



Universidad
Tecnológica de Bolívar
CARTAGENA DE INDIAS

Formulación Acoplada BEM-BEM para el Análisis de Problemas de Interacción Fluido-Estructura

Trabajo de Grado Maestría en Ingeniería Énfasis
Mecánica

Autor: Alexander José Narváez Cruz

Orientador: Prof. PhD Jairo Francisco Useche Vivero

Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Facultad de Ingenierías

Universidad Tecnológica de Bolívar

Formulación Acoplada BEM-BEM para el Análisis de Problemas de Interacción Fluido-Estructura

**Trabajo de Grado Maestría en Ingeniería Énfasis
Mecánica**

Memoria que presenta para optar al título de M.Sc en ingeniería con
énfasis en ingeniería mecánica

**Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
Facultad de Ingenierías
Universidad Tecnológica de Bolívar**

A Dios todopoderoso

A mi familia

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a Jairo Useche , mi director , por su gran visión y apoyo. Gracias a su profesionalismo ha sabido introducirme en la matemática aplicada y, con ello, al buen término de este trabajo investigativo.

No puedo dejar pasar estas líneas sin mencionar a quien ha sido un importante pilar de mi formación durante la maestría y quien me aportó grandes cosas durante el seguimiento y retroalimentación en las asignaturas trabajo de grado I y II, Edgardo Arrieta, quien es para mi un excelente profesor, dentro y fuera de las aulas.

Al profesor José Luis Villa , por su gran predisposición a orientar y dar solución a los problemas.

Al cuerpo de docentes de la maestría , por su esmero por en entregar más que el simple conocimiento.

A mis amigos de la maestría en ingeniería , con los cuales compartí gratas experiencias, en especial con Rosmery Canabal, Mary Arias y German Herrera, los cuales se identifican con mi esquema de trabajo.

Al laboratorio de computación de alto desempeño (HPCLAB, High Performance Computing Laboratory) de la Universidad Tecnología de Bolívar.

Finalmente, un profundo agradecimiento a toda mi familia, sin su amor y cariño, siempre presente, no hubiese sido posible culminar este trabajo.

Resumen

En este trabajo se presenta una formulación por elementos de contorno para el análisis de un fluido acústico acoplado a una membrana homogénea. La formulación utilizó elementos constantes cuadriláteros para discretizar la frontera del fluido y elementos constantes para la membrana. Los nodos de la interfaz del fluido se utilizaron como puntos de colocación interiores para la membrana. La solución fundamental elasto-estática fué empleada para resolver el problema dinámico. Las integrales de dominio relacionadas con los términos inerciales y cargas distribuidas en el dominio, son llevadas al contorno utilizando el método de reciprocidad dual en conjunto con la función de base radial $1 + r$. Para la integración en el tiempo de problemas transientes se usó el método de Houbolt. Fueron analizados varios problemas bajo cargas de presión de impacto y armónicas de baja frecuencia. Los resultados fueron analizados en general teniendo en cuenta la naturaleza de las soluciones de problemas desacoplados resueltos con elementos finitos, aunque uno de los problemas pudo ser comparado con dos modelos acoplados usando el método de diferencias finitas (FDM).

Palabras clave: (Elementos de contorno, reciprocidad dual, interacción fluido-estructura, fluido acústico, membrana.)

Abstract

This work presents a coupled formulation for boundary element analysis of an acoustic fluid coupled to a homogeneous membrane. Constant quadrilateral elements and constant elements were used for fluid and membrane discretization, respectively. The nodes of the interface of the fluid were used as interior collocation points for the membrane. The elastostatic fundamental solution is used to solve the dynamic problem. The domain integral related with the inertial terms and domain loads, are transformed into boundary integrals using the dual reciprocity method in conjunction with the radial basis function $1 + r$. The time integration for transient problems is carried out using the Houbolt method. Several problems were analyzed under impact pressure loads and low frequency harmonic loads. The results in general were analyzed taking into account the nature of the solutions of decoupled problems solved by finite element method, although one of the problems could be compared with two coupled models using the finite difference method (FDM).

Keywords: Boundary elements, dual reciprocity, fluid structure interaction, acoustic fluid, membrane.

Contenido

| | |
|--|-----------|
| Agradecimientos | IV |
| Resumen | v |
| 1. Introducción | 2 |
| 1.1. Análisis de problemas acoplados de interacción fluido-estructura | 2 |
| 1.2. Revisión Bibliográfica | 6 |
| 1.3. Descripción del trabajo de investigación | 12 |
| 2. Capítulo 1 | 15 |
| 2.1. Análisis dinámico de una membrana | 15 |
| 2.1.1. Ecuación de equilibrio dinámico de una membrana en contacto con un fluido acústico | 15 |
| 2.1.2. Ecuación dinámica de la vibración libre de una membrana | 19 |
| 2.2. Esquemas de integración en el tiempo | 20 |
| 2.2.1. Método de Houbolt | 22 |
| 2.2.2. Método de Newmark | 23 |
| 2.3. Ejemplo numérico | 25 |
| 2.3.1. Membrana cuadrada bajo un campo de desplazamiento inicial sobre todo el dominio | 25 |
| 2.3.2. Conclusiones | 29 |
| 3. Capítulo 2 | 30 |
| 3.1. Análisis dinámico de ondas acústicas | 30 |

| | |
|--|-----------|
| 3.2. Ejemplos numéricos | 33 |
| 3.2.1. Canal bidimensional cerrado en un extremo y sujeto a una carga de impacto | 33 |
| 3.2.2. Canal bidimensional cerrado en un extremo y sujeto a una carga armónica | 36 |
| 3.2.3. Canal tridimensional cerrado en un extremo y sujeto a una carga de impacto | 37 |
| 3.2.4. Canal tridimensional cerrado en un extremo y sujeto a una carga armónica | 39 |
| 3.3. Conclusiones | 40 |
| 4. Capítulo 3 | 41 |
| 4.1. Ecuaciones de acoplamiento | 41 |
| 4.2. Implementación computacional | 46 |
| 4.3. Descripción del programa para problemas acoplados | 47 |
| 4.3.1. Preprocesamiento | 47 |
| 4.3.2. Armado y solución del sistema de ecuaciones | 49 |
| 4.3.3. Postprocesamiento | 51 |
| 4.4. Diagrama de flujo | 51 |
| 5. Capítulo 4 | 53 |
| 5.1. Resultados numéricos | 53 |
| 5.1.1. Fluido contenido en una estructura con forma de caja y sometido a una carga de impacto | 54 |
| 5.1.2. Fluido contenido en una estructura con forma de caja y sometido a una carga armónica | 66 |
| 5.1.3. Fluido contenido en un canal y sometido a una carga armónica . | 85 |
| 5.2. Conclusiones | 97 |
| 6. Conclusiones | 98 |
| 6.1. Conclusiones finales | 98 |

6.2. Trabajos futuros 101

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| 1-1. a) Interacción para dominios físicos diferentes, b) Interacción para dominios físicos similares | 2 |
| 1-2. Problema de extracción de un metal en el cual el flujo plástico está acoplado con el campo térmico | 3 |
| 2-1. Dominio para una membrana elástica | 15 |
| 2-2. Problema 1: Dominio de la membrana con condiciones de frontera para $t > 0$ | 26 |
| 2-3. Problema 1: Puntos de colocación interiores y discretización de la frontera con elementos constantes. | 26 |
| 2-4. Problema 1: Desplazamientos (m) para $t = 16s$ | 27 |
| 2-5. Problema 1: Desplazamientos en $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ usando Houbolt y elementos constantes. | 27 |
| 2-6. Problema 1: Reacción en $B(1, \frac{1}{2})$ usando Houbolt y elementos constantes. | 28 |
| 3-1. Dominio del fluido acústico | 30 |
| 3-2. Problema 2: Dominio del fluido con condiciones de frontera para $t > 0$ y punto de interés de la solución. | 34 |
| 3-3. Problema 2: Puntos de colocación interiores y discretización de la frontera con elementos constantes. | 34 |
| 3-4. Problema 2: Presión acústica en $A(12, \frac{1}{2})$ usando el método de Houbolt y elementos constantes. | 35 |

| | |
|--|----|
| 3-5. Problema 3: Presión acústica en $A(12, \frac{1}{2})$ usando el método de Houbolt y elementos constantes. | 36 |
| 3-6. Problema 4: Dominio del fluido con condiciones de frontera para $t > 0$ y punto de interés de la solución | 38 |
| 3-7. Problema 4: Discretización de la superficie con elementos constantes. . . | 38 |
| 3-8. Problema 4: Presión acústica en $A(12, \frac{3}{2}, 3)$ bajo carga heaviside usando el método de Houbolt y elementos constantes o lineales. | 39 |
| 3-9. Problema 5: Presión acústica en $A(12, \frac{3}{2}, 3)$ bajo carga armónica usando el método de Houbolt y elementos constantes o lineales. | 40 |
| 4-1. Dominios del problema acoplado | 41 |
| 4-2. Diagrama de flujo del programa | 52 |
| 5-1. Problema 6: Dominio con condiciones de frontera para $t > 0$ y puntos de interés de la solución. | 54 |
| 5-2. Problema 6: Discretización de la frontera. | 55 |
| 5-3. Problema 6: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 56 |
| 5-4. Problema 6: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes. | 57 |
| 5-5. Problema 6: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 57 |
| 5-6. Problema 6: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 58 |
| 5-7. Problema 7: Discretización de la frontera. | 59 |
| 5-8. Problema 7: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 60 |
| 5-9. Problema 7: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes. | 61 |

| | |
|--|----|
| 5-10. Problema 7: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 61 |
| 5-11. Problema 7: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 62 |
| 5-12. Problema 8: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 63 |
| 5-13. Problema 8: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes. | 64 |
| 5-14. Problema 8: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 64 |
| 5-15. Problema 8: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 65 |
| 5-16. Problema 9: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 67 |
| 5-17. Problema 9: Desplazamiento máximo en el punto $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ vs tiempo. | 68 |
| 5-18. Problema 9: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes. | 68 |
| 5-19. Problema 9: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 69 |
| 5-20. Problema 9: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 69 |
| 5-21. Dominio del problema 1D discretizado con diferencias finitas y condiciones de frontera | 70 |
| 5-22. Discretización de la membrana por DR-BEM usando elementos lineales | 71 |
| 5-23. Deflexión de la membrana como función de la razón P/T_o | 71 |
| 5-24. Deflexión en el centro de la membrana para el modelo 3D por DR-BEM Vs el modelo 1D por FDM | 75 |
| 5-25. Presión acústica en el centro de la membrana para el modelo 3D por DR-BEM Vs el modelo 1D por FDM | 76 |

| | |
|--|----|
| 5-26. Dominio del problema 2D discretizado con diferencias finitas y condiciones de frontera | 77 |
| 5-27. Deflexión en el centro de la membrana para el modelo 3D por DR-BEM Vs el modelo 2D por FDM | 84 |
| 5-28. Presión en el centro de la membrana para el modelo 3D por DR-BEM Vs el modelo 2D por FDM | 84 |
| 5-29. Problema 10: Dominio con condiciones de frontera para $t > 0$ y punto de interés de la solución. | 85 |
| 5-30. Problema 10: Discretización de la frontera. | 86 |
| 5-31. Problema 10: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes. | 87 |
| 5-32. Problema 10: Convergencia del máximo desplazamiento en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ contra la tensión en la membrana | 88 |
| 5-33. Problema 10: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes. | 88 |
| 5-34. Problema 10: Monitoreo de la presión en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes. | 89 |
| 5-35. Problema 10: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes. | 89 |
| 5-36. Problema 11: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes. | 90 |
| 5-37. Problema 11: Convergencia del máximo desplazamiento en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ contra la tensión en la membrana | 91 |
| 5-38. Problema 11: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes. | 92 |
| 5-39. Problema 11: Monitoreo de la presión en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes. | 92 |
| 5-40. Problema 11: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes. | 93 |

| | |
|---|----|
| 5-41. Problema 12: Geometría y condiciones de contorno | 94 |
| 5-42. Problema 12: Discretización de la frontera | 95 |
| 5-43. Problema 12: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, 0, 0)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 95 |
| 5-44. Problema 12: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes. | 96 |
| 5-45. Problema 12: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, 0, 0)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 96 |
| 5-46. Problema 12: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, 0, 0)$ usando Houbolt y elementos constantes. | 97 |

1 Introducción

1.1. Análisis de problemas acoplados de interacción fluido-estructura

Frecuentemente dos o más sistemas físicos interactúan entre si y la solución de uno de ellos es imposible de obtener independientemente, sin la solución simultánea de los otros. Estos sistemas se conocen como sistemas acoplados.

El acoplamiento se puede dar en dos formas a saber : A través de las condiciones de contorno impuestas en las interfaces físicas entre dominios, ver figura (1.1) ,o a través de las ecuaciones diferenciales de gobierno que describen fenómenos físicos distintos, ver figura (1-2).

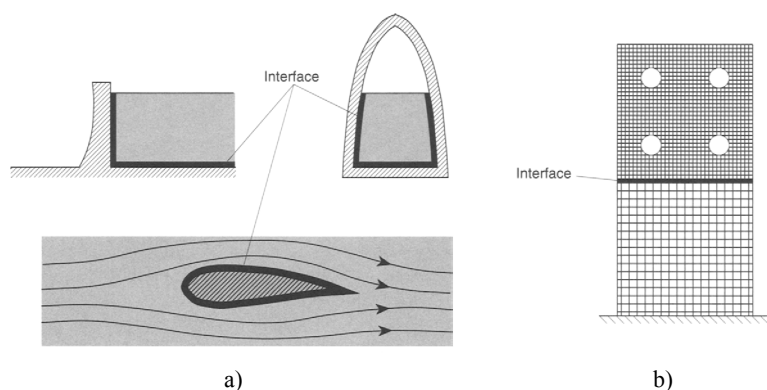


Figura 1-1: a) Interacción para dominios físicos diferentes, b) Interacción para dominios físicos similares

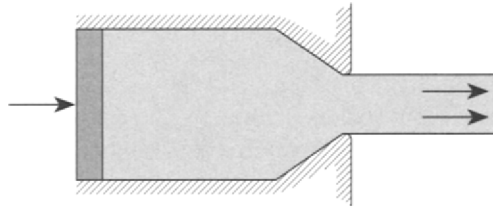


Figura 1-2: Problema de extracción de un metal en el cual el flujo plástico está acoplado con el campo térmico

Uno de los sistemas acoplados más comunes es el conocido como la interacción fluido estructura. En él, tanto el sistema fluido como el estructural no pueden ser resueltos independientemente, dado que se desconocen las fuerzas que actúan en las interfases, ver Zienkiewicz, Taylor et al. (2005).

La interacción fluido-estructura es la interacción de una estructura móvil y/o deformable que está sumergida o contiene a un fluido. El movimiento de la estructura causa un cambio en los esfuerzos del fluido que actúan sobre la superficie mojada de la estructura, esto a su vez provoca un cambio en el movimiento de la estructura. Un modelo que captura tal interacción debe usar un acoplamiento de doble vía, donde el movimiento del fluido afecta el movimiento de la estructura y el movimiento de la estructura afecta el movimiento del fluido. Sin embargo, la interacción fluido-estructura podrá envolver interacciones oscilatorias o no oscilatorias.

Las interacciones oscilatorias ocurren cuando la estructura experimenta deformaciones debido a las fuerzas transmitidas por el fluido, se deforma a su configuración original para reducir la deformación, pero es forzada de vuelta hacia la configuración deformada una vez más por las fuerzas del fluido. Esta interacción continúa causando un movimiento oscilatorio en la estructura. Las interacciones no oscilatorias son aquellas que causan una deformación uniforme o casi-uniforme en la estructura debido a las fuerzas del fluido.

Existen dos clases bien diferenciadas de problemas de interacción fluido - estructura: En la primera clase se sitúan aquellas aplicaciones en las cuales la estructura sufre pequeñas deformaciones. En esta clase se encuentran todo tipo de variedad de problemas de acústica. Con pequeñas, se quiere significar que los desplazamientos de la estructura pueden ser despreciados en comparación con las dimensiones globales del sistema. Aún así la velocidad que induce la estructura sobre el fluido en el borde de interacción no puede ser despreciada, como así tampoco la elasticidad de la estructura, ya que esta relaja al sistema pudiendo influir notoriamente en su dinámica.

En la segunda clase de problemas se sitúan aquellas aplicaciones en las que los desplazamientos de la estructura no pueden ser despreciados y deben forzosamente tomarse en cuenta. Incluyendo, solo por mencionar unas pocas de estas aplicaciones, oscilaciones de perfiles aerodinámicos, dinámica de paracaídas, predicción de oscilaciones inducidas y flujo sanguíneo en arterias flexibles. En esta clase de problemas debe no solo tratarse el problema de interacción sino también el modelado matemático del movimiento de la interfaz.

Dependiendo del acotamiento del dominio, diferente será la naturaleza de estos problemas: en la mayoría de las situaciones el sólido es un dominio acotado, aquellos problemas en que el dominio del fluido también es acotado se llaman problemas interiores (por ejemplo, un tanque lleno de líquido) y cuando el dominio del fluido no es acotado se llaman problemas exteriores (por ejemplo, una barco flotando en el mar).

Puede observarse que el conjunto de problemas que engloba la denominación interacción fluido-estructura es muy diversa, sin embargo presentan dos características comunes, esto es, por una parte involucran el estudio tanto del fluidos como de estructuras sólidas y, por otro lado, requieren establecer modelos adecuados para una resolución eficaz del problema acoplado.

De este modo, el fenómeno de interacción fluido - estructura, al igual que los demás problemas de la naturaleza pueden ser estudiados con la ayuda de las leyes físicas en términos de ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales.

Los ingenieros y científicos que estudian estos fenómenos deben desarrollar dos tareas básicas para alcanzar este fin:

- La formulación matemática del fenómeno físico
- La solución del modelo matemático

Los modelos matemáticos son desarrollados a partir de hipótesis. El desarrollo de ecuaciones de gobierno, en general, no es una tarea complicada, pero entregar su solución exacta si lo es. La utilización de métodos numéricos provee una alternativa para la solución aproximada de dichas ecuaciones.

Los métodos numéricos más utilizados para los problemas acoplados son el método de elementos finitos (FEM-Finite Element Method) y el método de elementos de contorno (BEM-Boundary Element Method), aunque existen otros abordajes para casos particulares.

1.2. Revisión Bibliográfica

Las técnicas numéricas para tratar sistemas acústicos estructurales acoplados estaban inicialmente basadas en formulaciones acopladas de elementos finitos (FEM-FEM), comenzando por Zienkiewicz y Newton (1969) y hasta en años recientes como es el caso de Merodio y Ortega (Nov. 2009). Sin embargo, el BEM comenzó a ser cada vez más atractivo para distintas áreas de aplicación y se pensó en cómo combinar sus ventajas con las de elementos finitos.

Esto último, porque ambos métodos poseen características que les proporcionan ventajas en un caso y desventajas en otro, el FEM es apropiado para modelar medios no homogéneos así como anisotrópicos, y puede tratar no linealidades, el BEM permite modelar regiones infinitas así también regiones de alta concentración de elevados gradientes.

En aplicaciones donde el tamaño del problema puede tornarse grande, como es el caso de estructuras en contacto con una gran extensión de fluido, la partición del dominio en elementos finitos puede hacer que las matrices de masa y rigidez del problema acoplado sean bastante grandes, incrementando significativamente el tiempo de cómputo de los eigenvalores.

En este caso, BEM se convierte en una atractiva herramienta reduciendo el tamaño de las matrices debido a que únicamente se requiere la partición de la frontera interfase. Una desventaja del método, se encuentra en el hecho de que su formulación conduce a matrices no simétricas. Trabajos como los de Shaw y Falby (1978) Mathews (1986), Everstine y Henderson (1990), , Coyette (1990), Hamdi (1991), Kopuz y Lalor (1995), Rajakumar et al (1996), Li (1999), Gaul y Wensel (2002), Young (2008) y Soares (2009) presentan formulaciones acopladas entre elementos finitos y elementos de contorno para discretizar la estructura y el medio acústico respectivamente.

De manera más específica, se encuentran publicaciones importantes de interacción fluido acústico y estructura tipo placas/cáscaras. Entre estas, se encuentran los trabajos de Bézine (1980), Sgard, Atalla et al (1994), Bérot y Peseux (1998), Fritze, Marburg et al (2005) y Li (2011).

Finalmente ,se han publicados diversos artículos de carácter aplicativo donde se estudia el fenómeno de interacción fluido acústico y estructuras del tipo Shell y Thin Plates , fundamentados en métodos híbridos (principalmente FEM-BEM), entre ellos están: Rajakumar, Ali et al (1992), Everstine y Cheng (1992), Rajakumar, Ali et al (1996), Chen, Ju et al (2000) , Xu , Wang et al (2002) , Citarella, Federico et al (2007), Merz, Oberst et al (2007), Liu y Chen (2009), Merz, Kinns et al (2009), Of y Steinbach (2010), Mollinedo H. (2010) y He, Liu et al (2011).

La aplicabilidad y eficiencia del acoplaje FEM-BEM es revisada por Von Storff (1992), aunque Zienkiewicz , Kelly et al. (1979) en su famoso trabajo destacaron los beneficios de combinar ambos métodos tomando lo mejor de cada mundo.

Las formulaciones BEM-BEM para problemas de interacción fluido-estructura son relativamente recientes y muy pocos trabajos se han encontrado en la literatura: Tanaka y Masuda (1988), Nolte (1998), Nolte y Gaul (1999), Soares y Mansur (2006), Soares (2008) y Burgschweiger et al (2008).

Tanaka y Masuda están como pinoeros en el arbordaje de problemas de acoplaje fluido acustico-estructura bajo este tipo de formulaciones. En su trabajo se asumió que la estructura estaba compuesta de componentes tipo platina exitados por una fuente de ruido externa o interna.La vibración de la cavidad está gobernada por la ecuación de Helmholtz y la estructura por la ecuación reducida de vibración para el pandeo fuera del plano. La solución del sistema de ecuaciones resultante permitió entonces conocer las propiedades del sistema acustico-estructural acoplado bajo consideración.

Nolte centra su atención en la propagación del sonido en regiones acopladas (Fluido/fluido, fluido/sólido y sólido/sólido). Al emplearse solo formulaciones por elementos de contorno, en contraste con elementos finitos, se satisface automáticamente la condición de radiación de Sommerfel y no se producen, como con elementos finitos reflexiones artificiales en las fronteras numéricas. Bajo este estudio solo se consideran problemas de tipo exterior o de dominios no acotados, para ello utiliza técnicas de subestructuras para la variedad de dominios en interacción.

El método seleccionado para el procedimiento de acople fluido-estructura está basado en la siguiente formulación para la frontera: Desplazamiento/vector de tracción- Presión/velocidad de partícula y para las interfaces se pueden calcular datos tipo Dirichlet o Neumann.

Los problemas tratados fueron los siguientes:

- Interacción Estructura-Fluido-Estructura: Emplea elementos estructurales constituidos de barras de acero, y como fluido el agua. La frecuencia bajo consideración corresponde casi al caso cuasiestático (1000 Hz).
- Viga sumergida en un fluido: En este caso, la viga es una estructura esbelta sumergida en agua. Las frecuencias analizadas son 1642/4597 Hz y 4596/9012 Hz para el caso de un extremo fijo y ambos libres respectivamente.
- Interacción Estructura-Suelo-Fluido: Se analiza el comportamiento dinámico de estructuras sobre el suelo. Aquí se consideran frecuencias de 300 y 500 Hz.

Soares y Mansur, describen en su artículo un procedimiento iterativo para el acoplaje BEM-BEM en el dominio espacio-tiempo. Basados en ciertas condiciones de frontera en la interfaz y algoritmos iterativos, establecen el acoplamiento de subdominios para tres tipos distintos de formulaciones en el espacio-tiempo: Dos basadas en las funciones de Green dependientes del tiempo (Una para subdominios acústicos y otra para

suddominios elásticos) y otra para el caso no lineal basada en las funciones de Green elasto-estáticas para modelar regiones con comportamiento plástico, las cuales requieren de discretización en el dominio.

Entre los problemas estudiados se encuentra un embalse con agua represada, donde se desea conocer la historia en el tiempo de los desplazamientos de puntos escogidos sobre la estructura del el embalse tras la interacción entre el fluido y la estructura cuando se aplica una carga senosoidal sobre la cresta de la estructura. Por otro lado, también se analiza un canal de agua sobre un terreno, donde se modelan las siguientes tipos de interacciones: Interacción fluido-estructura, interacción suelo-estructura e interacción fluido-suelo-estructura. Los resultados estuvieron acorde con otros artículos estudiados.

Ellos concluyen que usando tal procedimiento iterativo para el acoplaje, se alcanza una convergencia en pocas iteraciones, y por tanto resulta más económico computacionalmente que los enfoques directos. Además, establecen que existe una ventaja importante sobre el acoplamiento directo: Se permiten usar diferentes incrementos de tiempo y refinamientos de malla para cada subdominio, entonces, es posible conseguir estabilidad donde los algoritmos de acoplamiento directo conducen a resultados inestables.

En otra publicación, Soares describe un procedimiento algorítmico estable que permite modelar la interacción acústico-elastodinámica de subdominios. Esto, gracias al empleo de técnicas estabilizadas de elementos de contorno en el dominio del tiempo y el uso de expresiones apropiadas para las fronteras de interfaz entre subdominios.

Este trabajo se enfoca exclusivamente en el acoplaje de formulaciones de elementos de contorno basadas en soluciones fundamentales transientes.

Se consideran dos ejemplos numéricos a saber: El primero se trata de un embalse cargado en su cresta interactuando con el agua almacenada de un lago semi-infinito. El

segundo, se trata del análisis de una pared sólida adyacente a un dominio cerrado de fluido. Los resultados en ambos casos fueron apropiados y obtenidos a bajo costo computacional.

Finalmente, Burgschweiger et al en su investigación, realizaron cálculos para la resistencia al blanco acústico de objetos elásticos basados en el acoplamiento BEM-BEM. Este trabajo se hizo teniendo en cuenta la importancia de la detección y clasificación de objetos puestos en el fondo del mar o enterrados parcialmente en el sedimento para las misiones de caza de minas. Los objetos bajo consideración fueron: Cilindros rígidos o de cobre y esferas de aluminio inmersas en agua.

La anterior revisión bibliográfica permitió identificar que hasta la fecha solo se han acoplado formulaciones del método de elementos de contorno en el dominio de la frecuencia y en el espacio-tiempo (empleando soluciones fundamentales transientes) generalmente a través del BEM clásico.

Se evidencia también que el método de elementos de contorno de reciprocidad dual (DR-BEM), ver Partridge et al (1992), es uno de los más utilizados para convertir integrales de dominio a la frontera.

Por otra parte, como en problemas acoplados el costo computacional incrementa con el aumento de la frecuencia bajo análisis, tanto FEM como BEM tienen hasta el momento un límite de frecuencias de aplicabilidad y las técnicas de reducción de tamaño de modelos continúan siendo objeto de exploración. Técnicas no determinísticas se siguen proponiendo para problemas en el rango de media a alta frecuencia.

Algo importante a rescatar dentro del estado del arte es que dentro de la literatura no existen formulaciones acopladas BEM-BEM planteadas para analizar problemas espaciales de pared delgada acopladas a un fluido acústico, solo se han analizado sólidos acoplados y tal formulación no es válida para estructuras de pared delgada ni membra-

nas. Por otro lado, estos análisis no se han hecho utilizando soluciones fundamentales elasto-estáticas en conjunto con métodos como el de reciprocidad dual para el tratamiento de las integrales de dominio. Por último, la mayoría de problemas analizados hasta el momento están constituidos por geometrías simples y cantidades de elementos o grados de libertad relativamente pequeños.

Frente a la existencia de pocos estudios usando BEM en el análisis de estructuras espaciales de pared delgada, estudiar un fluido acoplado a este tipo de estructuras usando una formulación BEM-BEM en el dominio espacio-tiempo significa un aporte al área científica. Además, trabajos como los desarrollados por Useche y Albuquerque (2012) en el análisis dinámico de placas, constituyen una base fundamental para el desarrollo de trabajos relacionados con el acoplaje de estructuras espaciales delgadas a fluidos acústicos bajo formulaciones BEM-BEM.

1.3. Descripción del trabajo de investigación

El objetivo de este trabajo es desarrollar una formulación basada totalmente en los elementos de contorno que permita analizar la respuesta dinámica de estructuras espaciales delgadas acopladas a fluidos acústicos en el dominio espacio-tiempo.

El método de elementos de contorno de reciprocidad dual (DR-BEM) fue escogido para realizar este proyecto, debido a que trabaja con las mismas soluciones fundamentales de la ecuación diferencial de Laplace para todos los problemas físicos gobernados por ecuaciones del tipo Poisson y tan solo requiere puntos de colocación en vez de células (BEM clásico) para evaluar las integrales de dominio, ver Partridge et al (1992), además de ello es el más reportado para trabajar con problemas dinámicos.

Haciendo un balance entre las ventajas y desventajas entre los esquemas de discretización usando BEM en el dominio de la frecuencia y en el dominio espacio-tiempo, el presente trabajo se desarrolló para obtener una formulación acoplada BEM-BEM en el espacio-tiempo, primero porque está más acorde con la formación ingenieril y por ello resulta más fácil de entender, y con el avance actual en términos computacionales, la capacidad de memoria y procesamiento no es una limitante para abordar problemas de interacción fluido-estructura, y además, porque la revisión bibliográfica no reporta el uso de esta formulación con soluciones fundamentales elastostáticas (independientes del tiempo) en estructuras espaciales delgadas, ni en membranas.

Con esta formulación acoplada, se analizarán problemas de interacción fluido-estructura de tipo interior: problemas elasto-acústicos. Un problema modelo, de este tipo, consiste en determinar la respuesta dinámica de un fluido acústico, que ocupa un dominio acotado, en contacto con una estructura elástica, ambos en pequeños desplazamientos, sujeto a fuerzas externas periódicas.

En las aplicaciones es usual que la estructura sea delgada, en cuyo caso, además, la

interacción entre el fluido y la estructura suele ser más fuerte. Un ejemplo típico de aplicación es la dinámica de paracaídas.

Por otro lado, en este trabajo se consideran solo estructuras delgadas bajo la teoría de pequeños desplazamientos; de manera más específica, membranas isotrópicas en el rango de baja frecuencia acopladas a un fluido acústico donde intervienen cargas de impacto y armónicas.

Hay que tener en cuenta que la predicción numérica del comportamiento dinámico de sistemas acoplados no puede dividirse en un subproblema estructural y uno acústico, debido a la fuerte interacción entre las componentes del fluido y la estructura. De allí la importancia de proponer nuevos esquemas de acoplamiento numérico para la solución de dichos problemas y que en el peor de los casos tenga la misma eficiencia computacional de los esquemas antecesores o más recientes.

Este trabajo contribuye sustancialmente al avance de la técnica y el conocimiento, y permitirá integrar nuevos módulos de simulación numérica para problemas de acústica y elasto-acústica a las librerías del Physics del grupo de investigación GIMAT de la UTB.

La formulación presente en este trabajo buscará dar cabida a nuevas investigaciones para problemas similares en rangos de frecuencias mucho más altos y así explotar las capacidades del método de elementos de contorno.

El trabajo fue dividido en tres etapas: Las dos primeras enfocadas a la validación de las formulaciones por elementos de contorno de reciprocidad dual implementadas para cada problema físico en forma desacoplada, y la tercera enfocada en el desarrollo del esquema de acoplamiento para las ecuaciones de gobierno del problema de interacción fluido-estructura, y su revisión.

El presente trabajo consta de cinco capítulos: En el capítulo 2 se presentan tanto el análisis dinámico de una membrana en contacto con un fluido acústico, como el análisis para una membrana en vibración libre. Ambas ecuaciones diferenciales son discretizadas por DR-BEM.

En el capítulo 3 se presenta la formulación por DR-BEM de la ecuación de ondas para fluidos acústicos.

En el capítulo 4 se presentan las ecuaciones de acoplamiento para el problema de interacción fluido acústico - estructura y se muestra la forma de la implementación para la construcción y solución del sistema global de ecuaciones que rigen al fenómeno físico.

En el capítulo 5 se presentan algunos resultados numéricos para un fluido acústico contenido acoplado a una membrana.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones finales de los resultados obtenidos y se proponen algunos trabajos futuros.

2 Capítulo 1

2.1. Análisis dinámico de una membrana

2.1.1. Ecuación de equilibrio dinámico de una membrana en contacto con un fluido acústico

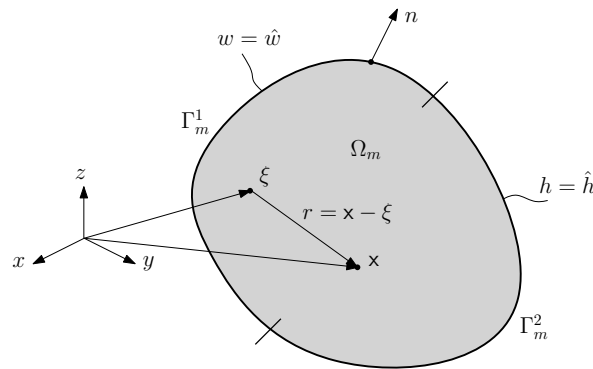


Figura 2-1: Dominio para una membrana elástica

La ecuación diferencial que rige las vibraciones transversales de una membrana elástica con dominio espacial ω_m confinada por la frontera $\Gamma_m = \Gamma_m^1 \cup \Gamma_m^2$ y que está en contacto con un fluido está dada de acuerdo a Myint-U y Debnath (2007) por:

$$T_o \nabla^2 w + p_f = \mu \ddot{w} \quad (2-1)$$

Donde ∇^2 es el operador laplaciano, T_o es la tensión por unidad de longitud de la membrana, μ es la masa por unidad de área de la membrana, p_f es la presión del fluido, w denota la deflexión y \ddot{w} la aceleración. Controlando la tensión ejercida sobre ésta es posible controlar su rigidez y la frecuencia natural de la misma. Empleando la teoría

de pequeños desplazamientos, se puede asumir que la tensión permanece constante y no se ve afectada por la deflexión de la membrana.

Dividiendo toda la ecuación por la tensión se obtiene:

$$\nabla^2 w + \frac{p_f}{T_o} = \frac{1}{c_m^2} \ddot{w} \quad (2-2)$$

Donde $c_m = \sqrt{\frac{T_o}{\mu}}$, la cual representa la velocidad de propagación del sonido en la membrana.

Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}); \quad \dot{w}(\mathbf{x}, 0) = w_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_m \quad (2-3)$$

y las condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann son:

$$w(\mathbf{x}, t) = \hat{w}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_m^1, t > 0; \quad h(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \hat{h}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_m^2, t > 0 \quad (2-4)$$

Formulación por elementos de contorno de reciprocidad dual (DR-BEM)

La ecuación diferencial (2-8) puede representarse por una formulación integral por elementos de contorno de la forma:

$$c(\boldsymbol{\xi})w(\boldsymbol{\xi}, t) + \int_{\Gamma} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t)d\Gamma - \int_{\Gamma} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) h(\mathbf{x}, t)d\Gamma = -\frac{1}{T_o} \int_{\Omega} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})p_f(\mathbf{x}, t)d\Omega + \frac{1}{c_m^2} \int_{\Omega} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\ddot{w}(\mathbf{x}, t)d\Omega \quad (2-5)$$

Donde \mathbf{x} y $\boldsymbol{\xi}$ son los puntos de campo y de colocación, respectivamente $q = \partial w / \partial n$, n es el vector unitario normal hacia afuera, $w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ y $h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ son las soluciones fundamentales para los desplazamientos y gradientes, respectivamente, las cuales para problemas bidimensionales son, ver Becker (1992):

$$w^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) \quad (2-6)$$

$$h^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{2\pi} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n} \quad (2-7)$$

Las integrales de dominio pueden convertirse en integrales del contorno usando el método de reciprocidad dual, obteniéndose lo siguiente:

$$c_i(\boldsymbol{\xi})w(\boldsymbol{\xi}, t) + \int_{\Gamma} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t)d\Gamma - \int_{\Gamma} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) h(\mathbf{x}, t)d\Gamma = -\frac{1}{T_o} \sum_{j=1}^{NDRM} \alpha_1^j \left(c_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{w}_1^{ij}(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{w}_1^j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{h}_1^j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})d\Gamma \right) + \frac{1}{c_m^2} \sum_{n=1}^{MDRM} \alpha_2^n \left(c_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{w}_2^{in}(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{w}_2^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Gamma} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{h}_2^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})d\Gamma \right) \quad (2-8)$$

Donde $NDRM$ y $MDRM$ representan el número total de puntos de colocación asociados a los términos no homogéneos; $\hat{w}_1^j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$, $\hat{w}_2^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$,

$\hat{h}_1^j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$, $\hat{h}_2^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ representan soluciones particulares de la ecuación de laplace. Los coeficientes α_1^j están relacionados con \ddot{w} a través de $\ddot{w} = \sum \alpha_1^j f_1^j$, y de modo similar, los coeficientes α_2^n están relacionados con p_f a través de $p_f = \sum \alpha_2^n f_2^n$. La ecuación se puede reescribir como, ver Partridge et al (1992):

$$c_i(\boldsymbol{\xi})w(\boldsymbol{\xi}, t) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t) d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) h(\mathbf{x}, t) d\Gamma_k =$$

$$-\frac{1}{T_o} \sum_{j=1}^{NDRM} \alpha_1^j \left(c_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{w}_1^{ij}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{w}_1^j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{h}_1^j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma_k \right)$$

$$+ \frac{1}{c_m^2} \sum_{n=1}^{MDRM} \alpha_2^n \left(c_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{w}_2^{in}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{w}_2^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{h}_2^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma_k \right)$$

Escogiendo las mismas funciones de aproximación de base radial para las integrales de dominio a transformar y usando la forma matricial compacta, la ecuación anterior se simplifica a:

$${}^m M \ddot{\mathbf{w}} + {}^m H \mathbf{w} - {}^m G \mathbf{h} + B \mathbf{p}^{pr} = \mathbf{0} \quad (2-9)$$

Donde ${}^m M$ es la matriz de masa de la membrana, ${}^m H$ y ${}^m G$ son las matrices de influencia, B es la matriz que convierte las presiones de dominio del fluido a fuerzas de presión sobre la membrana, y $\ddot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{p}^{pr}$ son los vectores de aceleración, desplazamientos, la derivada del desplazamiento con respecto a la normal y la presión transmitida por el fluido, respectivamente.

2.1.2. Ecuación dinámica de la vibración libre de una membrana

Para este caso la ecuación diferencial sin incluir las fuerzas de cuerpo, ni fuentes, es una simplificación de la ecuación (2-1) y está dada por:

$$\nabla^2 w = \frac{1}{c_m^2} \ddot{w} \quad (2-10)$$

Donde $c_m = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, la cual representa la velocidad del sonido en la membrana.

Formulación por elementos de contorno de reciprocidad dual (DR-BEM)

La formulación integral ecuación diferencial (2-10) se puede escribir como:

$$c(\boldsymbol{\xi})w(\boldsymbol{\xi}, t) + \int_{\Gamma} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t) d\Gamma - \int_{\Gamma} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) h(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \frac{1}{c_m^2} \int_{\Omega} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \ddot{w}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2-11)$$

La forma discretizada de la ecuación (3-4) por DR-BEM es :

$$c_i(\boldsymbol{\xi})w(\boldsymbol{\xi}, t) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t) d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) h(\mathbf{x}, t) d\Gamma_k =$$

$$\frac{1}{c_m^2} \sum_{n=1}^{NDRM} \alpha_j \left(c_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{w}_{ij}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} h^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{w}_j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} w^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{h}_j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma_k \right)$$

La representación del sistema de ecuaciones en forma matricial compacta es:

$${}^m M \ddot{\mathbf{w}} + {}^m H \mathbf{w} - {}^m G \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (2-12)$$

Donde ${}^m M$, ${}^m H$ y ${}^m G$ son la matriz de masa y las matrices de influencia, respectivamente, y $\ddot{\mathbf{w}}$, \mathbf{w} , \mathbf{h} , son los vectores de aceleración, desplazamientos y la derivada del desplazamiento con respecto a la normal, respectivamente.

2.2. Esquemas de integración en el tiempo

Tanto la ecuación (2-9) como la ecuación (3-9) poseen el término de la aceleración \ddot{w} . término necesita ser discretizado en el tiempo y de esta forma tener la solución de las variables desconocidas para cada intervalo de tiempo.

Existen varios esquemas de integración en el tiempo para la solución de problemas dinámicos, inicialmente aplicados a estructuras, sin embargo los esquemas de los cuales se conoce mayor uso con elementos de contorno están el método de Houbolt y el método de Newmark y algunas variantes como Houbolt-Alfa y Newmark-Alfa, ver Carrer, and Mansur (2004).

Los métodos de integración buscan, en esencia, satisfacer la ecuación dinámica de segundo orden:

$$M \ddot{u}_t + C \dot{u}_t + K u_t = F_t \quad (2-13)$$

La aproximación más general para la solución de la respuesta dinámica de sistemas estructurales es la integración numérica directa de las ecuaciones de equilibrio dinámico. Esto involucra, después que la solución es definida para tiempo cero, intentar satisfacer el equilibrio dinámico en los siguientes pasos de tiempo. La mayoría de los métodos usa intervalos de tiempo iguales a $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, n\Delta t$. Dichas técnicas numéricas pueden ser clasificadas fundamentalmente en explícitas e implícitas.

Los métodos explícitos usan la ecuación diferencial al tiempo t para predecir una solución al tiempo $t + \Delta t$. Para muchas estructuras reales que contienen elementos rígidos, se requiere un paso de tiempo muy pequeño para obtener una solución estable. Por esto se dice que la mayoría de los métodos explícitos son condicionalmente estables con respecto al tamaño de paso de tiempo. Esta última característica es la principal desventaja de los métodos explícitos.

Por otro lado, los métodos implícitos intentan satisfacer la ecuación diferencial al tiempo t , después la solución al tiempo $t - \Delta t$ es encontrada. Estos métodos requieren la solución de un conjunto de ecuaciones lineales a cada paso de tiempo; sin embargo, pueden ser usados pasos de tiempo mayores. Los métodos implícitos pueden ser condicionalmente o incondicionalmente estables, ver Wilson (2002). La mayoría de estos métodos son incondicionalmente estables, el costo es el uso de algoritmos más complicados, debido a que al contrario de los métodos explícitos resulta imposible despejar explícitamente la incógnita de nuestra ecuación a resolver. En lugar de esto, el sistema completo de ecuaciones debe ser resuelto simultáneamente. De esta manera, el método se reduce a la solución de un conjunto de ecuaciones simultáneas en cada punto en un tiempo, ver Chapra and Canale (1999)

Subbaraj and Dokainish (1989a) notaron que los algoritmos implícitos son más efectivos para problemas de dinámica estructural (en los cuales la respuesta es controlada por un número relativamente pequeño de modos de baja frecuencia), mientras que los algoritmos explícitos son muy eficientes para problemas de propagación de ondas.

La selección de un paso de tiempo Δt apropiado es un aspecto muy importante en el uso de estos métodos. Por un lado, el paso de tiempo debe ser suficientemente pequeño para obtener una solución precisa y por otro lado, el paso de tiempo no debería ser menor que lo necesario para así reducir el costo computacional, ver Wunderlich and Pilkey (2003).

Los errores involucrados en los métodos de integración pueden ser: de truncamiento, del uso de bajo orden de aproximaciones de diferencias finitas a las derivadas de variables continuas, de inestabilidad (amplificación de errores en pasos de tiempo previos se acumulan en pasos de tiempo posteriores, redondeo computacional). Estos errores podrían introducir un cambio en el período y amplitud de respuesta, por ejemplo, los errores de período de elongación y disminución de amplitud.

A continuación se detallan los métodos más ampliamente utilizados con elementos de contorno.

2.2.1. Método de Houbolt

El método de Houbolt se obtiene a partir de una interpolación cúbica de Lagrange de $u = u(t)$ desde el tiempo $t_{n-2} = (n-2)\Delta t$ al tiempo $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$. La diferenciación exacta con respecto al tiempo da las aproximaciones para la velocidad y la aceleración siguientes:

$$\dot{w}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} [11w_{n+1} - 18w_n + 9w_{n-1} - 2w_{n-2}] \quad (2-14)$$

$$\ddot{w}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} [2w_{n+1} - 5w_n + 4w_{n-1} - w_{n-2}] \quad (2-15)$$

Donde los términos w_{-1} y w_{-2} teniendo en cuenta los valores iniciales, pueden aproximarse por:

$$w_{-1} = w_o - \Delta t \dot{w}_o \quad (2-16)$$

$$w_{-2} = w_o - 2\Delta t \dot{w}_o \quad (2-17)$$

Para el caso de la vibración libre de una membrana, después de sustituir la expresión para la aceleración en la ecuación 3-9 teniendo presente que se desea obtener la solución en puntos internos del dominio, así como para los de la frontera a la vez. El sistema se puede reescribir como, ver Aliabadi y Wen (2011):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (C_m \Delta t)^2 ({}^m H_{bb}) + 2 ({}^m M_{bb}) & 2 ({}^m M_{bd}) \\ (C_m \Delta t)^2 ({}^m H_{db}) + 2 ({}^m H_{db}) & (C_m \Delta t)^2 \mathbf{I} + 2 ({}^m M_{dd}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{n+1}^b \\ w_{n+1}^d \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} (C_m \Delta t)^2 ({}^m G_{bb}) \\ (C_m \Delta t)^2 ({}^m G_{db}) \end{bmatrix} \{h_{n+1}^b\} \\ & = - \begin{bmatrix} {}^m M_{bb} & {}^m M_{bd} \\ {}^m M_{db} & {}^m M_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5w_n^b + 4w_{n-1}^b - w_{n-2}^b \\ -5w_n^d + 4w_{n-1}^d - w_{n-2}^d \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2-18)$$

La ecuación (2-18) puede respresentarse en una manera concisa como:

$${}^m\bar{\mathbf{H}} \mathbf{w}_{n+1} - {}^m\bar{\mathbf{G}} \mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{g}_n \quad (2-19)$$

Las contribuciones de los tiempos previos son almacenados en el vector \mathbf{g}_n . Después de imponer las condiciones de frontera, el sistema de ecuaciones obtenidos de la ecuación (2-19) puede ser resuelto.

2.2.2. Método de Newmark

Las aproximaciones para la familia de los métodos de Newmark son:

$$\dot{w}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} [w_{n+1} - w_n] + \frac{(\beta - \gamma)}{\beta} \dot{w}_n - \frac{(\gamma - 2\beta)}{2\beta} \Delta t \ddot{w}_n \quad (2-20)$$

$$\ddot{w}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} [w_{n+1} - w_n] + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{w}_n - \frac{(1 - 2\beta)}{2\beta} \ddot{w}_n \quad (2-21)$$

La estabilidad y aproximación del método de Newmark dependen de la elección correcta de los parámetros β y γ . Algunas observaciones de utilidad del método de Newmark son:

- El método es inestable para $\gamma < 12$
- la estabilidad incondicional ocurre para $2\beta \geq \gamma \geq 12$
- si se toma $\gamma > 12$ se introduce un amortiguamiento artificial, pero reduce la aproximación a primer orden.

Para el caso de la vibración libre de una membrana, el sistema de ecuaciones que queda aplicando el método de Newmark es:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \beta(C_m\Delta t)^2 ({}^m\mathbf{H}_{bb}) + {}^m\mathbf{M}_{bb} & {}^m\mathbf{M}_{bd} \\ \beta(C_m\Delta t)^2 ({}^m\mathbf{H}_{db}) + {}^m\mathbf{M}_{db} & \beta(C_m\Delta t)^2 I + {}^m\mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{n+1}^b \\ w_{n+1}^d \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta(C_m\Delta t)^2 ({}^m\mathbf{G}_{bb}) \\ \beta(C_m\Delta t)^2 ({}^m\mathbf{G}_{db}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{n+1}^b \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} {}^m\mathbf{M}_{bb} & {}^m\mathbf{M}_{bd} \\ {}^m\mathbf{M}_{db} & {}^m\mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_n^b + \Delta t \dot{w}_n^b + \frac{(1 - 2\beta)}{2} \Delta t^2 \ddot{w}_n^b \\ w_n^d + \Delta t \dot{w}_n^d + \frac{(1 - 2\beta)}{2} \Delta t^2 \ddot{w}_n^d \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2-22)$$

La ecuación (2-22) puede representarse en una manera concisa como:

$${}^m\bar{\mathbf{H}} \mathbf{w}_{n+1} - {}^m\bar{\mathbf{G}} \mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{g}_n \quad (2-23)$$

Al comienzo del proceso de avance en el tiempo, cuando $n = 0$, la expresión para la aceleración puede escribirse como:

$$\ddot{w}_1 = \frac{1}{\beta\Delta t^2} [w_1 - w_0] + \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{w}_0 - \frac{(1-2\beta)}{2\beta} \ddot{w}_0 \quad (2-24)$$

Y sustituyendo en la ecuación anterior la siguiente aproximación

$$\ddot{w}_0 = \frac{2}{\Delta t^2} [w_1 - w_0] - \frac{2}{\Delta t} \dot{w}_0 \quad (2-25)$$

produce la nueva ecuación:

$$\ddot{w}_1 = \frac{2}{\Delta t^2} [w_1 - w_0] - \frac{2}{\Delta t} \dot{w}_0 \quad (2-26)$$

Finalmente, sustituyendo este valor para $n = 0$, la ecuación (2-22) se puede particularizar así:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \beta(C_m\Delta t)^2 ({}^m\mathbf{H}_{bb}) + {}^m\mathbf{M}_{bb} & {}^m\mathbf{M}_{bd} \\ \beta(C_m\Delta t)^2 ({}^m\mathbf{H}_{db}) + {}^m\mathbf{M}_{db} & \beta(C_m\Delta t)^2 \mathbf{I} + {}^m\mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^b \\ w_1^d \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta(C_m\Delta t)^2 ({}^m\mathbf{G}_{bb}) \\ \beta(C_m\Delta t)^2 ({}^m\mathbf{G}_{db}) \end{bmatrix} \{h_1^b\} = \\ & 2 \begin{bmatrix} {}^m\mathbf{M}_{bb} & {}^m\mathbf{M}_{bd} \\ {}^m\mathbf{M}_{db} & {}^m\mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0^b + \Delta t \dot{w}_0^b \\ w_0^d + \Delta t \dot{w}_0^d \end{Bmatrix} \quad (2-27) \end{aligned}$$

2.3. Ejemplo numérico

En esta sección se presenta un ejemplo típico contenido en la literatura (Benchmark problems) para la validación de la formulación DR-BEM implementada en matlab, discretizando la frontera con elementos constantes. Los resultados son comparados con la solución analítica. Las integrales numéricas fueron calculadas por cuadratura gaussiana y para ello se utilizaron 4 puntos de gauss. Además se empleó el método de Houbolt para la integración en el tiempo.

2.3.1. Membrana cuadrada bajo un campo de desplazamiento inicial sobre todo el dominio

Este ejemplo consiste de una membrana cuadrada sujeta a las siguientes condiciones de distribución inicial aplicada a todo el dominio $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (Ver figura 2-2):

$$w_0(x, y) = Ux(x-1)y(y-1); \quad \dot{w}_0(x, y) = 0 \quad (2-28)$$

La membrana tiene una velocidad de propagación $c_m = 1 \text{ m/s}$. En este análisis se emplearon 80 elementos constantes y 81 puntos de colocación interiores (ver figura 2-3).

La solución analítica general para este problema, considerando una membrana rectangular con dimensiones a y b , es según Mansur (1983):

$$w(x, y, t) = \frac{64Ua^2b^2}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^3n^3} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(\lambda_{mn}\pi ct) \quad (2-29)$$

con m y n impares y donde:

$$\lambda_{mn} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (2-30)$$

Como se observa en la figura (2-5), con relativamente pocos elementos constantes se obtuvo una solución numérica prácticamente idéntica a la solución analítica del problema físico.

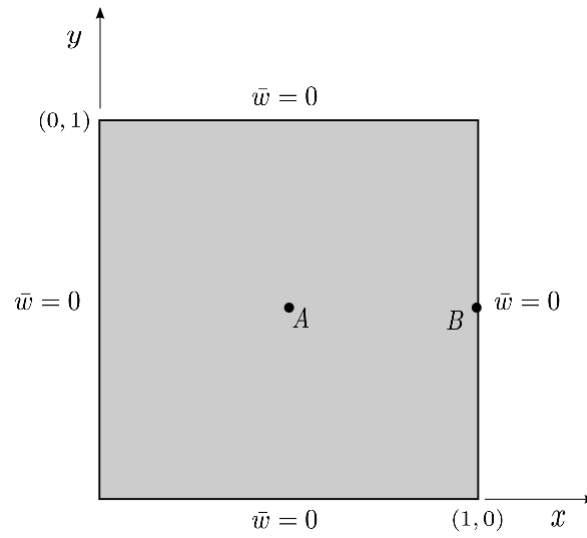


Figura 2-2: Problema 1: Dominio de la membrana con condiciones de frontera para $t > 0$ y puntos de interés de la solución.

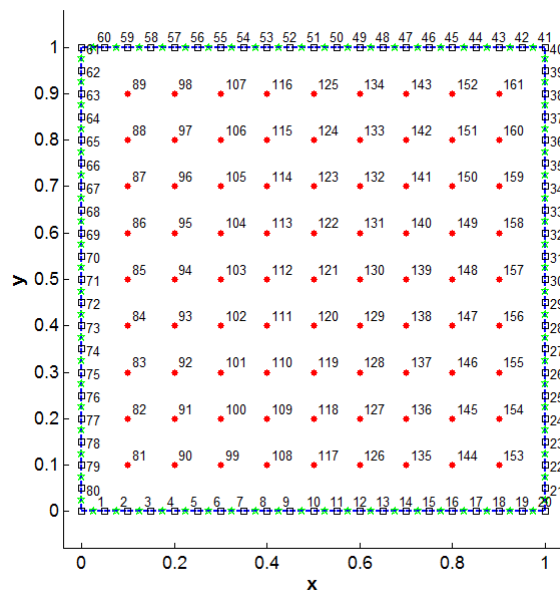


Figura 2-3: Problema 1: Puntos de colocación interiores y discretización de la frontera con elementos constantes.

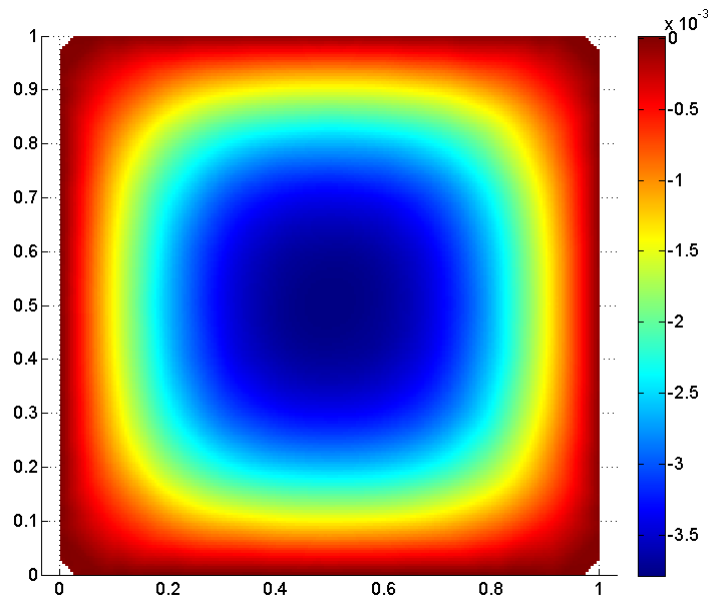


Figura 2-4: Problema 1: Desplazamientos (m) para $t = 16s$.

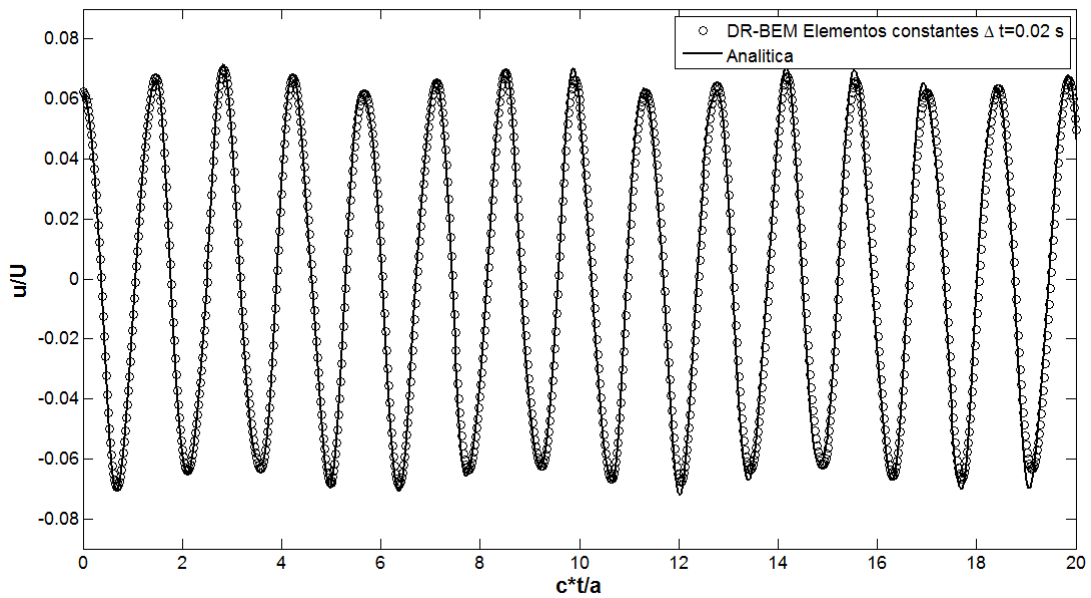


Figura 2-5: Problema 1: Desplazamientos en $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ usando Houbolt y elementos constantes.

Como es usual en el método de elementos de contorno para el dominio espacio-tiempo, el incremento de tiempo óptimo se obtiene a partir del parámetro adimensional $\beta_{\Delta t} = \frac{c\Delta t}{l}$

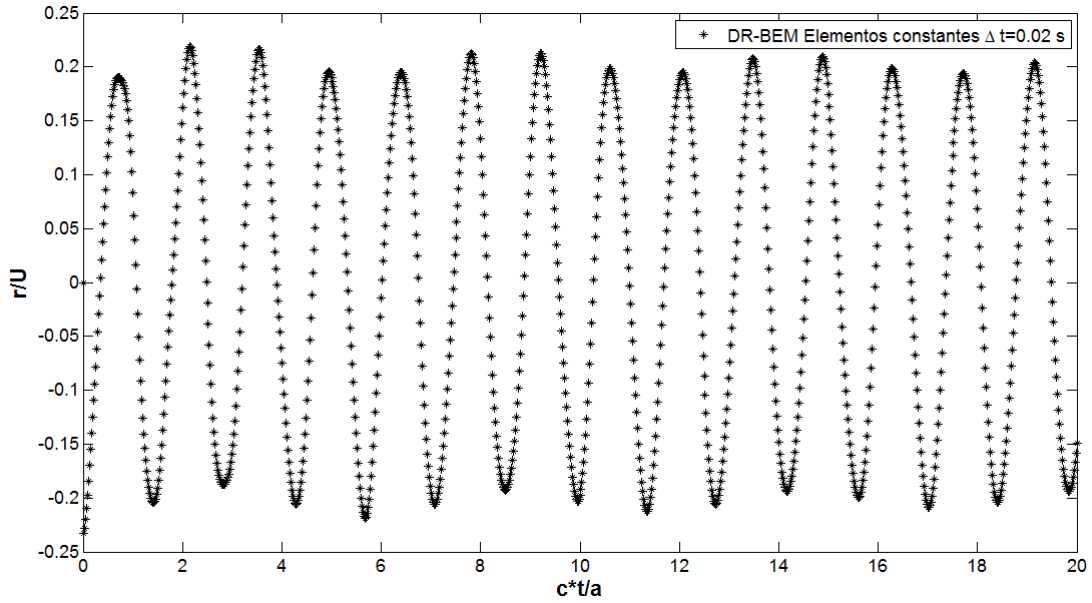


Figura 2-6: Problema 1: Reacción en $B(1, \frac{1}{2})$ usando Houbolt y elementos constantes.

(el cual relaciona la velocidad de propagación de la onda con la longitud del elemento de la malla más pequeño y el incremento en el tiempo asumido constante), ver Mansur (1983). Siendo importante observar que el paso de tiempo óptimo se obtuvo para $\beta_{\Delta t} = 0,4s$, y difiere un tanto del valor obtenido por Mansur (1983) de $\beta_{\Delta t} = 0,6s$ para la formulación por elementos de contorno clásico con soluciones fundamentales elastodinámicas e integración por células para las integrales de dominio.

En la figura (2-6) como era de esperarse, el valor de la reacción no es adecuado en amplitud si se compara con la solución obtenida por Mansur (1983) con 80 elementos constantes y 800 células interiores, los elementos de contorno constante, en general no producen buenas aproximaciones para la derivada de la variable de campo con respecto a la dirección normal, sin embargo la curva como tal en su forma es bastante similar a la que se debe obtener para el problema en cuestión.

2.3.2. Conclusiones

Existe una excelente correlación entre los valores obtenidos con elementos de contorno constantes para los desplazamientos en el centro de la membrana A y los valores de la solución analítica, usando el método de Houbolt para la integración en el tiempo. Este buen ajuste se corrobora incluso para la solución interpolada de todos los puntos del dominio el instante mostrado en la figura (2-4), dando la forma simétrica esperada.

Para el caso de la reacción en el punto B , aunque los valores son algo distintos entre la solución analítica dibujada por Mansur (1983) (de la cual no se tiene la expresión analítica) y los valores obtenidos por DR-BEM, esto se puede explicar por el menor nivel de aproximación de los elementos constantes para los flujos o gradientes en la dirección normal frente a otros elementos como los lineales o de orden superior, pero se esperaría que un adecuado análisis de convergencia incrementando los puntos de colocación interiores y refinando la malla del contorno, permitiese obtener una solución un poco mejor para la aproximación del gradiente del desplazamiento en dirección normal.

3 Capítulo 2

3.1. Análisis dinámico de ondas acústicas

Ecuación escalar de ondas acústicas

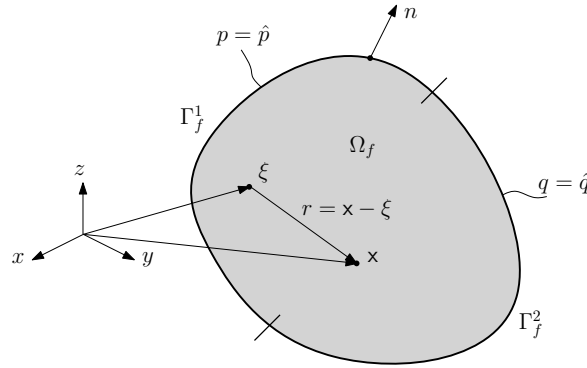


Figura 3-1: Dominio del fluido acústico

La presión dinámica de un fluido ideal no viscoso, bajo pequeñas perturbaciones en una región espacial Ω_f confinado por una frontera de superficie $\Gamma_f = \Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2$, está gobernada por la ecuación de onda dada por, ver Kinsler (2005):

$$\nabla^2 p + s = \frac{1}{c_f^2} \ddot{p} \quad (3-1)$$

donde p es la presión del fluido, c_f es la velocidad de propagación de la onda, s representa el término fuente y $\ddot{p} = \partial^2 p / \partial t^2$. Las condiciones iniciales son:

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}); \quad \dot{p}(\mathbf{x}, 0) = p_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_f \quad (3-2)$$

y las condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann son:

$$p(\mathbf{x}, t) = \hat{p}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_f^1, t > 0; \quad q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \hat{q}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_f^2, t > 0 \quad (3-3)$$

La formulación integral para esta ecuación, sin considerar el término fuente, puede escribirse como:

$$c(\boldsymbol{\xi})p(\boldsymbol{\xi}, t) + \int_{\Gamma} q^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t) d\Gamma - \int_{\Gamma} p^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \frac{1}{c_f^2} \int_{\Omega} p^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \ddot{p}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (3-4)$$

Donde \mathbf{x} y $\boldsymbol{\xi}$ son los puntos de campo y de colocación, respectivamente $q = \partial p / \partial n$, n es el vector unitario normal hacia afuera, $p^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ y $q^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ son las soluciones fundamentales para las presiones y gradientes, respectivamente.

En dos dimensiones se tiene, ver Becker (1992):

$$p^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) \quad (3-5)$$

$$q^* = \frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{2\pi} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n} \quad (3-6)$$

Mientras que para tres dimensiones son:

$$p^* = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \quad (3-7)$$

$$q^* = \frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{4\pi |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} \quad (3-8)$$

La forma discretizada de la ecuación (3-4) por DR-BEM es, ver Partridge et al (1992):

$$c_i(\boldsymbol{\xi})p(\boldsymbol{\xi}, t) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t) d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} p^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) d\Gamma_k =$$

$$\frac{1}{c_m^2} \sum_{n=1}^{NDRM} \alpha_j \left(c_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{p}_{ij}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{p}_j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma_k - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} p^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \hat{q}_j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) d\Gamma_k \right)$$

Donde $NDRM$ representa el número total de puntos de colocación ; $\hat{p}_1^j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \hat{p}_2^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \hat{q}_1^j(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \hat{q}_2^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ representan soluciones particulares de la ecuación de laplace. Los coeficientes α_j están relacionados con \ddot{p} a través de $\ddot{p} = \sum \alpha_j f_j$.

La representación del sistema de ecuaciones en forma matricial compacta es:

$${}^fM \ddot{\mathbf{p}} + {}^fH \mathbf{p} - {}^fG \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3-9)$$

Donde fM es la matriz de masa del fluido, fH y fG son las matrices de influencia , \mathbf{p} , \mathbf{q} , son los vectores de presión y la derivada de la presión con respecto a la normal , respectivamente.

3.2. Ejemplos numéricos

En esta sección se presentan algunos ejemplos típicos contenidos en la literatura (Benchmark problems) y otros elaborados por el autor para la validación de la formulación DR-BEM implementada en matlab, discretizando la frontera con elementos constantes o elementos lineales. Los resultados son comparados con soluciones analíticas y/o elementos finitos (Específicamente usando el módulo de resolución de ecuaciones diferenciales de COMSOL 4.2).

3.2.1. Canal bidimensional cerrado en un extremo y sujeto a una carga de impacto

Buscando la manera de verificar la implementación de la formulación se elaboró este ejemplo, donde el canal tiene por dimensiones $a = 12$ m y $b = 6$ m, correspondientes a la longitud y altura, respectivamente, ver figura (3-2). El fluido tiene una velocidad de propagación $c_f = 1$ m/s y está sometido a una carga de presión unitaria tipo Heaviside $P = 1 H(t - 0)$ Pa.

La discretización de la frontera se hizo mediante 36 elementos constantes y se emplearon 33 puntos de colocación en el interior del dominio, ver figura (3-3).

En la gráfica (3-4) se puede apreciar sin duda la buena correlación existente entre los datos obtenidos usando elementos constantes y el método de elementos finitos. Además debido a que la baja velocidad de propagación de la onda en el fluido hace que exista un retraso en el valor instantáneo transmitido en la frontera de aplicación de la carga hacia hasta el otro extremo del canal.

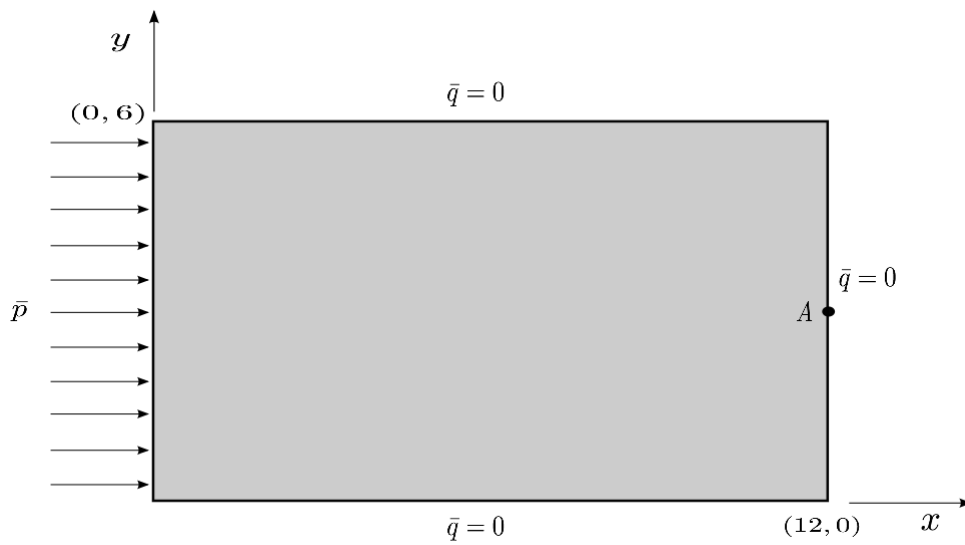


Figura 3-2: Problema 2: Dominio del fluido con condiciones de frontera para $t > 0$ y punto de interés de la solución.

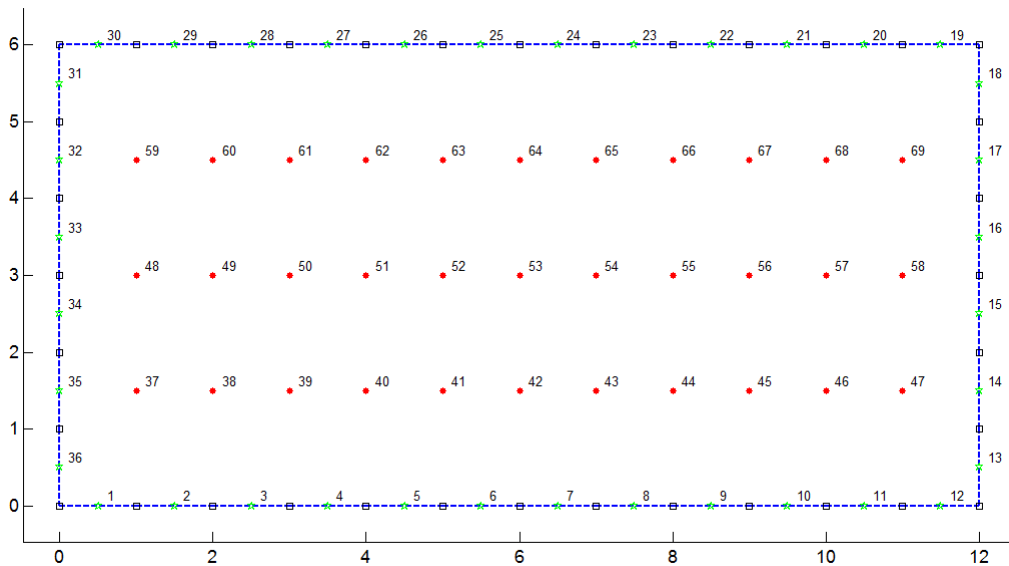


Figura 3-3: Problema 2: Puntos de colocación interiores y discretización de la frontera con elementos constantes.

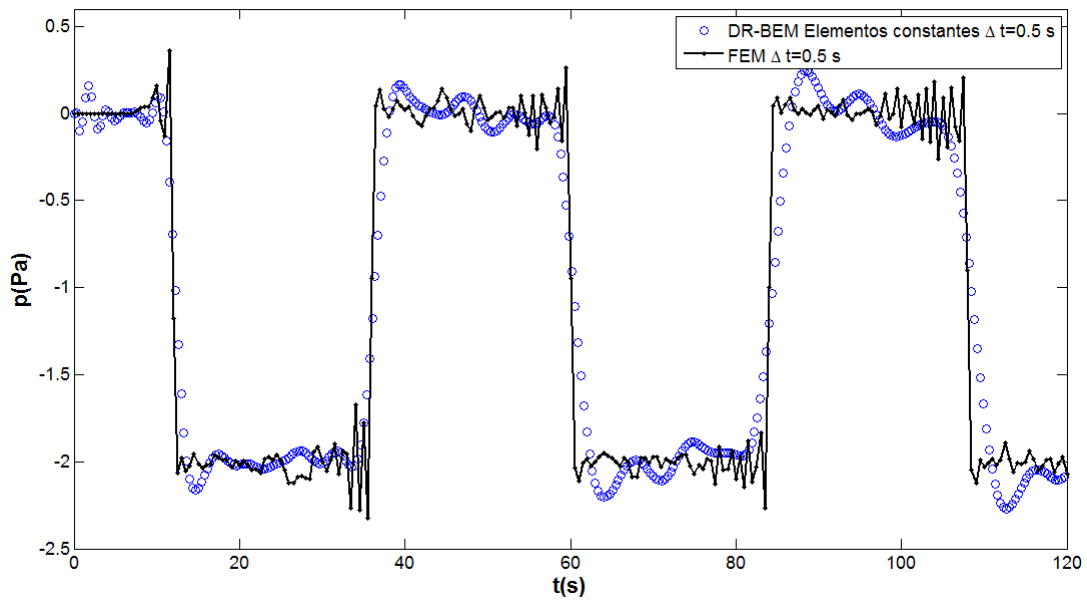


Figura 3-4: Problema 2: Presión acústica en $A(12, \frac{1}{2})$ usando el método de Houbolt y elementos constantes.

3.2.2. Canal bidimensional cerrado en un extremo y sujeto a una carga armónica

Para este caso, se emplea la misma geometría y propiedades físicas del problema anterior, y tan solo se cambia la carga de impacto por una carga armónica de la forma $p = P \sin(\omega_0 t)$ con $P = -1$ Pa y $\omega_0 = 1$ rad/s. Los resultados fueron comparados con los elementos finitos, modelando la ecuación de ondas en COMSOL 4.2.

Los resultados obtenidos con elementos constantes para la presión también se encuentran en concordancia con los resultados obtenidos por elementos finitos para los incrementos en el tiempo indicados, ver figura (3-5).

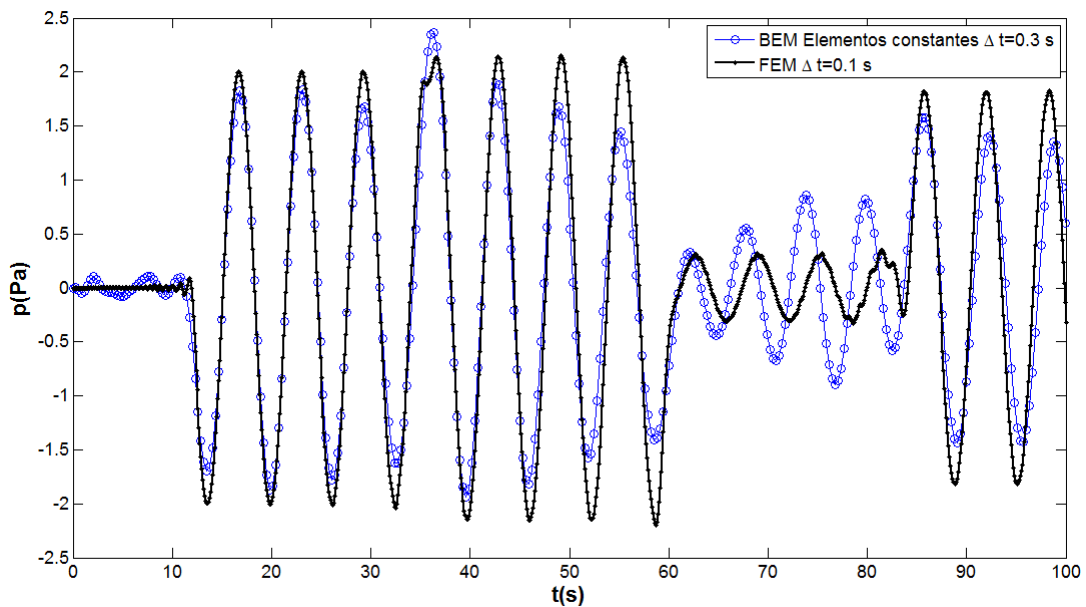


Figura 3-5: Problema 3: Presión acústica en $A(12, \frac{1}{2})$ usando el método de Houbolt y elementos constantes.

3.2.3. Canal tridimensional cerrado en un extremo y sujeto a una carga de impacto

Este ejemplo es una extensión del caso bidimensional, ahora las dimensiones del canal son $a = 12$ m, $b = 3$ m y $c = 6$ m correspondientes a la longitud, profundidad y altura, respectivamente.

La frontera del fluido fué discretizada con 216 elementos cuadriláteros y se localizaron 75 puntos de colocación en el interior del dominio, ver figura (3-7). Para el caso de la discretización con elementos cuadriláteros lineales la frontera fué dividida en 448 elementos y se utilizaron 55 puntos de colocación en el interior del dominio.

La gráfica para la presión acústica en el centro del canal revela que para los elementos constantes con este tipo de carga no se obtuvo un buen ajuste frente a la solución numérica arrojada por el método de elementos finitos y esto se refleja en el hecho de que se obtuvo convergencia en la solución tan solo a partir de un paso de tiempo $\Delta t = 2,5$ s, el cual es muy grande en comparación con el utilizado en FEM. Con los elementos lineales en cambio se logró un mayor acercamiento a la forma escalonada de la curva. Se aprecia de igual forma, que la amplitud debe mantenerse en 2 Pa al transcurrir el tiempo, ver figura (3-8).

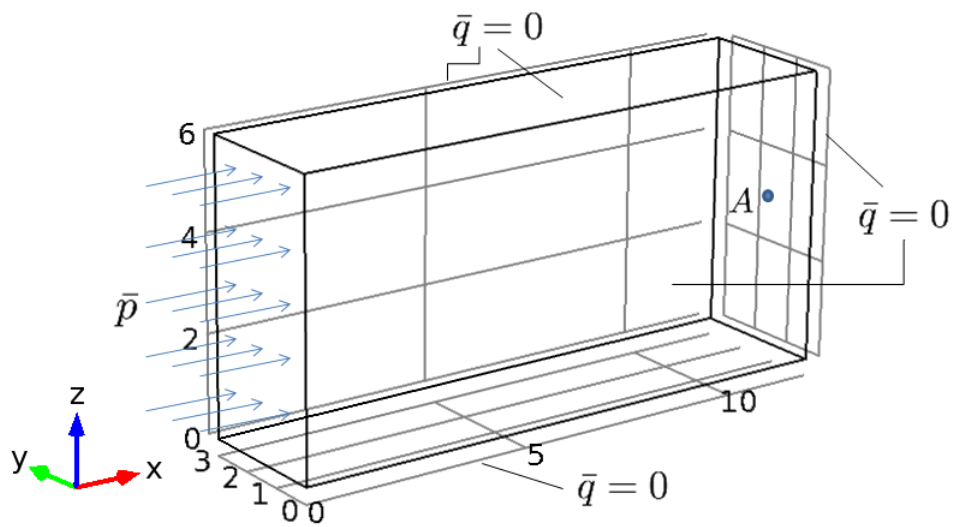


Figura 3-6: Problema 4: Dominio del fluido con condiciones de frontera para $t > 0$ y punto de interés de la solución

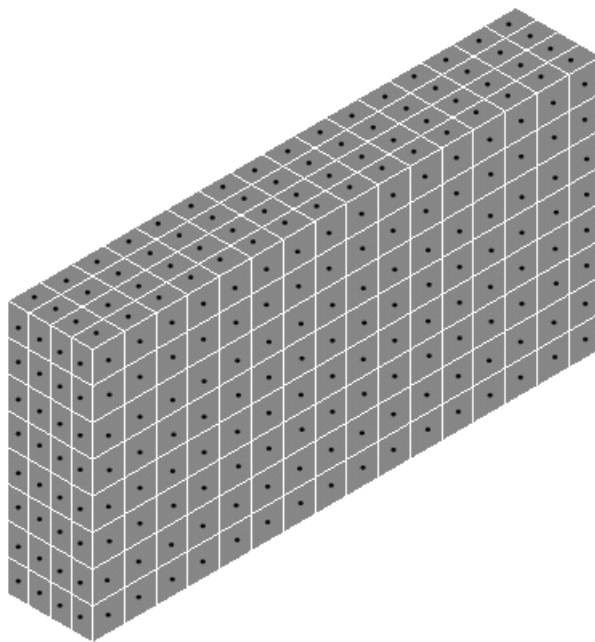


Figura 3-7: Problema 4: Discretización de la superficie con elementos constantes.

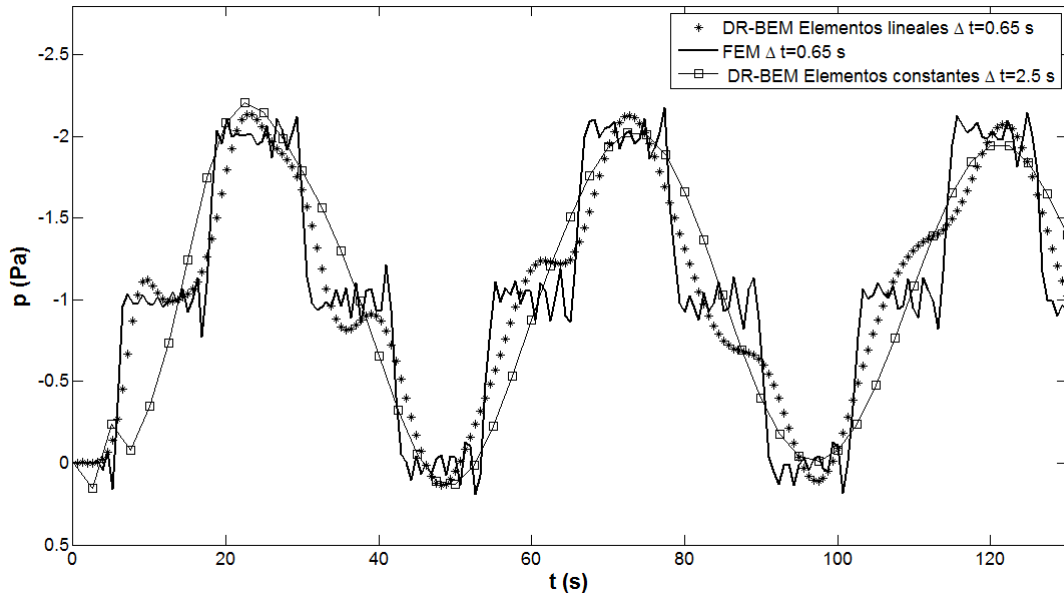


Figura 3-8: Problema 4: Presión acústica en $A(12, \frac{3}{2}, 3)$ bajo carga heaviside usando el método de Houbolt y elementos constantes o lineales.

3.2.4. Canal tridimensional cerrado en un extremo y sujeto a una carga armónica

Este problema se basa en el caso anterior y por tanto, tan solo se modifica la carga de presión acústica por una del tipo armónico de la forma $p = P \sin(w_0 t)$, donde P indica la amplitud y w_0 es la velocidad angular en función de la frecuencia de la carga. Para este problema se escogió un valor de $P = 1$ Pa y para la velocidad angular un valor de $0,25$ rad/s.

La figura (3-9) muestra que existe una buena correlación entre los valores obtenidos por el método de elementos finitos y los resultados conseguidos con elementos constantes. Además que se observa que con elementos lineales el ajuste de los valores a la curva de elementos finitos es mejor para ciertas regiones. Se hace notable también que existe un retardo en la onda de presión hasta llegar al extremo del canal y que la amplitud debería estar entre -2 y 2 Pa sin embargo sufre un amortiguamiento en el tiempo.

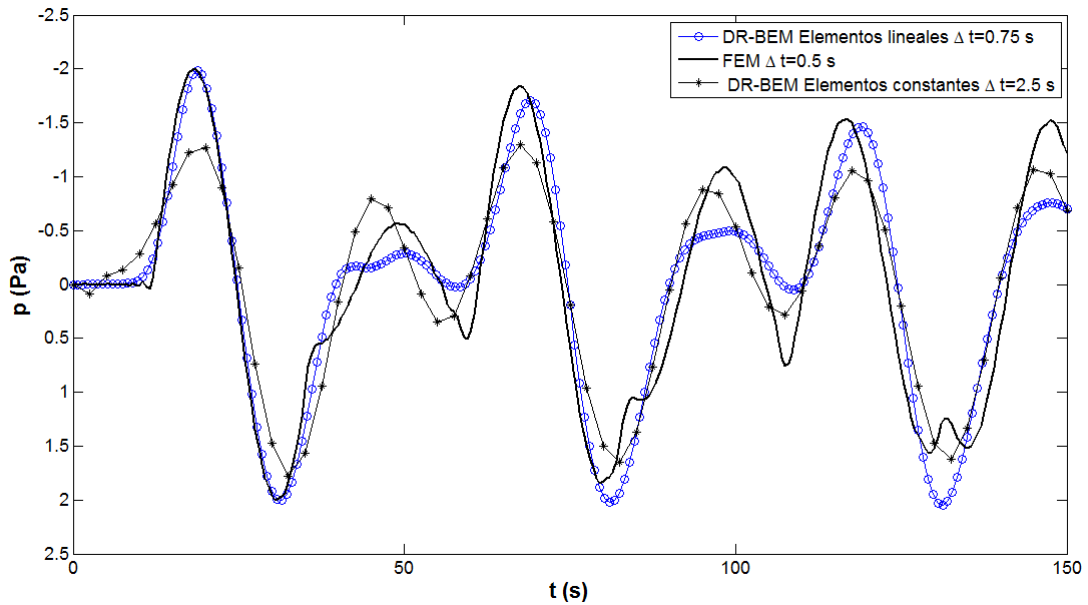


Figura 3-9: Problema 5: Presión acústica en $A(12, \frac{3}{2}, 3)$ bajo carga armónica usando el método de Houbolt y elementos constantes o lineales.

3.3. Conclusiones

Los resultados obtenidos para el análisis de problemas de acústica bidimensionales son totalmente acertados para los casos estudiados usando elementos constante en conjunto con DR-BEM. En el estudio de problemas de acústica presenta limitaciones en cuanto aproximación para cargas de impacto tipo Heaviside, aunque en la literatura se reporta que la función Heaviside puede conducir a soluciones inestables. Finalmente, se encontró una adecuada correspondencia para el estudio de problemas tridimensionales de acústica cuando las cargas impuestas son del tipo armónicas en bajas frecuencias. En frecuencias ensayadas del orden de 1,6 Hz se encontró inestabilidad en la solución tanto para DR-BEM como para FEM.

4 Capítulo 3

4.1. Ecuaciones de acoplamiento

Hasta ahora solo se han revisado las ecuaciones diferenciales que gobiernan a cada dominio en particular y su discretización para conducir a un sistema algebraico de ecuaciones, sin embargo, por tratarse de un sistema acoplado ninguno de los dominios puede ser resuelto separadamente del otro, ni tampoco las variables dependientes pueden ser eliminadas explícitamente a nivel de ecuaciones diferenciales. En este sentido, lo único que se sabe es que en la interfaz entre los dos dominios existen nodos comunes para los cuales debe haber alguna relación entre los grados de libertad de cada dominio, por ello es que se deben buscar ecuaciones adicionales para que el sistema total de ecuaciones sea consistente, es decir, exista por lo menos igual número de ecuaciones como incógnitas.

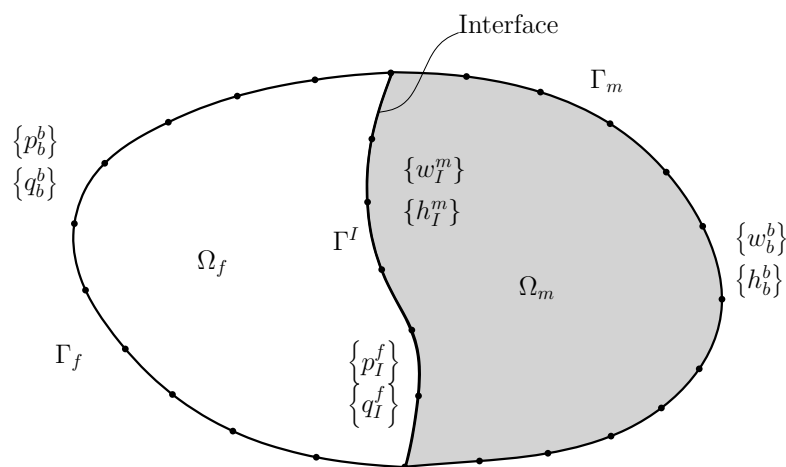


Figura 4-1: Dominios del problema acoplado

Considere un fluido acústico con dominio Ω_f acoplado a una membrana con dominio Ω_m a través de la interfaz Γ^I , y con condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann como se muestra en la figura (4-1). Para este problema, las ecuaciones de acoplamiento del fenómeno de interacción fluido acústico-estructura están dadas por las consideraciones de compatibilidad sobre la presión normal y la fuerza de presión dinámica en la interfaz fluido acústico - estructura. Además, se debe cumplir el requerimiento que las componentes normales de la aceleración de las partículas del fluido y de la estructura sean continuas, ver Junger y Feit (1986), es decir, si las partículas de fluido se mueven en la interfaz hacia la derecha, las partículas pertenecientes a la membrana en contacto con el fluido deben hacerlo de igual modo. Esto proviene de las simplificaciones hechas en primera instancia a la ecuación de momento de Navier-Stokes, que representa el balance de fuerzas (a partir de la segunda ley de Newton) aplicada a un fluido que pasa por un elemento de control infinitesimal:

$$\frac{1}{gc} \frac{\partial \rho v}{\partial t} = -\frac{1}{gc} [\nabla \cdot v v] - [\nabla \cdot \sigma] - \nabla p + \frac{1}{gc} \rho g \quad (4-1)$$

Siendo p la presión, σ el tensor de esfuerzos, g el vector de aceleración gravitacional y gc el factor de conversión de unidades, dado por la expresión $gc = (\text{masa})(\text{aceleración})/\text{fuerza}$. El término del lado izquierdo de la ecuación se denomina término acumulativo y del lado derecho de la ecuación, empezando de izquierda a derecha tenemos los términos convectivo, viscoso, gradiente de presión y término gravitacional. Eliminando el término viscoso por tratarse de un fluido acústico se llega a la ecuación de Euler:

$$\frac{1}{gc} \frac{\partial \rho v}{\partial t} = -\frac{1}{gc} [\nabla \cdot v v] - \nabla p + \frac{1}{gc} \rho g \quad (4-2)$$

Si ahora no se tiene en cuenta el término gravitacional, ni el término convectivo por presentarse muy bajas velocidades en las partículas, entonces se obtiene que para la interfaz el gradiente de presión está relacionado con la aceleración de las partículas de la membrana a través de la expresión:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = \mathbf{q} \equiv -\rho_f \ddot{\mathbf{w}}_I \quad (4-3)$$

Aplicando la tercera ley de Newton para la interfaz se tiene la segunda ecuación de

acoplamiento:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}_I^m \equiv -\mathbf{p}_I^f \quad (4-4)$$

Lo cual indica que la tracción normal en la membrana debe estar en equilibrio con la fuerza de presión del fluido.

Combinando las ecuaciones (4-3) y (4-4) con las ecuaciones (2-9) y (3-9), se puede obtener el sistema acoplado. Pero antes de ello, las matrices H,G,M y B para cada dominio, así como los vectores asociados deben dividirse para tener en cuenta cuales nodos pertenecen solo a la frontera, cuales pertenecen solo al interfaz y cuales corresponden solo al dominio. Así, las ecuaciones de acoplamiento de la interfaz pueden asociarse con las ecuaciones o filas para el fluido y la membrana que contienen valores de interfaz. De este modo, las ecuaciones matriciales para la membrana y el fluido pueden reescribirse como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} {}^m M_{bb} & {}^m M_{bI} \\ {}^m M_{Ib} & {}^m M_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_b \\ \ddot{w}_I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^m H_{bb} & {}^m H_{bI} \\ {}^m H_{Ib} & {}^m H_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_b \\ w_I \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^m G_{bb} & 0 \\ {}^m G_{Ib} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_b \\ q_I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_{bI} \\ 0 & B_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -p_I^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-5)$$

$$\begin{bmatrix} {}^f M_{bb} & {}^f M_{bI} & {}^f M_{bd} \\ {}^f M_{Ib} & {}^f M_{II} & {}^f M_{Id} \\ {}^f M_{db} & {}^f M_{dI} & {}^f M_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_b \\ \ddot{p}_I \\ \ddot{p}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^f H_{bb} & {}^f H_{bI} & {}^f H_{bd} \\ {}^f H_{Ib} & {}^f H_{II} & {}^f H_{Id} \\ {}^f H_{db} & {}^f H_{dI} & {}^f H_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_b \\ p_I \\ p_d \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^f G_{bb} & {}^f G_{bI} & 0 \\ {}^f G_{Ib} & {}^f G_{II} & 0 \\ {}^f G_{db} & {}^f G_{dI} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_b \\ q_I \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-6)$$

Donde las letras de los subíndices o superíndices f, m, b, I y d , hacen referencia al fluido, la membrana, la frontera, la interfaz y el dominio, respectivamente. Así por ejemplo, la submatriz de masa ${}^f M_{bd}$ hace referencia a una matriz del fluido con coeficientes evaluados entre puntos de la frontera y el dominio del fluido. Finalmente, estas ecuaciones en conjunto con las de acoplamiento pueden reorganizarse para formar el siguiente sistema global acoplado:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} {}^m M_{bb} & {}^m M_{bI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^m M_{Ib} & {}^m M_{II} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^f M_{bb} & {}^f M_{bI} & {}^f M^{bd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^f M_{Ib} & {}^f M_{II} & {}^f M_{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^f M_{db} & {}^f M_{dI} & {}^f M_{dd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_f \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_b \\ \ddot{w}_I \\ \ddot{p}_b^f \\ \ddot{p}_I^f \\ \ddot{p}_d^f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^m H_{bb} & {}^m H_{bI} & 0 & 0 & 0 & -B^{bI} & 0 \\ {}^m H_{Ib} & {}^m H_{II} & 0 & 0 & 0 & -B^{II} & 0 \\ 0 & 0 & {}^f H_{bb} & {}^f H_{bI} & {}^f H_{bd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^f H_{Ib} & {}^f H_{II} & {}^f H_{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^f H_{db} & {}^f H_{dI} & {}^f H_{dd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_b \\ w_I \\ p_b^f \\ p_I^f \\ p_d^f \\ p_I^m \\ q_I \end{Bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} {}^m G_{bb} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^m G_{Ib} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^f G_{bb} & {}^f G_{bI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^f G_{Ib} & {}^f G_{II} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^f G_{db} & {}^f G_{dI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_f \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_b \\ r_I \\ q_b \\ q_I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-7)
\end{aligned}$$

Este sistema matricial acoplado puede escribirse en forma compacta como:

$${}^m f \mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}} + {}^m f \mathbf{H} \dot{\mathbf{z}} - {}^m f \mathbf{G} \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (4-8)$$

Donde ${}^m f \mathbf{M}$, ${}^m f \mathbf{H}$ y ${}^m f \mathbf{G}$ son las matrices de masa y de influencia para el problema acoplado.

De este modo, la ecuación (4-8) puede ser resuelta por alguno de los métodos numéricos de discretización en el tiempo mencionados con anterioridad.

Este esquema de acoplamiento se hizo orientado al uso de elementos constantes y no con elementos de mayor orden, dado que existe un solo nodo por cada elemento y se puede identificar fácilmente que condición de frontera debe aplicarse, no como el caso de otros elementos como los lineales, cuadráticos, etc, donde se presenta un problema por compartir nodos de frontera en las esquinas o en los bordes de la frontera y no hay una plena distinción de cuál condición de frontera conocida en una cara o borde asignar a dicho nodo. Por otro lado, se considera muy complicado tratar de separar del resto los nodos que pertenecen solo a la interfaz o solo a la frontera, pues para este tipo

de elementos se opta por crear matrices con la información en bloques de columnas consecutivas para todos los nodos que pertenecen a ese elemento. Por ejemplo, para el caso de un elemento cuadrilátero lineal habrá una matriz que comienza con las primeras cuatro columnas asociadas a los cuatro nodos de ese primer elemento además como el mismo nodo pertenece a otros elementos complica aún más el asunto. Entonces, el solo hecho de tratar de incursionar en cómo hacer esa separación, o proponer otro estilo de programación factible, constituye otro trabajo de investigación.

Acoplamiento múltiple de interacción fluido acústico - estructura

El esquema de interacción puede ser extendido a problemas que contengan múltiples interfaces si se agregan en orden la cantidad de ecuaciones correspondientes a las filas de cada matriz de membrana (N), se subdivide la parte de la interfaz de la matriz del fluido (se obtienen N filas y columnas de interfaz) y se agregan las ecuaciones correspondientes de acoplamiento ($2N$ filas). Así por ejemplo el vector \mathbf{z} del sistema acoplado estará definido como:

$$\mathbf{z} = \left\{ w_b^1 \ w_I^1 \ w_b^2 \ w_I^2 \ \dots \ w_b^N \ w_I^N \ p_b^f \ p_I^{1f} \ p_I^{2f} \ \dots \ p_I^{Nf} \ p_d^f \ p_I^{1m} \ p_I^{2m} \ \dots \ p_I^{Nm} \ q_I^1 \ q_I^2 \ \dots \ q_I^N \right\}^T \quad (4-9)$$

En este sentido, w_b^2 serán los desplazamientos asociados a la frontera de la segunda membrana acoplada al sistema, p_I^{2f} será la presión en la interfaz del lado del fluido que está en contacto con la segunda membrana y q_I^2 hará referencia al gradiente de presión en la interfaz de la segunda membrana y así con los otros términos.

Las matrices ${}^{mf}M$, ${}^{mf}H$ y ${}^{mf}G$ expandidas, ahora tendrán N ecuaciones de membrana, K ecuaciones de fluido y $2N$ ecuaciones de acoplamiento.

4.2. Implementación computacional

Luego que las ecuaciones de gobierno del problema físico hallan sido discretizadas a través del método de elementos de contorno de reciprocidad dual (DR-BEM) se requiere de la evaluación de las matrices que aparecen en la formulación, que en última instancia representan el sistema de ecuaciones a resolver.

La solución manual de este sistema resulta impráctico incluso para un número pequeño de elementos y puntos de colocación, ya que cada punto de colocación debe relacionarse con los demás incluyendo a los ubicados en los elementos de la frontera, generando matrices bastante grandes, inclusive para los elementos más simples (elementos constantes, constituidos por un solo nodo). Pero gracias al desarrollo de los computadores y a las nuevas técnicas algorítmicas, el número de grados de libertad que puede ser resuelto para un cierto fenómeno físico ha ido incrementándose significativamente.

Aunque hoy día existen muchos lenguajes de programación, como *C*, *C++*, Python, Java, mezcla entre algunos de ellos, etc, los científicos e ingenieros se han inclinado principalmente por el lenguaje FORTRAN (contracción del inglés Formula Translating System) y las rutinas o librerías existentes en MatLab.

FORTRAN es un lenguaje de programación de alto nivel de propósito general, procedimental e imperativo, que está especialmente adaptado al cálculo numérico y a la computación científica. Es uno de los lenguajes más populares en el área de la computación de alto rendimiento y es el lenguaje usado para programas que evalúan el desempeño (benchmark) y el ranking de los supercomputadores más rápidos del mundo.

Matlab (abreviatura de MATrix LABoratory) es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Entre sus prestaciones básicas se hallan: la manipulación de matrices, la representación de datos y funciones, la implementación de algoritmos, la creación de

interfaces de usuario (GUI) y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware. Además ofrece un gran número de librerías matemáticas pre-instaladas que simplifican las labores de programación y permiten obtener soluciones parciales gracias a la opción de compilar por células (Cells).

4.3. Descripción del programa para problemas acoplados

El programa para resolver la formulación acoplada para problemas de interacción fluido-estructura fue escrito usando las librerías de matlab, y está basado en los scripts desarrollados inicialmente para las soluciones independientes de los problemas de acústica y vibración de membranas. Algunas de las rutinas desarrolladas son extensiones de los códigos realizados en FORTRAN para problemas bidimensionales de potencial y transferencia de calor, incluidas en el texto de elementos de contorno de Brebbia et al (1992).

4.3.1. Preprocesamiento

En esta parte se introducen las propiedades de la membrana y el fluido acústico, luego se leen los archivos de coordenadas de la frontera discretizada con elementos cuadriláteros constantes para el fluido y la conectividad de los nodos para cada elemento. Este proceso se puede realizar desde cualquier enmallador externo que genere el elemento deseado y exportar ambos archivos en formato de texto. Es posible usar paquetes de elementos finitos como ANSYS para tal propósito. El tipo de elemento usado en ANSYS fue SHELL63, elemento característico para el modelado de placas.

Aunque también se pueden definir las coordenadas de los elementos que discretizan la frontera de la membrana se optó por tomar las coordenadas de tales elementos a partir de los elementos del fluido, para ello se deben especificar cuáles son los elementos del fluido que pertenecen a la interfaz y los números de los nodos del fluido que se en-

cuentran en la frontera de la membrana y que representan los vértices de los elementos constantes de la membrana.

Luego se procede a calcular las coordenadas de los nodos centrales de cada elemento de la frontera del fluido usando las coordenadas de los vértices de los cuadriláteros, y de formas similar se calculan lo nodos centrales de los elementos de la membrana. Este proceso se hace en rutinas independientes para el fluido y la membrana. Algo importante, es que para el fluido se hace necesaria la reorganización de las filas de la lista que contiene la conectividad de los elementos en aras de construir las matrices de influencia (H y G) y de reciprocidad dual (M) en el siguiente orden: Coeficientes evaluados para la parte de la frontera del fluido que no incluye nodos comunes a la membrana y que se relacionan con los demás puntos de colocación, coeficientes evaluados para la parte de la frontera de interfaz que se relaciona con los demás puntos de colocación y finalmente los coeficientes de la parte de dominio que se relaciona con los demás puntos de colocación de la frontera del fluido. Así por ejemplo, se calculan los coeficientes de la matriz fM , definida ahora simbólicamente como:

$${}^fM = \begin{bmatrix} {}^fM_{bb} & {}^fM_{bI} & {}^fM_{bd} \\ {}^fM_{Ib} & {}^fM_{II} & {}^fM_{Id} \\ {}^fM_{db} & {}^fM_{dI} & {}^fM_{dd} \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

En esta parte también se calcula el área o longitud de los elementos y el jacobiano de la transformación. Después se grafica la malla con la información obtenida al igual que los vectores unitarios normales para verifica que éstos apunten hacia afuera de la frontera. Los vertices y nodos también son graficados para verificación e imposición de las condiciones de contorno.

En esta fase también se llenan para todos los instantes de tiempo las matrices de condiciones de frontera (donde cada fila está asociada a un nodo y cada columna indica un instante de tiempo) de la variable de campo y su gradiente en dirección normal a la

frontera, para ello se deben colocar en vectores los nodos con valores conocidos. Estos valores serán llamados posteriormente para el armado del sistema matricial global de incógnitas.

4.3.2. Armado y solución del sistema de ecuaciones

Cálculo de las matrices de influencia

Para obtener las matrices de influencia H y G para el fluido y la membrana se deben recorrer cada uno de los puntos de colocación (tanto los del contorno como los del dominio), cada punto fuente i se relaciona con todos los puntos de campo j , de tal modo que aparecerá la relación de un punto fuente consigo mismo, y como la distancia se vuelve cero entre ellos aparece una singularidad en dicho punto.

Las integrales G^{ij} y H^{ij} pueden ser calculadas usando una fórmula de integración numérica (tal como la cuadratura de Gauss) para el caso $i \neq j$, ver Partridge et al (1992). Para el elemento $i = j$, en presencia de la singularidad, la solución requiere una integración más aproximada o extracción de la singularidad por alguna transformación. Para el caso particular de elementos constantes en dos dimensiones, las integrales G^{ij} y H^{ij} se pueden calcular analíticamente. Los términos H^{ii} son ceros, ya que la normal y las coordenadas del elemento siempre son perpendiculares entre si. La forma numérica indirecta de calcular los coeficientes H^{ii} es asumiendo la condición de cuerpo rígido, lo cual produce la siguiente ecuación:

$$H^{ii} = - \sum_{j=1}^N H^{ij}; \text{ con } j \neq i \quad (4-11)$$

Los coeficientes G^{ii} para elementos constantes bidimensionales de igual modo pueden calcularse analíticamente.

En este punto, teniendo las matrices de influencia para cada elemento, se pueden construir las matrices globales.

Cálculo de las matrices fM , mM y B

Para la obtención de las matrices de masa fM y mM , para el fluido y la membrana, respectivamente, así como para la matriz B se utiliza el método de reciprocidad dual (DRM) para convertir las integrales de dominio a integrales en la frontera. Para esto, se empleó la función de base radial $1 + r$ para la interpolación de los valores, por ser la que mejor se comportó frente a otras que fueron ensayadas previamente, entre ellas las de base radial compacta, ver Sriganesh and Ramachandran (1994).

Con todas estas matrices se arma el sistema global de ecuaciones dado por la ecuación (4-7).

Estas matrices fueron obtenidas de manera secuencial, es decir, primero se calcularon las matrices para el fluido y luego para la membrana, aunque esto se pudo haber realizado de forma paralela (al mismo tiempo) con la ayuda del procesamiento en paralelo del cual se dispone hoy en día.

Solución del problema dinámico

El siguiente paso consiste en aplicar un esquema de integración en el tiempo a dicho sistema. El método de Houbolt fué el escogido para realizar este proceso por ser uno de los más utilizados en conjunto con DR-BEM, aunque ya en las rutinas independientes elaboradas para cada dominio, se había ensayado también con los métodos numéricos de Newmark, Houbolt alfa y Newmark alfa, para el análisis de algunos problemas dinámicos, obteniéndose una buena correlación con los valores de comparación.

Las matrices globales ^{mf}M , ^{mf}H y ^{mf}G solo necesitan calcularse una vez, ya que estas solo dependen de la ubicación de los puntos. Tan solo el vector de términos independientes necesita ser actualizado en cada paso, de este modo se imponen las condiciones de frontera y se reorganizan las matrices en la forma $Ax = b$ y se resuelve para el vector

x de incógnitas.

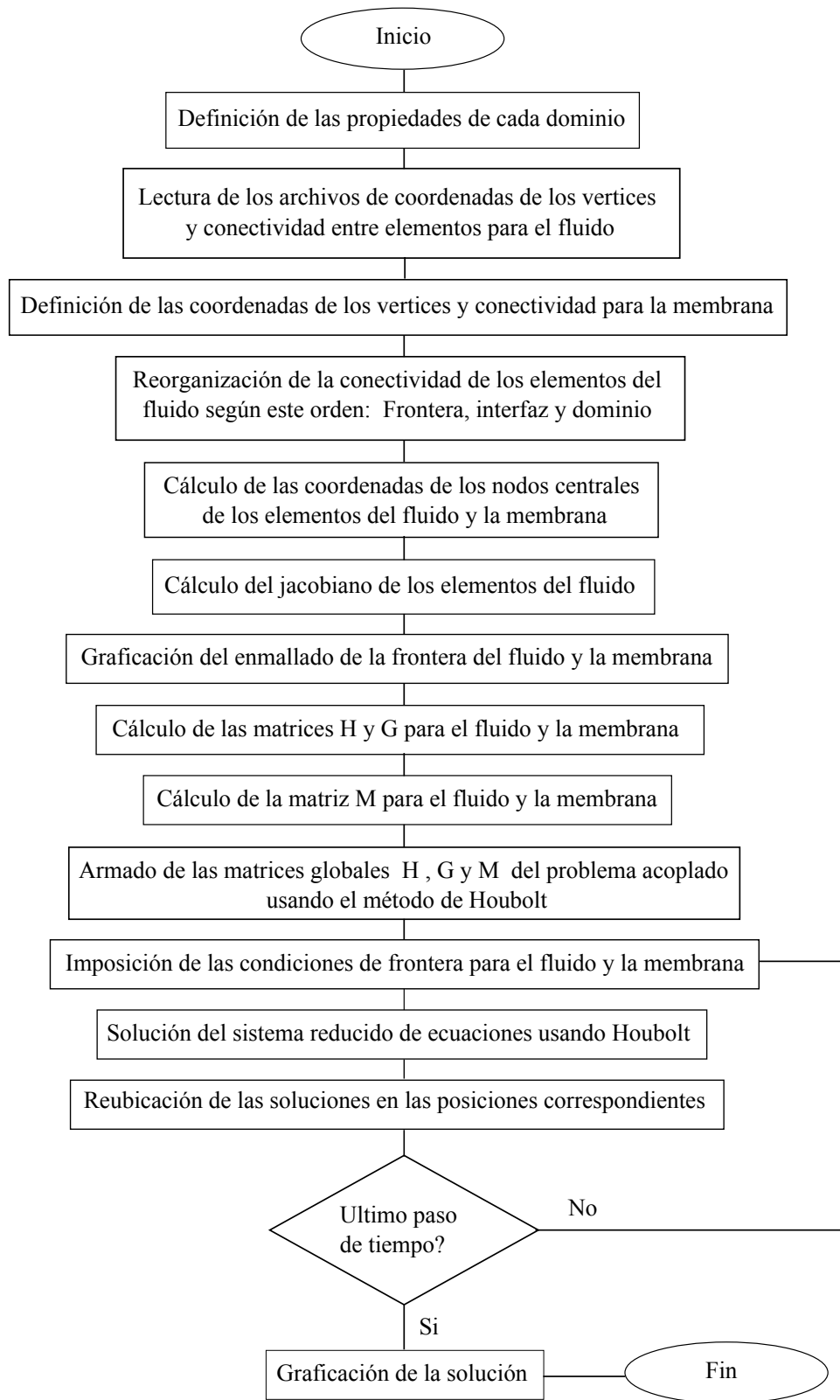
Obtenida la solución para las incógnitas en ese instante de tiempo, estas son incluidas en los vectores de solución de cada variable en la posición del nodo correspondiente. Estos vectores en realidad forman una matriz de solución con la historia del comportamiento de la variable con el tiempo.

4.3.3. Postprocesamiento

En esta parte se grafican las soluciones obtenidas. Se de indicar los nodos para los cuales se desea saber la solución en función de tiempo. en esta rutina se emplea un apuntador para buscar la posición real en la matriz de solución del fluido, debido a la reorganización que se había realizado previamente a las filas de la lista de la conectividad en el fluido.

4.4. Diagrama de flujo

Con el objeto de ilustrar de forma general la estructura lógica del programa de una manera más simple se ha elaborado un diagrama de flujo, el cual se muestra en la figura (4-2).

**Figura 4-2:** Diagrama de flujo del programa

5 Capítulo 4

5.1. Resultados numéricos

En esta sección se analizan distintos problemas acoplados con el objetivo de evaluar en cierto modo el comportamiento del modelo numérico propuesto. Cabe resaltar que debido a la falta de problemas de referencia (Benchmark problems) en el dominio del tiempo y/o de la frecuencia, paquetes comerciales que simulen el acoplamiento de una membrana elástica a un fluido acústico (ya que por lo general los programas por elementos finitos solo permiten el acoplamiento de placas o cáscaras a fluidos acústicos más no de membranas) y estudios experimentales, ver Jenkins y Korde (2006), se ha optado por hacer una comparación con un problema no acoplado para la mayoría de los ejemplos a excepción del problema 9 para el cual se pudieron hacer modelos acoplados unidimensionales y bidimensionales usando el método de diferencias finitas (FDM) para ambos dominios.

El problema desacoplado de referencia trata en forma general de un fluido acústico contenido en una estructura de paredes rígidas a excepción de aquella donde está aplicada la carga de presión. De esta forma, si se considera un problema donde una de las paredes rígidas del problema anterior haya sido remplazada por una membrana flexible, entonces ya se convierte en un problema acoplado (interacción fluido-membrana) y se esperaría que a medida que se incremente la rigidez de la membrana se tienda a la misma solución numérica que el fluido acústico no acoplado en movimiento para la presión acústica y el gradiente de presión normal.

5.1.1. Fluido contenido en una estructura con forma de caja y sometido a una carga de impacto

Problema 6:

Este ejemplo muestra una membrana homogénea acoplada a un fluido acústico. El dominio del problema puede verse en la figura (5-1). La membrana tiene una masa por unidad de área $\mu = 1 \text{ kg/m}^2$ y un espesor de 1 mm, y se ha analizado bajo distintas condiciones de tensión por unidad de longitud T_0 entre el rango $125 \text{ N/m} - 2000 \text{ N/m}$. El fluido es agua con una densidad $\rho_f = 1000 \text{ Kg/m}^3$ y con una velocidad de propagación del sonido $c_f = 1450 \text{ m/s}$.

El fluido fué discretizado con 24 elementos cuadriláteros constantes y se usaron 8 puntos de colocación interiores. Mientras que la membrana fué discretizada con 8 elementos constantes y 4 puntos de colocación en el interior de su dominio, los cuales son compartidos con la frontera interfaz del fluido. La malla se muestra en la figura (5-2).

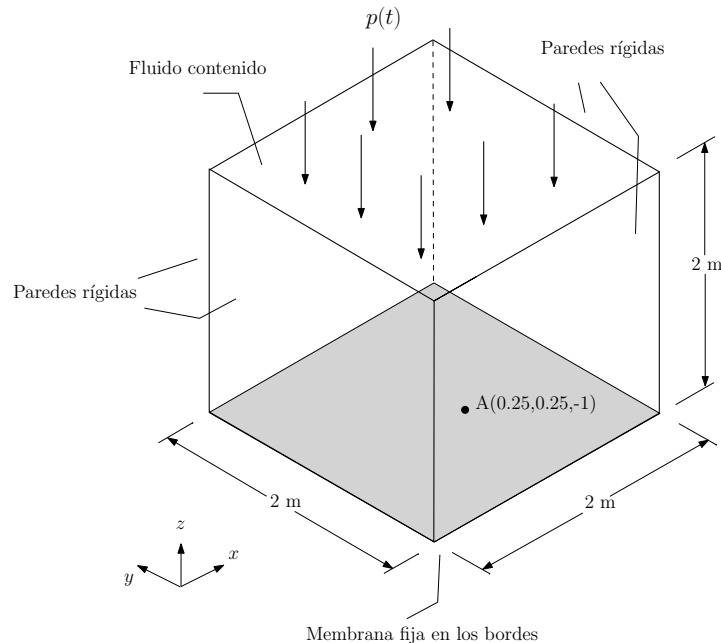


Figura 5-1: Problema 6: Dominio con condiciones de frontera para $t > 0$ y puntos de interés de la solución.

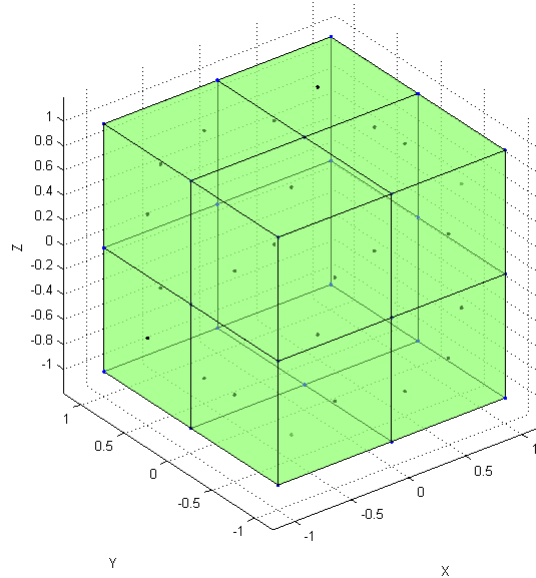


Figura 5-2: Problema 6: Discretización de la frontera.

El desplazamiento para el punto de análisis cumple con la teoría de pequeños desplazamientos bajo consideración, y tiene una forma estable en el tiempo, lo que indica que no hay ruido en los pasos de tiempo anteriores de la solución, y se evita la inestabilidad. La variación en el período de las ondas de desplazamiento se debe a la modificación en la velocidad de propagación en la membrana, causada por la rigidez obtenida para cada tensión lateral ensayada entre el rango $125 \text{ N/m} - 2000 \text{ N/m}$, ver figura(5-3). Por otra parte, se puede observar que la reacción lateral en la frontera de la membrana varía en forma proporcional a los desplazamientos de la membrana causados por la presión del fluido, ver figura (5-4).

La curva para la presión se amortigua de manera casi instantánea, indistintamente de la tensión aplicada sobre la membrana, y difiere totalmente del valor obtenido para el problema de referencia analizado por elementos finitos. Este inconveniente de aproximación se empezó a visualizar para los problemas acústicos tridimensionales desacoplados, y se evidencia que la solución obtenida para el sistema acoplado (para el cual se deben cumplir otras restricciones adicionales en la interfaz), no alcanza a corregir el amorti-

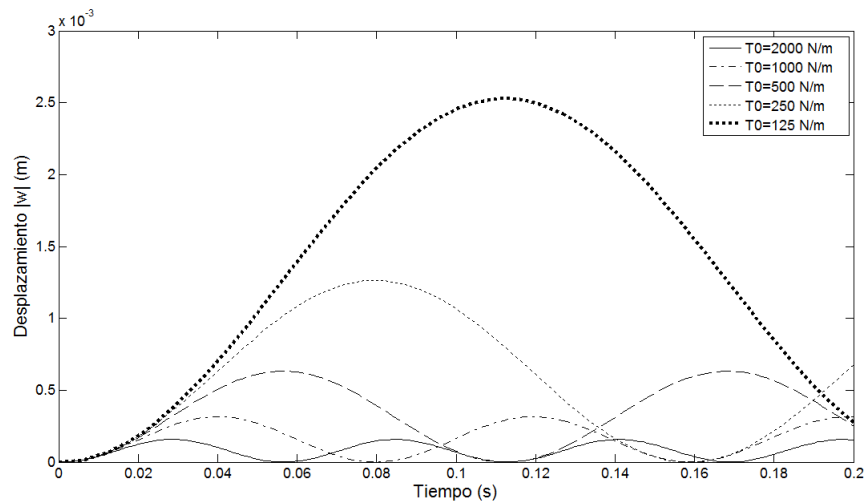


Figura 5-3: Problema 6: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

guamiento en la solución numérica, ver figura (5-5).

En el caso del gradiente de presión no se observa una disminución de valor al incrementar la rigidez en la membrana, y para todos los casos de rigidez estudiados se mantuvo una amplitud muy elevada, ver figura (5-6).

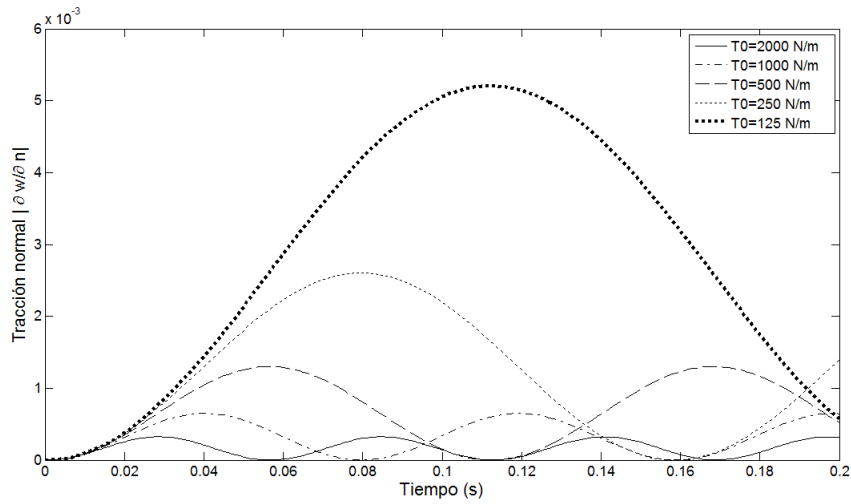


Figura 5-4: Problema 6: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes.

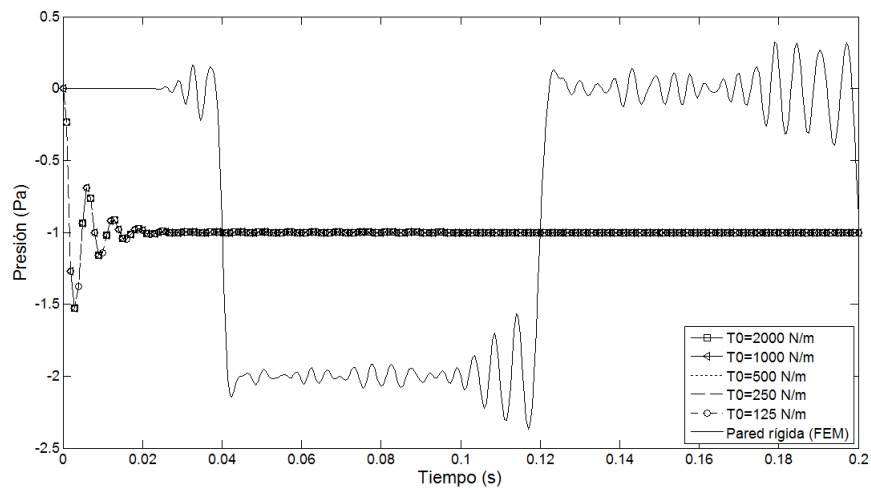


Figura 5-5: Problema 6: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

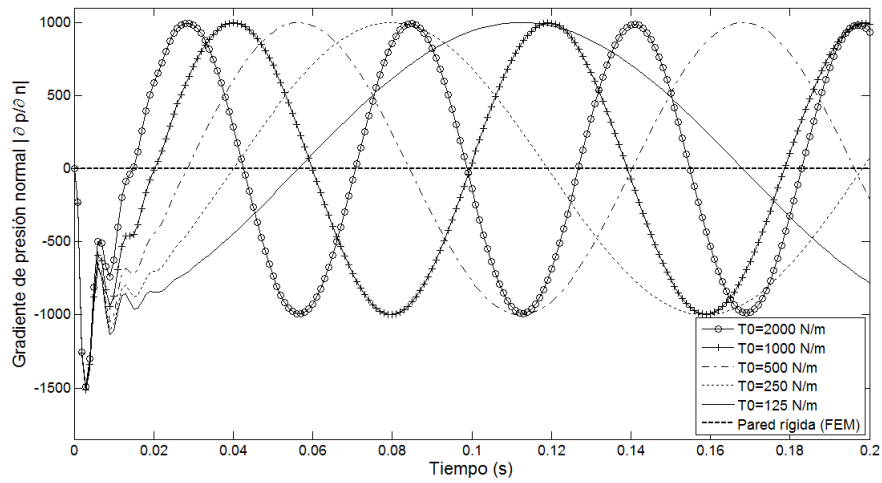


Figura 5-6: Problema 6: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

Problema 7:

El mismo problema anterior fué revisado refinando la malla para ambos dominios e incrementando el número de puntos de colocación interior. De este modo la frontera del fluido fué dividida en 150 cuadriláteros constantes y se usaron 125 puntos de colocación interiores. Mientras que la frontera de la membrana fué dividida en 20 elementos constantes y empleando 25 puntos de colocación en su interior, ver figura (5-7).

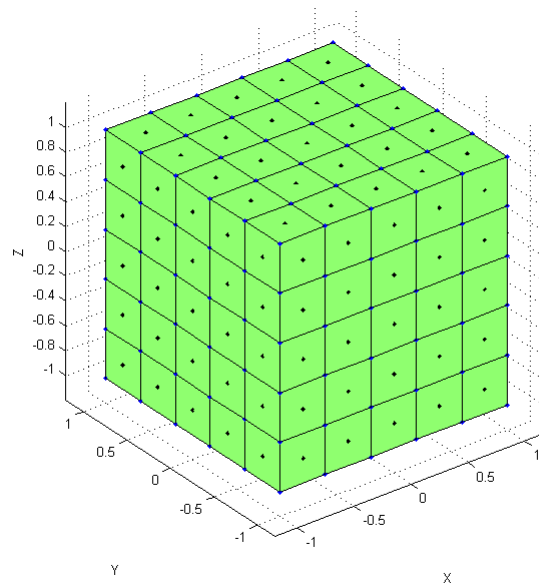


Figura 5-7: Problema 7: Discretización de la frontera.

Los resultados se muestran en las figuras (5-8) a (5-11). Se puede apreciar que la gráfica de presión se mantiene prácticamente igual al caso anterior presentándose un amortiguamiento muy rápido antes de los 0,02 s, mientras que los desplazamientos aunque son ligeramente distintos en la forma de la curva, poseen el mismo orden en magnitud para los valores máximos. Por otro lado, las tracciones han disminuido considerablemente frente a las anteriores y la forma de la curva también ha cambiado. Finalmente, para el gradiente de presión obtenido por DR-BEM solo se aprecian cambios en el período de las ondas, sin embargo, no hay convergencia hacia el valor nulo obtenido por FEM para el problema de referencia, tan solo hay convergencia hacia valores menores para

los gráficos de los desplazamientos y tracciones, en tanto se incrementa la tensión en la membrana. Las variaciones en los resultados pueden ser explicadas en parte por la sensibilidad del método de elementos de contorno al enmallado y al número de puntos de colocación, y por otro lado, por la relación directa entre el tamaño del elemento más pequeño de la malla y el paso de tiempo empleado. Se estima que la fuente de error por amortiguamiento debe estar asociada a la pobreza en la aproximación por el uso de funciones de base radial lineales cuando hay presencia de cargas tipo Heaviside (a juicio del doctor Carlos Brebbia, actualmente director del Wessex Institute of Technology de Inglaterra, quien tiene amplia experiencia en DR-BEM), quedando mucho por investigar en esta área.

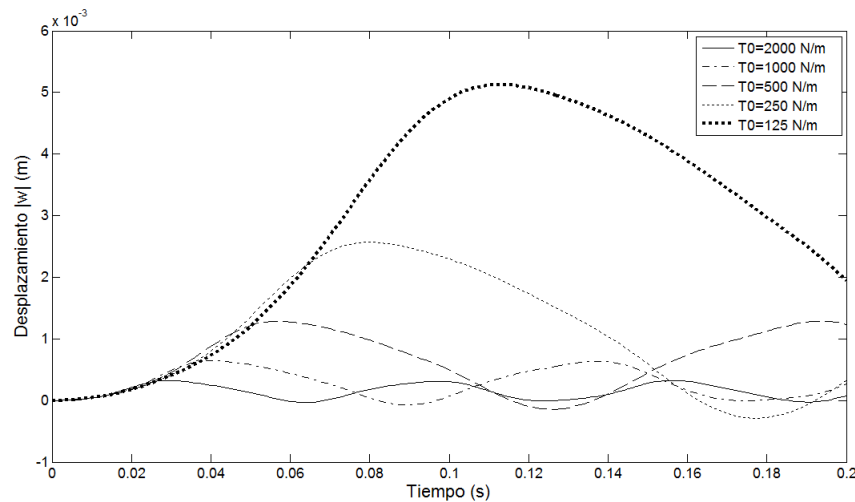


Figura 5-8: Problema 7: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

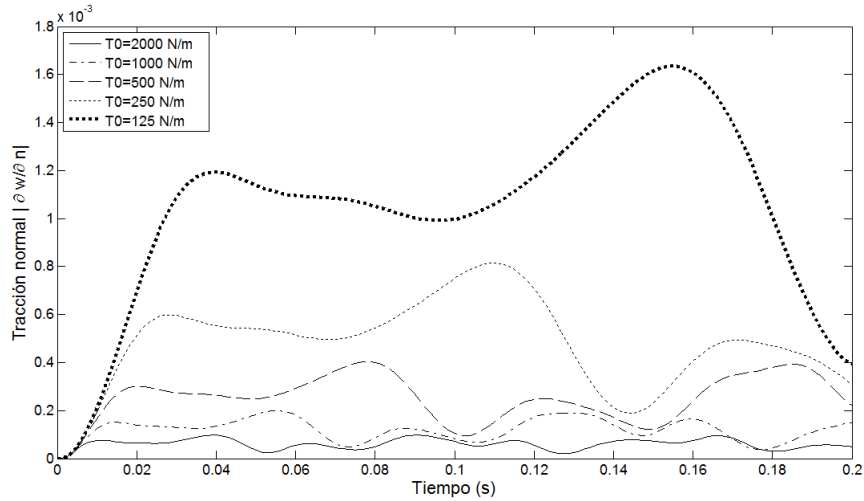


Figura 5-9: Problema 7: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes.

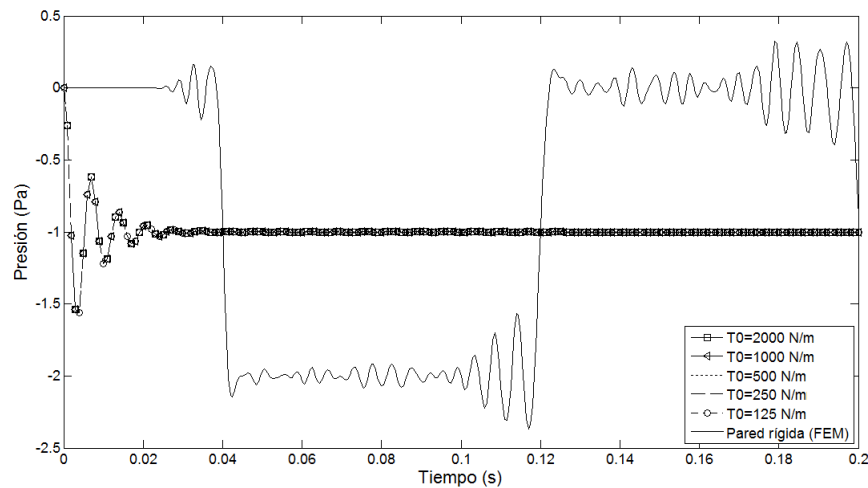


Figura 5-10: Problema 7: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

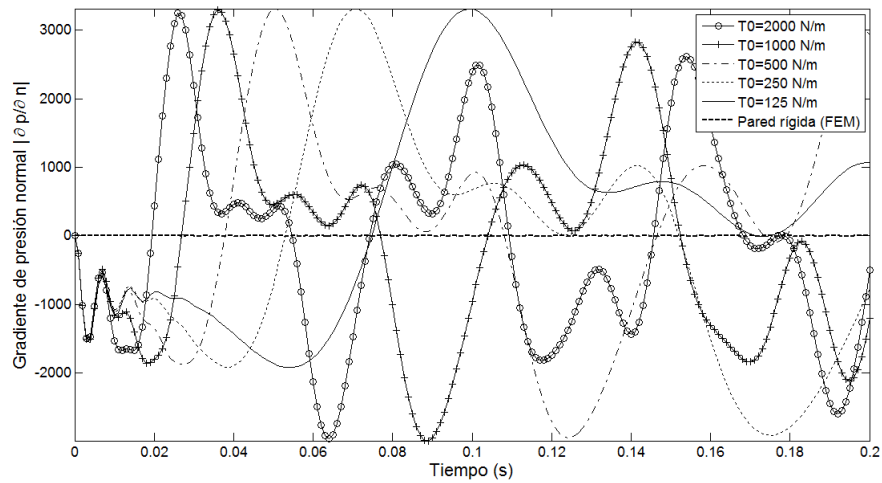


Figura 5-11: Problema 7: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

Problema 8:

En aras de evaluar el comportamiento de la formulación acoplada bajo otras condiciones y propiedades físicas, se escogió un fluido con velocidad de propagación de onda $c_f = 50 \text{ m/s}$ y densidad $\rho_f = 100 \text{ kg/m}^3$, modificándose de este modo el módulo de compresibilidad del fluido (el cual mide su resistencia a la compresión uniforme y, por tanto, indica el aumento de presión requerido para causar una disminución unitaria de volumen dada).

Con este ejemplo se pudo apreciar que para un valor bajo en el modulo de Bulk (y por tanto menor velocidad de propagación) aunque para el desplazamiento, tracción y gradiente de presión muestran convergencia hacia valores menores cuando se incrementa la rigidez en la membrana, se sigue manifestando un amortiguamiento en la respuesta. Por otra lado, la presión no se está aproximando a la forma ondulatoria cuadrada obtenida por elementos finitos para el problema desacoplado, ver figuras (5-12) a (5-15).

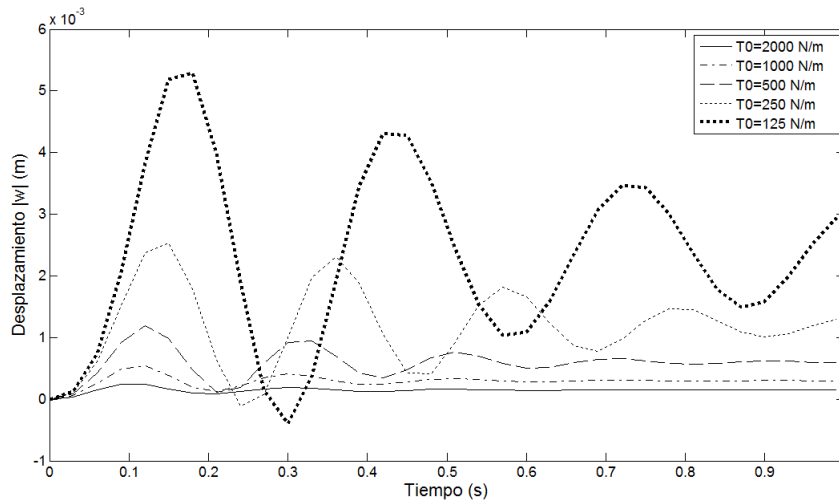


Figura 5-12: Problema 8: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

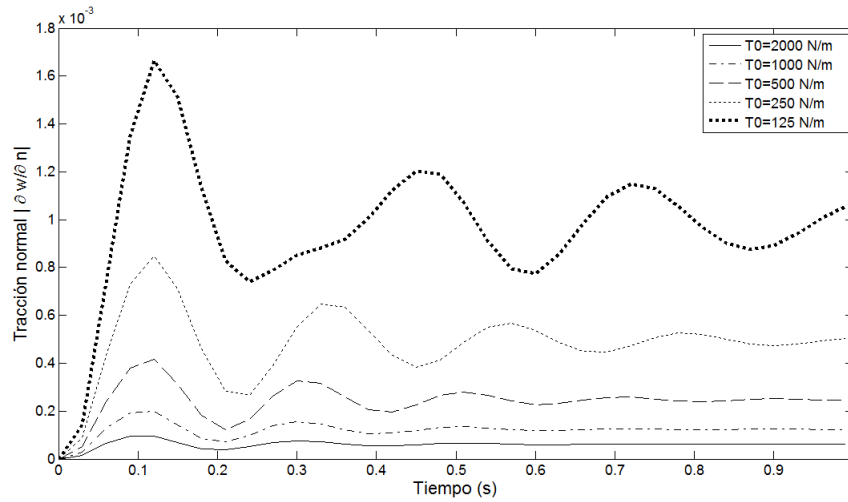


Figura 5-13: Problema 8: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes.

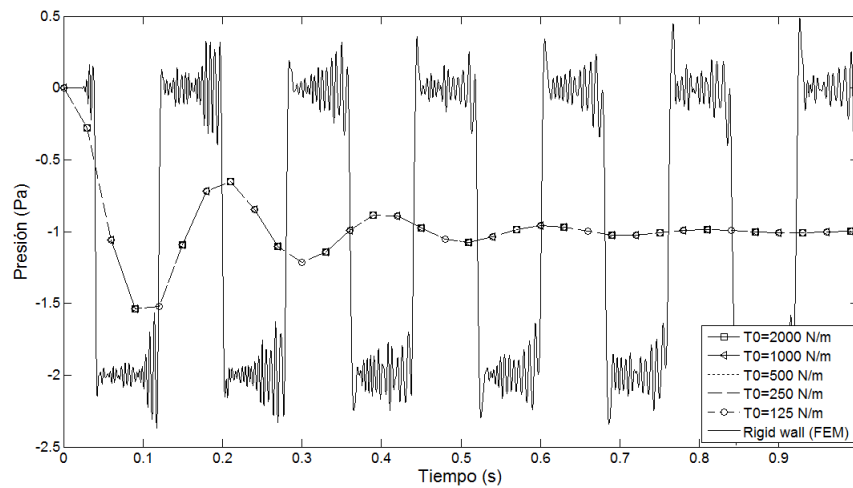


Figura 5-14: Problema 8: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

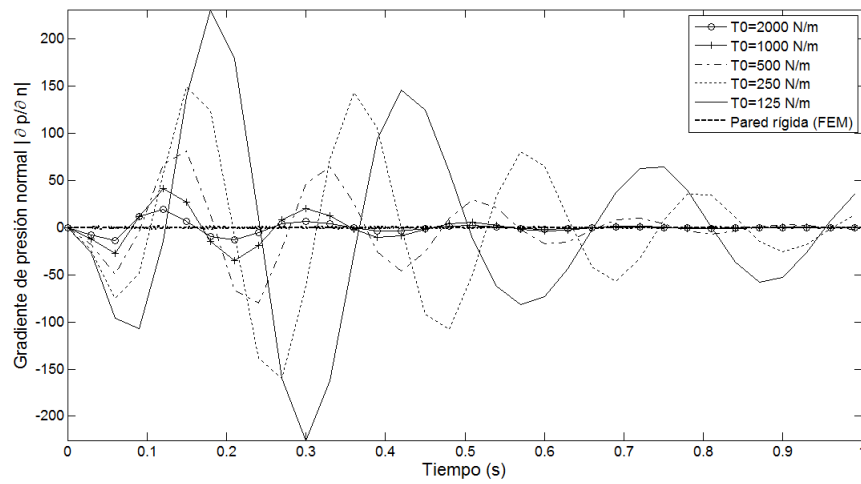


Figura 5-15: Problema 8: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

5.1.2. Fluido contenido en una estructura con forma de caja y sometido a una carga armónica

Problema 9:

Este ejemplo se basa en la misma discretización anterior, pero en esta ocasión se conservan el rango de variación de la tensión sobre la membrana, la masa por unidad de área y el espesor de la misma. La velocidad de propagación para el fluido fue $c_f = 50$ m/s y la densidad $\rho_f = 100$ kg/m³, obteniéndose un bajo módulo de compresibilidad. Los resultados obtenidos por DR-BEM para ciertas tensiones aplicadas sobre la membrana son comparados esta vez contra tres modelos a saber: Un modelo desacoplado de referencia como el de los ejemplos anteriores usando elementos finitos, un modelo unidimensional constituido por un fluido acústico acoplado a un sistema masa resorte (equivalente a la membrana) usando diferencias finitas y finalmente, un modelo bidimensional de la interacción fluido-acústico membrana usando diferencias finitas.

La carga aplicada es del tipo armónico y tiene la forma $p = P \sin(w_0 t)$, donde P indica la amplitud y w_0 es la velocidad angular en función de la frecuencia de la carga. Para este problema se escogió un valor de $P = 1$ Pa y para la velocidad angular un valor de 0,25 rad/s.

Comparación con el modelo desacoplado

Los resultados obtenidos bajo estas condiciones se muestra en las figuras (5-16) a (5-20). El monitoreo del desplazamiento de la figura (5-16) indica que se cumple con la teoría de pequeños desplazamientos y que se obtuvo la onda sinusoidal esperada, consecuente con el primer modo de vibración de una membrana para baja frecuencia. Además, existe correspondencia con lo esperado para los desplazamientos a medida que se incrementara la tensión en la membrana, es decir, que fuésen disminuyendo para membranas más rígidas, ver figura (5-17). Las tracciones por su parte, son

proporcionales con la variación del desplazamiento, resultado de los esfuerzos o presiones sobre la estructura en cada instante de tiempo. Finalmente, se observa convergencia hacia menores valores para las tracciones y gradientes de presión, conforme se incrementa la rigidez de la membrana, ver figuras (5-19) a (5-20) .

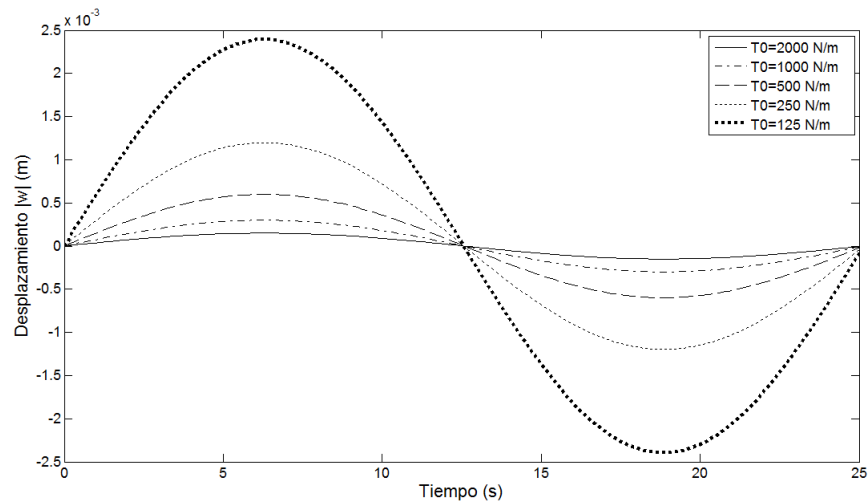


Figura 5-16: Problema 9: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

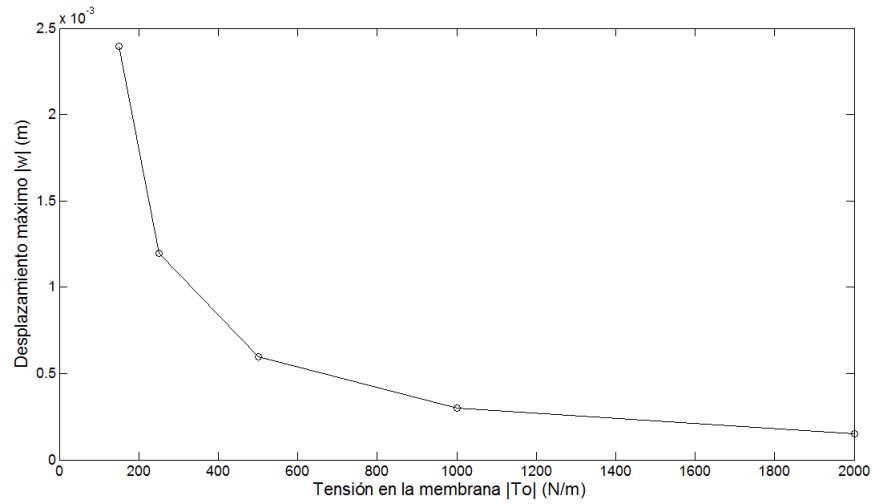


Figura 5-17: Problema 9: Desplazamiento máximo en el punto $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ vs tiempo.

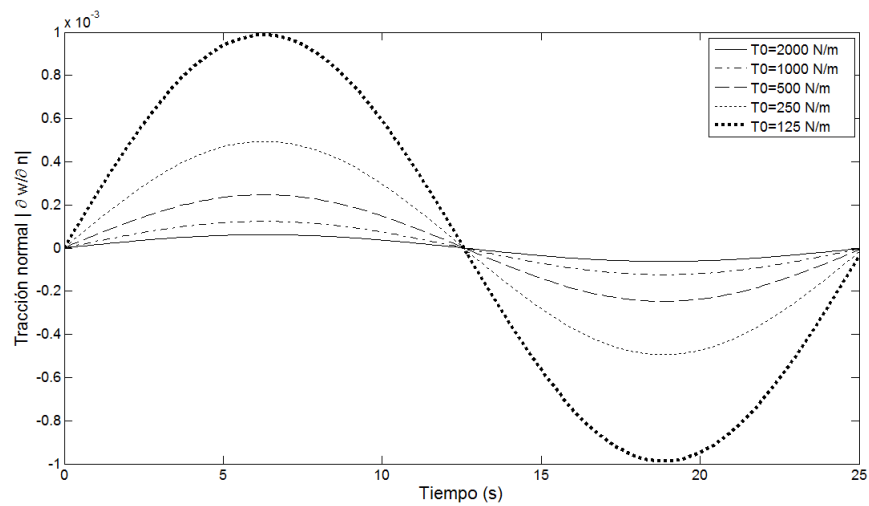


Figura 5-18: Problema 9: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes.

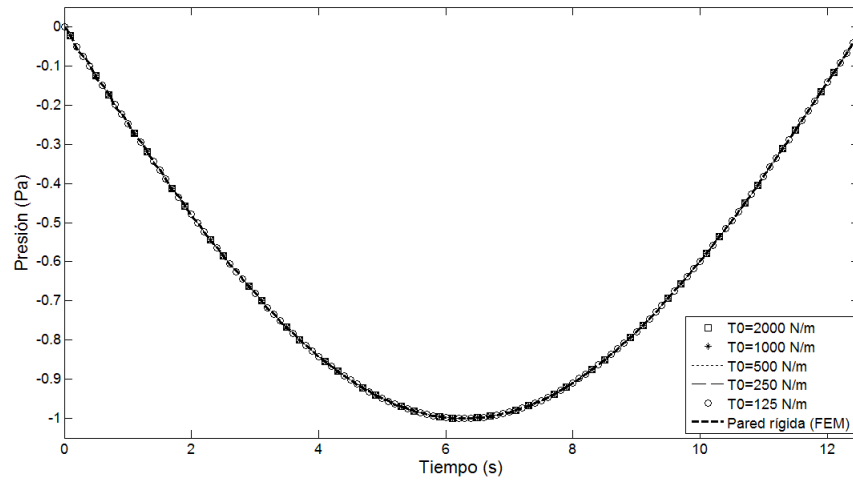


Figura 5-19: Problema 9: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

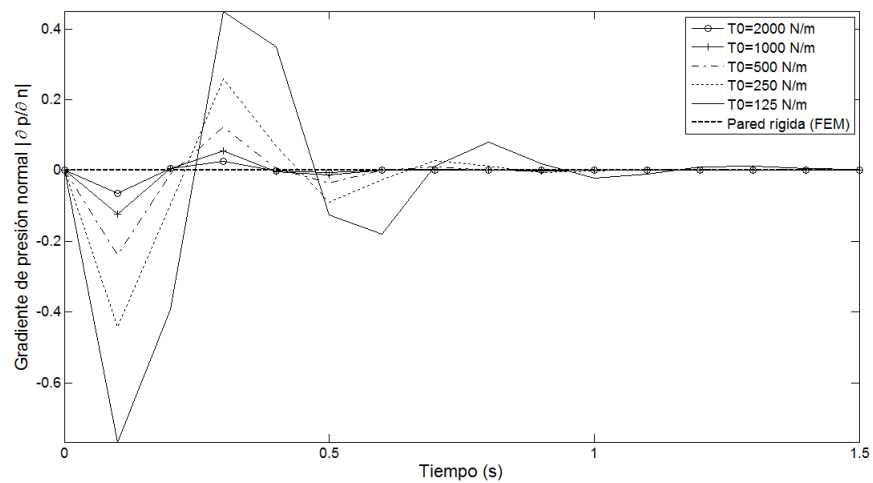


Figura 5-20: Problema 9: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1)$ usando Houbolt y elementos constantes.

Comparación con el modelo unidimensional

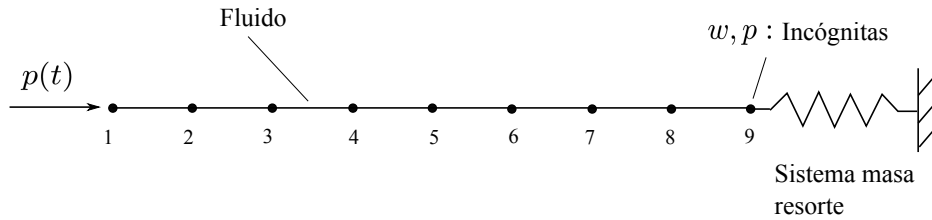


Figura 5-21: Dominio del problema 1D discretizado con diferencias finitas y condiciones de frontera

En el modelo unidimensional, se considera que la membrana puede ser sustituida por un sistema masa-resorte equivalente, como se muestra en figura (5-21). La constante elástica de la membrana puede obtenerse dividiendo la fuerza aplicada sobre una membrana empotrada entre la deflexión máxima de la misma. Para conocer la deflexión máxima se debe resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla^2 w = \frac{P}{T_o} \quad (5-1)$$

con P y T_o como la presión aplicada sobre la membrana y la tensión por unidad de longitud, respectivamente. Esta ecuación ha sido discretizada por DR-BEM para un dominio cuadrado de 2 m, el cual representa una membrana empotrada en su cuatro lados ver figura (5-22). En este caso, se han empleado 40 elementos lineales y 5 puntos de colocación en el dominio.

La solución para la deflexión en todo el dominio puede verse en la figura (5-23) donde le valor máximo es $w_{max} = -0,2935(P/T_o)$. Por tanto la constante elástica equivalente a un resorte es $k = -(P A)/w_{max} = 3,555 T_o A$, donde A es el área de la membrana.

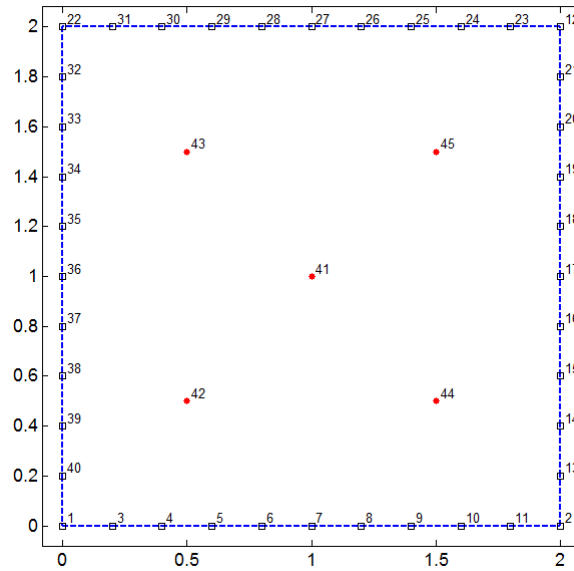


Figura 5-22: Discretización de la membrana por DR-BEM usando elementos lineales

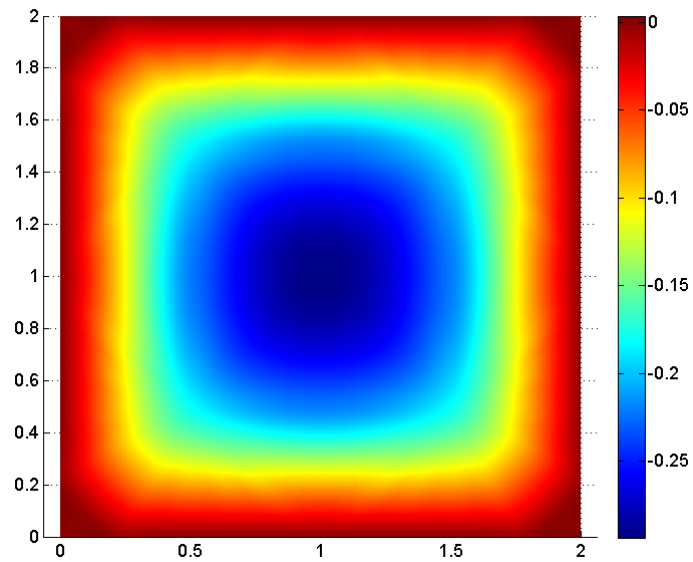


Figura 5-23: Deflexión de la membrana como función de la razón P/T_0

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan a este problema son:

1) Ecuación de ondas acústicas unidimensional

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5-2)$$

con p , w y c_f como la presión acústica, el desplazamiento y la velocidad de propagación de la onda, respectivamente.

2) Ecuación de equilibrio de Newton

$$p^f - \frac{k}{A} w = \frac{m}{A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5-3)$$

con p^f , k , m y A como la presión acústica sobre la membrana, la constante elástica, la masa de la membrana y el área de la misma, respectivamente.

3) Ecuación de acoplamiento

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5-4)$$

con p , w y ρ_f como la presión acústica, el desplazamiento y la densidad del fluido.

Para los nodos del dominio las derivadas para el Laplaciano son discretizadas con diferencias finitas centrales y para la segunda derivada con respecto al tiempo se usa la diferencia finita hacia atrás empleada por Houbolt. De acuerdo a la malla $\Delta x = 0,25$ m, obteniéndose lo siguiente para un instante de tiempo $n + 1$:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} = \frac{p_{i-1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 16p_{i+1}^{n+1} - 32p_i^{n+1} + 16p_{i-1}^{n+1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)_i^{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2p_i^{n+1} - 5p_i^n + 4p_i^{n-1} - p_i^{n-2})$$

de este modo la ecuación resultante se puede reescribir como:

$$16p_{i+1}^{n+1} - \left(32 + \frac{2}{(c_f \Delta t)^2}\right) p_i^{n+1} + 16p_{i-1}^{n+1} = \frac{1}{(c_f \Delta t)^2} (-5p_i^n + 4p_i^{n-1} - p_i^{n-2})$$

Si se hace $\alpha = \frac{1}{(c_f \Delta t)^2}$ y $\beta = 32 + 2\alpha$ se obtiene:

$$16p_{i+1}^{n+1} - \beta p_i^{n+1} + 16p_{i-1}^{n+1} = \alpha (-5p_i^n + 4p_i^{n-1} - p_i^{n-2})$$

Ahora para los nodos internos se tiene:

Nodo 2:

$$16p_3^{n+1} - \beta p_2^{n+1} + 16p_1^{n+1} = \alpha (-5p_2^n + 4p_2^{n-1} - p_2^{n-2})$$

Nodo 3:

$$16p_4^{n+1} - \beta p_3^{n+1} + 16p_2^{n+1} = \alpha (-5p_3^n + 4p_3^{n-1} - p_3^{n-2})$$

Nodo 4:

$$16p_5^{n+1} - \beta p_4^{n+1} + 16p_3^{n+1} = \alpha (-5p_4^n + 4p_4^{n-1} - p_4^{n-2})$$

Nodo 5:

$$16p_6^{n+1} - \beta p_5^{n+1} + 16p_4^{n+1} = \alpha (-5p_5^n + 4p_5^{n-1} - p_5^{n-2})$$

Nodo 6:

$$16p_7^{n+1} - \beta p_6^{n+1} + 16p_5^{n+1} = \alpha (-5p_6^n + 4p_6^{n-1} - p_6^{n-2})$$

Nodo 7:

$$16p_8^{n+1} - \beta p_7^{n+1} + 16p_6^{n+1} = \alpha (-5p_7^n + 4p_7^{n-1} - p_7^{n-2})$$

Nodo 8:

$$16p_9^{n+1} - \beta p_8^{n+1} + 16p_7^{n+1} = \alpha (-5p_8^n + 4p_8^{n-1} - p_8^{n-2})$$

Para el nodo 9 en la interfaz se tiene:

$$(p^f)_i^{n+1} - \left(\frac{k}{A} + \frac{2m}{A(\Delta t)^2} \right) w_i^{n+1} = \frac{m}{A(\Delta t)^2} (-5w_i^n + 4w_i^{n-1} - w_i^{n-2})$$

$$p_9^{n+1} - \left(\frac{k}{A} + \frac{2m}{A(\Delta t)^2} \right) w_9^{n+1} = \frac{m}{A(\Delta t)^2} (-5w_9^n + 4w_9^{n-1} - w_9^{n-2})$$

Además, en este nodo se debe cumplir la ecuación de acoplamiento, la cual puede ser discretizada usando una diferencia finita hacia atrás para el gradiente de presión y la diferencia finita hacia atrás empleada por Houbolt para la segunda derivada con respecto al tiempo, resultando lo siguiente :

$$2p_{i-2}^{n+1} - 8p_{i-1}^{n+1} + 6p_i^{n+1} - \frac{2\rho_f}{(\Delta t)^2} w_i^{n+1} = \frac{\rho_f}{(\Delta t)^2} (-5w_i^n + 4w_i^{n-1} - w_i^{n-2})$$

De esta forma, la otra ecuación para este nodo es:

$$2p_7^{n+1} - 8p_8^{n+1} + 6p_9^{n+1} - \frac{2\rho_f}{(\Delta t)^2} w_9^{n+1} = \frac{\rho_f}{(\Delta t)^2} (-5w_9^n + 4w_9^{n-1} - w_9^{n-2})$$

Finalmente, en el nodo 1 por ser un nodo de frontera se conoce la presión aplicada, luego entonces:

$$p_1^{n+1} = \sin(0,25t)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para cada instante de tiempo se obtuvieron los resultados de las figuras (5-24) y (5-25). En la figura para el desplazamiento se puede observar que los dos modelos están obteniendo resultados similares, acercándose mucho más cuando la tensión en los bordes de la membrana es mayor. Ambos modelos coinciden en que al aumentar la tensión en la membrana se reduce el desplazamiento. En el caso de la presión los dos modelos conservan el mismo patrón de solución y revelan que la tensión sobre la membrana no debe influir en la respuesta de la presión, aunque elementos de contorno lo muestra más claramente por le hecho de que el modelo 1D es bastante simplificado para el modelo real.

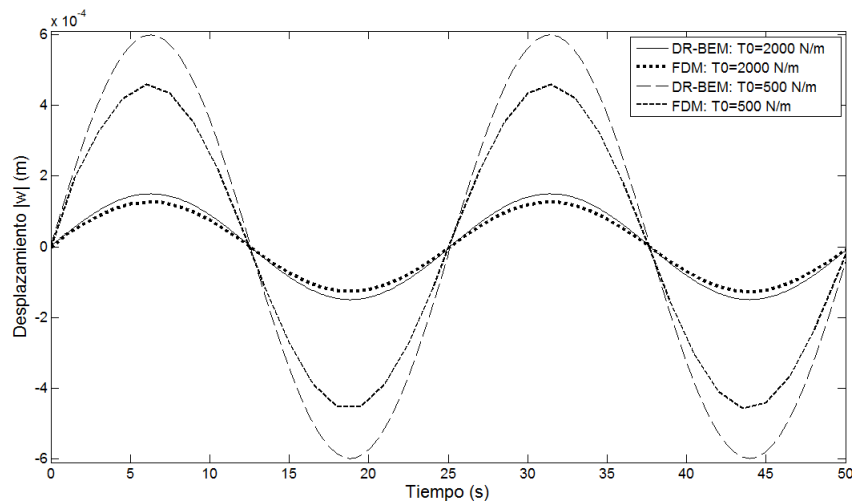


Figura 5-24: Deflexión en el centro de la membrana para el modelo 3D por DR-BEM Vs el modelo 1D por FDM

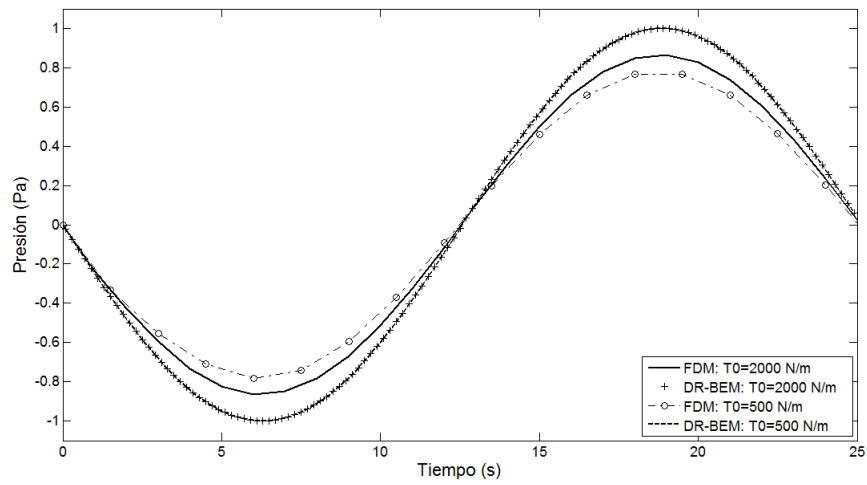


Figura 5-25: Presión acústica en el centro de la membrana para el modelo 3D por DR-BEM Vs el modelo 1D por FDM

Comparación con el modelo bidimensional

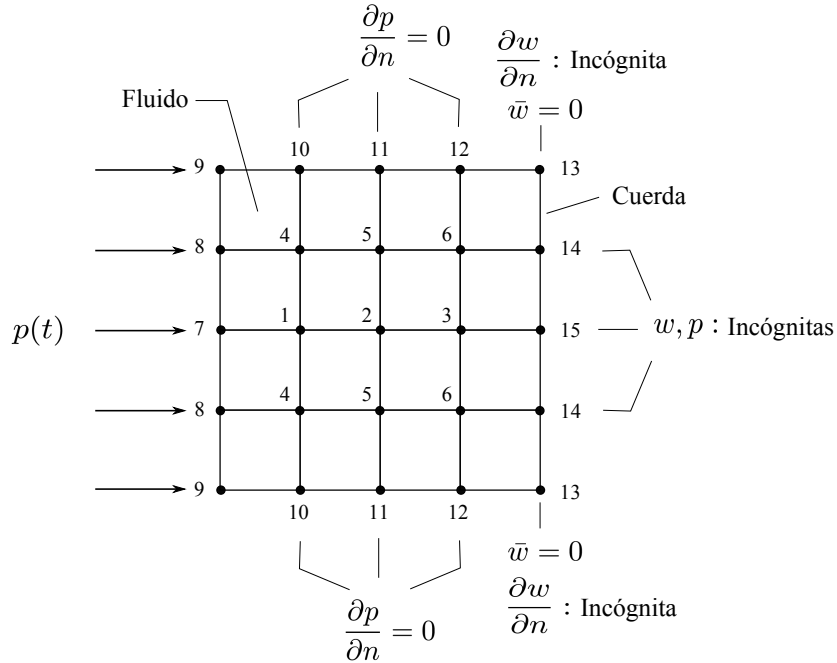


Figura 5-26: Dominio del problema 2D discretizado con diferencias finitas y condiciones de frontera

El modelo 2D está constituido por un fluido acústico contenido en un dominio cuadrado y en uno de sus extremos se encuentra una membrana que se supone equivalente a una cuerda en dos dimensiones con la cual interactúa el fluido. En el extremo opuesto se aplica una presión unitaria de tipo armónico y los dos lados restantes son rígidos, como se muestra en la figura (5-26).

Este problema está gobernado por las siguientes ecuaciones:

1) Ecuación de ondas acústicas bidimensional

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{5-5}$$

con p, y c_f como la presión acústica y la velocidad de propagación de la onda, respectivamente.

2) Ecuación de una cuerda vibrante en equivalencia a la membrana

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5-6)$$

con $w, c_m = \sqrt{T/\sigma}, T$ y σ como el desplazamiento, la velocidad de propagación de la onda, la tensión en la cuerda y la masa por unidad de longitud, respectivamente.

3) Ecuación de acoplamiento

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5-7)$$

con p, w y ρ_f como la presión acústica, el desplazamiento y la densidad del fluido.

Para encontrar las tension y la masa por unidad de longitud para el modelo bidimensional se multiplicaron tanto la tensión por unidad de longitud como la masa por unidad de área por el ancho de la membrana (L_z) que se encuentra hacia dentro del plano para el caso tridimensional. Es decir, $T = T_o L_z = 2T_o \text{ N}$ y $\sigma = \mu L_z = 2\mu \text{ Kg/m}$.

Para los nodos del dominio las derivadas para el Laplaciano son discretizadas con diferencias finitas centrales y para la segunda derivada con respecto al tiempo se usa la diferencia finita hacia atrás empleada por Houbolt. De acuerdo a la malla $\Delta x = \Delta y = 0,5 \text{ m}$, obteniéndose lo siguiente para un instante de tiempo $n + 1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_{i,j}^{n+1} &= \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 4p_{i+1,j}^{n+1} - 8p_{i,j}^{n+1} + 4p_{i-1,j}^{n+1} \\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right)_{i,j}^{n+1} &= \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = 4p_{i,j+1}^{n+1} - 8p_{i,j}^{n+1} + 4p_{i,j-1}^{n+1} \\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{(\Delta t)^2} (2p_{i,j}^{n+1} - 5p_{i,j}^n + 4p_{i,j}^{n-1} - p_i^{n-2}) \end{aligned}$$

A partir de lo anterior, la ecuación de ondas acústicas queda discretizada de la siguiente manera:

$$4p_{i+1,j}^{n+1} - \left(16 + \frac{2}{(c_f \Delta t)^2}\right) p_{i,j}^{n+1} + 4p_{i-1,j}^{n+1} + 8p_{i,j-1}^{n+1} = \frac{1}{(c_f \Delta t)^2} (-5p_{i,j}^n + 4p_{i,j}^{n-1} - p_{i,j}^{n-2})$$

Si se hace $\alpha_f = \frac{1}{(c_f \Delta t)^2}$ y $\beta_f = 16 + 2\alpha_f$ se obtiene:

$$4p_{i+1,j}^{n+1} - \beta_f p_{i,j}^{n+1} + 4p_{i-1,j}^{n+1} + 8p_{i,j-1}^{n+1} = \alpha_f (-5p_i^n + 4p_i^{n-1} - p_i^{n-2})$$

Ahora para los nodos internos se tiene:

Nodo 1:

$$4p_2^{n+1} - \beta_f p_1^{n+1} + 4p_7^{n+1} + 8p_4^{n+1} = \alpha_f (-5p_1^n + 4p_1^{n-1} - p_1^{n-2})$$

Nodo 2:

$$4p_3^{n+1} - \beta_f p_2^{n+1} + 4p_1^{n+1} + 8p_5^{n+1} = \alpha_f (-5p_2^n + 4p_2^{n-1} - p_2^{n-2})$$

Nodo 3:

$$4p_{15}^{n+1} - \beta_f p_3^{n+1} + 4p_2^{n+1} + 8p_6^{n+1} = \alpha_f (-5p_3^n + 4p_3^{n-1} - p_3^{n-2})$$

Nodo 4:

$$4p_5^{n+1} - \beta_f p_4^{n+1} + 4p_8^{n+1} + 8p_{10}^{n+1} = \alpha_f (-5p_4^n + 4p_4^{n-1} - p_4^{n-2})$$

Nodo 5:

$$4p_6^{n+1} - \beta_f p_5^{n+1} + 4p_4^{n+1} + 8p_{11}^{n+1} = \alpha_f (-5p_5^n + 4p_5^{n-1} - p_5^{n-2})$$

Nodo 6:

$$4p_{14}^{n+1} - \beta_f p_6^{n+1} + 4p_5^{n+1} + 8p_{12}^{n+1} = \alpha_f (-5p_6^n + 4p_6^{n-1} - p_6^{n-2})$$

Para los nodos de la frontera izquierda se tiene:

Nodo 7:

$$p_7^{n+1} = \sin(0,25t)$$

Nodo 8:

$$p_8^{n+1} = \sin(0,25t)$$

Nodo 9:

$$p_9^{n+1} = \sin(0,25t)$$

Para los nodos de la frontera inferior se tiene:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j}^{n+1} = \frac{-3p_{i,j}^{n+1} + 4p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j+2}^{n+1}}{2\Delta y} = -3p_{i,j}^{n+1} + 4p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j+2}^{n+1} = 0$$

Nodo 10:

$$-3p_10^{n+1} + 4p_4^{n+1} - p_1^{n+1} = 0$$

Nodo 11:

$$-3p_11^{n+1} + 4p_5^{n+1} - p_2^{n+1} = 0$$

Nodo 12:

$$-3p_1 2^{n+1} + 4p_6^{n+1} - p_3^{n+1} = 0$$

pero el nodo 13 debe cumplir que el desplazamiento es cero por estar fijo, así tenemos:

$$w_{13} = 0$$

Por otra parte, para los nodos de la interfaz se debe cumplir la ecuación de la vibración de una cuerda y la ecuación de acoplamiento definida con anterioridad, de este modo las derivadas para el Laplaciano y aceleración son discretizadas del siguiente modo:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,j}^{n+1} = \frac{w_{i,j+1}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = 4w_{i,j+1}^{n+1} - 8w_{i,j}^{n+1} + 4w_{i,j-1}^{n+1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2w_{i,j}^{n+1} - 5w_{i,j}^n + 4w_{i,j}^{n-1} - w_{i,j}^{n-2})$$

A partir de lo anterior, la ecuación para la vibración de una cuerda queda discretizada de la siguiente manera:

$$4w_{i,j+1}^{n+1} - \left(8 + \frac{2}{(c_f \Delta t)^2}\right) w_{i,j}^{n+1} + 4w_{i,j-1}^{n+1} + \frac{1}{T_o} p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{(c_f \Delta t)^2} (-5w_{i,j}^n + 4w_{i,j}^{n-1} - w_{i,j}^{n-2})$$

Si se hace $\alpha_m = \frac{1}{(c_m \Delta t)^2}$ y $\beta_f = 8 + 2\alpha_m$ se obtiene:

$$4w_{i,j+1}^{n+1} - \beta_m w_{i,j}^{n+1} + 4w_{i,j-1}^{n+1} + \frac{1}{T_o} p_{i,j}^{n+1} = \alpha_m (-5w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1} - w_{i,j}^{n-2})$$

Nodo 14:

$$4w_{15}^{n+1} - \beta_m w_{14}^{n+1} + 4w_{13}^{n+1} + \frac{1}{T_o} p_{14}^{n+1} = \alpha_m (-5w_{14}^n + w_{14}^{n-1} - w_{14}^{n-2})$$

Nodo 15:

$$8w_{14}^{n+1} - \beta_m w_{15}^{n+1} + \frac{1}{T_o} p_{15}^{n+1} = \alpha_m (-5w_{15}^n + wp_{15}^{n-1} - w_{15}^{n-2})$$

Finalmente, para la ecuación de acoplamiento las derivadas discretizadas se pueden escribir como:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i-2,j}^{n+1} - 4p_{i-1,j}^{n+1} + 3p_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} = p_{i-2,j}^{n+1} - 4p_{i-1,j}^{n+1} + 3p_{i,j}^{n+1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2w_{i,j}^{n+1} - 5w_{i,j}^n + 4w_{i,j}^{n-1} - w_{i,j}^{n-2})$$

de esta forma la ecuación queda como:

$$p_{i-2,j}^{n+1} - 4p_{i-1,j}^{n+1} + 3p_{i,j}^{n+1} - \frac{2\rho_f}{(\Delta t)^2} w_{i,j}^{n+1} = \frac{2\rho_f}{(\Delta t)^2} (-5w_{i,j}^n + 4w_{i,j}^{n-1} - w_{i,j}^{n-2})$$

Nodo 14:

$$p_5^{n+1} - 4p_6^{n+1} + 3p_3^{n+1} - \frac{2\rho_f}{(\Delta t)^2} w_{14}^{n+1} = \frac{2\rho_f}{(\Delta t)^2} (-5w_{14}^n + 4w_{14}^{n-1} - w_{14}^{n-2})$$

Nodo 15:

$$p_2^{n+1} - 4p_3^{n+1} + 3p_{15}^{n+1} - \frac{2\rho_f}{(\Delta t)^2} w_{15}^{n+1} = \frac{2\rho_f}{(\Delta t)^2} (-5w_{15}^n + 4w_{15}^{n-1} - w_{15}^{n-2})$$

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto para cada instante de tiempo usando un procedimiento especial de iniciación para el método de Houbolt. Los resultados obtenidos en el tiempo para el desplazamiento y la presión se muestran en las figuras (5-27) y (5-28). Para este segundo modelo por FDM el desplazamiento se carga mucho más al valor obtenido por DR-BEM, tan solo se observa un pequeño desfase en la onda. En cuanto a la presión, también hay similitud en el comportamiento físico del problema,

se vuelve a apreciar que para distintas tensiones hay tendencia a que se mantenga la presión. Cabe hacer la aclaración que la malla para la discretización es un poco burda, dado que los cálculos por diferencias finitas se hicieron de forma semi-manual (las ecuaciones se obtuvieron manualmente y se resolvieron con Matlab usando el método de Houbolt) tan solo para observar el comportamiento de la solución obtenida, y por ende, una mayor precisión para la comparación en los resultados requiere de ahondar un poco más en una programación totalmente automatizada para la generación de mallas más finas, sin embargo, hasta este punto se observa una aproximación significativa entre los distintos modelos.

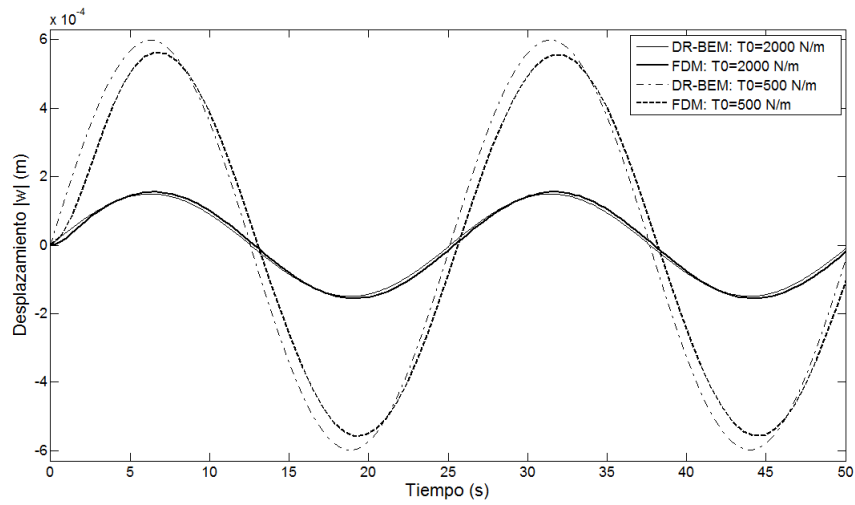


Figura 5-27: Deflexión en el centro de la membrana para el modelo 3D por DR-BEM Vs el modelo 2D por FDM

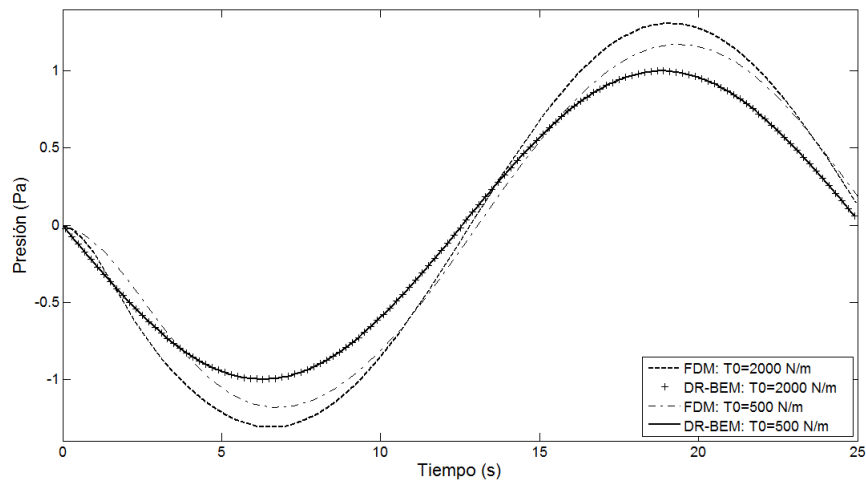


Figura 5-28: Presión en el centro de la membrana para el modelo 3D por DR-BEM Vs el modelo 2D por FDM

5.1.3. Fluido contenido en un canal y sometido a una carga armónica

En este caso se abordan dos canales de la misma longitud en la base, los cuales contienen a un fluido acústico acoplado a una membrana inclinada. La diferencia entre los dos problemas físicos se encuentra en las propiedades del fluido acústico. Esto se hace con el objetivo de analizar el efecto de la velocidad de propagación sobre las variables del problema. La carga de presión tiene la misma expresión que para el ejemplo analizado anteriormente.

Problema 10:

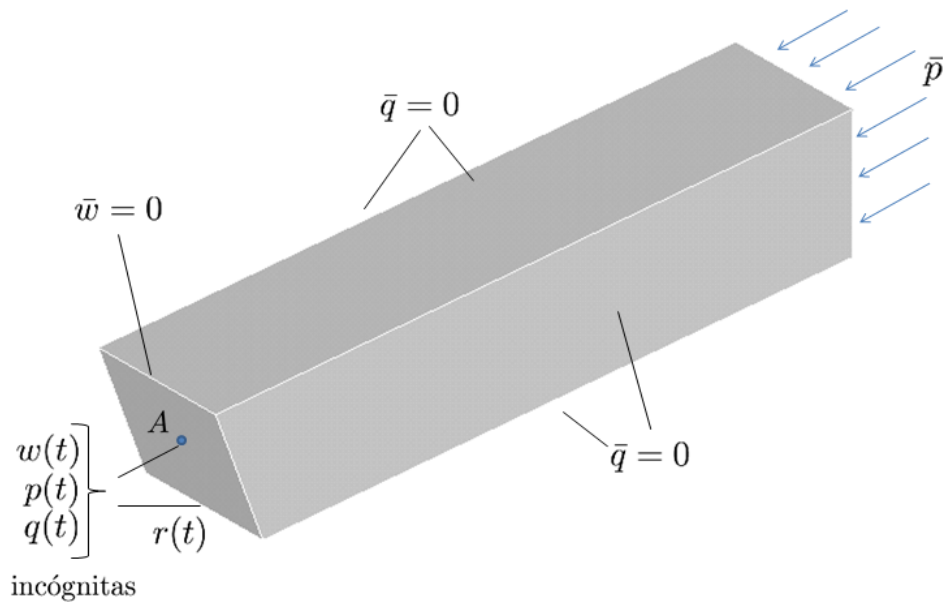


Figura 5-29: Problema 10: Dominio con condiciones de frontera para $t > 0$ y punto de interés de la solución.

El primer caso hace referencia a un canal de una longitud en su base de unos 9 metros y una sección transversal en su parte no inclinada de 2×2 metros. El dominio y las condiciones de frontera para $t > 0$ pueden verse en la figura (5-29). La membrana tiene una masa por unidad de área $\mu = 1 \text{ kg/m}^2$ y un espesor de 1 mm, y se ha ana-

lizado bajo distintas condiciones de tensión por unidad de longitud T_0 entre el rango $125 \text{ N/m} - 2000 \text{ N/m}$. El fluido posee una densidad $\rho_f = 100 \text{ kg/m}^3$ y una velocidad de propagación del sonido $c_f = 50 \text{ m/s}$.

El problema es discretizado con 352 elementos cuadriláteros constantes y 172 puntos de colocación en el interior del dominio. La frontera de la membrana fue dividida en 16 elementos constantes y se emplearon 16 puntos interiores de colocación compartidos con la frontera del fluido, ver figura(5-30).

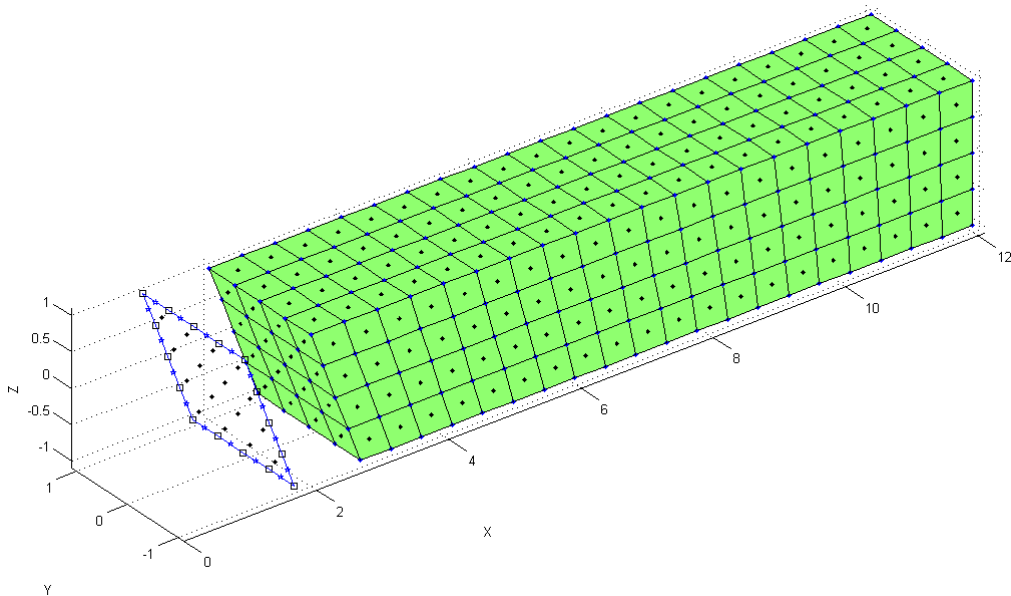


Figura 5-30: Problema 10: Discretización de la frontera.

El paso de tiempo requerido para la estabilidad del método de Houbolt fué mucho más grande que para el caso anterior, se observó una estabilidad numérica para $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ y en general para todos los valores dentro del intervalo $0,06 \text{ s} \leq \Delta t \leq 0,3 \text{ s}$.

La gráfica (5-31) revela que la membrana posee mayor amplitud en sus desplazamientos cuando existe una baja tensión en los extremos de la misma, y del mismo modo que tales valores disminuyen a medida que la membrana se hace más rígida. Tal convergencia se puede apreciar en la figura (5-32).

Para la presión se observa que no existen diferencias significativas con la variación de la tensión en la membrana y además que la presión es cercana a los valores obtenidos por FEM para el problema de referencia, ver figura (5-34).

El gradiente de presión obtenido con elementos de contorno para el problema acoplado converge hacia la solución numérica para el problema desacoplado. Este valor tiende a ser cero, indicando que las partículas de esa pared tienen velocidad nula en la dirección normal. Ver figura (5-35).

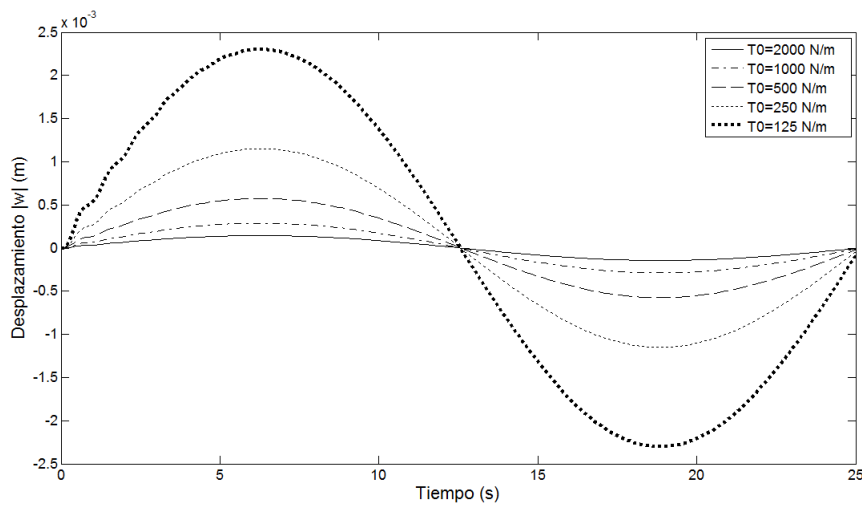


Figura 5-31: Problema 10: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Hou-bolt y elementos constantes.

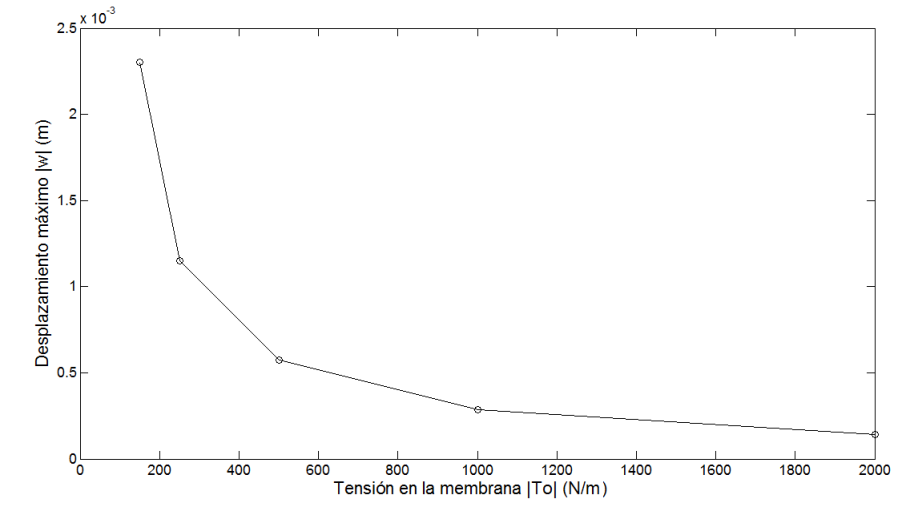


Figura 5-32: Problema 10: Convergencia del máximo desplazamiento en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ contra la tensión en la membrana

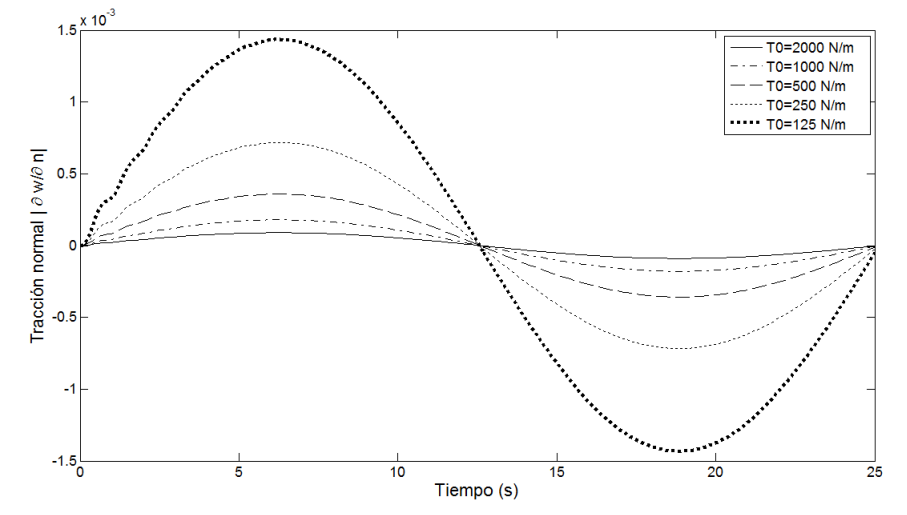


Figura 5-33: Problema 10: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes.

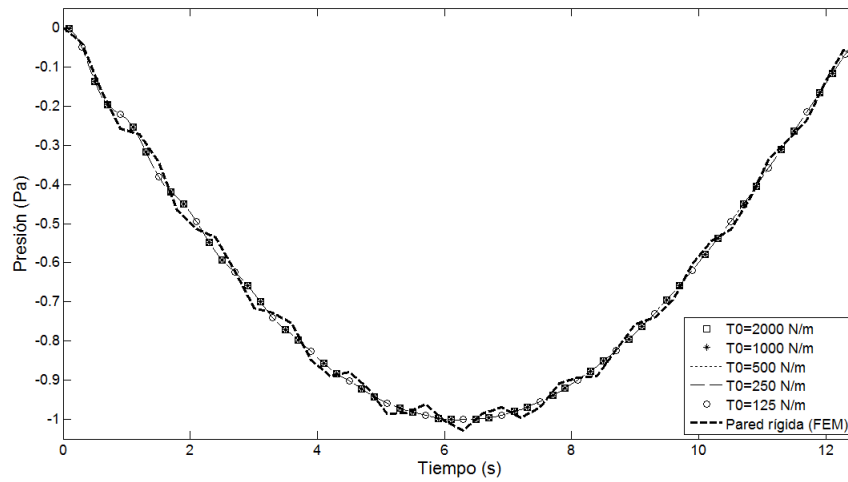


Figura 5-34: Problema 10: Monitoreo de la presión en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes.

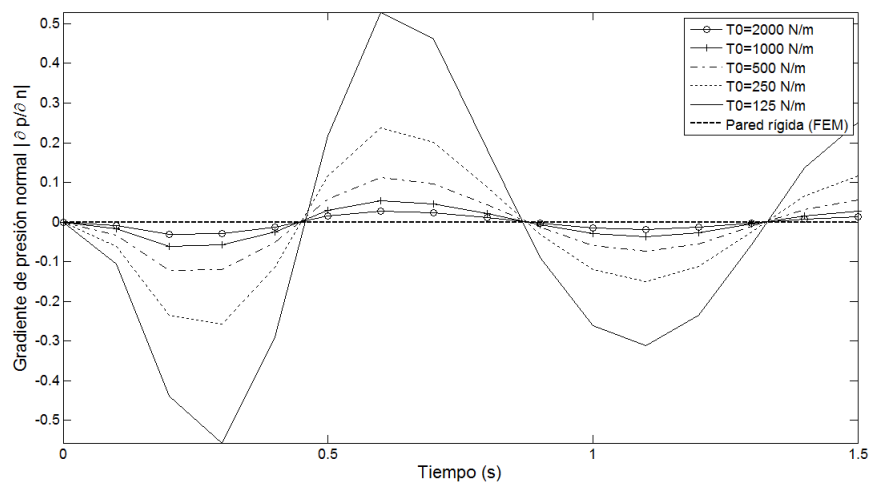


Figura 5-35: Problema 10: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes.

Problema 11:

Este ejemplo conserva la misma geometría del caso anterior, sin embargo, se varía la velocidad de propagación de la onda en el fluido a un valor $c_f = 5 \text{ m/s}$ y por ende el módulo de Bulk es inferior al del fluido anterior. Aquí se usó la misma cantidad de elementos y puntos de colocación interiores para la discretización del problema.

El paso de tiempo requerido para la estabilidad del método de Houbolt fué mucho más grande que para el caso anterior, se observó una estabilidad numérica para $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ y en general para todos los valores dentro del intervalo $0,4 \text{ s} \leq \Delta t \leq 0,7 \text{ s}$.

Se notó un pequeño incremento tanto en la amplitud de los desplazamientos como en las tracciones frente al ejemplo anterior, sin embargo, lo más notorio fué el cambio en la forma de la curva descrita por los valores obtenidos en el tiempo. Para la presión se observó un poco más de diferencia en relación a los resultados de FEM. De todas formas, para todos los casos se evidencia convergencia a medida que se incrementa la tensión hacia la solución de referencia, ver figuras (5-36) a (5-40).

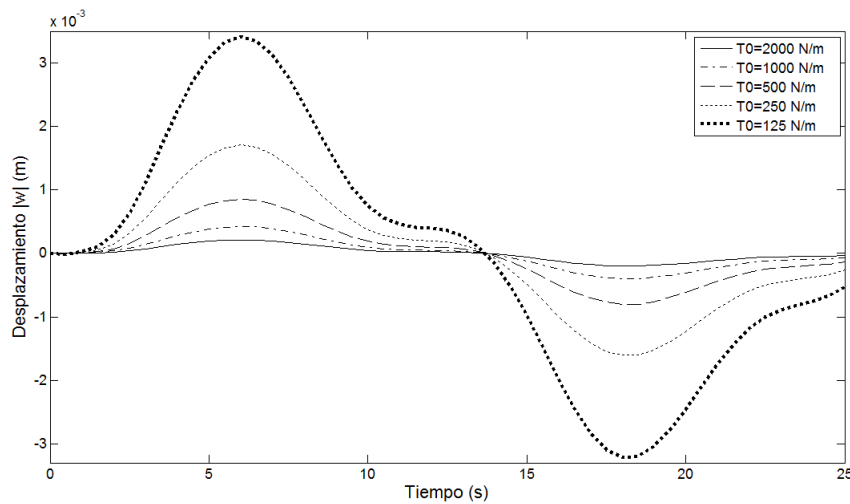


Figura 5-36: Problema 11: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes.

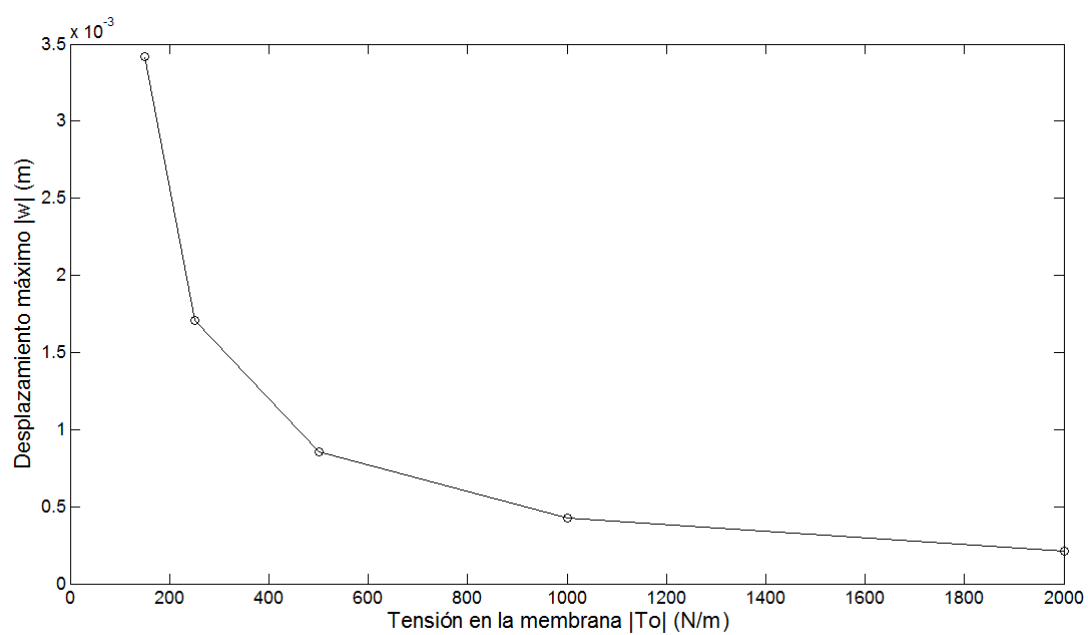


Figura 5-37: Problema 11: Convergencia del máximo desplazamiento en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ contra la tensión en la membrana

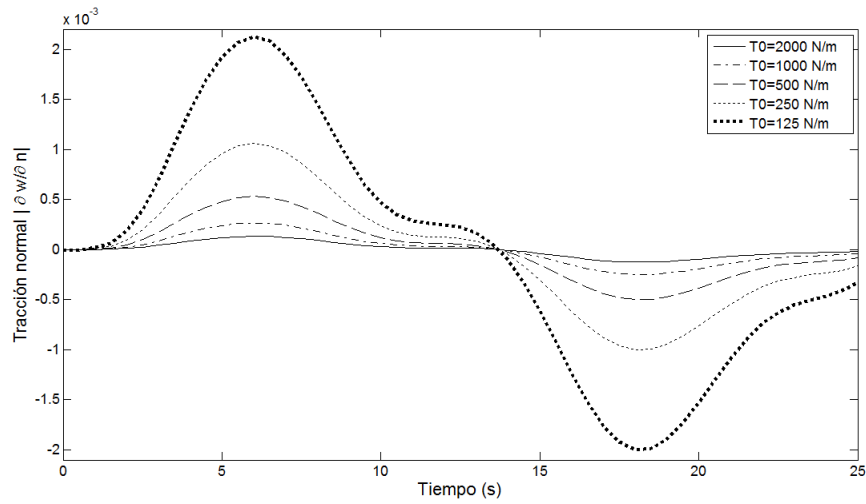


Figura 5-38: Problema 11: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes.

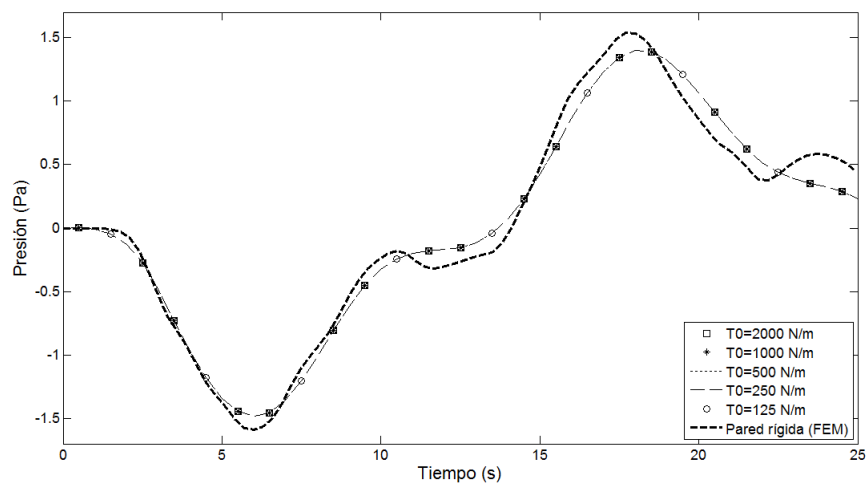


Figura 5-39: Problema 11: Monitoreo de la presión en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes.

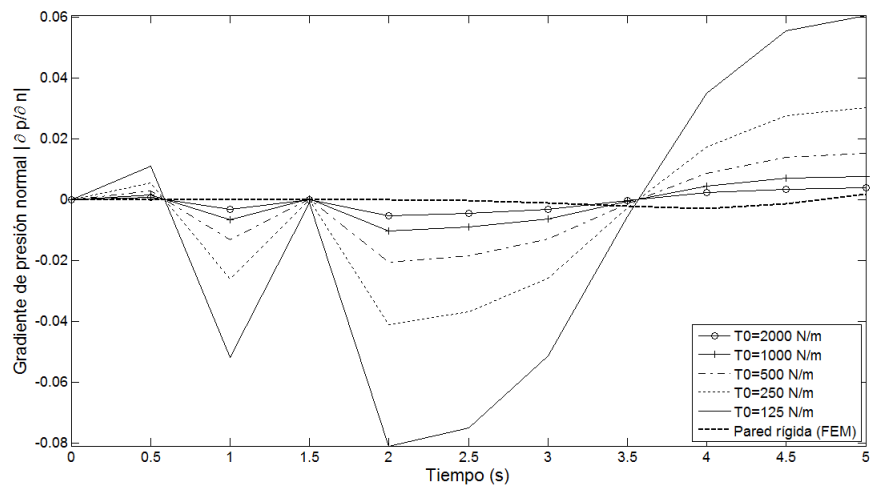


Figura 5-40: Problema 11: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{23}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ usando Houbolt y elementos constantes.

Problema 12:

Este problema hace referencia a una membrana inclinada acoplada a un fluido acústico, pero en esta ocasión se ha ajustado tanto la longitud del canal (a uno cinco veces mas largo) como la velocidad de propagación del sonido en el fluido tal que se aprecie un retardo significativo en las variables del problema, ver figura (5-41). La membrana se ha mantenido bajo las mismas condiciones y propiedades de los canales anteriores. El fluido posee una densidad $\rho_f = 100 \text{ kg/m}^3$ y una velocidad de propagación del sonido $c_f = 5 \text{ m/s}$. La carga de presión armónica es la misma que en los casos anteriores.

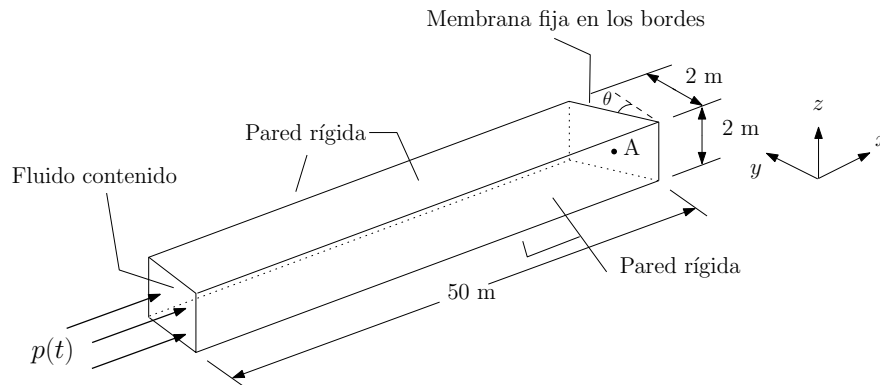


Figura 5-41: Problema 12: Geometría y condiciones de contorno

La discretización para el fluido se realizó con 618 elementos cuadriláteros constantes y se usaron tan solo 40 puntos interiores de colocación. Mientras que la membrana se dividió en 12 elementos constantes y con 9 puntos de colocación interiores compartidos con la frontera interfaz del fluido, ver figura (5-42).

Como era de esperarse por el comportamiento físico en la propagación de las ondas en el fluido, los desplazamientos, tracciones y presiones presentan un retardo más prolongado que para el canal analizado previamente, ver figuras (5-43) a (5-45).

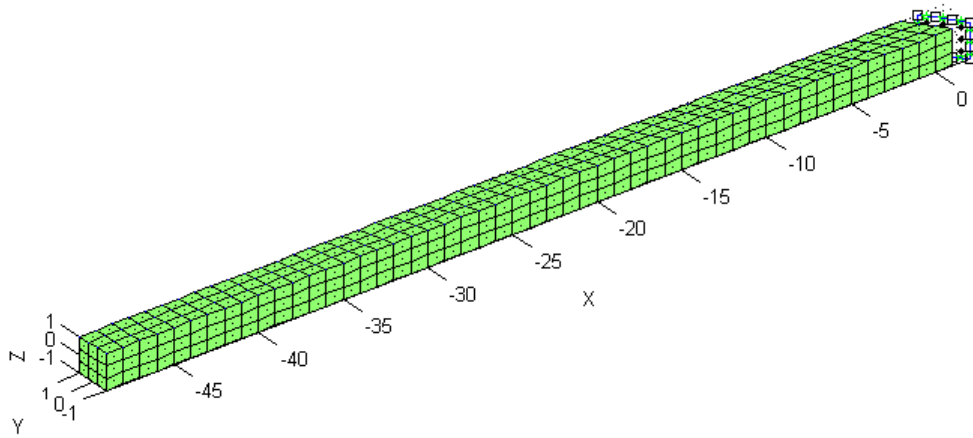


Figura 5-42: Problema 12: Discretización de la frontera

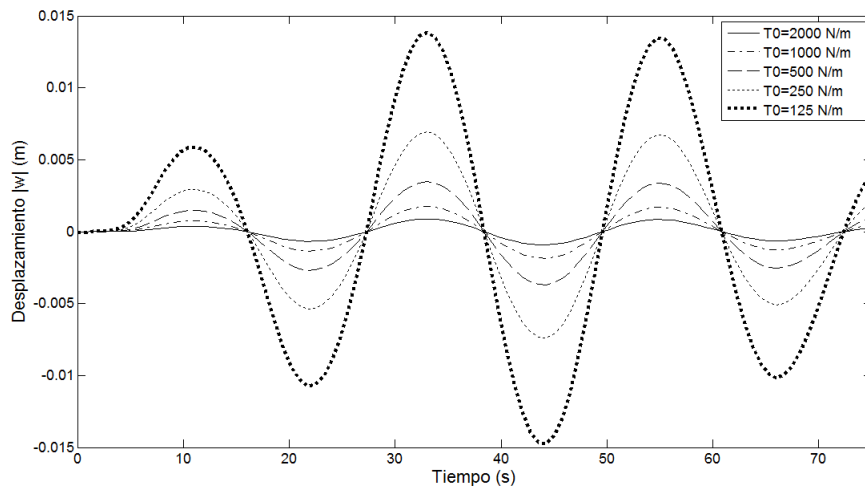


Figura 5-43: Problema 12: Monitoreo del desplazamiento en $A(\frac{1}{4}, 0, 0)$ usando Houbolt y elementos constantes.

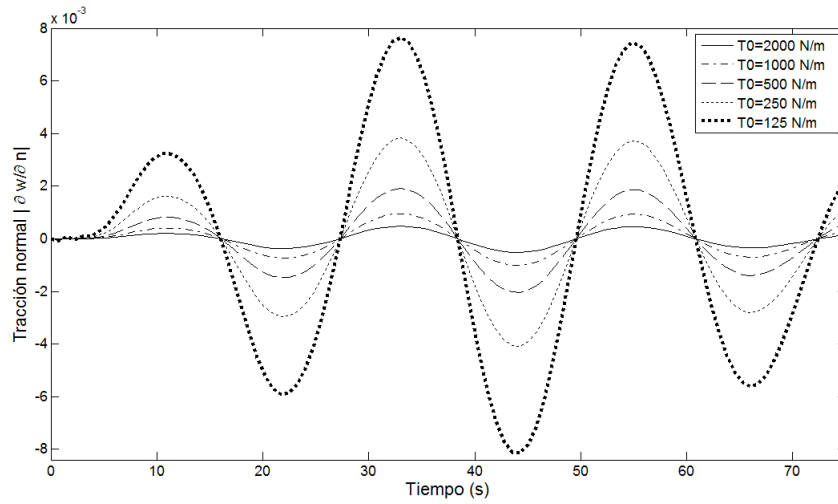


Figura 5-44: Problema 12: Monitoreo de la tracción en el primer elemento de la frontera de la membrana usando Houbolt y elementos constantes.

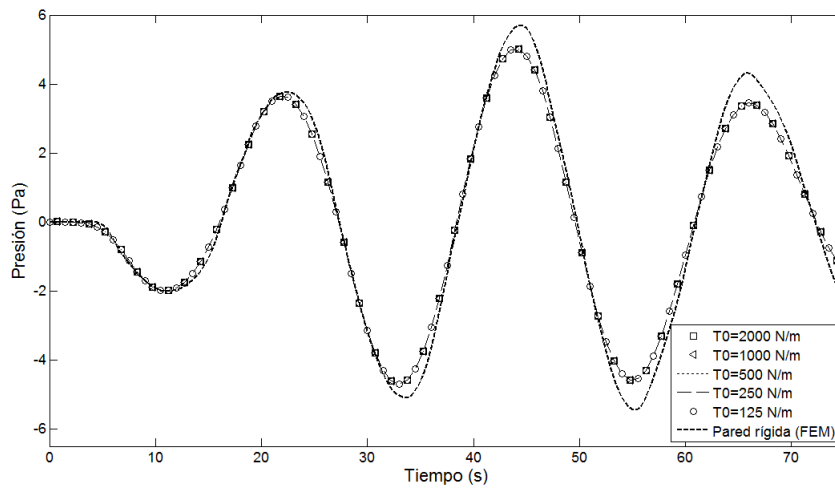


Figura 5-45: Problema 12: Monitoreo de la presión en $A(\frac{1}{4}, 0, 0)$ usando Houbolt y elementos constantes.

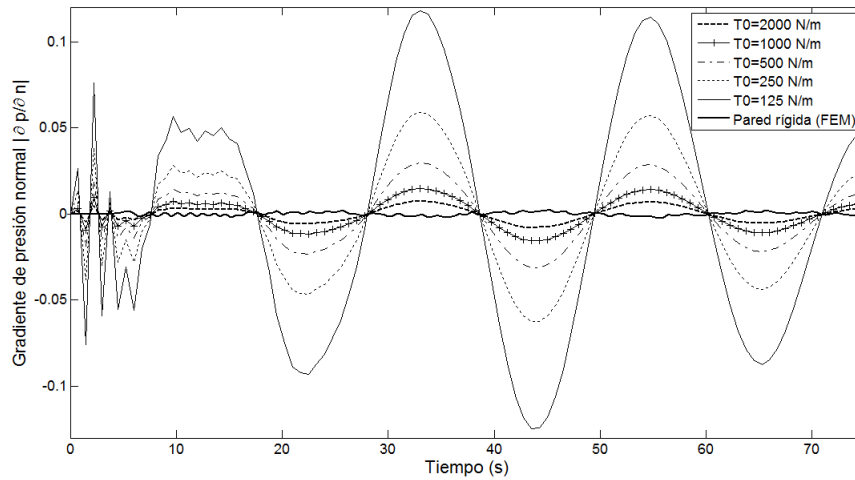


Figura 5-46: Problema 12: Monitoreo del gradiente de presión en $A(\frac{1}{4}, 0, 0)$ usando Houbolt y elementos constantes.

5.2. Conclusiones

En este capítulo se han estudiado varios casos de fluidos contenidos acoplados a una membrana homogénea y flexible. Se evidencia que hasta el momento no se ha logrado obtener buenos resultados para problemas bajo carga tipo Heaviside, debido a la presencia de un elevado amortiguamiento en la respuesta. Este inconveniente ya se había observado para otro tipo de problemas modelados con la ecuación escalar de ondas (por ejemplo, el caso de una viga en voladizo con carga Heaviside en el extremo no empotrado).

Por otra parte, en el análisis de problemas con cargas armónicas si se obtuvo una buena correlación con los datos obtenidos para el problema de referencia. De igual modo, se pudo observar que el modelo 3D realizado con DR-BEM comparado contra los dos modelos hechos con diferencias finitas generan resultados similares y esto es prueba de que el modelo 3D está funcionando bien. Tan solo quedarían pendientes comparaciones con modelos experimentales y algoritmos basados por elementos finitos desarrollados particularmente para este tipo de problemas acoplados.

6 Conclusiones

6.1. Conclusiones finales

En este trabajo de investigación ha presentado la formulación acoplada de elementos de contorno de reciprocidad dual para el análisis de un fluido acústico acoplado a una membrana homogénea.

Se hizo la revisión teórica de la formulación integral por elementos de contorno para las ecuaciones diferenciales que rigen la vibración en membranas y la propagación ondulatoria de un fluido acústico. Se empleó el método de reciprocidad dual para transformar las ecuaciones de dominio en ecuaciones de frontera. La función de interpolación de base radial que resultó ser la más aproximada fué $f = 1 + r$.

Aunque se investigó el tratamiento de la singularidad $1/r$, los algoritmos implementados sin dicha corrección mostraron ser adecuados para la mayoría de problemas analizados, además de los relacionados con la respuesta dinámica de membranas y fluidos acústicos.

Se seleccionaron elementos constantes para realizar la formulación acoplada por la facilidad de realizar el acoplamiento frente a uno con elementos lineales o de orden superior, y además porque las condiciones de contorno están bien definidas para este tipo de elementos. Otra opción es utilizar elementos discontinuos lineales para evadir los inconvenientes con nodos comunes a la frontera en los bordes y las esquinas, sin embargo, ello implica la construcción de sistemas matriciales muchísimo más grandes,

incluso para elementos discontinuos de tan solo cuatro nodos.

Por otra parte, ensayos previos dentro del proceso de investigación revelaron que los elementos cuadriláteros constantes eran más aproximados que los elementos triangulares constantes para analizar los mismos problemas dinámicos, aunque estos tienen mayor aplicabilidad con geometrías más complejas.

Los problemas de acústica y vibración de membranas fueron comparados con soluciones analíticas o en su defecto con el método de elementos finitos (modelando la ecuación de gobierno en COMSOL 4.2). Los resultados obtenidos con los códigos desarrollados por matlab en la mayoría de los casos mostraron una buena correlación con las soluciones analíticas o por FEM, salvo para problemas tridimensionales con cargas de impacto tipo Heaviside, donde la respuesta se suaviza o amortigua con el tiempo. Este inconveniente fue abordado desde muchos puntos de vistas dado la cantidad de variables que podían estar influenciando en la respuesta, entre estos, se revisaron las funciones de aproximación de base radial, el número de puntos de colocación y el enmallado, el tratamiento de la singularidad $1/r$, los métodos de integración en el tiempo y sus parámetros, el tipo de elemento y posibles errores de implementación.

No encontrada aún la fuente de error y en vista que por lo menos para cargas tipo armónicas la revisión del algoritmo mostró estabilidad numérica, se procedió a abordar el esquema de acoplamiento para la interacción de membranas con fluidos acústicos, analizando el número de incógnitas contra la cantidad necesaria de ecuaciones de acoplamiento en la interfaz y la implementación del sistema matricial global usando el lenguaje de programación de Matlab.

En últimas conversaciones via e-mail con el actual director del Wessex Institute of Technology de Inglaterra (doctor Carlos Brebbia) se sugiere la revisión de otras funciones de base radial no lineales para el caso de cargas tipo Heaviside.

Los problemas físicos tratados, en general fueron comparados contra problemas acústicos no acoplados, en vista de que no existen otros modelos acoplados en el dominio espacio tiempo para el tratamiento de problemas de interacción fluido acústico-membrana en la literatura ni tampoco programas comerciales para análisis específico de tal acoplamiento. Hasta ahora solo se conocen acoplamientos de este tipo con elementos finitos aplicados a placas y la formulación es distinta y no puede ser comparada.

En la etapa final de este trabajo de investigación se alcanzó a comparar uno de los ejemplos de interacción fluido acústico-membrana bajo cargas armónicas contra dos modelos hechos por diferencias finitas (FDM), mostrando una aproximación significativa entre ellos.

Los resultados obtenidos bajo la formulación DR-BEM/DR-BEM cumplen con la condición de pequeños desplazamientos, dando en el orden de milímetros o décimas de milímetros. Las variables en general para el caso de cargas armónicas mostraron convergencia hacia menores valores en cuanto se incrementaba la rigidez en la membrana a excepción de la presión donde el valor parece ser significativamente estable, aunque esto corresponde con el comportamiento físico del problema.

Finalmente, se concluye que la formulación aquí presentada muestra un buen comportamiento en la solución hasta el punto de comparación al que se ha llegado, pero la validación final en cuanto a precisión estará siempre en manos de modelos experimentales. Aunque se deben seguir llenando los vacíos pendientes en esta área de investigación, el gran esfuerzo dedicado a este trabajo ha mostrado que es posible hacer nuevas propuestas para el avance del conocimiento y se hace un llamado a seguir explorando el mundo del modelaje numérico, el cual nos está acercando cada vez más a la complejidad del mundo real.

6.2. Trabajos futuros

Como trabajos futuros se proponen:

- Análisis de sensibilidad del uso de un amplio grupo de funciones de base radial aplicadas con DR-BEM para el análisis de problemas de propagación de ondas en dominios tridimensionales en conjunto con distintos esquemas de discretización en el tiempo bajo cargas Heaviside y armónicas.
- Desarrollo experimental para el análisis de problemas de interacción fluido acústico-estructura para membranas homogéneas como estructura.
- Desarrollo experimental para el análisis de problemas de interacción fluido acústico-estructura para placas homogéneas como estructura.
- Extensión del esquema de acoplamiento presente en este trabajo para el análisis de placas acopladas a un fluido acústico para pequeñas y grandes deformaciones.
- Desarrollo de una formulación de interacción fluido-estructura basada totalmente en elementos de contorno para el análisis de problemas de frontera libre discretizados en el dominio de la frecuencia o del espacio-tiempo.

Bibliografía

- [1] Aliabadi M. H. and Wen P. H. (2011). “Boundary element method in engineering and sciences”. Imperial College Press.
- [2] Becker A. A. (1992). “The boundary element method in engineering: A complete course”. MacGraw Hill.
- [3] Bérot, F. and B. Peseux (1998). “Vibro - acoustic behavior of submerged cylindrical shells: analytical formulation and numerical model”. *Journal of Fluids and Structures* 12(8): 959-1003.
- [4] Bezine, G. (1980). “A mixed boundary integral finite element approach to plate vibration problems”. *Mechanics Research Communications* 7(3): 141-150.
- [5] Brebbia, C.A. and Dominguez, J. . “Boundary elements: and introductory course”. Computational Mechanics Publications, London, 1992.
- [6] Burgschweiger, R. (2008). “Calculation of the acoustic target strength of elastic objects based on BEM BEM coupling”. *J. Acoust. Soc. Am.* 123(5): 3757.
- [7] Carrer, J. A. M. and Mansur, W. J. (2004)“ Alternative time marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element method formulation”.*Comp. Mech.* 34:387
- [8] Citarella, R., L. Federico, et al. (2007). “Modal acoustic transfer vector approach in a FEM - BEM vibro - acoustic analysis”. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 31(3): 248-258.

-
- [9] Coyette J. and K. Fyfe (1990). "An Improved Formulation for Acoustic Eigenmode Extraction from Boundary Element Models". *Journal of Vibration and Acoustics*. Transactions of the ASME 112: 392-398.
- [10] Chapra, S. and Canale, R. (1999). "Métodos numéricos para ingenieros". Tercera edición. México: McGraw-Hill. Vol. 3
- [11] Chen, P. T., J. S. H., et al. (2000). "A symmetric formulation of coupled BEM/FEM in solving responses of submerged elastic structures for large degrees of freedom". *Journal of Sound and Vibration* 233(3): 407-422.
- [12] Elleithy, W. and Tanaka M. (2003). "Interface relaxation algorithms for BEM-BEM coupling and FEM-BEM coupling". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192(26-27): 2977-2992.
- [13] G.C. Everstine and F. M. Henderson (1990). "Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction". *J. Acoust. Soc. Am.* 87(5): 1938.
- [14] G.C. Everstine and R.S.C. Cheng (1992). "The Coupling of Finite Elements and Boundary Elements for Scattering from Fluid-Filled Structures". *Computer Technology - Advances and Applications*, edited by R.S. Gallagher and G.M. Hulbert, The American Society of Mechanical Engineers, New York, PVP-Vol. 234: pp. 43-47
- [15] Fritze, D., S. Marburg, et al. (2005). "FEM-BEM coupling and structural acoustic sensitivity analysis for shell geometries". *Computers & Structures* 83(2-3): 143-154.
- [16] Gaul, L. and W. Wenzel (2002). "A coupled symmetric BE-FE method for acoustic fluid-structure interaction". *Engineering Analysis with Boundary Elements* 26(7): 629-636.

-
- [17] Hamdi, M. (1991). “A mixed BEM-FEM formulation for the numerical computation of the vibroacoustic behavior of vibrating structure”. *J. Acoust. Soc. Am.* 90(4): 2251.
- [18] He, Z. C., G. R. Liu, et al. (2011). “A coupled ES-FEM/BEM method for fluid-structure interaction problems”. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35(1): 140-147.
- [19] Jenkins and Korde (2006). “Membrane vibration experiments: An historical review and recent results”. *J. Sound. Vib.* 295(3-5):12
- [20] Junger M. and Feit D. (1986). “Sound, structures and their interaction”. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 2nd edition.
- [21] Kinsler L. E., Freg A. R., Coppens A. B. and Sanders J. V. : “Fundamentals of acoustics”. Jhon Wiley Sons Inc , 2005.
- [22] Kopuz, S. and N. Lalor (1995). “Analysis of interior acoustic fields using the finite element method and the boundary element method”. *Applied Acoustics* 45(3): 193-210.
- [23] Li, R. (1999). “On the coupling of BEM and FEM for exterior problems for the Helmholtz equation”. *Mathematics of Computation* 68(227): 945-953.
- [24] Li, S. (2011). “Modal models for vibro-acoustic response analysis of fluid-loaded plates”. *JVC/Journal of Vibration and Control* 17(10): 1540-1546.
- [25] Liu, C.-H. and P.-T. Chen (2009). “Numerical analysis of immersed finite cylindrical shells using a coupled BEM/FEM and spatial spectrum approach”. *Applied Acoustics* 70(2): 256-266.
- [26] Mansur, W. J. (1983), “A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method”. PhD thesis, University of Southampton.

-
- [27] Mathews, I. (1986). "Numerical techniques for three dimensional steady state fluid structure interaction". *J. Acoust. Soc. Am.* 79(5): 1317.
- [28] Merodio H.E. and Ortega J. (Nov. 2009). "Análisis modal de sistemas acústico estructurales mediante el método del Elemento Finito". XI Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. México D. F.
- [29] Merz, S., R. Kinns, et al. (2009). "Structural and acoustic responses of a submarine hull due to propeller forces". *Journal of Sound and Vibration* 325(1-2): 266-286.
- [30] Mollinedo H. (2010). "Análisis modal de sistemas acústico estructurales acoplados mediante el método del elemento finito - frontera dual". Doctoral thesis, Instituto politecnico nacional - ESIME
- [31] Mollinedo H., Ortega J. , et al. "Modelado y simulación de sistemas acústicos interiores mediante el método del elemento frontera". LII Congreso Nacional de Física. Guerrero. México, Oct. 2009.
- [32] Myint-U T. and Debnath L. . "Linear partial differential equations for scientists and engineers". Birkhouse, 2007.
- [33] Nolte, B. (1998). "Fluid-structure-interaction-phenomena on the basis of a BEM-BEM coupling formulation".
- [34] Nolte, B. and L. Gaul (1999). "Fluid-structure-interaction with the boundary element method".
- [35] Of, G. and O. Steinbach (2010). "Coupled FE/BE formulations for the fluid-structure interaction". 78 LNCSE: 293-300.
- [36] P.W. Partridge, C.A. Brebbia, et al. "The dual reciprocity boundary element method". Computational Mechanics Publications, 1992.

-
- [37] Partridge P.W. (2000). "Towards criteria for selecting approximation functions in the Dual Reciprocity Method". *Engineering Analysis with Boundary Elements* 24: 519-529.
- [38] Rajakumar, C., A. Ali, et al. (1992). "A new acoustic interface element for fluid-structure interaction problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33(2): 369-386.
- [39] Rajkumar, C. and A. Ali (1996). "Boundary element-finite element coupled eigenanalysis of fluid-structure systems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39(10): 1625-1634.
- [40] Sgard, F., N. Atalla, et al. (1994). "Coupled FEM-BEM approach for mean flow effects on vibro-acoustic behavior of planar structures". *AIAA journal* 32(12): 2351-2358.
- [41] Shaw, R. P. and W. Falby (1978). "Febie a combined finite element - boundary integral equation method". *Computers & Fluids* 6(3): 153-160.
- [42] Soares D Jr and Mansur WJ (2006). "Dynamic analysis of fluid-soil-structure interaction problems by the boundary element method". *J Comput Phys* 219:498â"512
- [43] Soares, D. (2009). "Acoustic modelling by BEM/FEM coupling procedures taking into account explicit and implicit multi-domain decomposition techniques". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78(9): 1076-1093
- [44] Sriganesh R. Karur and P.A. Ramachandran (1994). "Radial Basis Function Approximation in the Dual Reciprocity Method". *Mathematical and Computer Modelling*. 20: 59-70
- [45] Subbaraj, K., Dokainish, M.A. (1989a). "A survey of direct time integration methods in computational structural dynamics, Explicit methods, Computers and Structures. Pergamon Press. 32(6): 1371-1386. (Original no consultado, citado

- por: EBELING, R. M., GREEN, R. A., FRENCH, S. E. 1997. "Accuracy of Response of Single-Degree-of-Freedom Systems to Ground Motion". Earthquake Engineering Research Program)
- [46] Tanaka, M. and Y. Masuda (1988). "Boundary element method applied to certain structural-acoustic coupling problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71(2): 225-234.
- [47] Useche, J. and E. L. Albuquerque (2012). "Dynamic analysis of shear deformable plates using the Dual Reciprocity Method". *Engineering Analysis with Boundary Elements* 36(5): 627-632.
- [48] Von Estorff O. (1992). "Coupling of bem and fem in the time domain: Some remarks on its applicability and efficiency". *Computers & Structures* 44(1-2): 325-337.
- [49] Wilson, E. (2002). "Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures". *Computers and Structures*.
- [50] Wunderlich ,W and Pilkey, W.D. (2003). *Mechanics of Structures: "Variational and Computational Methods"*. CRC Press, Boca Raton. Segunda Edición.
- [51] Xu, Z. M., Y. Wang, et al. (2002). "Modeling of the ship and numerical simulation of coupled vibro-acoustic behavior by FEM/BEM".
- [52] Chuan Bo Li Xue/*Journal of Ship Mechanics* 6(4): 89-95.
- [53] Young, Y.L (2008). "Fluid-structure interaction analysis of flexible composite marine propellers". *Journal of Fluids and Structures* 24(6): 799-818.
- [54] Yu, K. H., A. H. Kadarman, et al. (2010). "Development and implementation of some BEM variants â" A critical review". *Engineering Analysis with Boundary Elements* 34(10): 884-899.

-
- [55] Zienkiewicz O., Kelly D. , et al. (1979). “Marriage a la mode - the best of both worlds (finite elements and boundary integrals)”. *Energy Methods in Finite Element Analysis* (Ed. Glowinski R. , Rodin E.Y. and Zienkiewicz O.C.). London, Wiley: pp. 82-87.
- [56] Zienkiewicz O. and Newton R. (1969). “Coupled vibrations in a structure submerged in a compressible fluid”. *Proceedings of the International Ship Structure Congress, Symposium on the FEM Technique*, University of Stuttgart, pp 360-379.
- [57] Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor, et al. (2005). 18 - Coupled systems. *The Finite Element Method Set (Sixth Edition)*. Oxford, Butterworth-Heinemann: 631-663.