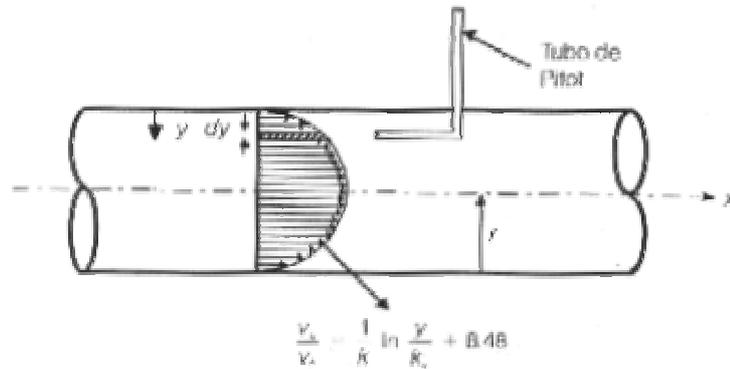


Figura 40. Distribución de velocidades para flujo hidráulicamente rugoso completamente desarrollado en una tubería de sección circular:

$$dA = 2\pi(r - y)dy$$

Por este diferencial de área fluye e siguiente diferencial de caudal:

$$dQ = v dA$$

$$dQ = v 2\pi(r - y)dy$$

$$dQ = 2\pi \left(\frac{V_*}{k} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48V_* \right) (r - y) dy$$

Para calcular el caudal total se integran los diferenciales de caudal sobre el área de la sección transversal de la tubería:

$$Q = \int_A dQ = \int_0^r 2\pi \left(\frac{V_*}{k} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48V_* \right) (r - y) dy$$

Al expandir los paréntesis de la anterior ecuación se llega a:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left(\frac{v_* r}{k} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48V_* r - \frac{V_* y}{k} \ln \frac{y}{k_s} - 8.48V_* y \right) dy$$

Luego, se lleva a cabo el proceso de integración:

$$Q = 2\pi \left(\frac{V_* r}{k} \ln y - \frac{V_* r}{k} y - \frac{V_* r}{k} y \ln \frac{1}{k_s} + 8.48 V_* r y - \frac{V_* y^2}{k} \ln y + \frac{V_* y^2}{k} + \frac{V_* y^2}{k} \ln \frac{1}{k_s} - 8.48 V_* \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^r$$

$$Q = 2\pi \left[\frac{V_* r^2}{k} \ln r - \frac{3 V_*}{4 k} r^2 - \frac{V_* r^2}{k} \ln \frac{1}{k_s} - 8.48 V_* \frac{r^2}{2} \right]$$

$$Q = \pi r^2 \left[\frac{V_*}{0.4} \ln \frac{r}{k_s} + 4.73 V_* \right]$$

La utilización de esta última ecuación deja claro que la velocidad media es:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

Luego:

$$\bar{V} = \frac{V_*}{0.4} \ln \frac{r}{k_s} + 4.73 V_* \quad (4.43)$$

Como $r = d/2$ se obtiene:

$$\bar{V} = \frac{V_*}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73 V_*$$

$$\bar{V} = V_* \left(\frac{1}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73 \right) \quad (4.44)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{f}{8}} V$$

Luego al remplazar en la ecuación 4.44 se llega a:

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{f}{8}} \bar{V} \left(\frac{1}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73 \right)$$

Al despejar el factor de fricción f :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln \frac{d}{k_s} + 0.88388 \ln \frac{1}{2} + 1.672$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.88388 \ln \frac{d}{k_s} + 1.060$$

Nuevamente, Prandtl y Von Kármán hicieron el cambio en la base del logaritmo a fin de obtener la siguiente expresión para el cálculo de la ecuación de fricción f en flujos hidráulicamente rugosos:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.035 \log_{10} \left(\frac{d}{k_s} \right) + 1.060 \quad (4.45)$$

Por último, ajustaron su ecuación a datos experimentales, estableciendo la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left(\frac{d}{k_s} \right) + 1.14 \quad (4.46)$$

Dicha ecuación es válida para casos en los cuales el espesor de la subcapa límite es menor que el tamaño real de la rugosidad absoluta de las paredes internas de la tubería.

4.9.5 Flujos Hidráulicamente en Transición

Para los casos en los cuales el flujo estaba en la zona de transición entre los flujos hidráulicamente liso y rugoso, Prandtl y Von Kármán no pudieron deducir una ecuación que describiera el factor de fricción en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. Encontramos que f era una función complicada de k_s/d y de Re . El establecimiento de una ecuación definitiva tuvo que esperar los trabajos de los investigadores ingleses Colebrook y White.

4.10 Clasificación de las rugosidades en tuberías. Trabajos de Colebrook – White

La gran mayoría de los flujos en tuberías, cuando por ellas fluye agua, se encuentra en la zona de transición de los diagramas de Nikuradse y Moody; por ello se podía aplicar ninguna de las ecuaciones de diseño de Prandtl y Von Kármán. Dos investigadores ingleses, C.F. Colebrook y White, hicieron una clasificación de las rugosidades relativas con el fin de entender mejor el flujo transicional. El trabajo de estos dos investigadores se desarrolló en la siguiente forma.

Si en el diagrama de Nikuradse se hubiesen tenido en cuenta tuberías reales, la zona de flujo transicional habría sido diferente. En la siguiente figura se esquematiza una parte de ese diagrama, en el cual se establece la diferencia entre los tubos de Nikuradse y las tuberías comerciales (reales). Es claro que la separación de la curva “lisa” es gradual en este último caso.

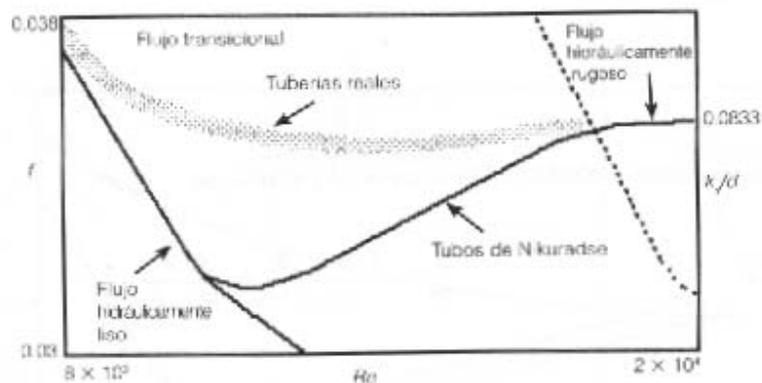


Figura 41. Esquema parcial del diagrama de Nikuradse mostrando la diferencia de comportamiento entre las tuberías reales y tubos de Nikuradse en la zona de flujo transicional. Este trabajo utilizado posteriormente por Moody para desarrollar su diagrama de tuberías comerciales.

Una vez establecido el comportamiento anterior, Colebrook y White decidieron, en 1939, estudiar en detalle el flujo en la zona transicional, a fin de establecer una ecuación que permitiera el cálculo del factor de fricción f para este tipo de flujo. Los pasos seguidos por los dos investigadores fueron:

Compararon la rugosidad absoluta con el espesor de la subcapa limite laminar viscosa

$$\frac{k_s}{\delta'} = \frac{\frac{k_s}{d}}{\frac{\delta'}{d}}$$

En esta ecuación se puede remplazar el valor del espesor de la subcapa limite laminar viscosa:

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{V_*} \quad (4.3)$$

Luego; se llega al siguiente resultado:

$$\frac{\delta'}{d} = \frac{11.6\nu}{V_* d} \quad (4.47)$$

Por otro lado se tiene que, por definición:

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (4.48)$$

Y de la ecuación 4.38 se obtiene:

$$V_* = \bar{V} \sqrt{\frac{f}{8}}$$

Y al remplazar este último resultado en la ecuación 4.47 se obtiene:

$$\frac{\delta'}{d} = \frac{11.6\nu\sqrt{8}}{\bar{V}d\sqrt{f}} = \frac{32.81}{\text{Re}\sqrt{f}}$$

Finalmente:

$$\frac{k_s}{\delta'} = \frac{k_s}{d} \frac{\text{Re}\sqrt{f}}{32.81}$$

De donde:

$$\frac{k_s}{d} \operatorname{Re} \sqrt{f} = 32.81 \frac{k_s}{\delta'} \quad (4.49)$$

Colebrook y White comprobaron con esta última ecuación que el término $\left(\frac{k_s \operatorname{Re} \sqrt{f}}{d}\right)$ define en forma clara la rugosidad relativa.

Tomaron las ecuaciones de Prandtl y Von Kármán y las transformaron de la siguiente manera:

Flujo hidráulicamente rugoso: Al despejar de la ecuación 4.46 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{d}{k_s} \right) = 1.14 \quad (4.46')$$

Flujo hidráulicamente liso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \operatorname{Re} \sqrt{f} - 0.8 \quad (4.42)$$

De donde se obtiene, restando $2 \log_{10} (d/k_s)$ a ambos lados de la anterior ecuación, el siguiente resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2 \log_{10} \frac{d}{k_s} = 2 \log_{10} \left(\frac{k_s}{d} \operatorname{Re} \sqrt{f} \right) - 0.8 \quad (4.50)$$

Compararon los términos de la izquierda de las ecuaciones 4.46/ y 4.50 con el término $\left(\frac{k_s \operatorname{Re} \sqrt{f}}{d}\right)$ y produjeron la gráfica que aparece en la figura 42, para tubos comerciales y tubos con rugosidad artificial.

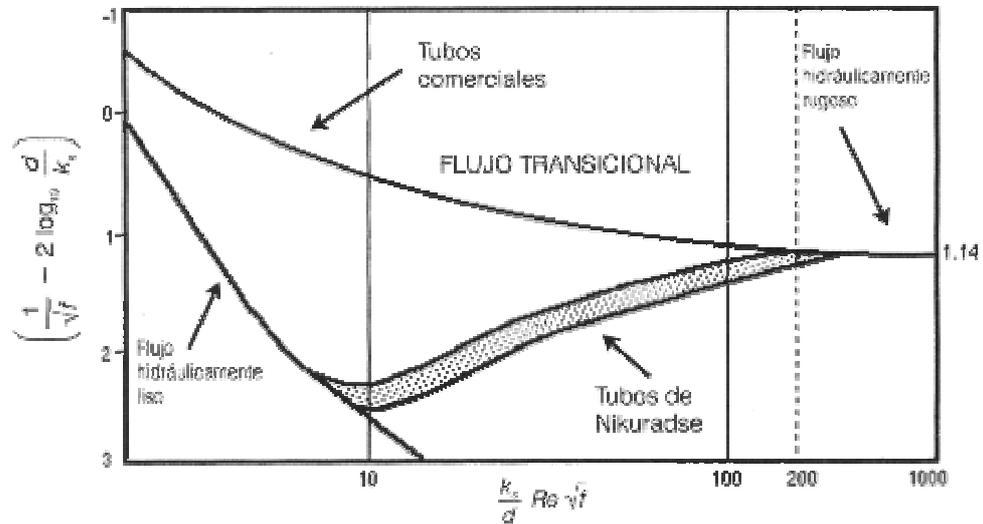


Figura 42. rugosidad relativa como función del factor de fricción f y el número de Reynolds en la zona de flujo transicional.

A partir de los resultados de la figura 42 obtuvieron:

Flujos hidráulicamente lisos:

$$\frac{k_s}{d} Re \sqrt{f} \leq 10 \quad (4.51)$$

Flujos en la zona de transición:

$$10 < \frac{k_s}{d} Re \sqrt{f} \leq 200 \quad (4.52)$$

Flujos hidráulicamente rugosos:

$$\frac{k_s}{d} Re \sqrt{f} > 200 \quad (4.53)$$

Luego, tomaron la ecuación 4.49 de la cual obtuvieron:

$$\frac{\text{Re}\sqrt{f}}{d} = \frac{32.81}{\delta'}$$

Y al remplazar este resultado en las desigualdades 4.51 a 4.53, llegaron a las siguientes desigualdades:

Flujos hidráulicamente lisos:

$$\begin{aligned} \frac{k_s}{\delta'} 32.81 &\leq 10 \\ \frac{k_s}{\delta'} &\leq 0.305 \\ k_s &\leq 0.305\delta' \end{aligned} \quad (4.54)$$

Este resultado indica que para que el flujo sea hidráulicamente liso, el tamaño de la rugosidad tiene que ser menor al 30% del espesor de la subcapa límite laminar viscosa.

Flujos hidráulicamente rugosos:

$$\begin{aligned} \frac{k_s}{\delta'} 32.81 &\geq 200 \\ \frac{k_s}{\delta'} &\geq 6.10 \\ k_s &\geq 6.10\delta' \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para que el flujo sea hidráulicamente rugoso el tamaño de la rugosidad debe ser superior a 6 veces el espesor e la subcapa laminar viscosa:

Flujos en la zona de transición:

Con sus resultados, Colebrook y White lograron definir claramente los límites entre los cuales ocurre el flujo en transición:

$$0.305\delta' < k_s \leq 6.10\delta' \quad (4.56)$$

Este resultado los llevó a razonar en torno a que si la transición debía ser un cambio gradual entre las condiciones lisas y rugosas, la ecuación necesaria para definir el factor

de fricción en la zona de transición debería ser una combinación de la ecuación para flujo hidráulicamente liso y rugoso. Teniendo en cuenta la anterior conclusión, Colebrook y White establecieron la siguiente ecuación para el factor f en la zona de transición.

A partir de la ecuación 4.42 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \frac{\text{Re} \sqrt{f}}{2.51}$$

Y de la ecuación 4.46 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \frac{3.7d}{k_s}$$

Después de estudiar el comportamiento de la rugosidad relativa en la zona de transición llegaron a la conclusión de que las dos anteriores ecuaciones eran dos casos particulares extremos del flujo turbulento. Estas ecuaciones se podrían reunir en una sola:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left(\frac{3.7d}{k_s} + \frac{\text{Re} \sqrt{f}}{2.51} \right)$$

Era claro que para el caso del flujo hidráulicamente liso, la rugosidad absoluta debía ser mucho menos que el diámetro de la tubería y, por consiguiente, el primer sumando del paréntesis debía ser de un orden de magnitud menor que el segundo, desapareciendo en el límite. Lo contrario sucedía para el flujo hidráulicamente rugoso.

Finalmente, Colebrook y White decidieron invertir los términos del logaritmo a fin de que apareciera la rugosidad relativa y no su inverso. Luego:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (4.57)$$

En donde combinaron los resultados de Von Kármán. La ecuación 4.57 probó ser válida para todo tipo de flujo turbulento en tuberías. Sin embargo, tiene el problema de que no es una ecuación explícita para el factor de fricción f , lo cual implica la necesidad de utilizar algún método numérico para calcularlo una vez se conozcan todas las otras variables.

5. CONCLUSIONES

En el proceso de realización de la monografía se profundizó en varios conceptos básicos sobre la capa límite y su importancia y como consecuencia aparecieron nuevas dudas que fueron satisfechas a través de consultas a publicaciones sobre el tema y/o charlas con nuestro asesor. Nuestros avances se ven reflejados en los siguientes:

El concepto de capa límite reconcilia la experimentación con la teoría, al presentar un procedimiento analítico cuyos resultados reflejan el comportamiento observado en el flujo de fluidos, sean estos internos o externos, además, se constituye en uno de los avances más notorios en el estudio de la mecánica de fluidos por permitir determinar de manera más aceptable el perfil de velocidad y presión; por ejemplo, se pasó del comúnmente aceptado perfil de velocidad parabólico consecuente con las investigaciones de Newton a un perfil complejo conformado por segmentos exponenciales, logarítmicos y lineales, que se ajustan de una mejor manera a los resultados obtenidos experimentalmente.

La introducción del concepto, estudio y formulación de la capa límite, proporcionó un enlace entre el flujo ideal y el flujo real, lo que facilitó el estudio de los fluidos y la comprensión de fenómenos tales como el arrastre, y la separación de estela en objetos abordados por un fluido; permitiendo avances en numerosos campos de la ciencia y la tecnología, encontrando aplicaciones en la optimización del diseño de sistemas de conducción de alta eficiencia, el entendimiento y estudio de sistemas naturales como la circulación del torrente sanguíneo, intercambio gaseoso en el sistema respiratorio, circulación de sabia en las plantas, diseño de superficies en contacto con fluidos, como cascos de buques y submarinos, fuselajes de aviones y transbordadores espaciales, diseño de formas y superficies de automóviles de alto rendimiento. Y las posibilidades son infinitas, ya que el concepto se puede usar en cualquier estudio donde intervengan fluidos.

La capa límite, es decir su espesor, longitud de separación y el hecho de ser laminar o turbulenta, depende en gran medida de las características morfológicas de la pared sólida con la cual interactúa el fluido, entonces se puede decir que en el caso hipotético de encontrar una superficie perfectamente lisa, el coeficiente de fricción, y por ende la capa límite no existirían e inmediatamente el perfil de velocidad sería constante, el esfuerzo cortante no sería mayor al producido por el intercambio del paquete de moléculas y sus respectivos momentum y la caída presión sería notablemente pequeña . Ahora bien, aunque la experiencia nos demuestre que esta condición es imposible, se encuentran superficies con diferentes rugosidades por lo cual los análisis matemáticos difieren y hacen necesario determinar si el flujo es hidráulicamente liso o hidráulicamente rugoso por medio de la relación del espesor de la subcapa laminar viscosa, y la rugosidad de la superficie.

Al analizar la capa límite bajo la concepción energética, se nota claramente que esta se debe a un intercambio de momentum entre las partículas del fluido y las del sólido. Para aclarar esto utilizaremos la herramienta del laboratorio mental: imaginemos una maquina capaz de hacer tomas a una velocidad cercana a la luz y a nivel molecular con la cual observaremos los choques entre moléculas de fluido y moléculas de la superficie sólida en las cercanías de esta, dando como consecuencia un sin número de choques elásticos que provocarían una drástica disminución de energía de la partícula fluida hasta el punto de disminuir su velocidad a cero, dejándola confinada y en intimo contacto con la superficie sólida. En estratos superiores (hasta el eje de la tubería) los choques suceden entre partículas fluidas con velocidades diferentes provocando un intercambio menos violento con el que se establece el perfil de velocidades descrito por los investigadores.

BIBLIOGRAFÍA

WHITE, Frank M. Mecánica de fluidos. Mexico D.F.: McGraw Hill, 1983

MUNSON, Bruce R. Fundamentos de mecánica de fluidos. Mexico D.F.: Limusa, 1999

SCHLICHTING, Heman. Boundary layer theory. New York: McGraw Hill, 1960

SALDARRIAGA V., Juan G. Hidráulica de tuberías. Bogotá D.C.: McGraw Hill, 1998

POTTER, Merle C. Mecánica de fluidos. Mexico D.F.: Thomson, 1998

HANSEN, Arthur G. Mecánica de fluidos. Mexico D.F.: Limusa, 1974.

STREETER, Victor L. y WYLIE, E. B. Mecánica de los fluidos. Mexico D.F.: McGraw Hill, 1987.

GRATTON, Julio. Introducción a la mecánica de fluidos. Buenos Aires: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2002