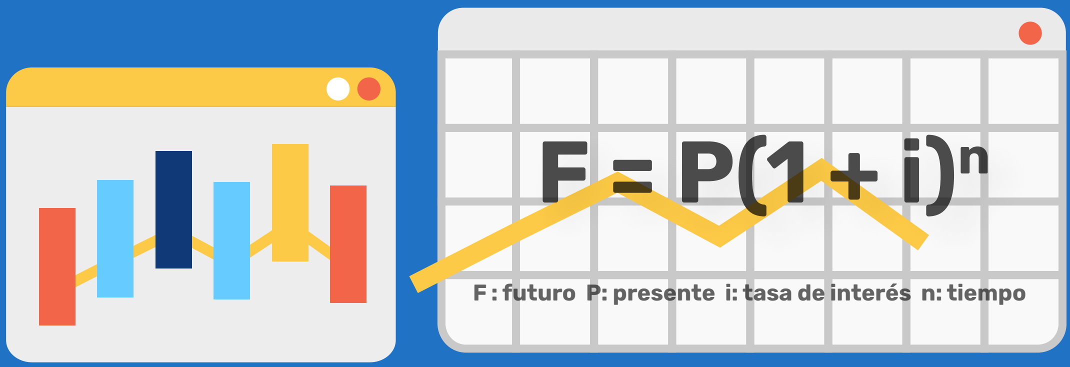
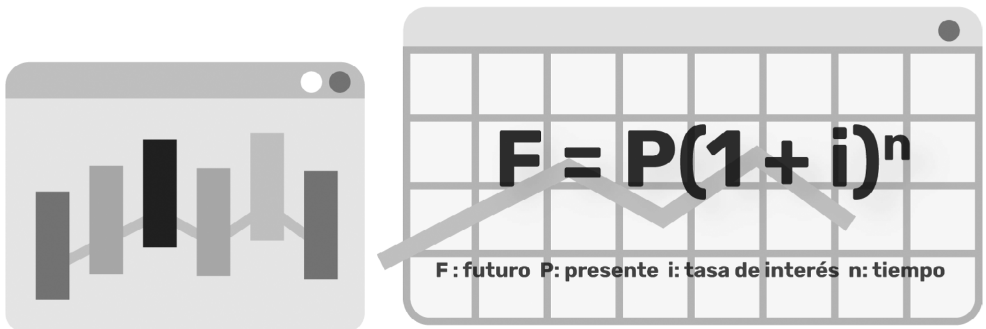
ALBA ZULAY CÁRDENAS ESCOBAR



UN CURSO DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Universidad Tecnológica de Bolívar
Editorial



UN CURSO DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

ALBA ZULAY CÁRDENAS ESCOBAR

Cardenas Escobar, Alba Zulay

Un curso de matemáticas financieras / Alba Zulay Cardenas Escobar. - - Cartagena de Indias: Universidad Tecnológica de Bolívar, 2024.

197 páginas: Diagramas, figuras y tablas

ISBN: 978-628-7562-19-6 (digital)

1. Matemáticas financieras 2. Moneda 3. Tasas de interés 4. Inversiones 5. Proyectos de inversiones I. Cardenas Escobar, Alba.

650.0151
Z94
CDD23

Edición
Editorial Universidad Tecnológica de Bolívar
editorial@utb.edu.co
www.utb.edu.co

ISBN: 978-628-7562-19-6 (digital)

Cartagena de Indias, Colombia 2024
Campus Casa Lemaitre: Calle del Bouquet
Cra 21 No 25-92 PBX (5) 6606041 -42- 43 Fax: (5) 6604317

Campus Tecnológico:
Parque Industrial y Tecnológico Carlos Vélez Pombo
Tel: (+57) 323 566 8729/30 /31/33
Cartagena de Indias, D. T. y C. – Colombia

A todos mis estudiantes,
que son mi motor y mi inspiración,
para seguir aprendiendo y dejar un legado.

A mi esposo e hijo, mis Juanes, por su apoyo y comprensión.

A mis colegas Sofia Trillos, Elsy Mestre, Raúl Acosta,
Armando Mendoza, Fabian Gazabón,
Holman Ospina, Raúl Padrón, Gilma Mestre
y a todos aquellos que me han apoyado
y creído en mí SIEMPRE.

Agradecimientos

A mis primeros estudiantes monitores Nataly Avilan, Juan Manuel Ordoñez, y Jorge Campo, quienes me impulsaron y apoyaron para iniciar estas notas de clase inicialmente como unas memorias hasta llegar al documento actual.

La autora

Colombiana, nacida en Cartagena, departamento de Bolívar.

Ingeniera Industrial, especialista en Finanzas y en Gestión de Proyectos, los tres títulos académicos de la Universidad Tecnológica de Bolívar (UTB); diplomada en Habilidades Docentes UTB-ITESM y magíster en Ingeniería Industrial de la Universidad de los Andes.

Tutora en Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA), programa de la Unión E-learning Colombia con el aval del Ministerio de Educación Nacional (MEN) y del Portal de las Américas de la Organización de los Estados Americanos (OEA).

Su experiencia profesional de más de 30 años ha sido a través del paso por diferentes cargos desempeñados en la Universidad Tecnológica de Bolívar, tanto en la dirección administrativa como en la dirección académica, incluida la participación en proyectos especiales con cobertura regional y nacional.

Tabla de Contenido

Presentación

Este libro va de lo básico a lo complejo, iniciando primero con los conceptos que soportan las matemáticas financieras: valor del dinero en el tiempo y su evidencia a través del interés y las tasas de interés, equivalencia y diagrama de flujo de caja.

A partir de estos conceptos, se avanza en los tipos de interés y de tasas de interés, centrando el estudio en el interés compuesto y la capitalización de intereses que llevan a trabajar con la fórmula general de las matemáticas financieras.

Seguidamente, se abordan otras relaciones de equivalencia derivadas como las series uniformes y las series variables, y se finaliza con los métodos de decisión para evaluar alternativas de inversión, concentrándose en el método del Valor Presente Neto (VPN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR).

En cada capítulo se desarrollan ejemplos y se proponen al lector situaciones problema.

Finalmente, en los anexos se comparten, a modo complementario, mapas conceptuales y crucigramas que permitirán, a través de esquemas y gamificación, que el lector refuerce los conceptos claves de cada uno de los capítulos.

Prólogo

En mis clases de finanzas he manifestado en muchas ocasiones que es necesario dominar los insumos de esta disciplina profesional. Uno de ellos, y en mi criterio el más importante, es la matemática financiera o también denominada en otros ambientes académicos como ingeniería económica. Es la sangre que corre por la inmensa cantidad de cálculos que es posible realizar. ¿Dónde termina una planeación financiera, una valoración de empresa, una evaluación de un proyecto, entre otros temas financieros? Respuesta: En la matemática financiera. Académicos y profesionales gustan o no de esta asignatura por el hecho de tener fórmulas y cálculos de tipo matemático. Hay algo que es cierto y lo he probado en muchos escenarios: Detrás de cada fórmula hay una teoría que es indispensable dominar. Si se comprende el concepto, se aprecia la lógica de la fórmula y no requiere de su memorización. El presente documento logra este objetivo.

La historia demuestra que mientras los hombres marchaban a la guerra, como único trabajo y misión, las mujeres quedaban desempeñando labores caseras, agrícolas y de formación de los hijos. Por lo anterior, para escribir un texto de esta naturaleza y apasionar a los estudiantes de hoy y futuros profesionales se necesitan mujeres como la autora de este libro académico la ingeniera industrial Alba Zulay Cárdenas Escobar. Le alcanza el tiempo para publicar recientemente un texto sobre buenas prácticas en el uso de las redes sociales (recomendable para leer en familia con nuestros hijos de cualquier edad), atender a su esposo e hijo, coordinar programas académicos a nivel de posgrado en la Universidad Tecnológica de Bolívar, cumplir sus obligaciones administrativas en la UTB, hablar con el suscrito y mi esposa de sus proyectos de vida, ejercitar su cuerpo y además, para producir libros de esta naturaleza técnica. Recuerdo que como alumna hace años en su especialización era la estudiante que preguntaba al final de cada clase qué tema sería tratado en la siguiente sesión y llegaba con preguntas precisas. Son los alumnos que deseamos en este país para formar, como Alba Zulay lo ha hecho por décadas, generaciones de calidad personal y profesional y que reportan frutos como el presente libro de Matemáticas Financieras (Notas de clase).

Este documento aborda capítulos esenciales de la matemática financiera. Su ubicación conceptual, tasas de interés simple y compuesto como paso previo para entender las tasas nominal y efectiva, series de flujos de caja uniformes y variables y finalmente indicadores requeridos para la evaluación de alternativas de inversión. Temas presentes en el mundo de los negocios y en la vida personal explicados con una enorme cantidad de ejercicios resueltos con solución manual y solución en Excel que le imprimen un doble reto al estudiante.

El docente debe impactar a sus estudiantes con estrategias que motiven su aprendizaje. En este libro la profesora Alba Zulay recurre a varias de ellas. Incluye mapas conceptuales, crucigramas curiosos y divertidos, así como ejercicios propuestos por capítulos, todo lo anterior para reforzar los conceptos teóricos y facilitar el dominio del conocimiento.

Esfuerzos como estos son los que debemos apoyar y resaltar en el ambiente académico, si deseamos una Colombia empresarialmente más productiva y con las competencias para innovar los esquemas pasados.

ARNALDO HELÍ SOLANO RUIZ

Docente de Finanzas | UNAB, UIS y UTB.

Introducción

Una de las características más importantes de la globalización es la gran cantidad de cambios y evoluciones constantes en todas las áreas del saber, en especial en el contexto tecnológico, económico y financiero. Debido al gran proceso de integración que se da en la actualidad, las matemáticas con aplicación a las finanzas evolucionan y amplían el escenario sobre el cual actúan.

Hasta antes de la Segunda Guerra Mundial, los empleados de entidades financieras eran los únicos que manejaban la terminología financiera, que hoy día debe estar al alcance de todos los profesionales debido a la relación tan cercana e incluso dependiente que todos tenemos con el sistema financiero y, más específicamente, con el dinero.

Este texto contiene los conceptos fundamentales que les permitirá a los lectores manejar los temas de mercado de capitales y finanzas corporativas e internacionales, así como lo atinente a las finanzas personales y familiares.

Capítulo 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. Objetivos del capítulo

General

- Introducir, analizar e interpretar los conceptos básicos que permitan la comprensión y el estudio de las temáticas que abordan las matemáticas financieras.

Específicos

- Conocer la importancia del valor del dinero en el tiempo, su uso y su aplicación en la vida real.
- Comprender la razón por la cual existe el interés y aprender la forma de identificarlo.
- Analizar que el principio de equivalencia.
- Construir e interpretar un diagrama de flujo de caja.
- Resolver problemas básicos relacionados con el valor del dinero en el tiempo.

1.2. Introducción

A partir de los años cincuenta, debido al rápido desarrollo industrial, muchas empresas se vieron en la necesidad de adaptar técnicas de análisis económico para poder tomar las mejores decisiones. Debido a esto, los conceptos financieros y bancarios pasaron al sector industrial y surgieron las matemáticas financieras, consideradas como el conjunto de técnicas matemáticas para el análisis y la toma de decisiones monetarias o como el conjunto de herramientas y técnicas matemáticas aplicadas a las finanzas, necesarias en la operación y decisiones de los negocios.

Con el paso del tiempo y el crecimiento de las industrias, las técnicas para tomar las decisiones de carácter económico se adaptaron y volvieron más específicas, considerando siempre el valor del dinero en el tiempo (VDT) y la equivalencia como conceptos claves para la toma de decisiones de inversión, financiación y operación.

1.3. Valor del dinero en el tiempo

El dinero, como cualquier otro bien, tiene un valor. Si una persona posee un bien, puede cambiarlo por dinero, y, si no lo tiene y lo necesita, deberá pagar una cantidad determinada para poder obtenerlo; así pagamos un arriendo por una vivienda o un valor por rentar un vehículo; pagamos por el uso de ese bien durante un determinado tiempo. Si nadie utiliza estos bienes, el propietario no podrá obtener ninguna ganancia. Esto mismo ocurre con el dinero, que no genera ganancia alguna si se tiene escondido en la casa o bajo el colchón. Teniendo en cuenta lo anterior, podemos concluir que el dinero es un bien económico por el poder que tiene para generar ganancias (o más dinero) en un determinado periodo de tiempo debido al pago realizado por su uso (interés).

El valor del dinero cambia en el tiempo debido al cambio de la cantidad de dinero durante un periodo por el fenómeno de la inflación.

La inflación consiste en la pérdida del poder adquisitivo del dinero con el paso del tiempo. Ningún país está exento de la inflación, por muy baja que sea. Si no hubiera inflación, el poder adquisitivo del dinero sería igual a través del tiempo, es decir, lo que puedo comprar hoy con 100 pesos sería lo mismo que podría comprar en el futuro con los mismos 100 pesos.

Pero, en la realidad, ocurre todo lo contrario: el valor por el que se compra un bien hoy no es el mismo por el que se compra dentro de los próximos años, que se supone es un valor mayor y equivalente, si no tenemos en cuenta el fenómeno de la inflación. Si descontamos el valor de la inflación del valor futuro por el que se venderá ese bien, tendremos su valor nominal, es decir, a pesos de hoy.

Este fenómeno, que nos hace creer que tenemos mayor proporción de dinero, debido al cambio del valor del dinero a través del tiempo, lo intenta resolver la ingeniería económica, al calcular el valor equivalente del dinero en un mismo momento, teniendo en cuenta el interés. Pues, si se cuenta con las técnicas de análisis que permitan comparar el poder adquisitivo real en diferentes momentos del tiempo, se establecerá el valor real de la transacción a precios de hoy.

El dinero cambia su valor en el tiempo porque está sujeto a procesos de inflación. Como las personas deben tomar decisiones económicas hoy, pero que tienen consecuencias futuras, deben considerar distintas sumas de dinero en diferentes momentos. Para hacerlo, se utiliza el concepto de *equivalencia*, que significa comparar en un mismo momento del tiempo una suma de dinero, pues el dinero en diferentes momentos tiene diferente capacidad adquisitiva y solo se debe evaluar cuando esta capacidad sea la misma para todos los valores.

1.4. Interés

Cuando una persona deposita una cantidad de dinero en el banco, en realidad se lo está cediendo para que esa entidad financiera lo use, por lo que el banco le debe pagar un interés al propietario del dinero. De manera similar, si a usted le otorgan un crédito, usted debe pagar una cantidad por el uso (o arriendo) de esa suma de dinero. Esta cantidad de dinero se reconoce como *interés*.

El interés se puede definir como:

- "Pago que se hace al propietario del capital por el uso del dinero" (Álvarez Arango, 2010, p. 3).

- "Utilidad o ganancia que genera un capital".
- "Lo que a uno le conviene. Beneficio que se saca del dinero prestado. Derecho eventual de alguna ganancia. Valor que en sí tiene una cosa".
- "Precio que se paga por el uso del dinero que se tiene en préstamo durante un periodo determinado".
- "Rendimiento de una inversión".

El periodo de capitalización es el periodo mínimo necesario para que se pueda cobrar un interés. Se llama periodo de capitalización porque a su término ya se tiene o se formó más capital.

El interés es la compensación pagada o recibida por el uso u otorgamiento del dinero, y sus factores fundamentales son: capital, tiempo y tasa de interés.

El mercado le brinda al individuo la posibilidad de invertir o de recibir préstamos. El hecho de que existan oportunidades de inversión o de financiación causa que exista el interés.

La magnitud de la tasa de interés corriente, que es aquella encontrada en el mercado de bienes, tiene tres componentes o causas:

a. La inflación: es la medida del incremento del nivel general de precios de los bienes y servicios en un determinado país. Este se calcula con base en la canasta familiar de un consumidor representativo. Su efecto se ve en que las cuentas por cobrar están muy desvalorizadas, el dinero constantemente está perdiendo su poder adquisitivo, los presupuestos y las deudas se estiman en otro sistema monetario al que no afecte la inflación y los precios de los artículos se fijan según los efectos de la inflación. **A mayor inflación, mayor tasa de interés.**
b. Riesgo: es intrínseco al negocio o la inversión en que se coloca el dinero o capital. **A mayor riesgo, mayor tasa de interés.**
c. Interés real: este refleja la abundancia o escasez de dinero en el mercado o su grado de liquidez, y la preferencia que tengan los ahorradores por la liquidez, es decir, la disponibilidad de dinero en efectivo para el consumo.

La relación de estos tres componentes determina la tasa de interés corriente, que no es aditiva sino multiplicativa. Se expresa de la siguiente manera:

$$i_c = (1+i_f) * (1+i_o) * (1+i_r) \tag{1.1}$$

Donde:

i_c = Interés corriente

i_f = Inflación

i_o = Riesgo

i_r = Tasa real

1.5. Nomenclatura y términos de referencia

Este documento girará alrededor de la siguiente convención, que se considera estándar en esta área de las finanzas:

***P* = Valor presente.** Suma de dinero, que se ubica en la misma posición o momento en el cual nos encontramos hoy.

***F* = Valor futuro.** Suma de dinero, que se ubica en una posición futura con respecto a la que nos encontramos.

***n* = Número de periodos o cuotas.** Su naturaleza está dada en unidades de tiempo: días, semanas, quincenas, meses, trimestres, semestres, años, etc.

***i%* = Tasa de interés periódica**. Esta tasa se expresa en porcentaje por unidad de tiempo del periodo manejado.

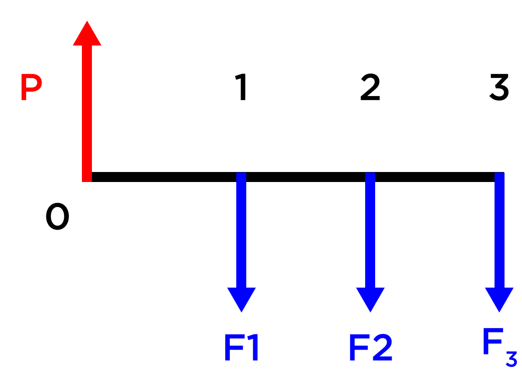
1.6. Diagrama de Flujo de Caja (DFC)

Se define como una representación o modelo gráfico de los ingresos y egresos ubicados en el tiempo relacionados con una alternativa de inversión o financiación. Consta de un eje o línea horizontal, llamado eje del tiempo, y de una serie de flechas que apuntan unas hacia arriba (simbolizan ingresos) y otras hacia abajo (simbolizan egresos) ubicadas encima o por debajo del eje del tiempo (figura 1.1).

El eje del tiempo viene dado en unidades de tiempo (días, meses, trimestres, semestres, años, entre otras).

El diagrama debe ir acompañado de las tasas de interés que operan en la situación problemática bajo análisis.

Figura 1.1. Esquema general de un diagrama de flujo de caja



Fuente: elaboración propia.

Es de tener en cuenta que los ingresos y egresos serán graficados en el diagrama de flujo de acuerdo con la óptica con la que se mire. Es decir, mientras para un prestamista cierta cantidad es considerada un egreso, para el prestatario esta es considerada un ingreso. En estos casos los diagramas de flujo son diferentes (figura 1.2).

Figura 1.2. Diagrama de flujo de caja según el tomador de decisiones

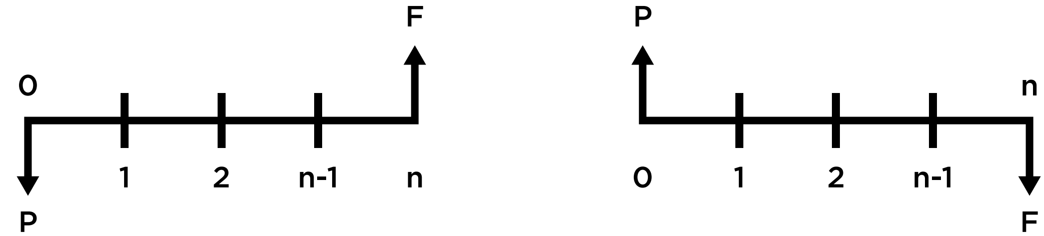


Diagrama de Flujo de Caja para el prestamista

Diagrama de Flujo de Caja para el prestatario

Fuente: elaboración propia.

Respecto a la ubicación de los valores, existen múltiples convenciones, pero las más usadas son:

1. Ubicación puntual, que considera el dinero ubicado en posiciones de tiempo específicas. Tiene dos modalidades:
   a. Convención de fin de periodo, que estima todos los ingresos y egresos como ocurridos al final del periodo. Esta es la convención que utilizaremos.
   b. Convención al principio del periodo, que estima todos los ingresos y egresos como ocurridos al comienzo del periodo.
2. Ubicación distribuida o convención durante el periodo. Considera todos los ingresos y egresos uniformemente distribuidos durante el periodo de análisis.

Ninguna de estas convenciones refleja exactamente lo sucedido. Estas tienen gran importancia en la elaboración de los diagramas de flujo, en el cual se representa el momento en el que se considera ocurren los ingresos y egresos.

1.7. Equivalencia del dinero en el tiempo

Uno de los problemas más importantes que el gerente enfrenta en la toma de decisiones es que debe tomar sus decisiones hoy, las cuales tienen consecuencias en términos de beneficios y costos futuros. Por lo general, lo que se hace es mirar lo que ha ocurrido en el pasado e inferir sobre el futuro, con base en la información obtenida.

Vélez, 2002

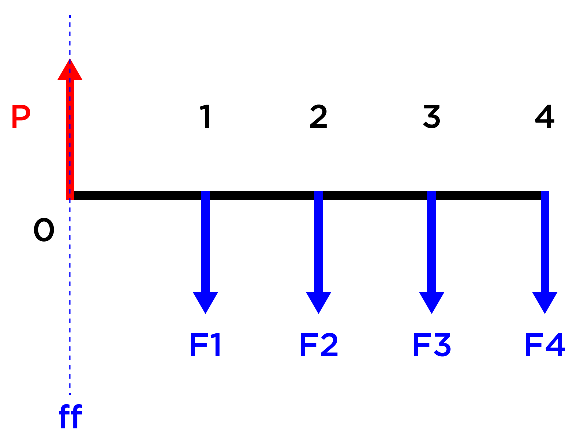
El dinero, debido a que está sujeto a procesos de inflación y devaluación o revaluación, cambia su valor a través del tiempo.

Al momento de tomar decisiones económicas como pedir o dar un préstamo o solicitar una financiación, entre otras, se tienen que considerar esas futuras sumas que se pagarán o egresarán, o aquellas que se recibirán o ingresarán.

Como todas no se realizan en el mismo momento, pero sí se deben considerar en un mismo momento, basados en que todas las sumas pueden llegar a tener un mismo significado económico en un mismo punto de referencia, se transforman teniendo en cuenta la tasa de interés, volviéndose sumas equivalentes. Estas, aunque no corresponden a un mismo valor, sí tienen igual significado económico, es decir, la misma capacidad adquisitiva. Para ello se utiliza el concepto de fecha focal, que es un punto en el eje del tiempo, que se escoge a conveniencia, al cual se transforman todas las sumas de dinero bajo el principio de equivalencia. Ver figura 1.3.

El principio de *equivalencia* se puede sintetizar así: una o varias sumas de dinero, ubicadas en fechas distintas, pueden transformarse en otra u otras equivalentes o de igual significado económico ubicadas en otra posición en el tiempo, que llamaremos *fecha focal*, siempre y cuando la tasa de interés utilizada para efectuar la transacción satisfaga a las partes.

Figura 1.3. Identificación de la fecha focal en el Diagrama de Flujo de Caja



Fuente: elaboración propia.

1.8. Situaciones a resolver

a. Usted desea comprar un equipo de sonido que es caro. Para comprarlo cuenta con tres opciones. La primera es pagarlo de contado con los ahorros que tiene en el banco, por los cuales recibe unos intereses mensuales. La segunda opción es comprar el equipo a crédito, y la tercera opción es comprarlo de contado con su tarjeta de crédito, que le cobrará un interés por financiar la compra. ¿En qué debe basar su decisión para usar, de la manera más adecuada, su fuente de fondos en esta compra?

b. Represente mediante un diagrama económico la siguiente situación: Juan recibe hoy $ 100 000, dentro de 7 meses recibirá $ 200 000 y dentro de 10 meses recibirá $ 150 000. Si todas estas sumas de dinero las deposita en una cuenta bancaria, ¿Cuánto podrá retirar de esta cuenta dentro de un año?

c. Si hoy recibo $ 1 000 000 y dentro de un año recibo nuevamente $ 1 000 000, ¿estas dos sumas son equivalentes? Justifique su respuesta.

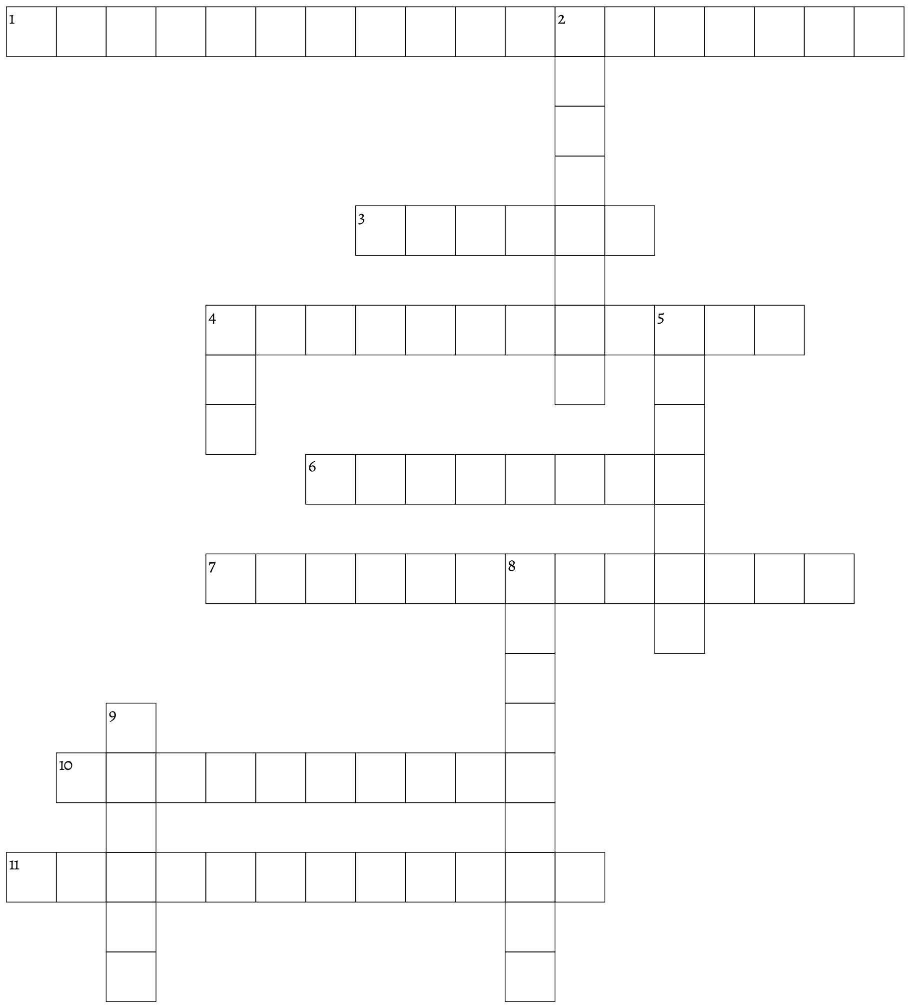
d. Usted tiene cierta suma de dinero, decide prestarla y tiene dos amigos que le ofrecen la siguiente opción de pago:

    - Al cabo de un año será devuelta la misma cantidad prestada, más $ 10 000, como reconocimiento del pago del interés.
    - Al cabo de un año será devuelta la suma de dinero, pero reconociendo la inflación de ese año.

    Teniendo en cuenta lo anterior, ¿qué factores consideraría al tomar la decisión de a quién se la va a prestar? ¿Por qué?

e. ¿Puede la tasa de interés estar en un periodo diferente al del periodo de capitalización? Explique.

¡BIENVENIDO AL DESAFÍO DE PALABRAS! Nº 1



Horizontal

1. Lo que se sacrifica cuando se toma una decisión
3. Bien económico que tiene la capacidad intrínseca de generar más de él mismo
4. Efecto producido por la alicación de una tasa de interés que se traduce en un aumento del valor inicial del dinero por adición de los intereses
6. P
7. indicador expresado como porcentaje que mide el valor de los intereses
10. Registro gráfico de entradas y salidas de dinero durante el tiempo que dure la operación financiera
11. Criterio que dice que dos cantidaddes diferentes ubicadas en diferentes fechas pueden producir el mismo resultado económico, dependiendo de la tasa de interés

Vertical

2. Medición porcentual del crecimiento real de una inversión
4. Concepto que define que una cantidad de dinero en el presente vale más que la misma cantidad en el futuro.
5. Diferencia entre el valor futuro y el valor presente, entendido como la medida del valor del dinero en el tiempo
8. Fenómeno económico que hace que el dinero día a día pierda poder adquisitivo
9. F

Capítulo 2

INTERÉS SIMPLE

2.1. Objetivos del capítulo

General

- Enseñar al estudiante todos los factores que entran en juego en el cálculo del interés simple y suministrar herramientas para que pueda manejarlos y aplicarlos adecuadamente en la solución de ciertos problemas en el campo financiero.

Específicos

- Conocer la importancia del uso y la aplicación en la vida real del interés simple.
- Comprender e identificar el origen del interés simple y sus características esenciales.
- Construir diagramas de flujo de caja y plantear ecuaciones de valor para cálculo de valores, intereses y fechas presentes o futuras.
- Determinar la cantidad de dinero que debemos recibir (o pagar) al cabo de n periodos, si hoy se da (o recibe) P pesos a una tasa de interés compuesto del $i\,\%$ por periodo vencido.
- Resolver problemas relacionados con interés simple.

2.2. Introducción

En todas las actividades financieras se acostumbra a pagar un interés por el uso del dinero. Como se pudo analizar en el capítulo anterior sobre los conceptos fundamentales en los que se apoyan las matemáticas financieras, se llegó a la conclusión de que son muchas razones las que justifican la existencia de un interés, como el factor compensatorio, medido a través de la tasa de interés. El interés es la evidencia del valor del dinero en el tiempo.

Todo individuo que obtiene un préstamo queda inmediatamente obligado a restituir el valor prestado, más los intereses, en un tiempo determinado, según lo que se pactó con su acreedor al principio de la negociación.

2.3. Definición

Se llama interés simple a aquel en el cual los intereses generados en cada periodo son proporcionales al capital inicialmente invertido, independientemente de que se paguen o no. Ello supone que los intereses son improductivos, es decir, que no se acumulan al capital para producir nuevos intereses.

Sus características son:

- El capital inicial no varía durante el intervalo de tiempo en el que se acordó la operación financiera, ya que los intereses no se capitalizan. Al momento de realizarse pagos sobre el capital, los intereses se calcularán sobre el capital insoluto.

- El interés periódico es el mismo a menos que se realicen abonos al capital principal.

Desventajas:

- No considera el valor del dinero en el tiempo.
- Como los intereses causados y no pagados no ganan intereses, este tipo de interés implica la pérdida de poder adquisitivo.
- Por lo anterior, su uso es nulo a nivel comercial y financiero.

2.4. Cálculo del interés

En el interés simple, el interés a pagar por una deuda varía directamente proporcional al capital, la tasa de interés y el tiempo.

Para el interés simple podemos expresar la fórmula general de la siguiente manera:

$$I = P * i * n \tag{2.1}$$

En donde:

I = valor de los intereses

n = tiempo o plazo de la operación financiera

P = valor presente

i = tasa de interés expresado como decimal

Ejemplo (2.1)

La señora Alba tiene un capital de \$ 5 000 000, los cuales quiere invertir durante 8 meses a una tasa de interés simple del 3 % mensual. Calcular el valor de los intereses.

Como primer paso se identificar la información del problema:

$P = 5\,000\,000$

$n = 8$ meses

$i = 3\,\%$ mensual

$I = ?$

Luego, una tasa de interés del 3 % mensual indica que por cada \$ 100 prestados o invertidos, cualquiera que sea el caso, se deberán pagar u obtener como rendimiento \$ 3 cada mes.

Aplicando la fórmula (2.1) se obtiene:

$I = 5\,000\,000 * 0{,}03 * 8$

$I = 1\,200\,000$

Ejemplo (2.2)

Jorge Enrique tiene un capital de $ 10 000 000, del cual quiere invertir el 65 % a una tasa del 24 % anual y el resto al 3 % trimestral. Calcular el valor de los intereses trimestrales.

El 65 % de 10 000 000 es:

0,65 * 10 000 000=$ 6 500 000

El resto es:

(1-0,65)* 10 000 000=3 500 000

Jorge Enrique invierte su capital de la siguiente manera:

$ 6 500 000 a una tasa del 24 % anual.

$ 3 500 000 a una tasa del 3 % trimestral.

- Cálculo del interés trimestral de 6 500 000

Se puede observar que la tasa de interés es anual, mientras el periodo de pago de los intereses es trimestral. Para encontrar los intereses pagados trimestralmente hay que convertir la tasa de interés a trimestral.

$$I = 6\ 500\ 000 * \left(\frac{0{,}24}{4{,}00}\right) * 1 = 390\ 000$$

- Cálculo del interés trimestral de 3 500 000

I=3 500 000 * 0,03 * 1=105 000

El rendimiento en intereses recibidos cada mes es igual a la suma de los intereses parciales.

Intereses totales trimestrales:

I = 390 000 + 105 000 = 495 000

2.5. Interés comercial y real

Cuando se realizan cálculos financieros que involucran las variables tiempo y tasa de interés, surge la duda sobre qué número de días se toma para el año. Por esta razón existen dos tipos de interés:

- Interés comercial: es calculado considerando el año de 360 días, dividido en 12 meses de 30 días cada uno. Es denominado procedimiento aproximado ya que su objeto es facilitar los cálculos de tiempo.
- Interés real o exacto: es calculado considerando el año de 365 días, o 366 días si es un año bisiesto.

Para los bancos y las casas comerciales, cuando realizan sus operaciones, utilizan el interés comercial, ya que, para un mismo capital, tasa de interés y tiempo, este resulta mayor que el interés real.

Para el cálculo del número de días entre fechas, se manejan dos criterios: el cálculo aproximado que toma en cuenta el año comercial y el cálculo exacto (días calendario) considerando el año real, que se realiza con apoyos de tablas o de una calculadora financiera.

Ejemplo (2.3)

Calcule el interés exacto y comercial de un capital de $ 15 000 al 8 % de interés anual, del 15 de marzo al 15 de junio del mismo año, teniendo en cuenta el cálculo del número de días entre fechas para un año comercial y exacto.

Primero, hay que calcular el número de días ente las dos fechas.

- En forma aproximada

Del 15 de marzo al 15 de junio:

Marzo	15 días
Abril	30 días
Mayo	30 días
Junio	15 días
Total	90 días

- En forma exacta

Del 15 de marzo al 15 de junio, tomando como referencia el número de días calendario:

Marzo	16 días
Abril	30 días
Mayo	31 días
Junio	15 días
Total	92 días

Ahora, si observamos, no hay correspondencia entre la tasa de interés y el tiempo. Por lo tanto, se tiene que convertir la tasa anual a tasa diaria:

- Interés exacto

a. Con tiempo exacto

$I = P * i * n$

$$I = (15\,000) * (0{,}08) * \left(\frac{92}{365}\right)$$

$I = 302{,}47$

b. Con tiempo aproximado

$I = P * i * n$

$$I = (15\,000) * (0{,}08) * \left(\frac{92}{365}\right)$$

$I = 295{,}90$

- Interés comercial

a. Con tiempo exacto

$I=P * i * n$

$$I = (15\,000) * (0{,}08) * \left(\frac{92}{360}\right)$$

$I = 306{,}7$

b. Con tiempo aproximado

$I=P * i * n$

$$I = (15\,000) * (0{,}08) * \left(\frac{90}{360}\right)$$

$I=295{,}90$

Como puede notarse, el mayor interés se obtiene en el tiempo exacto y el año comercial.

2.6. Valor futuro a interés simple

Consiste en calcular un valor futuro (F), conocido su valor presente (P) equivalente, después de n periodos a una tasa de interés simple (i).

El flujo de caja es el siguiente:

El valor futuro es igual al valor presente más los intereses.

$F = P + I$

Si se reemplaza la expresión (2.1), se obtiene:

$F = P + P * n * i$

Factor común:

$$F = P * (1 + i * n) \tag{2.2}$$

Por lo tanto, el valor futuro equivalente a un valor presente está representado en la anterior formula.

Al momento de utilizar la ecuación (2.2), como ya se había comentado, la tasa de interés y el número de periodos deben estar expresados en la misma unidad de tiempo.

2.7. Ecuaciones bajo interés simple

A continuación, se mostrarán, partiendo de la expresión (2.2), las diferentes fórmulas en interés simple.

2.7.1. Calcular el valor presente

Consiste en el cálculo de un valor presente (*P*) que es equivalente a un valor futuro (*F*), después de transcurridos *n* periodos a una tasa de interés simple *i*.

De la ecuación (2.2) se despeja el valor *P*:

$$P = \frac{F}{(1 + n * i)} \tag{2.3}$$

2.7.2. Cálculo de la tasa de interés simple

Consiste en calcular la tasa de interés simple, que arroja una inversión inicial (*P*) que, después de *n* periodos, tiene acumulado una cantidad (*F*).

Despejando la ecuación (2.3.) se obtiene:

$$i = \frac{1}{n}\left[\frac{f}{p} - 1\right] \tag{2.4}$$

2.7.3. Cálculo del tiempo de negociación

Consiste en calcular el número de periodos (días, meses, trimestres, etc.) necesarios para que un capital invertido (*P*) a una tasa de interés simple (*i*) produzca un valor futuro (*F*).

De la misma manera a como se ha realizado antes, se despeja *n* de la fórmula:

$n =$ (2.5)

$$n = \frac{1}{i}\left[\frac{f}{p} - 1\right]$$

Ejemplo (2.4)

Ana Milena quiere invertir 25 000 000 en un negocio que le pagará una tasa de interés simple del 3 % mensual durante 2 años. Calcular el valor disponible después de los 2 años.

Se identifica la información que otorga el problema:

P = 25 000 000

n = 2 años

i = 3 % mensual

Obsérvese que la periodicidad de la tasa de interés y de la negociación son distintas. Tanto la tasa de interés como los periodos de negociación deben tener la misma unidad de tiempo para que el resultado sea coherente; por lo tanto, alguna de las dos tiene que ser convertida a la unidad de tiempo de la otra.

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ año} & \longrightarrow & 12 \text{ meses} \\ 2 \text{ años} & \longrightarrow & X \end{array} \qquad X = \frac{(2)\,(12) \text{ meses}}{(1)\,(\text{año})}$$

$$X = 24 \text{ meses}$$

Utilizando la fórmula (2.2) se obtiene:

F = (25.000.000) (1+(24)(0,03))

F = 43 000 000

Ejemplo (2.5) Ahora, si el ejercicio diera los siguientes datos:

F = 43 000 000

n = 24 meses (2 años)

i = 3 % mensual

Y si pidiera calcular el valor presente equivalente a $ 43 000 000 dentro de 2 años a una tasa de interés simple del 3 % mensual, se debe utilizar la formula (2.3).

Organizando los datos y aplicando la ecuación:

F = 43.000.000

n = 24 meses (2 años)

I = 3 % mensual

$P = ?$

$$\frac{f}{(I + ni)} = \frac{43\,000\,000}{(1 + (24)\,(0{,}03))} \qquad i = 0{,}03 = 3\%\ mensual$$

$P = 25\,000\,000$

Por otro lado, si el problema pide calcular la tasa de interés, aplicando la expresión (2.4):

$$i = \frac{1}{n}\left[\frac{f}{p} - 1\right]$$

Donde:

$F = 43\,000\,000$

$P = 25\,000\,000$

n =24 meses

$I = ?$

Reemplazando, se obtiene:

$$i = \frac{1}{24}\left[\frac{43\,000\,000}{25\,000\,000} - 1\right]$$

$i = 0{,}03 = 3\ \%\ mensual$

Al expresar en meses el número de periodos (n) en la ecuación (2.4), la tasa que se obtiene tiene que ser mensual, para que se pueda cumplir la condición ya mencionada, en la que la tasa de interés y el número de periodos deben estar expresados en la misma unidad tiempo.

En cambio, si el ejercicio solicita el cálculo del tiempo se utiliza la expresión (2.5).

$$n = \frac{1}{i}\left[\frac{F}{p} - 1\right]$$

Donde:

$F = 43\,000\,000$

$P = 25\,000\,000$

$I = 3\ \%$

$n = ?$

Remplazando, se obtiene:

$$n = \frac{1}{0{,}03}\left[\frac{43}{25} - 1\right]$$

$n = 24$ meses

Se ha utilizado el mismo ejercicio, pero con distintos objetivos, aplicando la formula $F = P*(1+ni)$.

En cada caso, se puede observar que los intereses son la resta del valor futuro y el valor presente:

$I = F- P$

$I = 43\,000\,000 - 25\,000\,000$

$I = 18\,000\,000$

O, también, aplicando la fórmula (2.1):

$I = P. (i) (n)$

$I = 25\,000\,000\ (0\ 03)\ (24)$

$I = 18\,000\,000$

En cada caso se ha observado cómo la tasa de interés solo se aplica sobre el capital inicial y los intereses periódicos causados.

2.8. Intereses moratorios

Cuando en la fecha de vencimiento de una deuda esta no es cancelada, comienza a ganar unos intereses llamados intereses de mora, los cuales se calculan con base en el capital o la deuda prestada, o sobre el saldo insoluto por el tiempo de mora del pago. Por lo general, la tasa de interés moratoria es el 50 % de la tasa de interés corriente de la negociación.

Ejemplo (2.6)

Un pagaré de $ 875 620 que devenga intereses del 3 % mensual tiene un plazo de vencimiento de 50 días. Se cancela 10 días después de su fecha de vencimiento. Calcular el interés moratorio y la cantidad total a pagar. La tasa interés moratoria es el 50 % del interés corriente.

Si el pagaré se pagara en la fecha de vencimiento, el valor a cancelar es:

$F = P\,(1 + ni)$

$$F = 800\,000\left(1 + \frac{50}{30} * 0{,}03\right) = 840\,000$$

Al aplazarse el pago durante 10 días se generan unos intereses moratorios a una tasa del 1,5 %:

$$im = 0{,}03 * 0{,}5 = 0{,}015$$

$$I = P * i * n$$

$$I = 800\,000 * 1 + \frac{10}{30} * 0{,}0015 = 4000$$

El total a pagar es la suma del capital más los intereses corrientes más los intereses moratorios.

Cantidad total a pagar = F + intereses de mora = 840 000 + 4000 = 844 000

2.9. Operaciones de descuento

Un descuento es una operación financiera que consiste en cobrar, sobre el valor de un título o documento, el valor del interés en forma anticipada; los títulos o documentos tienen un valor nominal que es el monto que aparece en el pagaré; los intereses cobrados en forma anticipada se llaman descuentos y la cantidad que recibe el tenedor, ya descontados los intereses del valor nominal (*Vn*), es el valor efectivo (*Ve*).

Al vender un pagaré antes de su fecha de vencimiento el comprador aplica una tasa de descuento sobre el valor nominal del título (valor de vencimiento). Dependiendo de la forma como se aplique la tasa de descuento sobre el valor nominal resultan dos tipos de descuentos: el descuento comercial y el descuento racional o justo.

2.9.1. Descuento comercial

Es una operación con descuento comercial. Los intereses (*I*) bajo interés simple se calculan sobre el valor nominal.

$$I = Vn^{*}\, n^{*}\, i \qquad (2.6)$$

Como ya se había comentado antes, el valor efectivo, que corresponde al valor presente, es el valor nominal menos los intereses.

$$Ve = Vn - I \qquad (2.7)$$

Remplazando el valor de *I* (2.6) en la anterior expresión (2.7), se obtiene:

$$Ve = Vn - Vn\,(n)(i)$$

Factor común: $Ve = Vn(1 - ni)$ (2.8)

2.9.2. Descuento racional o justo

Es una operación con descuento racional. Los intereses simples se calculan sobre el valor en efectivo.

$$I = (Ve)\ (i)(n) \qquad (2.9)$$

Remplazando (2.9) en (2.7), se obtiene:

$$Ve = Vn - (Ve)(i)(n)$$

Factor común: $Ve(1 + ni) = Vn$

$$Ve = Vn / (1 + ni)$$

Ejemplo (2.7)

El señor Enrique tiene un pagaré por valor de 10 000 000, con una fecha de vencimiento dentro de 9 meses.

El señor Enrique necesita dinero para los regalos de Navidad de sus hijos, así que decide vender el título. Un amigo de él decide comprárselo con una tasa de descuento del 3 % mensual. ¿Cuánto dinero recibirá el señor Enrique al vender el título?

a. *Descuento comercial*
b. *Descuento racional.*

Este ejercicio supone que el valor del título en su fecha de vencimiento, ya que incluye los intereses (valor nominal).

a. Descuento comercial

$Ve = Vn\ (1 - ni)$

$Ve = 10\,000\,000\ (1 - (9)(0{,}03))$

$Ve = 7\,300\,000$

b. Descuento racional

$$Ve = \frac{Vn}{(1 + ni)} \qquad Ve = \frac{10\,000\,000}{(1 + (9)\ (0{,}03)} \qquad Ve = 7\,874\,015{,}75$$

Al comparar los resultados aplicando descuento comercial y racional, se puede observar que el valor efectivo en descuento comercial es menor que con descuento racional. El tenedor del título percibe menor dinero al momento de vender, ya que el descuento es mayor.

2.10. Ecuación de valor con interés simple

Es común en el mundo de los negocios el concepto de *ecuación de valor*, la cual constituye otra de las grandes aplicaciones del principio de equivalencia.

Suele ocurrir en el mundo de los negocios que una persona (deudor), en acuerdo con el acreedor, decida cambiar la forma de pagar una o más obligaciones, que se había pactado inicialmente de una manera, mediante el pago de otras obligaciones en fechas diferentes, pero con la condición de que sean equivalentes en valor a la obligación inicial. En estas ecuaciones de valor aparece otro concepto de fecha, el cual sigue el siguiente principio financiero. Para comparar sumas de dinero ubicadas en diferentes fechas, deben trasladarse todas ellas a una misma fecha, denominada fecha focal.

La ecuación de valor busca la igualdad entre un conjunto de pagos pactados inicialmente y otro conjunto de pagos que remplazan al conjunto inicial, todas llevadas a una fecha focal elegida de manera arbitraria.

Ejemplo (2.8)

Se tiene una deuda por pagar de la siguiente manera: $ 80 000 para dentro de 2 meses, $ 100 000 dentro de 6 meses y $ 350 000 dentro de 10 meses. Si entre el deudor y el acreedor se ha decidido cambiar los tres pagos por uno solo en el mes 4 y la operación financiera se realiza con una tasa de interés simple del 3,5 % mensual, calcular el valor del nuevo pago como fecha focal (ff) Se ha escogido el mes 4.

El flujo de caja es el mostrado en la figura 2.1.

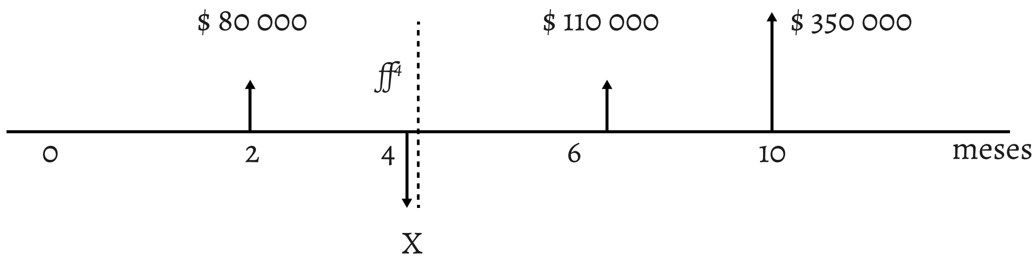


Figura 2.1 Diagrama flujo de caja – DFC de la ecuación de valor con ff4 bajo interés simple del ejemplo 2.8

Fuente: elaboración propia.

Con base en la fecha focal se establece la ecuación de valor.

X = 80 000(1 + (2)(0,035))

X = 85 600 + 102 803,74 + 289 256,199

X = 477 659 939

Es indiferente financieramente que el acreedor reciba $ 80 000 dentro de 2 meses, $ 110.000 dentro de 6 meses y $ 350 000 dentro de 10 meses, a recibir $ 477 659 939 dentro de 4 meses, con una tasa de interés del 3,5 % mensual simple.

Observe en el flujo de caja que los $ 80 000 son considerados un valor pasado que tiene que ser llevado al futuro en el mes 4, por eso se utiliza la formula $F = P(1 + ni)$, mientras los $ 110 000 y los $ 350 000 ubicados en los meses 6 y 10, respectivamente, se consideran un futuro, por lo cual hay que descontarle el interés para poder sumarlos en el mes 4, utilizando la formula:

$$P = \frac{F}{(1 + ni)}$$

De lo anterior, se puede concluir que los valores ubicados antes de la fecha focal son considerados valores pasados, que tienen que ser llevados al futuro, y los que se encuentran adelante se consideran futuros, a los cuales hay que descontarles los intereses, que se han causado entre la fecha focal y el momento en que se encuentran estos flujos o valores.

Lo anterior se ilustra en el flujo de caja de la figura 2.2.

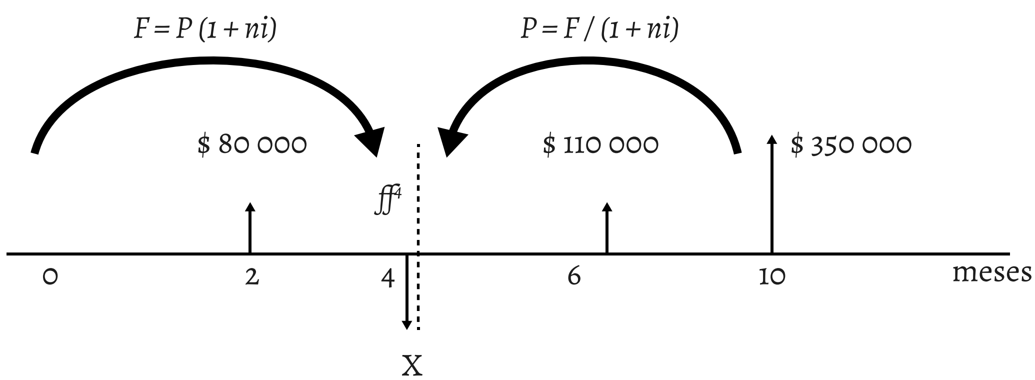
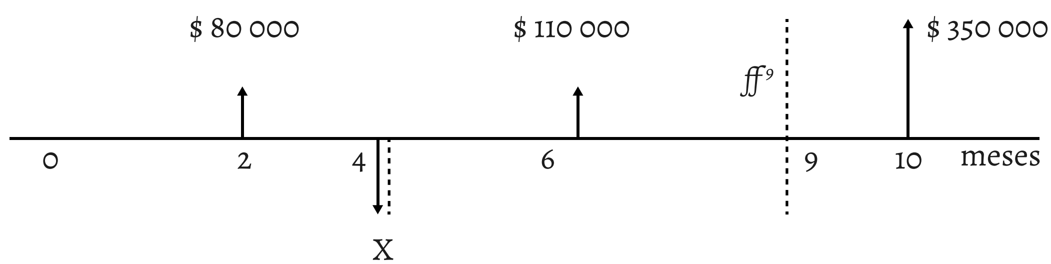


Figura 2.2 Diagrama Flujo de caja – DFC de la ecuación de valor con ff4 bajo interés simple del ejemplo 2.8 con fórmulas a utilizar.

Fuente: elaboración propia.

Para observar qué sucede si se escoge otra fecha focal, se cargará al mes 9.



Se plantea la ecuación de valor:

$$X\,(1 + 5 * 0{,}035) = 80\,000\,(1 + 7 * 0{,}035) + 110\,000\,(1 + 3 * 0{,}035) + \frac{350\,000}{(1 + 1 * 0{,}035)}$$

$$X = (1175) = 99\,600 + 121\,550 + 338\,164{,}2512 \qquad X = 476\,012\,1287$$

La elección de determinada fecha focal afecta el resultado del ejercicio de limitación que presta la aplicación de las ecuaciones de valor cuando se maneja con intereses simples.

Esto sucede por el hecho de que los valores que se manejan ya tienen incluidos los intereses y, al trasladarlos de un momento a otro, a estos se les estarían cargando nuevos intereses, lo que ya no sería interés simple.

En el interés simple, fechas focales diferentes para una misma operación financiera arrojan distintos resultados; por lo tanto, es importante que el deudor y el acreedor estén de acuerdo en la escogencia de la fecha focal.

2.11. Situaciones para resolver

a. Augusto tiene para invertir una suma de $ 10 000 000 y ha decidido colocar el 45 % de ese monto a una tasa de interés simple del 24 % anual y el saldo a un interés simple del 1 % mensual. ¿A cuánto asciende el valor mensual de intereses que recibirá?

b. Usted invirtió $ 1 000 000 y 6 meses después le entregan $ 1 100 000, ¿cuál es la tasa de interés simple que ganó? (Calcule esa tasa de tres maneras, con periodicidad mensual, anual, semestral).

c. ¿Cuánto tiempo se debe esperar para que un capital de $ 1 000 000 se duplique, si la tasa de interés se realiza al 20 % diario simple? (sistema “gota a gota”).

d. ¿Cuál será el valor a pagar dentro de un año por un préstamo de $ 10 000 000 pesos recibidos hoy, si la tasa de interés es del 2 % mensual simple?

e. Su padre tiene que cancelar en 6 meses $ 1 000 000 en un plazo de año y medio. Si la tasa de interés pactada es del 2 % mensual simple, ¿cuánto fue el valor que prestó su padre?

2.12 Soluciones de situaciones a resolver

a. Solución Manual

P = 10.000.000

Tasa primer monto = 24% anual

Tasa segundo monto = 1 % mensual

$$P_{45\%} = \$10.000.000 * 45\%$$
$$P_{45\%} = \$4.500.000$$

$$P_{55\%} = \$10.000.000 * 55\%$$
$$P_{55\%} = \$5.500.000$$

Intereses del monto del 45%

n = (1/12) = 0,083333333

$I_{45\%} = \$4.500.000 * 24\% * 0,083333333$

$I_{45\%} = \$90.000$

Intereses del monto del 45%

$I_{55\%} = \$5.500.000 * 1\% * 1$

$I_{55\%} = \$55.000$

$$I_{100\%} = I_{45\%} + I_{55\%}$$

$$I_{100\%} = \$90.000 + \$55.000$$

$$I_{100\%} = \$145.000$$

a. Solución en Excel

	A	B	C	D	E	F
9						
10		P =	$ 10.000.000			
11						
12		45% del monto			55% del monto	
13		P =	$ 4.500.000		P =	$ 5.500.000
14		n =	0,083333333		n =	1
15		i =	24%		i =	1%
16		I =	=+C13*C14*C15		I =	$ 55.000
17						
18						
19		Total Intereses Mensuales		$ 145.000		
20						

	A	B	C	D	E	F
9						
10		P =	$ 10.000.000			
11						
12		45% del monto			55% del monto	
13		P =	$ 4.500.000		P =	$ 5.500.000
14		n =	0,083333333		n =	1
15		i =	24%		i =	1%
16		I =	$ 90.000		I =	$ 55.000
17						
18						
19		Total Intereses Mensuales	=+C16+F16			
20						

b. Solución manual

Tasa mensual

$$i = \frac{1}{n} * \left[\frac{F}{P} - 1 \right]$$

$$i = \frac{1}{6} * \left[\frac{\$\,1.100.000}{\$\,1.100.000} - 1 \right]$$

$$i = 1{,}67\%\ mensual$$

Tasa anual

$$i = \frac{1}{0{,}5} * \left[\frac{\$\,1.100.000}{\$\,1.100.000} - 1 \right]$$

$$i = 20\%\ anual$$

Tasa semestral

$$i = \frac{1}{1} * \left[\frac{\$\,1.100.000}{\$\,1.100.000} - 1 \right]$$

$$i = 10\%\ semestral$$

b. Solución en Excel

	A	B	C	D	E	F	G
28							
29							
30		P =	$ 1.000.000		P =	$ 1.000.000	
31		F =	$ 1.100.000		F =	$ 1.100.000	
32		n =	6	meses	n =	1	semestres
33		i =	=+ 1/C32*((C31/C30)-1)		i =	10,00%	semestral
34							
35		P =	$ 1.000.000				
36		F =	$ 1.100.000				
37		n =	0,5	años			
38		i =	20,00%	anual			
39							

c. Solución manual

$$n = \frac{1}{i} * \left[\frac{F}{P} - 1\right]$$

$$n = \frac{1}{20\%} * \left[\frac{\$\,1.000.000}{\$\,2.000.000} - 1\right]$$

$$n = 5$$

c. Solución en Excel

	A	B	C	D
48				
49		P =	$ 1.000.000	
50		F =	$ 2.000.000	
51		i =	20%	
52		n =	=+(1/C51)*((C50/C49)-1)	
53				

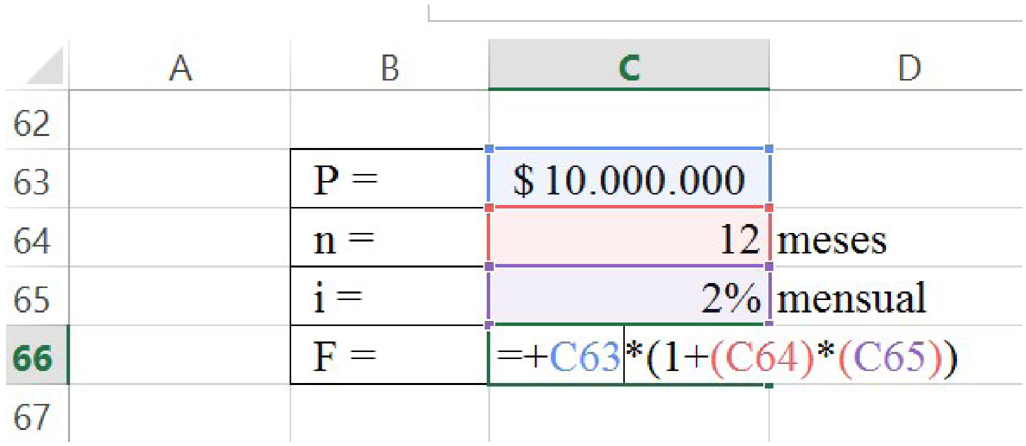
d. Solución manual

$$F = P * [\, 1 + n * i \,]$$

$$F = \$10.000.000 * [\, 1 + 12 * 2\% \,]$$

$$F = \$12.400.000$$

d. Solución en Excel



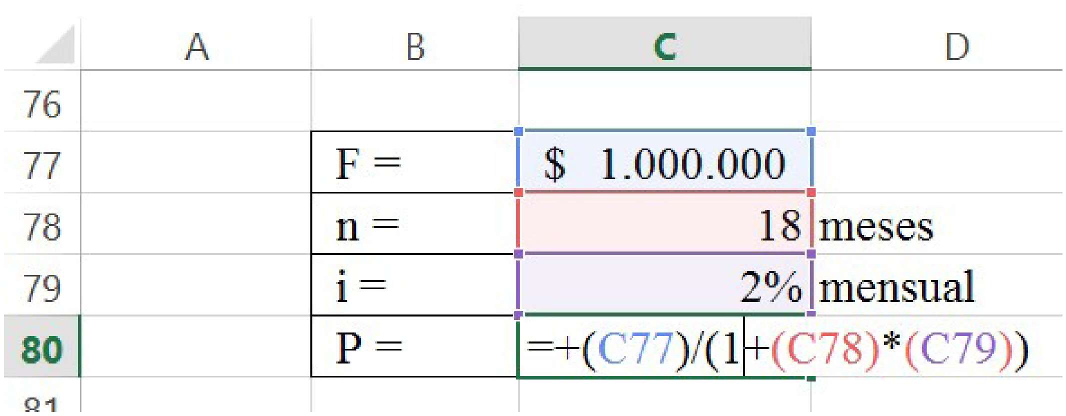
e. Solución manual

$$P = \frac{F}{[\, 1 + n * i \,]}$$

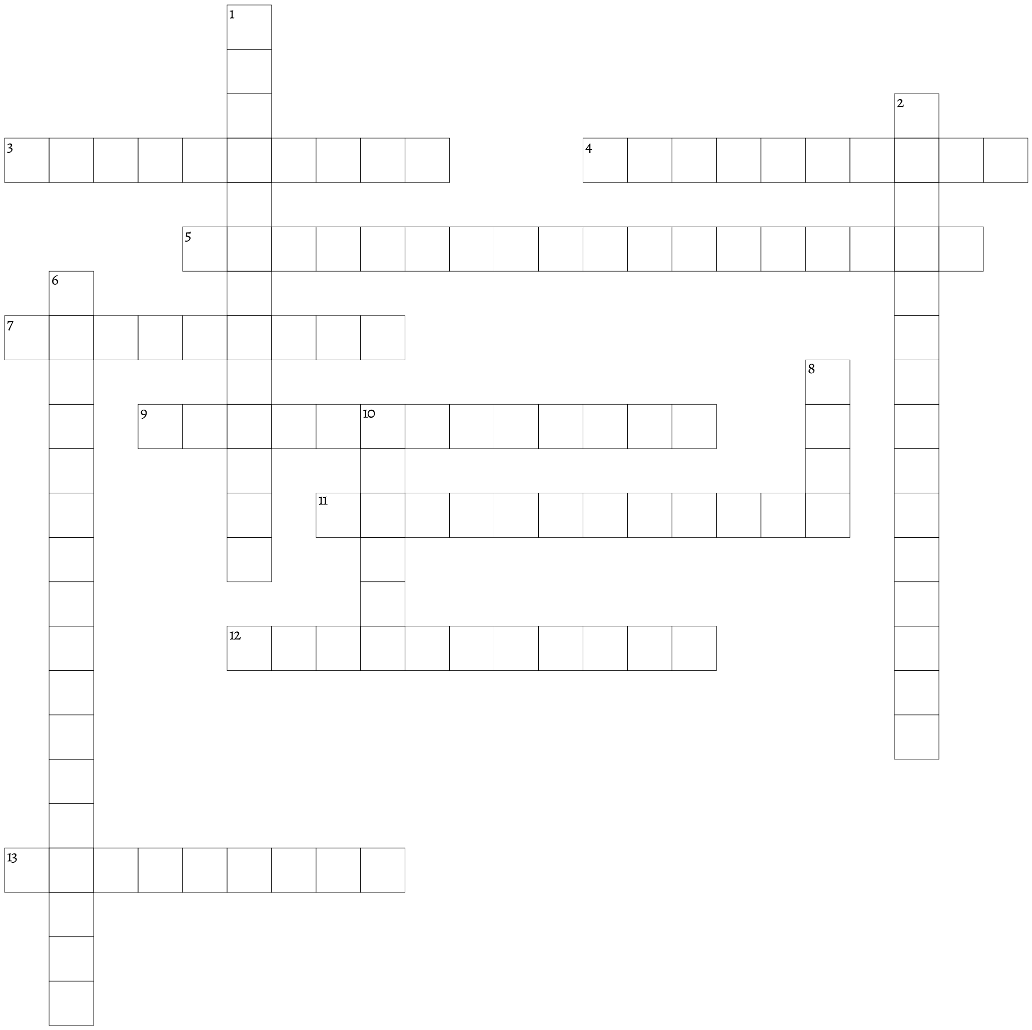
$$P = \frac{\$\, 1.000.000}{[\, 1 + 18 * 2\% \,]}$$

$$P = \$735.294$$

e. Solución en Excel



¡BIENVENIDO AL DESAFÍO DE PALABRAS! N° 2



Horizontal

3. Intereses que se ganan o cancelan, cuando una deuda no se paga en la fecha de vencimiento
4. Momento de comparación a la que se llevan todos los flujos de dinero, en una ecuación de valor
5. Operación en la que los intereses se calculan sobre el valor nominal
7. Intereses cobrados en forma anticipada en operaciones financieras en las cuales hay que negociar antes del vencimiento un papel o título
9. Tipo de interés en el que los intereses devengados en un período no ganan intereses en los períodos siguientes, independientemente de que se paguen o no
11. Monto que aparece en el pagaré de una operación con descuento
12. quel que es igual al capital prestado más los intereses
13. Interés que se calcula teniendo en cuenta el año de 360 días

Vertical

1. Cantidad de dinero que recibe el tenedor de un título una vez descontados los intereses
2. Planteamiento de equivalencias de valores en una misma fecha
6. Operación en la que los intereses se le calculan sobre el valor efectivo
8. Interés que se calcula considerando el año de 365 días o 366 días si se trata de un año bisiesto
10. Otro nombre para el interés real

Capítulo 3

INTERÉS COMPUESTO

3.1. Objetivos del capítulo

General

- Introducir al estudiante el concepto de interés Compuesto, deducir las fórmulas a partir de este concepto y aplicarlas para resolver problemas y casos de la vida real.

Específicos

- Conocer la importancia del uso y la aplicación en la vida real del interés compuesto.
- Comprender e identificar el origen del interés compuesto y sus características esenciales.
- Identificar las diferencias entre interés simple y compuesto.
- Construir diagramas de flujo de caja y plantear ecuaciones de valor para cálculo de valores, intereses y fechas presentes o futuras.
- Determinar la cantidad de dinero que se debe recibir (o pagar) al cabo de n periodos, si hoy se da (o recibe) P pesos a una tasa de interés compuesto del $i\,\%$ por periodo vencido.
- Aprender a hallar tasas de interés mediante el método de interpolación lineal.
- Resolver problemas relacionados con interés compuesto.

3.2. Introducción al interés compuesto

Desde el punto de vista matemático, la base de las matemáticas financieras se encuentra en la relación resultante de recibir una suma de dinero hoy (valor presente, VP) y otra diferente (valor futuro, VF) de mayor cantidad transcurrido un periodo. La diferencia entre VP y VF responde por el "valor" asignado por las personas al sacrificio de consumo actual y al riesgo que perciben y asumen al posponer el ingreso.

En cuanto al interés, la situación es mucho más compleja, pues el marco legal colombiano y la tradición educativa han manejado por mucho tiempo la idea de que existen dos tipos de interés: el simple y el compuesto. Se puede decir que el simple es un caso particular del interés compuesto.

Es de tener en cuenta que el interés simple se considera la ganancia del capital dado en préstamo durante todo un periodo, de tal forma que los intereses sean proporcionales a la longitud del periodo de tiempo durante el cual se ha tenido en préstamo la suma prestada.

3.3. Concepto de interés compuesto

El interés compuesto se considera la utilidad del capital invertido más las capitalizaciones o reinversión periódica de los intereses. Presupone que al final de cada periodo deben recibirse intereses sobre el saldo o capital, teniendo en cuenta que los intereses se deben ir integrando al capital. Esta última condición origina que la deuda aumente periodo por periodo, y que la compensación final sea mucho más alta, pues se han ido capitalizando los intereses.

Si al final de cada periodo se pagan los intereses causados y no se hacen abonos, ni se reciben nuevos préstamos; el saldo o, lo que es lo mismo, el capital no amortizado no cambiará. Los intereses serán los mismos del periodo. Se diría que se está trabajando con interés simple.

Debido a que en el interés compuesto los intereses de un periodo se amortizan o suman al capital en ese periodo, el valor del interés será diferente en los periodos siguientes, ya que se calcula sobre una base o capital diferente (que en este caso es cada vez mayor, así que el interés será cada vez mayor). Es el mismo caso si se realiza un ingreso o egreso adicional, debido a que modifica el capital sobre el cual se calcularán los intereses.

El periodo de capitalización es el periodo mínimo necesario para que se pueda cobrar un interés. Se llama periodo de capitalización porque a su término ya se tiene o se formó más capital.

El *interés compuesto* es la utilidad del capital invertido más las capitalizaciones o reinversión periódica de los intereses. Este presupone que al final de cada periodo deben recibirse intereses sobre el saldo o capital, teniendo en cuenta que los intereses se deben ir reintegrando al capital.

Características del interés compuesto

- El capital inicial cambia en los periodos porque los intereses que se causan se capitalizan, o sea, se convierten en capital.
- La tasa de interés simple se aplica sobre un capital diferente.
- Los intereses periódicos siempre serán mayores.

Dependiendo de la frecuencia de su aplicación, el interés compuesto puede dividirse en:

a. Discreto, si se aplica con intervalos de tiempo finitos.
b. Continuo, si se aplica en una forma continua y sus intervalos de tiempo son infinitesimales.

3.4. Diferencias básicas entre interés simple y compuesto

En la tabla 3.1, se presenta de manera esquemática cada tipo de interés y se observan sus diferencias.

Tabla 3.1. Diferencias básicas entre el interés simple y compuesto

Criterios base	**Interés simple**	**Interés compuesto**
Capital inicial en cada periodo	No varía, ya que los intereses no ganan intereses, por lo cual pierden poder adquisitivo atentando con el concepto de VDT.	Varía por la capitalización de los intereses causados, los cuales se reinvierten a la misma o diferente tasa de interés.
Valor base sobre el que se aplica la tasa de interés	Capital inicial	Valor al inicio de cada periodo (esto es sobre un capital diferente).
Intereses	Serán iguales en cada periodo	Son diferentes en cada periodo, pues el valor base es diferente cada inicio de periodo. En una operación de inversión siempre aumentará; en una operación de financiación con pago o abono a capital disminuirá.
Aplicación real	Limitada a nula.	Uso generalizado.

Fuente: elaboración propia.

3.5 Ecuaciones bajo interés compuesto

Supóngase que una persona presta $100, al 20% anual simple, por un periodo de tres años, esto quiere decir que al cabo del primer año recibirá:

$F_1 = \$100 + (\$100 * 0{,}20)$

$F_1 = \$120$

Al cabo de un año recibirá \$ 20 por el uso del dinero a través de ese periodo de capitalización. Si por cualquier razón este interés no es cobrado, al cabo de un año se cobrarán los mismos \$ 20 de interés, ya que en el interés simple los intereses no se adicionan al capital. Entonces, al final del tercer año, si se acumulan los intereses se recibirá:

$F_3 = \$100 + (\$20 * 3)$

$F_3 = \$160$

Supóngase ahora que la persona presta el dinero por los mismos 3 años al 20% capitalizado anualmente. Si se quiere calcular el saldo al final del tercer año, se puede ver que:

$F_1 = \$100 + (\$100 * 0{,}20)$

$F_1 = \$120$

Pero como en el interés compuesto los intereses se capitalizan, para el segundo año, el saldo sería el siguiente:

$F_2 = \$120 + (\$120 * 0{,}20)$

$F_2 = \$144$

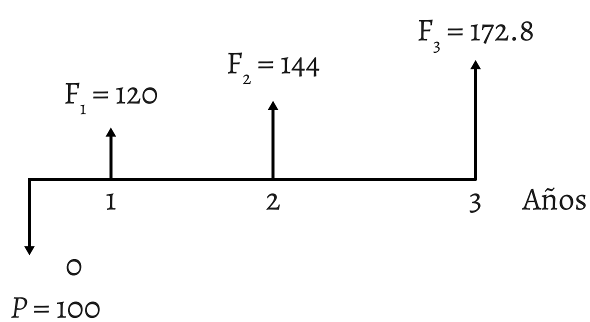
Y, finalmente, el saldo al final del tercer año es:

$F_3 = \$144 + (\$144 * 0{,}20)$

$F_3 = \$172{,}8$

Gráficamente, el problema se representa como en la figura 3.1.

Figura 3.1. Diagrama de flujo de caja- DFC ejemplo sección 3.5



Fuente: elaboración propia.

Se resume en la tabla 3.2.

Tabla 3.2. Valor futuro detallado mes a mes, ejemplo sección 3.5.

Periodo (n)	Valor Presente (P)	Intereses (i)	Valor Futuro (F)
1	100	20	120
2	120	24	144
3	144	28,8	172,8

Fuente: elaboración propia.

Si consideramos:

F = Cantidad acumulada al final del periodo n, valor futuro

P = Valor presente o actual, cantidad en el periodo cero

i = Tasa de interés

n = Periodo de capitalización de los intereses

I = Intereses

Se puede interpretar lo consignado en la tabla 3.3.

Tabla 3.2. Demostración de la fórmula general bajo interés compuesto

Periodo (n)	Valor presente (P)	Intereses (I)	Valor Futuro (F)
0 - 1	P	$I_1 = P * i$	$F_1 = P + I_1$ $F_1 = P + P * i$ $F_1 = P(1+i)$
1 - 2	$P(1+i)$	$I_2 = P(1+i) * i$ $I_2 = Pi(1+i)$	$F_2 = F_1 + I_2$ $F_2 = P(1+i) + Pi(1+i)$ $F_2 = P(1+i)^2$
2 - 3	$P(1+i)^2$	$I_3 = P(1+i)^2 i$ $I_3 = Pi(1+i)^2$	$F_3 = F_2 + I_3$ $F_3 = P(1+i)^2 + Pi(1+i)^2$ $F_3 = P(1+i)^3$
(n-1) - n	$P(1+n)^{n-1}$	$I_n = Pi(1+i)^{n-1}$	$F_n = P(1+i)^n$

Fuente: elaboración propia.

Esto nos indica que *P* pesos invertidos o recibidos hoy y dejados durante *n* periodos en un fondo al *i* % por periodo son equivalentes a una suma futura (*F*) al final de *n* periodos.

Con base en lo anterior, se puede concluir que la ecuación general al manejar interés compuesto es la siguiente:

$$F = P(1+i)^n \qquad (3.1)$$

Dados:

F = Valor futuro, cantidad acumulada al final del periodo *n*

P = Valor presente o actual, cantidad en el periodo cero

i = Tasa de interés

n = Periodo de capitalización de los intereses

3.5.1. Cálculo del valor presente a interés compuesto

Por simple operación algebraica, conociendo la ecuación (3.1):

$$F = P(1+i)^n$$

Dados:

Valor futuro, cantidad acumulada al final del periodo *n*

P = Valor presente o actual, cantidad en el periodo cero

i = Tasa de interés

n = Periodo de capitalización de los intereses

Se puede calcular el valor presente (*P*), que, al despejar, queda de la siguiente manera:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

El factor $(1+i)^n$ se conoce con el nombre de *factor de capitalización en pago único.*

En notación estándar se tiene:

$X = Y\,(x/y\,,\,i\,\%,\,n)$

Que se lee: hallar X, dados Y, *i* % y *n*; o también: factor para calcular *P*, conociendo *F* (en este caso).

Donde:

X = Incógnita, valor que se debe calcular

Y = Valor conocido

n = Número de períodos

i = Tasa de interés

3.5.2. Cálculo del periodo de capitalización

A diferencia del interés simple, en el interés compuesto se le suman periódicamente los intereses al capital. El proceso de sumar los intereses al capital periódicamente cada vez que se liquidan se conoce como *capitalización*. El periodo utilizado para liquidar los intereses se llama *periodo de capitalización*.

Conociendo ya los parámetros antes mencionados, se tiene:

$$F = P(1+i)^n$$

Entonces, se puede despejar de la siguiente manera:

$$F = P(1+i)^n$$

$$\frac{F}{P} = (1+i)^n$$

$$\log\left(\frac{F}{P}\right) = n \quad \log 1 + i)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{F}{P}\right)}{\log(1+i)}$$

Obteniendo, entonces, la forma para calcular el periodo teniendo una única cantidad invertida, una única cantidad recibida (F o P, dependiendo de lo que plantee el problema) y la tasa de interés.

Al resolver ejercicios que simplifiquen el cálculo de una fecha desconocida, se pueden obtener tres respuestas diferentes:

Si $n > \emptyset$ Significa que el pago debe hacerse en la fecha obtenida, contada a partir de cero.

Si $n \leq \emptyset$ Significa que con ese pago no existe equivalencia entre la situación planteada inicialmente y la propuesta.

Si $n = \emptyset$ Significa que el pago se debe hacer en el momento cero, lo que equivaldría al pago de una cuota inicial.

3.5.3. Cálculo de la tasa de interés compuesta

Cuando se tiene una única cantidad invertida (o recibida, dependiendo del caso) y una única cantidad recibida (o invertida), las tasas de interés se pueden calcular por la solución directa, despejando de la ecuación (3.1.) de interés compuesto.

Cuando se están involucrando varios ingresos y egresos, la solución debe encontrarse por medio de un algoritmo conocido como ensayo y error, cuyo procedimiento será analizado a la luz de las ecuaciones de valor (ver interpolación lineal).

Conociendo los parámetros, se despeja:

$$F = P(1+i)^n$$

$$\frac{F}{P} = (1+i)^n$$

$$\log\left(\frac{F}{P}\right) = n \quad \log 1 + i)$$

$$\frac{\log\left(\frac{F}{P}\right)}{n} = \log(1+i)$$

Donde P, F y n son valores dados.

3.6. Ecuaciones de valor con interés compuesto

Las ecuaciones de valor se constituyen como una de las grandes aplicaciones del principio de equivalencia financiera. Cabe anotar que se utilizan para interés tanto simple como compuesto.

Teorema fundamental de las matemáticas financieras: "un mismo valor situado en fechas diferentes es, desde el punto de vista financiero, un valor diferente".

Lo único que hace diferente en poder de compra a una unidad monetaria es el tiempo. Por esto, una base para poder comparar diferentes cantidades de dinero es ubicarlas en un mismo instante, es decir, en una misma fecha focal.

Al utilizar las ecuaciones de valor, aparece este concepto de *fecha focal*, que se define como una fecha determinada con base en la cual se comparan los ingresos y los egresos. Esta fecha debe ser conocida y acordada entre las partes, y es a esta fecha a la que se debe trasladar todo el flujo de caja (diferentes ingresos y egresos a lo largo del tiempo), pues con base en este punto o fecha es que se planteará toda la ecuación de valor dado. Este momento se asume como la fecha a la que todos los valores se llevarán para poder compararlos (a un punto donde sean equivalentes).

Para el caso de operaciones financieras de flujos de caja, a través de la anterior conceptualización y de las ecuaciones de valor, se puede declarar **otro teorema fundamental**: "lo que está arriba (ingresos) es igual a lo que está abajo (egresos) en una misma fecha focal"; o, visto de otra forma, "lo que se debe es igual a lo que se debe pagar".

En síntesis, una ecuación de valor es una igualdad en la cual se comparan sumas de dinero ubicadas en fechas diferentes. Deberán trasladarse todas ellas a una misma fecha, llamada fecha focal, que se puede escoger de manera arbitraria dentro del diagrama de flujo de caja.

Las ecuaciones de valor se usan para modificar las formas de pagar una deuda, o refinanciarla, o comparar varias alternativas de inversión o de financiación.

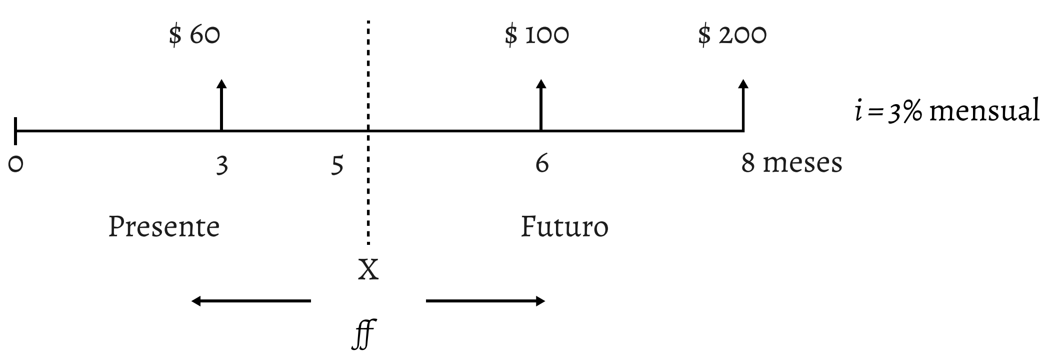
Para diseñarlas tenga que presente que: "Lo que se debe es exactamente igual a lo que se tiene que pagar", "lo que se deposita debe ser igual a lo que se retira", todo referenciado o traído a una misma fecha focal (*ff*), por el principio básico de equivalencia.

Tenga presente que todo lo que esté a la derecha de la fecha focal o de referencia será una cantidad futura que debe traerse a un presente, y si la cantidad está a la izquierda será una suma presente que se llevará al futuro, ambas transformaciones usando la ecuación general.

Para ser más claros, véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo (3.1)

Supóngase el siguiente flujo de caja, de una operación financiera con fecha focal 5 – ff5



La fecha focal se encuentra en el quinto mes. A continuación, se procede a plantear la ecuación de valor, donde x es la incógnita a calcular.

Conociendo que

$$F = P(1+i)^n$$
$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

Se tiene la siguiente ecuación de valor:

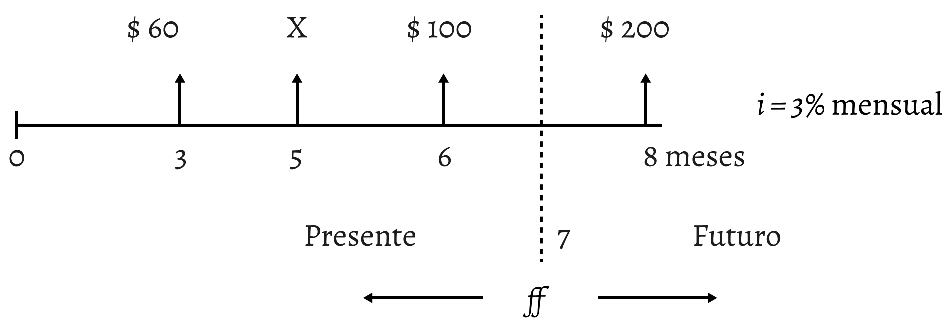
$$x = 60(1+0{,}03)^2 + \frac{100}{(1+0{,}03)^1} + \frac{200}{(1+0{,}03)^3}$$

$$x = 63{,}654 + 97{,}08737864 + 183{,}0283319$$

$$x = 343{,}7697105$$

Cabe anotar, que en la ecuación de valor se suman las diferentes sumas futuras porque siempre se debe tener presente la igualdad: los ingresos deben ser iguales a los egresos.

¿Si se cambia la fecha focal al séptimo mes?



Se tiene la siguiente ecuación de valor en fecha focal 7 - ff7

$$x\,(1+0{,}03)^2 = 60(1+0{,}03)^4 + 100\,(1+0{,}03)^1 + \frac{200}{(1+0{,}03)^1}$$

$$x\,(1{,}0609) = 67{,}5305286 + 103 + 194{,}1747573$$

$$x = \frac{364{,}7052859}{1{,}0609}$$

$$x = 343{,}7697105$$

3.7. Interpolación lineal

Según el diccionario de la Real Academia Española, interpolar es calcular el valor aproximado de una magnitud en un intervalo cuando se conocen algunos de los valores que toma dicha magnitud a uno y otro lado de dicho intervalo.

En la vida real, se encuentran situaciones donde se carece de la información que permitiría determinar valores dependientes (y) en función de una o más variables independientes. Es en este momento donde se utiliza la interpolación. Los métodos más utilizados son: método lineal, logaritmo y exponencial. Solo se utilizará la interpolación lineal, debido a su sencillez y gran utilidad (García, 2008).

La interpolación lineal consiste en que, dados dos puntos de una curva, se debe hallar otro intermedio utilizando la función lineal, es decir, suponiendo que los tres puntos están sobre la misma recta. Esto se aplica para aproximar o ajustar puntos que estén sobre una curva a puntos que estén sobre una recta y de esta manera darle una solución aproximada a una serie de problemas.

Recuérdese que si se tienen tres puntos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$, para que estos tres puntos estén sobre la misma recta se requiere que la pendiente entre A y B sea igual a la pendiente entre B y C (o entre A y C); es decir, que se cumpla:

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}$$

Que en proporciones equivale a:

$(b_2 - a_2)$ es a $(b_1 - a_1)$ como $(c_2 - b_2)$ es a $(c_1 - b_1)$

En matemáticas financieras, la interpolación lineal se utiliza para calcular una tasa de interés o el tiempo en una operación. Se debe tener en cuenta que con las calculadoras financieras y el programa Excel se puede llegar a la respuesta correcta, sin necesidad de acudir a la interpolación lineal.

Procedimiento de estimación de la tasa de interés[1]

Al tener que aplicar el procedimiento de interpolación lineal, surge la inquietud acerca de la tasa de interés que se debe tomar como punto de partida para hacer una primera estimación de la tasa de interés que hace la función igual a cero.

---

[1] Tomado de Meza (2012).

Se recomienda el siguiente procedimiento:

1. Se construye el flujo de caja de la operación financiera en el que aparecen los diferentes egresos e ingresos en sus respectivas fechas.

2. El flujo de caja inicial se convierte en un flujo que únicamente tenga un solo egreso y un solo ingreso. Para lograr esto, se suman todos los ingresos y egresos, desconociendo el valor del dinero en el tiempo.

3. Construido el nuevo flujo de caja, por solución directa, se aplica la ecuación básica $F = P(1 + i)^n$ para calcular la tasa de interés (i), conocidos el presente de los egresos (P), el futuro de los ingresos o valor futuro terminal (F) y el número de periodo (n).

El valor de la tasa de interés obtenida con este procedimiento será menor a la que se debe utilizar para los tanteos en la ecuación de valor original. La razón es que, al desconocerse el valor del dinero en el tiempo, el valor futuro terminal (suma de ingresos o egresos de diferentes fechas) es menor al valor futuro terminal real, o sea, este resultaría de trasladar los ingresos aplicando una tasa de interés.

Con Excel hoy, este procedimiento de interpolación o de "regla de cinco" se minimiza o lleva a su mínima expresión, ya que la hoja de cálculo electrónica hace ese proceso en segundos con la función TASA.

3.8. Situaciones a resolver

a. Si una persona espera recibir $ 500 000 dentro de un año, $ 750 000 dentro de dos años y $ 900 000 dentro de dos años y medio, ¿a cuánto equivaldrían esas sumas el día de hoy, si la tasa de interés es del 12 % capitalizado anualmente?

b. El señor Castillo necesita disponer de $ 4 000 000 dentro de seis meses para el pago de la matrícula de su hijo. Si el banco le ofrece el 5 % mensual, ¿cuánto deberá depositar hoy para lograr su objetivo? Si la variable a calcular fuera n, ¿cuál sería la solución?

c. En cuánto tiempo se duplica un capital en una corporación que reconoce el 2,5 % mensual?

d. ¿Cuánto debe depositarse mensualmente en una corporación que reconoce el 6 % mensual, para poder disponer de $ 250 000 dentro de 8 meses?

e. Usted le debe hoy a un amigo \$ 10 000 000, que paga al 2,5 % mensual y, al mismo tiempo, a usted le deben \$ 8000 000, prestados al 3 % mensual. ¿En qué tiempo logrará tener el dinero suficiente para pagarle a su amigo?

f. Su padre, de cara al pago de su próximo semestre, invierte \$ 3 000 000, durante 3 meses en un CDT, que paga una tasa del 4 % mensual, ¿cuánto pagará la entidad financiera al vencimiento del título? Presentar el desarrollo paso a paso (esto es valor futuro mes a mes, "cámara lenta" hasta el final) y también aplicando directamente la fórmula general, ¿llega a la misma respuesta o a valores diferentes?

g. Su madre, de cara al pago de su próximo semestre, deposita en una cuenta de ahorros \$ 3 000 000, durante 4 meses, que se proyecta pague las siguientes tasas de interés mensual: del 1 %, 1,1 %, 0,9 % y 0,95 %, respectivamente, ¿cuánto acumulará en la cuenta al final del cuarto mes? Presentar el desarrollo en Excel paso a paso (esto es valor futuro mes a mes, "cámara lenta" hasta el final) y también usando la función VF.PLAN, ¿llega a la misma respuesta o a valores diferentes?

h. El valor de la gasolina corriente ha venido aumentando en los últimos tres meses así: 3 %, 2,5 % y 4 % por mes. Si hace tres meses el galón de gasolina corriente ascendía a \$ 8500, ¿hoy cuánto vale un galón de ese tipo de gasolina?

i. Sus padres necesitan pagar su semestre en enero del 2019, el cual estiman ascenderá a \$ 5 000 000. Si el Banco XYZ hoy les reconoce en un CDT a 4 meses con una tasa del 5 % mensual, ¿cuánto deben depositar hoy para lograr la meta? Después de obtener el resultado comience a jugar con las variables del problema y haga en una primera iteración que i % sea la incógnita, y en una segunda corrida que el plazo sea la variable a encontrar o hallar, conocidos los otros datos.

j. Problema de financiación: un celular de gama alta tiene un valor de contado de \$ 3 000 000 de pesos y se puede financiar con cuatro pagos iguales en los meses 3, 6, 9 y 12. Hallar el valor de esos pagos, si la tasa de interés que se cobra es del 1,5 % mensual. Resuelva de dos maneras, la primera usando como fecha focal hoy o en el momento cero y la segunda usando como fecha focal el mes 12. ¿Qué respuesta obtiene en ambos casos?

k. Problema de inversión: ¿cuánto deben depositar sus padres hoy en una cuenta de ahorros que paga un interés del 0,4 % mensual, para poder retirar \$ 500 000 en el mes 6, \$ 300 000 en el mes 9 y aún se tenga un saldo que ascienda a la mitad de los depositado en el mes 12?

3.9 Solución de situaciones propuestas

1. **Solución manual**

Primer ejercicio

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{\$500.000}{(1+12\%)^1}$$

$$P = \$446.429$$

Segundo ejercicio

$$P = \frac{\$750.000}{(1+12\%)^2}$$

$$P = \$597.895$$

Tercer ejercicio

$$P = \frac{\$750.000}{(1+12\%)^{2,5}}$$

$$P = \$677.950$$

Solución en Excel – se aplica la misma fórmula para los tres montos

	A	B	C	D	E
9					
10		F =	$ 500.000		
11		n =	1	años	
12		i =	12%	anual	
13		P =	=+VA(C12;C11;0;-C10)		
14			VA(tasa; nper; pago; [vf]; [tipo])		
15		F =	$ 750.000		
16		n =	2	años	
17		i =	12%	anual	
18		P =	$ 597.895		
19					
20		F =	$ 900.000		
21		n =	2,5	años	
22		i =	12%	anual	
23		P =	$ 677.950		
24					

1. **Solución manual**

a. Parte 1

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{\$4.000.000}{(1+5\%)^6}$$

$$P = \$2.984.862$$

b. Parte 2

$$F = P * (1+i)^n$$

$$\$4.000.000 = 2.984.826 * (1+5\%)^n$$

$$\frac{\$4.000.000}{\$2.984.862} = (1{,}05)^n$$

$$Log\ 1{,}34 = n\ Log\ 1{,}05$$

$$n = \frac{Log\ 1{,}34}{Log\ 1{,}05}$$

$$n = 6\ meses$$

Solución en Excel

a. **Parte 1**

	A	B	C	D
33				
34		F =	$ 4.000.000	
35		n =	6	meses
36		i =	5%	mensual
37		P =	=+VA(C36;C35;0;-C34)	
38			VA(tasa; nper; pago; [vf]; [tipo])	

b. **Parte 2**

	A	B	C	D
38				
39		F =	$ 4.000.000	
40		i =	5%	
41		P =	$ 2.984.862	mensual
42		n =	=+NPER(C40;0;-C41;C39)	
43				

2. **Solución manual**

$$F = P * 1 + i)^n$$

$$\$2.000.000 = \$1.000.000 * (1 + 2{,}5\%)^n$$

$$\frac{\$2.000.000}{\$1.000.000} = (1{,}025)^n$$

$$Log\ 2 = n\ Log\ 1{,}025$$

$$n = \frac{Log\ 2}{Log\ 1{,}025}$$

$$n = 28{,}071 \approx 28\ meses$$

Solución en Excel

	A	B	C	D
52				
53		P =	$ 1.000.000	
54		i =	2,5%	
55		F =	$ 2.000.000	
56		n =	=+NPER(C54;0;-C53;C55)	
57			NPER(tasa; pago; va; [vf]; [tipo])	

3. **Solución manual**

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{\$250.000}{(1+6\ \%)^8}$$

$$P = \$156.853$$

Solución en Excel

	A	B	C	D
66				
67		F =	$ 250.000	
68		n =	8	meses
69		i =	6%	mesual
70		P =	=+VA(C69;C68;0;-C67)	
71			VA(tasa; nper; pago; [vf]; [tipo])	

4. **Solución manual**

$$F = P * (1 + i)^n$$

$$\$10.000.000 = \$8.000.000 * (1 + 3\%)^n$$

$$\frac{\$10.000.000}{\$8.000.000} = (1{,}03)^n$$

$$Log\ 1{,}25 = n\ Log\ 1{,}03$$

$$n = \frac{Log\ 1{,}25}{Log\ 1{,}03}$$

$$n = 7{,}549 \approx 8\ meses$$

Solución en Excel

	A	B	C	D
79				
80		P =	$ 8.000.000	
81		i =	3,0%	
82		F =	$ 10.000.000	
83		n =	=+NPER(C81;0;-C80;C82)	
84				

5. **Solución manual**

a. **Aplicando fórmula general**

$$F = P * (1 + i)^n$$

$$F = \$3.000.000 = * (1 + 4\%)^3$$

$$F = \$3.374.592$$

b. **Cámara lenta**

Mes 1

$$F_1 = \$3.000.000 * (1 + 4\%)^1$$

$$F = \$3.120.000$$

Mes 2

$$F_2 = \$3.120.000 * (1 + 4\%)^1$$

$$F = \$3.244.800$$

Mes 3

$$F_3 = \$3.244.800 * (1 + 4\%)^1$$

$$F = \$3.374.592$$

Solución en Excel

a. Fórmula general

	A	B	C	D
93				
94		Fórmula general		
95		P =	$ 3.000.000	
96		n =	3	
97		i =	4%	
98		F =	=+VF(C97;C96;0;-C95)	
99			VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])	

b. Cámara lenta

	A	B	C	D	E	F
100		Cámara Lenta				
101						
102		Mes 1			Mes 2	
103						
104		P =	$ 3.000.000		P =	$ 3.120.000
105		n =	1		n =	1
106		i =	4%		i =	4%
107		F =	=+VF(C106;C105;0;-C104)			$ 3.244.800
108			VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])			
109		Mes 3				
110						
111		P =	$ 3.244.800			
112		n =	1			
113		i =	4%			
114		F =	$ 3.374.592			
115						

	A	B	C	D	E	F
99						
100		Cámara Lenta				
101						
102		Mes 1			Mes 2	
103						
104		P =	$ 3.000.000		P =	=+C107
105		n =	1		n =	1
106		i =	4%		i =	4%
107		F =	$ 3.120.000		F =	$ 3.244.800
108						
109		Mes 3				
110						
111		P =	$ 3.244.800			
112		n =	1			
113		i =	4%			
114		F =	$ 3.374.592			
115						

	A	B	C	D	E	F	G
99							
100		Cámara Lenta					
101							
102		Mes 1			Mes 2		
103							
104		P =	$ 3.000.000		P =	$ 3.120.000	
105		n =	1		n =	1	
106		i =	4%		i =	4%	
107		F =	$ 3.120.000		F =	=+VF(F106;F105;0;-F104)	
108						VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])	

6. **Solución manual**

a. **Fórmula general**

$$F = P*(1+i_1)*(1+i_2)*(1+i_3)*(1+i_4)$$

$$F = \$3.000.000 * (1+1\%_1)*(1+1.1\%_2)*(1+0.9\%_3)*(1+0,95\%_4)$$

$$F = \$3.120.264$$

b. Cámara lenta

Mes 1

$$F = P*(1+i)^n$$

$$F = \$3.000.000 * (1+1\%)^1$$

$$F = \$3.030.000$$

Mes 2

$$F_1 = \$3.030.000 * (1+1,1\%)^1$$

$$F = \$3.063.330$$

Mes 3

$$F_2 = \$3.063.330 * (1+0,9\%)^1$$

$$F = \$3.090.900$$

Mes 4

$$F_3 = \$3.090.900 * (1+0,95\%)^1$$

$$F = \$3.120.264$$

Solución en Excel

a. **Fórmula general**

	A	B	C	D	E	F
124						
125					Tasas	
126		P =	$ 3.000.000		i-m1	1%
127		F =	=+VF.PLAN(C126;F126:F129)			1,10%
128			VF.PLAN(principal; programación)			0,90%
129					i-m3	0,95%
130						

b. **Cámara lenta**

	A	B	C	D	E	F
130						
131		Cámara Lenta				
132						
133		Mes 1			Mes 2	
134						
135		P =	$ 3.000.000		P =	$ 3.030.000
136		n =	1		n =	1
137		i =	1%		i =	1,1%
138		F =	=+VF(C137;C136;0;-C135)			$ 3.063.330
139			VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])			
140		Mes 3			Mes 4	
141						
142		P =	$ 3.063.330		P =	$ 3.090.900
143		n =	1		n =	1
144		i =	0,9%		i =	0,95%
145		F =	$ 3.090.900		F =	$ 3.120.264
146						

	A	B	C	D	E	F
130						
131		Cámara Lenta				
132						
133		Mes 1			Mes 2	
134						
135		P =	$ 3.000.000		P =	=+C138
136		n =	1		n =	1
137		i =	1%		i =	1,1%
138		F =	$ 3.030.000		F =	$ 3.063.330
139						

	A	B	C	D	E	F	G
130							
131		Cámara Lenta					
132							
133		Mes 1			Mes 2		
134							
135		P =	$ 3.000.000		P =	$ 3.030.000	
136		n =	1		n =	1	
137		i =	1%		i =	1,1%	
138		F =	$ 3.030.000		F =	=+VF(F137;F136;0;-F135)	
139						VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])	

7. **Solución manual**

$$F = P * (1+i)^n$$

$$F = \$8.500 * (1+4\%)^1$$

$$F = \$8.840$$

Solución en Excel

	A	B	C	D	E
154					
155		P =	$ 8.500		
156		n =	1		
157		i =	4,00%		
158		F =	=+VF(C157;C156;0;-C155)		
159			VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])		

8. **Solución manual**

Caso 1

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{\$5.000.000}{(1+5\%)^4}$$

$$P = \$4.113.512$$

Caso 2

$$F = P * (1+i)^n$$

$$\$5.000.000 = \$4.113.512 * (1+i)^4$$

$$\frac{\$5.000.000}{4.113.512} = (1+i)^4$$

$$1{,}216^{\frac{1}{4}} = (1+i)^{\frac{4}{4}}$$

$$1{,}05 = 1+i$$

$$1{,}05 - 1 = i$$

$$i = 0{,}05 * 100 = 5\% \; mensual$$

Caso 3

$$F = P * (1+i)^n$$

$$\$5.000.000 = \$4.113.512 * (1+5\%)^n$$

$$\frac{\$5.000.000}{4.113.512} = (1{,}05)^n$$

$$Log\ 1{,}216 = n\ Log\ 1{,}05$$

$$n = \frac{Log\ 1{,}216}{Log\ 1{,}05}$$

$$n = 4\ meses$$

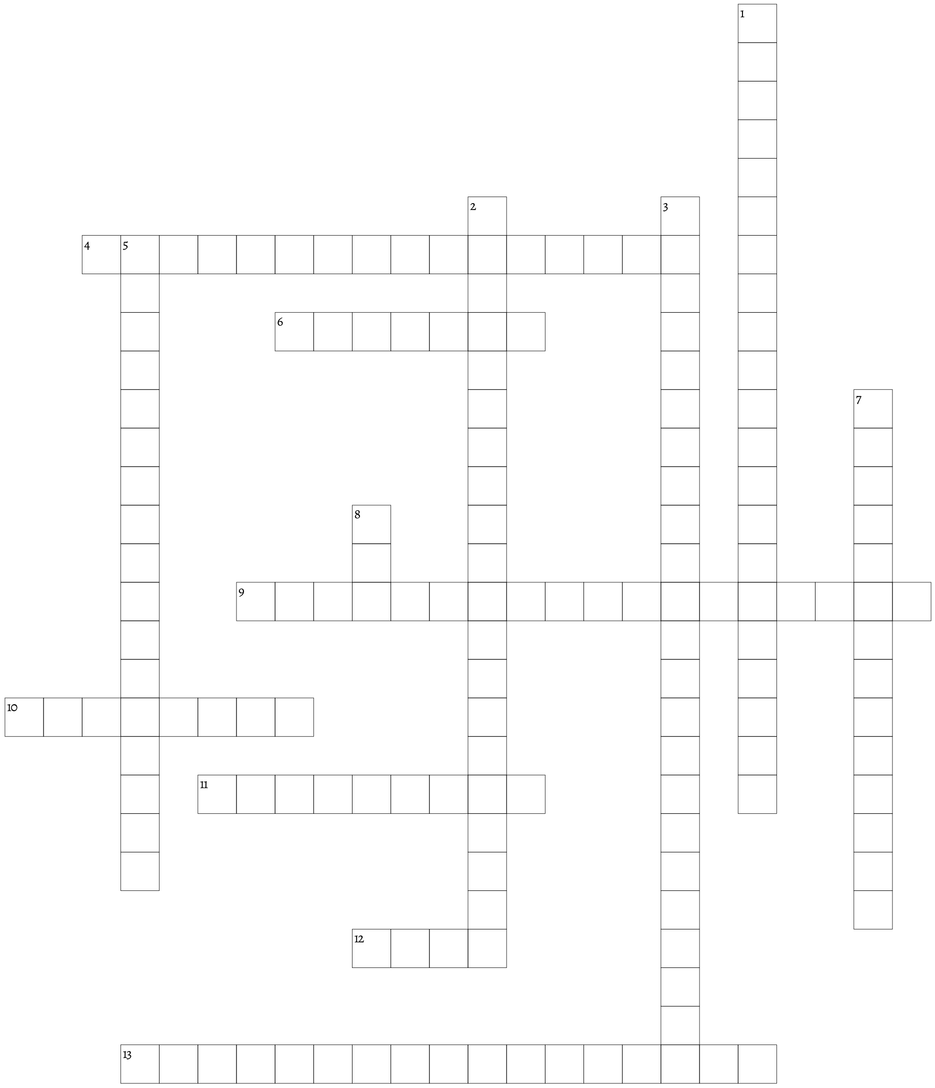
Solución en Excel

	A	B	C	D	E
167					
168			Caso 1		
169		F =	$ 5.000.000		
170		n =	4	meses	
171		i =	5%	mesual	
172		P =	=+VA(C171;C170;0;-C169)		
173			VA(tasa; nper; pago; [vf]; [tipo])		

	A	B	C	D	E
173					
174			Caso 2		
175		P =	$ 4.113.512		
176		F =	$ 5.000.000		
177		n =	4	meses	
178		i =	=+TASA(C177;0;-C175;C176)		
179			TASA(nper; pago; va; [vf]; [tipo]; [estimar])		

	A	B	C	D	E
178		i =	5%	mensual	
179					
180			Caso 3		
181		P =	$ 4.113.512		
182		F =	$ 5.000.000		
183		i =	5%	mesual	
184		n =	=+NPER(C183;0;-C181;C182)		
185			NPER(tasa; pago; va; [vf]; [tipo])		

¡BIENVENIDO AL DESAFÍO DE PALABRAS! Nº 3



Horizontal

4. Fecha en la cual un conjunto de deudas con fechas de vencimiento diferentes, puede ser pagado mediante un valor único equivalente a la suma de las distintas deudas
6. Tasa que se pacta en una operación financiera
9. Otro nombre para el principio de equidad financiera
10. Tasa que realmente se paga en una operación financiera
11. Interés en el que los intereses se van capitalizando período a período
12. Otro nombre para anualidad
13. Tiempo que debe transcurrir desde el momento actual hasta la fecha equivalente

Vertical

1. Aquel que considera que todos los fondos que libera un proyecto o préstamo (intereses) son reinvertidos a la misma tasa de interés
2. Tasa de interés que brinda un proyecto de inversión
3. Periodo pactado para convertir el interés en capital
5. Principio que consiste en establecer una igualdad entre los egresos y los ingresos que intervienen en cualquier operación financiera
7. Proceso mediante el cual los intereses que se van causando se suman al capital anterior
8. Costo de una operación financiera o comercial, que viene determinado por la tasa de interés que se cobra sobre la porción de capital al principio de cada periodo se adeuda

Capítulo 4

TASAS DE INTERÉS

4.1. Objetivos del capítulo

General

- Conocer las distintas tasas de interés financieras que se manejan dentro del ámbito económico y financiero, los mecanismos de conversión y su aplicación a situaciones contextualizadas

Específicos

- Definir la tasa de interés y los conceptos afines.
- Describir cada uno de los tipos de tasas de interés.
- Conocer la diferencia entre los tipos de tasas de acuerdo con sus características.
- Identificar las distintas fórmulas para conversión de tasas (cambios de periodicidad, capitalización de intereses y forma de pago o liquidación de estos).
- Definir tasas equivalentes.
- Resolver ejercicios de aplicación para evaluar alternativas de inversión y financiación basadas en tasas de interés.
- Conocer tasas de interés especiales de aplicación en el entorno económico local, nacional y global.

4.2. Introducción

El dinero es una mercancía que tiene un precio y, como tal, su valor lo fija el mercado como resultado de la interacción de la oferta y la demanda. Dado que el interés es la manifestación o evidencia del valor del dinero en el tiempo y la tasa de interés es la medición porcentual de ese interés, su nivel debe ser la preocupación diaria de cualquier persona o empresa, porque mide tanto el rendimiento como el costo del dinero.

4.3. Definición de tasa de interés

La tasa de interés es la expresión porcentual de los intereses, los cuales son, a su vez, el costo del dinero y la evidencia del valor del dinero en el tiempo.

La relación entre tasa de interés nominal y tasa de interés efectiva es la misma que existe entre el interés simple y el interés compuesto. Así, la tasa nominal es al interés simple como la tasa efectiva es al interés compuesto.

Dentro de las tasas de interés que existen encontramos las *tasas nominales* y las *tasas efectivas*. A continuación, se detallarán las características de cada una de ellas.

4.4. Tasa de interés nominal

Es una tasa de referencia y su valor es aparente, ya que no refleja el costo real de la transacción. Es la más utilizada a nivel financiero.

Utiliza una base seguida del periodo real de aplicación o composición. A nivel del sistema financiero, *expresa la tasa anual y parte de ella se cobra en cada periodo.* Una tasa nominal está compuesta por:

1. Valor en base anual de la tasa.
2. Periodicidad o frecuencia de capitalización de los intereses (semestral, trimestral, mensual, entre otras).
3. Forma o modalidad en que se pagan los intereses. A comienzo o inicio de periodo: modalidad anticipada, y a final de periodo: modalidad vencida.

Hay diversas formas de expresar las tasas de interés nominales, Sin embargo, no son tan utilizadas debido a la extensión de su nombre. Por ejemplo, para una tasa de interés del 25 % mensual vencido (MV) se tienen diferentes nomenclaturas.

Ejemplo (4.1)

25 % nominal anual con capitalización mensual vencida.

25 % anual capitalizable mensualmente.

25 % capitalizable mensualmente.

25 % mes vencido.

25 % MV

Todas estas son maneras de nombrar una misma tasa. Cualquiera de estas expresiones significa lo mismo. Por efectos de practicidad, se trabajará en el resto del texto con la última nomenclatura.

Ejemplo (4.2)

24 % semestral anticipado (SA).

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, esta tasa nominal tiene un valor anual del 24 %, su periodicidad o frecuencia de liquidación de los intereses es *semestral* y la forma en que se pagan estos es *anticipada*.

Recuerde: para identificar una *tasa de interés nominal*, resulta útil observar su nomenclatura. En notación abreviada, que es la más utilizada, primero encontrará el valor anual de la tasa seguido por dos iniciales. La primera inicial corresponde a la periodicidad o frecuencia de pago de intereses (*M* de mensual, *T* de trimestral, *S* de semestral, entre otras) y la segunda a la modalidad en que se pagan los intereses (*A* de anticipado o *V* de vencido).

4.4.1. Cálculo de tasas de interés nominales

Las tasas de interés nominales se pueden hallar partiendo de una tasa efectiva de periodo y del número de capitalizaciones en el año.

El concepto de tasa efectiva no se explicará a fondo en esta sección del capítulo. Por ahora, se asumirá que esta tasa está dada. En cuanto a las capitalizaciones, estas son el número de veces que se paga la tasa en un año. Por ejemplo, si se tiene una tasa nominal del 35 % SV el número de capitalizaciones al año es 2.

Recuerde: para conocer el valor del número de capitalizaciones en el año, se responde la pregunta cuántas veces está contenida la periodicidad de la tasa nominal en un año. Ej.: una tasa trimestral está contenida 4 veces en un año.

Para efectos de cálculos matemáticos, la fórmula que se utilizará es:

$$J = ip\;x\;m \qquad (4.1)$$

Donde:

J = Tasa nominal

ip = Tasa efectiva de periodo

m = Número de capitalizaciones de la tasa efectiva de periodo que hay en un año

Con esta fórmula se puede calcular una tasa de interés nominal a partir de una tasa de interés periódica, simplemente multiplicando esta última por el número de periodos que haya en el lapso que se ha estipulado para la tasa nominal.

Ejemplo (4.3)

Si la tasa nominal es del 30 % MV, ¿cuál es la tasa periódica asociada a ella?

$J = ip\;x\;m \rightarrow 0{,}3 = ip\;x\;12$ Despejando el valor de *ip*, se tiene:

$ip = \frac{0{,}3}{12} \rightarrow 0{,}025$

Ejemplo (4.4)

Si la tasa mensual es del 1 %, ¿cuál es la tasa nominal resultante o asociada a esa tasa de periodo?

La tasa nominal será del 12 % MV que resulta de multiplicar 1 x 12 meses. Haciendo la operación inversa, la tasa periódica se puede hallar a partir de la nominal, dividiéndola en el número de periodos. Así, una tasa del 24 % MV da origen a una tasa del 2 % mensual.

4.5. Tasas de interés efectivas y su cálculo

Es la tasa que se utiliza para determinar el interés periódico que efectivamente debe sumarse al capital en el momento de la liquidación o capitalización. *Es la tasa real para un periodo y resulta de capitalizar la tasa nominal*.

En síntesis, la *tasa nominal* es la que se pacta, mientras que la *tasa efectiva* es la que se paga.

Cuando se habla de interés efectivo se involucra el concepto de interés compuesto, porque refleja la reinversión de intereses.

La tasa efectiva es la que aporta claridad a los usuarios del sistema financiero en Colombia (ahorradores o inversionistas y usuarios de créditos); por tanto, ya se ha legislado al respecto, obligando a las entidades a indicar claramente las tasas efectivas anuales asociadas o equivalentes a las tasas nominales pactadas.

Cuando en una operación financiera la tasa de interés se exprese en forma nominal, hay que *reexpresarla* inmediatamente en términos efectivos por medio de la formula $ip = J/m$.

Comentarios adicionales

1. Cuando el periodo de capitalización no está dado, la tasa de interés es *efectiva*, con un periodo de tiempo igual al anunciado. Ejemplo: 12 % anual (12 % anual efectiva, compuesta anualmente); 1 % mensual (1 % mensual efectivo, compuesto mensualmente).

2. Cuando el periodo de capitalización está dado sin expresar cuál es la tasa efectiva o nominal, esta se asume como *nominal*. El periodo de capitalización es el expresado. Ejemplo: 8 % anual, compuesto mensualmente (8 % nominal anual, compuesto mensualmente).
3. Si la tasa de interés está expresada como efectiva, esta tasa es *efectiva*; si el periodo de capitalización no está dado este se asume coincidente con el tiempo expresado. Ejemplo: 6 % trimestral efectiva (6 % efectiva trimestral, compuesta trimestralmente).

En la tabla 4.1 se muestran distintas formas de enunciar tasas con su correspondiente tipo de interés y periodo de capitalización.

Tabla 4.1. Ejemplos de nomenclatura tasa de interés

Enunciado del interés	**Tipo de interés**	**Periodo de capitalización**
15 % anual compuesto mensualmente	Nominal	Mensual
15 % anual	Efectivo	Anual
15 % efectiva anual compuesta mensualmente	Efectivo	Mensual
20 % anual compuesto trimestralmente	Nominal	Trimestral
2 % mensual	Efectivo	Mensual

Fuente: elaboración propia.

Como se puede apreciar, existen distintas maneras de expresar tasas de interés, ya sean nominales o efectivas.

4.6. Relación de equivalencia entre tasas efectivas y nominales

Antes de abordar las relaciones entre tasas nominales y efectivas, se verá qué son las tasas equivalentes.

Tasas equivalentes: son aquellas que, aunque teniendo diferentes periodos de convertibilidad, y aplicadas sobre un mismo monto y un mismo lapso de tiempo, producen el mismo resultado al final de un periodo.

Para establecer las fórmulas que permiten establecer la equivalencia, se plantea el siguiente ejercicio:

Si se depositan hoy $1 000 000 a una tasa del 3 % mensual, ¿cuál es la cantidad futura a recibir dentro de un horizonte de un año?

Respuesta: aplicando la ecuación general, se obtiene: $F = 1\,425\,760{,}88$

Ahora, si se desea conocer cuál es el *rendimiento* efectivo anual que otorgó el banco a ese depósito, expresado en términos porcentuales (tasa), ¿qué se debe hacer?

Respuesta: aplicar nuevamente la ecuación general. Si se tiene el valor presente, el valor futuro y el número de periodos ($n = 1$ año), se obtiene $i = 42{,}5761\,\%$ anual.

Como se puede observar, hay una relación estrecha entre la tasa de interés de periodo *ip* y la tasa efectiva anual *E*, que puede denotarse con la siguiente expresión:

$F_1 = P(1 + ip)^n$

$F_2 = P(1 + E)^n$

Donde $n = 1$, pues el periodo es anual.

$F_1 = F_2 \rightarrow P(1 + ip)^n = P(1 + E)^1$

Cancelando las *P* y despejando *ip* y *E*, se obtienen las siguientes formulas:

$$E = (1 + ip)^n - 1 \tag{4.2}$$

Para convertir de tasas efectivas de periodo *menor* a efectivas de periodo *mayor.*

$$ip = (1 + E)^{1/n} - 1 \tag{4.3}$$

Para convertir de tasas efectivas de periodo *mayor* a efectivas de periodo *menor.*

Donde *n* es el número de veces que el periodo de composición o capitalización cabe en el periodo de referencia de la tasa efectiva a calcular. También se puede definir como el número de veces que se liquida la tasa periódica en el periodo expresado en la tasa efectiva a calcular.

Si se sabe que la tasa de interés de periodo es igual a *J/m*, las anteriores ecuaciones quedarían re-expresadas en función de la tasa nominal, así:

$$E = \left(1 + \left(\frac{J}{m}\right)\right)^n - 1 \tag{4.4}$$

Con esta fórmula se convierte una tasa nominal en efectiva anual.

$$J = m(1+E)^{1/n} - 1 \tag{4.5}$$

Donde:

E = Tasa efectiva a calcular

J = Tasa nominal

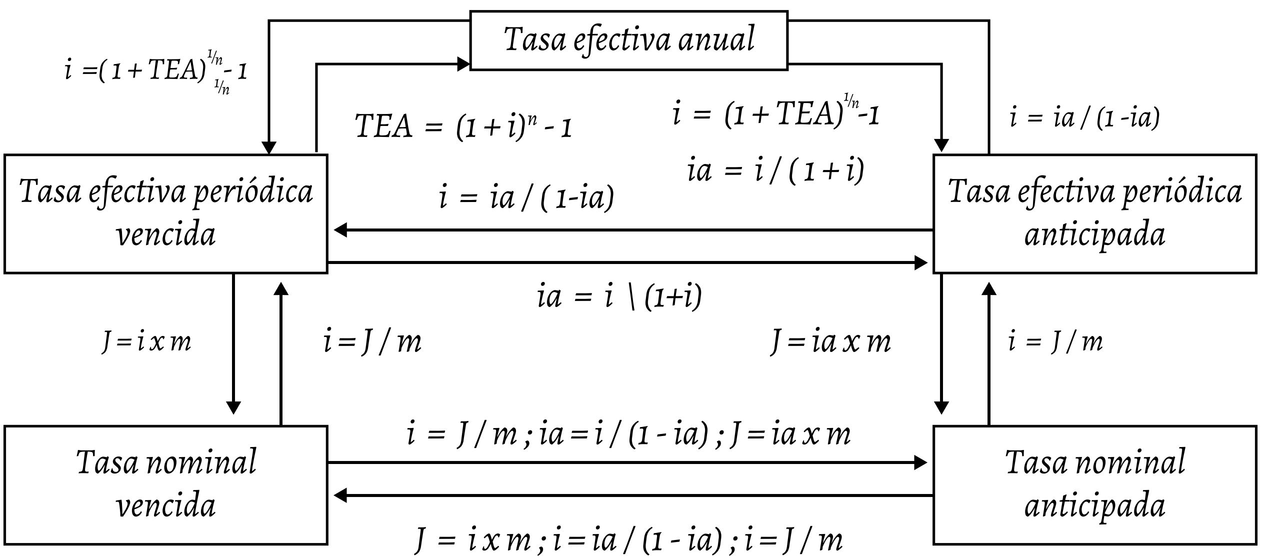
m = Número de capitalizaciones en el tiempo definido por la tasa nominal o

número de periodos de capitalización que hay en un año

n = Número de veces que capitaliza la tasa obtenida de la expresión J/m, en la tasa efectiva a calcular, o el número de veces que el periodo de composición o capitalización cabe en el periodo de referencia de la tasa efectiva.

Casos de equivalencia: la figura 4.1 presenta los distintos esquemas de conversión de tasas a partir de la tasa dada, sea nominal periódica o efectiva, para convertirla a otro tipo de tasa o a otra modalidad o periodicidad de pago

Figura 4.1. Esquema de conversión de tasas de interés.



Fuente: tomado y adaptado de Meza (2012).

Mediante las fórmulas anteriormente expresadas, se pueden realizar las siguientes conversiones o equivalencias entre las distintas tasas de interés que existen:

Tabla 4.2. Casos posibles de conversión tasas de interés

Caso	Dada	Hallar
1	Efectiva	Efectiva
2	Efectiva	Nominal
3	Nominal	Efectiva
4	Nominal	Nominal

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo (4.5): equivalencia, caso 1

Hallar la tasa equivalente del 5 % trimestral a efectiva anual.

Se tiene una tasa efectiva de periodo menor y se desea hallar una de periodo mayor. Para realizar la conversión se utiliza la fórmula:

$$E = (1 + ip)^n - 1$$

Reemplazando los valores, se tiene:

$$E = (1 + 0{,}05)^4 - 1 \rightarrow E = 0{,}2155$$

Expresado en términos porcentuales es el 21,55 % efectivo anual.

4.7. Ejercicios guía resueltos

1. A partir de una tasa de interés del 34 % con capitalización mensual, calcular la tasa efectiva anual equivalente.

   $$E = (1 + ip)^n - 1 \rightarrow (1 + 0{,}02833)^{12} - 1 \rightarrow 0{,}3983$$

   Rta.: 39,83 % EA.

2. Calcular la tasa efectiva anual partiendo de una tasa del 36 % con capitalización trimestral.

   $$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0{,}36}{4} \rightarrow 0{,}09 \rightarrow 9\% \text{ trimestral}$$

   $$E = (1 + ip)^n - 1 \rightarrow (1 + 0{,}09)^4 - 1 \rightarrow 0{,}4115$$

   Rta.: 41,16 % EA.

3. Conocida la tasa nominal del 45 % con capitalización mensual, hallar:
   a. Tasa efectiva trimestral — Rta.: 11,68 %
   b. Tasa efectiva semestral — Rta.: 24,72 %
   c. Tasa efectiva mensual — Rta.: 3,75 %
   d. Tasa efectiva bimestral — Rta.: 7,64 %
   e. Tasa efectiva bimensual — Rta.: 1,86 %
   f. Tasa efectiva anual — Rta.: 55,55 %

$$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0,45}{12} \rightarrow 0,0375 \rightarrow 3,75\%\ mensual$$

$$E = (1+ip)^n - 1 \rightarrow (1+0,0375)^3 - 1 \rightarrow 0,1168$$
$$\rightarrow\ 11,68\ \%\ trimestral$$

$$E = (1+ip)^n - 1 \rightarrow (1+0,0375)^6 - 1 \rightarrow 0,2472$$
$$\rightarrow\ 24,72\ \%\ semestral$$

$$E = (1+ip)^n - 1 \rightarrow (1+0,0375)^2 - 1 \rightarrow 0,0764$$
$$\rightarrow\ 7,64\ \%\ bimestral$$

$$E = (1+ip)^n - 1 \quad (1+0,0375)^{1/n} - 1 \quad 0,0186$$
$$\rightarrow\ 1,86\ \%\ bimensual$$

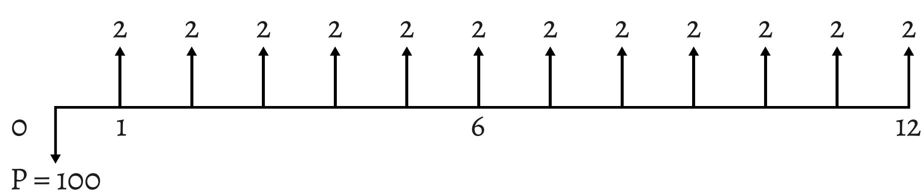
$$E = (1+ip)^n - 1 \rightarrow (1+0,0375)^{12} - 1 \rightarrow 0,5555\%\ EA.$$

4.8. Formas o modalidad de aplicación del interés y su efecto en las tasas

Interés vencido: los intereses se causan o liquidan al final del periodo. Ver Fig. 4.2

Ejemplo (4.6): 24 % MV.

Figura 4.2. Diagrama de flujo de caja – DFC ejemplo 4.6 modalidad vencida.

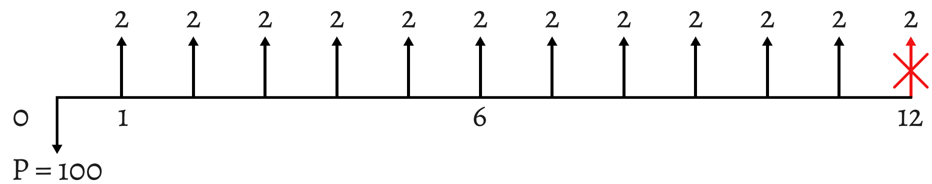


Fuente: elaboración propia.

Interés anticipado: el interés se liquida anticipadamente y las capitalizaciones se hacen de la misma forma. Esta circunstancia implica una tasa efectiva mayor, puesto que el proceso de capitalización se inicia inmediatamente. Ver Fig. 4.3

Ejemplo (4.7): 24 % MA.

Figura 4.3. Diagrama de flujo de caja – DFC ejemplo 4.7 modalidad anticipada.



Fuente: elaboración propia.

Tasa de interés anticipada

Bajo este esquema primero se cobran los intereses y luego se permite usar el dinero, lo que en realidad significa que se presta una cantidad menor, y esto se traduce en un mayor costo del crédito.

Es otra forma engañosa de presentar las tasas de interés y, por ello, mensualmente la Superbancaria emite la circular fijando el techo o tasa de usura, de tal forma que, al establecerse las equivalencias entre las tasas vencidas y las anticipadas, con base en una tasa efectiva anual, estas no superen ese techo.

Como las fórmulas de VDT hasta ahora vistas trabajan con intereses liquidados al final del periodo, es *necesario* transformar los intereses anticipados a vencidos.

Representación gráfica

24 % MA.

Para esta tasa nominal anticipada, se tiene una tasa efectiva de periodo equivalente de

$$ia = \frac{0{,}24}{12} \rightarrow 0{,}02 \rightarrow 2\%$$

Como se logra apreciar gráficamente en la Fig 4.3, en las tasas de interés anticipadas, los intereses se causan o liquidan al principio del periodo. La tasa de interés es mensual, lo cual implica que se liquida o cobra 12 veces en un año. Debido a que esta tasa es anticipada, el último periodo del año cuando se liquidará o causará esta tasa es el mes 11, ya que, si se suman todos los periodos en los que estos intereses se han aplicado, se tiene un total de 12.

Importante: cuando la tasa de interés es anticipada, no se debe confundir el número de periodos totales con las fechas de liquidación de los intereses.

Conversión de una tasa de interés anticipada en vencida

Por tanto, si, hoy me prestan \$ P, al interés periódico por adelantado ia, hoy debo pagar P x ia como intereses y el dinero efectivo que recibo es $(P - P \times ia)$; al final del periodo tengo que devolver los \$ P. Para que las cantidades ubicadas en los periodos cero y uno sean equivalentes con i % vencido, tiene que cumplirse que:

$F = P(1+i)^n$, donde $n = 1$

Reemplazando, se tiene que $P = P(1+ia)(1+i)$, se cancelan las P y despejando i se tiene que:

$$i = \frac{ia}{(1 - ia)} \qquad (4.6)$$

De esta relación, si se despeja ia se puede convertir una tasa vencida en anticipada.

De allí se puede obtener ia si se conoce i vencida; despejando se obtiene:

$$i = \frac{ia}{(1 - ia)} \qquad (4.7)$$

Fórmula para obtener una tasa efectiva anual equivalente a una tasa nominal cuando las capitalizaciones son anticipadas

Si se tiene que:

Ecuación (4.8) $ai = \dfrac{Ja}{m}$ Convierte tasas nominales en tasas periódicas anticipadas (ia)

Ecuación (4.7) $ia = \dfrac{i}{(1+i)}$ convierte la tasa periódica anticipada en tasa efectiva de periodo

Ecuación (4.2) $ia = \dfrac{i}{(1+i)}$ convierte la tasa periódica vencida en tasa efectiva anual

Se reemplaza (4.7) en (4.2) se obtiene

$$E = (1 - ia)^{-n} - 1 \tag{4.9}$$

Fórmulas para obtener una tasa nominal equivalente a una tasa efectiva anual cuando las capitalizaciones son anticipadas

De la ecuación (4.9) se despeja *ia* y se obtiene:

$ia = (1 + E)^{-1/n} - 1$

Pero de ecuación 4.8 se tiene que $Ja = ia \times m$

Entonces se obtiene que:

$Ja = m\,[(1 + E)^{-1/n} - 1]$

4.9. Situaciones a resolver

A partir de una tasa nominal del 34 % trimestre anticipado, calcular:

a.	Tasa nominal trimestre vencido.	Rta.: 37,16 % TV.
b.	Tasa nominal mes vencido	Rta.: 36,06 % MV.
c.	Tasa nominal mes anticipado	Rta.: 35,01 % MA.
d.	Tasa efectiva trimestral	Rta.: 9,29 % trimestral.

Resolver con las fórmulas mencionadas anteriormente en este capítulo o usar calculadoras financieras como la Hewlett Packard, siguiendo las instrucciones de abajo.

Calculadora HP 17B II + o HP 19 B II
Pantalla de Bienvenida menú FIN
SubMenú CONVI (permite convertir tasas nominales a efectivas anuales y viceversa)
Submenú auxiliar EFECT (PER)
%NOM %EFECT P(m)
También puede hacer uso de la hoja de cálculo Microsof Excel, funciones INT.EFECTIVO y TASA. NOMINAL.

4.10. Tasas especiales de uso local, nacional y global

A continuación, se mencionan casos especiales de tasas de interés con aplicación en diferentes contextos de los mercados financieros locales y globales.

4.10.1. Tasas compuestas o conjugadas

Son las que resultan de la aplicación simultánea de dos o más tasas de interés, así estas operen en condiciones diferentes. También se puede definir como la tasa que resulta de reconocer sobre una unidad monetaria o contable, cuyo valor aumenta con el tiempo, una tasa de interés. Son ejemplos de tasa compuesta las operaciones indexadas a la unidad de valor real (UVR; operan en combinación la tasa remuneratoria y la inflación) y a monedas extranjeras (la tasa pagada en el exterior y la devaluación).

a. Créditos en moneda extranjera

Este tipo de operación financiera implica tener en cuenta tanto el desarrollo de la economía local como el de la economía internacional. A este tipo de crédito acceden empresas que, por sus nexos con el exterior obtienen recursos, del mercado financiero internacional para financiar sus proyectos de inversión, animados por las tasas de interés foráneas.

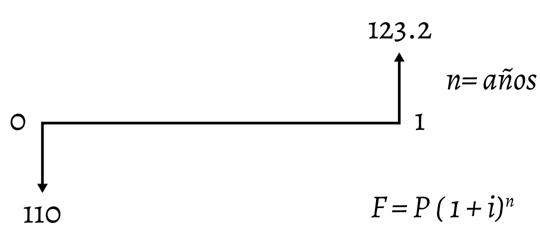
Al compararse el costo del crédito de un préstamo en el exterior con el costo de capital local, se pueden tomar decisiones en el sentido de elegir la mejor opción desde el punto de vista financiero.

Ejemplo (4.8)

Se recibe un préstamo hoy por valor de USD 110 a un interés del 12 % anual. La tasa de cambio representativa del mercado (TRM) hoy es de $ 2602,00 por dólar. Se estima que la devaluación en el año será del 5 %. Calcular el costo efectivo del crédito en pesos.

Utilizando la fórmula de valor futuro, en moneda extranjera en un año tendría que pagarse la suma de USD 123.2, ver diagrama de flujo de caja Fig. 4.4 y aplicación de formula general.

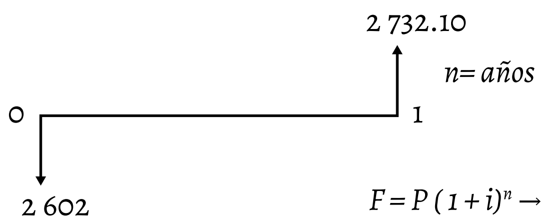
Figura 4.4. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 4.8.



$$F = P\,(1+i)^n \quad 110(1+0{,}12) \quad USD\ 123{,}2$$

Fuente: elaboración propia.

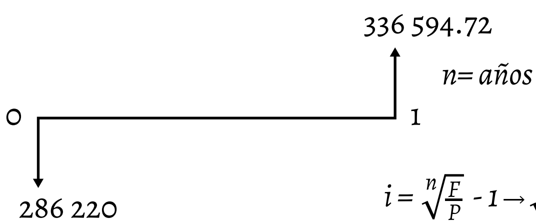
Si la TRM hoy es \$ 2602, el préstamo hoy en pesos colombianos ascendería a: \$ 286 220 (110 × 2602,00), y como la devaluación estimada en el año será del 5 %, entonces, aplicando la fórmula general nuevamente, se tiene que el valor del dólar para dentro de un año será:



$F = P\,(1+i)^n \rightarrow 2\,602(1+0.05) \rightarrow 2\,732.10$ pesos por dólar

En consecuencia, se tendría que pagar \$ 336 594,7
2 (123,2 × 2732,1).

Con estos datos se construye el diagrama en pesos (figura 4.4).



$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 \rightarrow \sqrt{\frac{336\,594.72}{286\,220}} - 1 \rightarrow 0.176 \rightarrow 17.6\,\%\ E.A$

Aplicando la formula general, se obtiene que el costo efectivo anual en pesos de ese crédito sería 17,6 % EA. Este resultado se debe comparar al momento de tomar la decisión contra las tasas que ofrece la banca nacional, ya que de esta manera se puede conocer si es realmente beneficioso el endeudarse en moneda extranjera.

Se observa que el costo efectivo del préstamo no resulta de sumar las tasas de interés corriente y de devaluación, como se cree comúnmente, que para nuestro caso sería 12 + 5 = 17 %. La tasa que resulta es una tasa compuesta o conjugada que es la actúa sobre el préstamo.

Existe una fórmula que directamente permite calcular este costo teniendo en cuenta el efecto conjunto de la tasa de interés corriente (*i*) y la tasa de devaluación (*id*):

$$TE = (i + id) + (i \times id)$$

O lo que es lo mismo, reagrupando términos:

$$TE = (1 + i)(1 + id) - 1 \qquad (4.10)$$

Realizando el mismo ejemplo por medio de las fórmulas anteriormente expuestas, se llega a la misma respuesta.

$$TE = (i + id) + (i \times id) \rightarrow (0.12 + 0.05) + (0.12 \times 0.05) \rightarrow 0.176$$
$$\rightarrow 17.6\ \%\ E.A.$$
$$TE = (1 + i)(1 + id) - 1 \rightarrow (1 + 0.12)(1 + 0.05) - 1 \rightarrow 0.176 \rightarrow 17.6\%\ E.A$$

b. Operaciones en las Corporaciones de Ahorro y Vivienda (CAV)

Se fundamentan en el nuevo sistema de liquidación de intereses para adquisición de vivienda en Colombia basada en la UVR, que es la unidad de valor real, expresada en pesos. El valor de la UVR se calcula cada mes con base en el índice de precios al consumidor (IPC) del mes inmediatamente anterior, para cada uno de los días comprendidos entre el día 16, inclusive, y el día 15, inclusive, del mes siguiente. Su fórmula es:

$$UVR^{t} = UVR_{15} \times (1 + i)^{t/d} \tag{4.11}$$

Donde:

UVR_t Valor en moneda legal de la UVR el día t del periodo de cálculo.

i Variación mensual del IPC durante el mes calendario inmediatamente anterior al mes de inicio del periodo de cálculo.

UVR_{15} Valor en moneda legal de la UVR el último día del periodo de cálculo anterior.

t Número de días calendario transcurridos desde el inicio de un periodo de cálculo hasta el día de cálculo de la UVR. Por lo tanto, t tendrá valores de entre 1 y 31, de acuerdo con el número de días calendario del respectivo periodo de cálculo.

d Número de días calendario del respectivo periodo de cálculo y tendrá valores entre 28 y 31.

Ejemplo (4.9)

Si la UVR para el día 28 de marzo del 2004 fue de \$106,4656 y la inflación del mes de febrero fue del 2,30 % mensual, el valor de la UVR para el día 29 de marzo del 2004 fue de:

$$UVR_{29} = UVR_{28} \times (1 + i)^{t/d} \rightarrow UVR_{29} = 106{,}4656(1 + 0{,}023)^{1/31} (\text{marzo tiene 31 dias})$$
$$UVR_{29} = 106{,}5437$$

Otro ejemplo indexado a la UVR es cuando se deposita o se presta en una CAV (Corporación de

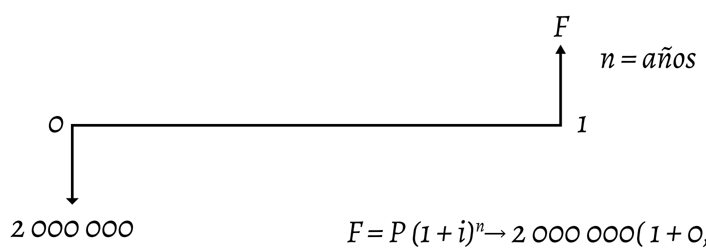
Ahorro y Vivienda) un monto de dinero en donde la tasa de referencia es la inflación más una tasa remuneratoria.

Ejemplo (4.10)

Se depositan en el día de hoy \$2 000 000 durante un año en una CAV a una tasa de UVR + 3 %. Se desea calcular el valor acumulado al final del año. Se asume una tasa de inflación del 6 % anual.

La UVR corresponde a la tasa de inflación. Según la Ley marco de vivienda, todas las operaciones deben estar referenciadas con la UVR, que a su vez está ligada a la inflación. Primero, se reajusta el valor del depósito teniendo en cuenta la inflación. Ver diagrama flujo de caja Fig. 4.5

Figura 4.5. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 4.10 parte I

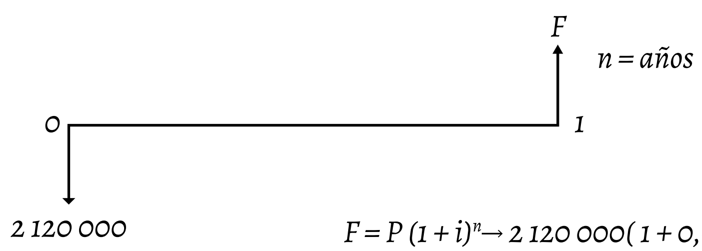


$$F = P\,(1 + i)^n \rightarrow 2\,000\,000(1 + 0{,}06) \rightarrow 2\,120\,000$$

Fuente: elaboración propia.

Luego, a ese valor reajustado se le aplica la tasa de interés remuneratoria. Ver diagrama flujo de caja Fig. 4.6.

Figura 4.6. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 4.10 parte II



$$F = P\,(1 + i)^n \rightarrow 2\,120\,000(1 + 0{,}03) \rightarrow 2\,183\,600$$

Fuente: elaboración propia.

Tasa efectiva = 9.18 por efecto de la fórmula de tasas conjugadas.

$$TE = (i + id) + (i \times id) \rightarrow (0{,}03 + 0{,}06) + (0{,}03 \times 0{,}06) \rightarrow 0{,}0918$$
$$\rightarrow 9{,}18\%\ E.A.$$

Ejemplo (4.11)

Le conceden a usted un crédito hipotecario a la UVR + 10 %. La inflación anual es del 6 %. Calcule la tasa efectiva anual y la tasa efectiva mensual conjugada.

$$TE = (i + id) + (i \times id) \rightarrow (0{,}1 + 0{,}06) + (0{,}1 \times 0{,}06) \rightarrow 0{,}116 \rightarrow 16{,}6\%\ E.A.$$

$$ip = (1 + E)^{1/n} - 1 \rightarrow (1 + 0{,}116)^{1/12} - 1 \rightarrow 0{,}01288$$

$$\rightarrow 1{,}288\%\ mensual$$

4.10.2. Tasa de referencia de mercado bancario en Colombia. Depósito a Término Fijo (DTF)

El DTF es la tasa promedio ponderado de las tasas y los montos diarios de las captaciones de los intermediarios financieros, calculada con base en los Certificados de Depósito a término (CDT) a 90 días. En síntesis, es el costo del dinero para el sistema financiero.

El CDT nació en 1982 después de la crisis de la deuda externa en América Latina que afectó a Colombia. En este año, el Banco de la República intervino y determinó la creación de un indicador periódico semanal que midiera el monto y la tasa promedio de captación de los depósitos a 90 días. Con la Resolución externa número 17 de 1993 se estableció que el cálculo del DTF pasaría de ser un promedio aritmético a ser uno ponderado de la tasa y los montos de los depósitos captados a 90 días.

Para efectos de cálculo de esta tasa, las entidades financieras reportan a la Superintendencia Bancaria, por medio de la encuesta diaria de interés de captación, las tasas y los montos captados a 90 días. Esta entidad transmite la información al Banco de la República, que toma los resultados consolidados en cada entidad y calcula un promedio ponderado de las tasas y los montos captados durante una semana.

Esta tasa ponderada tiene múltiples usos en la economía.

- Se utiliza como tasa de referencia del sistema financiero para definir sus tasas de captación a tres meses.
- Sirve para definir tasas variables de colocación de créditos.
- Se utiliza para indexar productos financieros derivados, como es el caso de los FRA (*Forward Rate Agreement* o Acuerdo Futuro de Tasa de Interés).

Varios factores influyen en ella: la demanda de recursos de inversión por parte de la economía real que incentiva a las entidades financieras a captar a plazo; la disponibilidad de liquidez con la que cuenten las entidades financieras para captar por medio de CDT; la tasa de referencia del Banco de la República (a mayor tasa de referencia, mayor DTF); la inflación; entre otros.

Ejemplo (4.12)

El banco le concede a usted un crédito a una tasa de interés igual a la DTF + 4 % TA. Si DTF = 7,8 % EA, vigente en la semana, calcule el costo del crédito expresado como tasa efectiva anual.

Las tasas pares u homologas en los mercados estadounidense e inglés son la PRIME y LIBOR, respectivamente.

4.10.3. Tasa de inflación

La inflación es un fenómeno macroeconómico en el cual existe un incremento generalizado del nivel de precios manejado en una economía, el cual provoca una reducción del poder adquisitivo debido a una disminución del valor del dinero, en relación con la cantidad de bienes y servicios que se pueden comprar con ese dinero.

Las razones para que exista la inflación son meramente monetarias (un incremento de la cantidad circulante de dinero generará incrementos en los precios de los bienes y servicios si este no se acompaña de un incremento en la producción); sin embargo, la demanda y la oferta en la economía de un país afectan de igual manera el nivel general de precios.

Este fenómeno afecta no solo a los precios, también a las tasas de interés que se manejan en una economía.

La inflación para un periodo dado se puede calcular por medio de las inflaciones de cada uno de los subperiodos que lo componen aplicando la fórmula general de tasa compuesta o conjugada, dado que la inflación, aunque no es una tasa de intereses efectiva, opera bajo interés compuesto. La fórmula para hacerlo es la siguiente:

$$INFt = (1 + INF1)(1 + INF2).....(1 + INFn) \qquad (4.12)$$

4.10.4. Rentabilidad o rendimiento neto

Algunas operaciones financieras están sujetas al pago de tributos en algunos países, algo que hace que el rendimiento de estas se vea afectado de manera negativa. Para poder conocer cuál es el rendimiento que en realidad tiene una operación se utiliza el *rendimiento neto*. Este es aquel que queda después de descontar los impuestos de la rentabilidad efectiva (Álvarez Arango, 2010). Véase el flujo de caja de la figura 4.7 para entender cómo se afecta el rendimiento de una operación cuando están presentes los impuestos.

Figura 4.7. Diagrama flujo de caja – DFC rentabilidad o rendimiento neto de una inversión, después de impuestos.

Fuente: elaboración propia.

Como muestra el flujo de caja, el valor futuro (compuesto por el valor presente más los intereses generados) de la operación se encuentra afectado por los impuestos, los cuales se cobran como una parte de los intereses generados en la operación. Debido a esto, los intereses generados no serán igual a *I*, sino que serán igual a los intereses menos los impuestos que recaigan sobre ellos. Estos intereses se conocen como intereses netos y su fórmula matemática es:

$$In = I - (I \times Timp) \tag{4.13}$$

Donde *Timp* es la tasa o tarifa impositiva o impuesto que se cobra sobre los intereses generados.

Para conocer cuál es la rentabilidad o rendimiento neto de una operación se utiliza la siguiente fórmula:

$$RN = TE(1 - Timp) \tag{4.14}$$

Donde:

TE = Tasa de interés efectiva de la operación

RN = Rendimiento neto

Timp = Tasa impositiva cobrada sobre los intereses

Ejemplo (4.13)

¿Cuál es el rendimiento neto de una operación en la cual se depositan $ 1 000 000, los cuales rinden a una tasa efectiva del 6 % semestral y cuya tasa impositiva sobre intereses semestrales es del 0,5 %?

$$RN = TE(1 - Timp) \rightarrow RN = 0{,}02(1 - 0{,}005) \rightarrow 0{,}0199 \times 100\ RN$$
$$= 1{,}99\%\ semestral$$

Como se observa, el rendimiento neto de la operación en comparación con el efectivo es menor en un 0,01 puntos porcentuales.

$$F = P(1+i)^n \rightarrow 1'000.000(1+0,0199) \rightarrow 1'019.900$$

Por lo tanto, el inversionista obtendrá, del depósito de $ 1 000 000, la suma de $ 19900.

El rendimiento neto es muy importante, ya que un negocio que en principio podría parecer muy bueno no podría serlo debido a las tasas impositivas que se cobran en algunos países. Es por esto que los impuestos que se cobran sobre las distintas operaciones financieras, bancarias, bursátiles, entre otras, son un factor clave para los inversionistas tanto nacionales como extranjeros al momento en que deciden depositar su dinero en determinada operación.

4.10.5. Tasa o rentabilidad real

Al igual que los impuestos afectan el rendimiento de una inversión o financiación, la inflación (aumento generalizado de los precios) también es partícipe del resultado final de una operación. Cuando la inflación aumenta, el dinero pierde su poder adquisitivo, debido a que ahora son precios más altos y, como los productos tienen un costo mayor, se necesitará de una mayor cantidad de dinero para comprar bienes o servicios.

Por esta razón, una persona que hace un depósito lo mínimo que podría esperar es que la tasa de interés sea igual a la tasa de inflación, ya que de esta manera su dinero no perdería valor. Cualquier rendimiento por encima de la tasa de inflación representa ganancias en el poder adquisitivo del dinero depositado. Por el contrario, cuando se hace un préstamo, el costo de este se hace más barato cuando la tasa de inflación es mayor que la tasa de interés que se cobra por este.

Es importante hacer una diferenciación entre los conceptos de tasa de interés real y tasa de interés efectiva. La *tasa de interés real* mide la capacidad de compra de un dinero futuro obtenido con una cantidad de dinero que se ahorró en el presente, mientras que la *tasa efectiva* mide la cantidad de dinero que se recibe en el futuro después de realizada una inversión inicial (Meza Orozco, 2012).

La fórmula con la cual se halla el rendimiento o tasa real en función del rendimiento neto es la siguiente:

$$RR\ (o\ TR) = \frac{RN - INF}{1 + INF} \tag{4.15}$$

Dónde:

RN = Rendimiento neto

INF = Inflación proyectada o causada

RR = Rendimiento real

Si se conoce la tasa de interés efectiva de la operación, la fórmula es la siguiente:

$$RR\ (o\ TR) = \frac{TE - INF}{1 + INF} \tag{4.16}$$

Dónde:
TE = Tasa efectiva

Ejemplo (4.14)

Un CDT conformado el día 5 de marzo del 2005 rindió a una tasa del 7,34 % trimestral. Si la inflación para el segundo trimestre de ese año fue del 1,2 %, ¿cuál fue la tasa real a la que rindió el dinero?

$$RR\ (o\ TR) = \frac{TE - INF}{1 + INF} \rightarrow \frac{0{,}0734 - 0{,}012}{1 + 0{,}012} \rightarrow 0{,}06067 \times 100 \rightarrow TR$$
$$= 6{,}0672\%\ trimestral$$

Asumiendo que los intereses generados que se graban son el 1 %, halle de nuevo el rendimiento real de la operación.

$$RN = TE(1 - Timp) \rightarrow 0{,}0734(1 - 0{,}01) \rightarrow 0{,}072666 \times 100 \rightarrow RN = 7{,}2666\%$$

Ahora que se tiene el rendimiento neto, se procede a hallar la tasa real:

$$RR\ (o\ TR) = \frac{RN - INF}{1 + INF} \rightarrow \frac{0{,}0734 - 0{,}012}{1 + 0{,}012} \rightarrow 0{,}05995 \times 100 \rightarrow TR$$
$$= 5{,}9947\%\ trimestral$$

Recuerde: cuando se hagan operaciones con distintas tasas todas deben estar expresadas de manera efectiva y en la misma periodicidad. No se pueden hacer operaciones con tasas que no estén expresadas en la misma periodicidad.

4.10.6. Tasa promedio ponderada

Actualmente, es muy común observar en los países donde el mercado bursátil tiene un alto grado de desarrollo que las personas y empresas acuden a la bolsa de valores a invertir, y cuando lo hacen no lo hacen solo en una sola opción, sino que por lo general diversifican sus inversiones con el fin de maximizar sus ganancias y reducir sus pérdidas. Cada una de las opciones tiene un rendimiento distinto. Para conocer cuál es el rendimiento que en general tiene un portafolio de inversiones, se utiliza la tasa promedio ponderada. Esta tasa tiene en cuenta la participación que tiene un monto invertido sobre el total de las inversiones y la tasa de interés de cada inversión.

Para hallar la tasa promedio ponderada se debe hallar la participación de cada monto invertido sobre el total. Este se halla de la siguiente manera:

$$Participación = \frac{\text{Monto invertido}}{\text{Inversión Total}} \tag{4.17}$$

Luego de tener la participación de cada monto invertido se multiplica este por la tasa a la cual rinde esa inversión. Después, se suman los resultados de todas las inversiones y así se obtiene la tasa de interés promedio ponderado de las inversiones. Esto se puede expresar mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Tasa promedio ponderada} = \Sigma \text{ Participación } \times \text{ Tasa de interés} \tag{4.18}$$

Ejemplo (4.15)

Eduardo tiene un portafolio conformado por las siguientes inversiones:

Delta Airlines, $ 50 000 000; Bancolombia preferencial, 10 000 000; Google, $ 25 000 000; y BBVA, 15 000 000. El rendimiento de cada una de las inversiones es respectivamente el 5 % mensual, 4,6 % mensual, 7 % mensual y 2 % mensual. Eduardo desea conocer cuál es el rendimiento promedio de su portafolio de inversiones.

En la tabla 4.3 se encuentra el resumen de las inversiones y sus respectivos rendimientos.

Tabla 4.3. Resumen de inversiones ejemplo 4.5

Inversión	Monto	Rendimiento	Participación	Participación x Rendimiento
Delta Airlines	50 000 000	5 %	0,3846	0,01923
PF Bancolombia	10 000 000	4,6 %	0,0769	0,00354
Google	25 000 000	7 %	0,1923	0,01346
BBVA	45 000 000	2 %	0,3462	0,00692
Total	130 000 000		1	**0,043154**

Fuente: elaboración propia.

La tasa promedio ponderada para el portafolio de Eduardo es del 4,3154% mensual.

4.11. Situaciones propuestas

1. Una corporación ofrece una tasa igual a la UVR + 4 %, por sus depósitos en cuentas de ahorro. ¿Cuál es el rendimiento efectivo anual? Si la tasa de inflación anual es del 10 %, ¿cuál es el interés real?
   Rta.: 4 % EA.

2. Usted tiene tres alternativas para invertir 1 000 000.
   a. Bancolombia le ofrece el 40 % TV.
   b. Granahorrar le ofrece el 36 % MV.
   c. Banco Superior le ofrece el 40 % SV
   ¿Cuál de las tres alternativas le conviene más?
   Rta.: Bancolombia.

3. El valor de la UVR el 18 de junio es de $ 104,48. Calcule el valor de la UVR, día a día, para dentro de 3 días, si la inflación del mes de mayo fue del 0,6 %.
   Rta.: 104,5425.

4. Hace ocho meses disponía de $2 000 000 y tenía las siguientes opciones de inversión:
   a. Comprar un inventario de ropa por este valor, que a precios de hoy vale $ 3 300 000.
   b. Invertirlos en una entidad que paga el 2,8 % mensual.
   Después de consultarlo decidió optar por la primea alternativa. ¿Fue acertada la decisión? (Justifique la respuesta en términos cuantitativos)
   Rta.: Sí, fue acertada la decisión.

5. Con base en los siguientes datos, halle el rendimiento neto y el rendimiento real.
   Tasa de interés efectiva: 5 % trimestral.
   Inflación mensual causada: 0,9 % mensual.
   Tasa impositiva sobre intereses mensuales: 1 %.
   Rta.:

$$RN=1{,}6236\,\%\text{ mensual}$$
$$RR=0{,}7302\,\%\text{ mensual}$$

6. Se adquirió un préstamo en dólares a un interés del 12 % anual. Si el cambio de hoy es de $ 950 por dólar y se estima que el cambio dentro de un año sea de $ 1178 por dólar, ¿cuál es el costo efectivo en pesos del préstamo?
Rta.: 38,88 % EA.

7. Si una corporación de ahorro y vivienda le ofrece por sus ahorros la UVR + 5 %, calcular la tasa efectiva mensual equivalente. Inflación = 9,0 % EA.
Rta.: 1,13 % mensual.

8. Cuál es la tasa de interés por periodo de:

- **a.** 60 % anual capitalizable mensualmente.
- **b.** 36 % capitalizable trimestralmente.
- **c.** 12 % trimestral.
- **d.** 18 % anual capital semestralmente.
- **e.** 18 % capitalizable mensualmente.

Rta.:

- a. 5 % mensual.
- b. 9 % trimestral.
- c. 12 % trimestral.
- d. 9 % semestral.
- e. 1,5 % mensual.

9. Viviana ha logrado identificar dos excelentes opciones de inversión y desea conocer cuál es la mejor. La primera se encuentra en el mercado inglés, la inversión rinde a la tasa Libor + 5 % mensual. La segunda se encuentra en el mercado norteamericano, la tasa es Prime + 4,3 % mensual. ¿Cuál de las dos opciones es la mejor para Viviana si la tasa Libor se encuentra en el 5 % mensual y la Prime en el 7 % trimestral?

10. El señor Pérez compró una casa en 1998 por $ 100 000 000, después de 5 años la vendió por $ 180 000 000. Si la inflación promedio en los 5 años fue del 20 % anual:

- **a.** ¿Cuánto ganó o perdió en el negocio en pesos corrientes?
- **b.** ¿En cuánto debió vender la casa para recuperar su dinero?
- **c.** Calcule en pesos de 1998 (pesos reales), el valor de venta de la casa.

Rta.:

- a. $ 68 832 000 es lo que perdió.

b. \$ 248 832 000 es el precio por el que debió vender la casa.

c. \$ 72 337 962,96 es el valor de venta de la casa.

4.12. Solución de las situaciones propuestas

Manuales

1. $TEA = (1 + inf()(1 + I)\ \ (1 + 0,1)(1 + 0,04))$

$$TEA = 14,4\%\ EA$$

$$RR = \frac{RN - Inf}{1 + Inf} \rightarrow \frac{0,144 - 0,1}{1 + 0,1} \rightarrow RR = 4\%\ EA$$

2. a. $i = \frac{J}{m} \rightarrow i = \frac{0,4}{4} \rightarrow 0,1 \times 100 \rightarrow i = 10\%\ trimestral$

$$TEM = (1 + i)^{1/3} - 1 \rightarrow (1 + 0,1)^{1/3} - 1 \rightarrow 0,03228 \times 100$$

$$TEM = 3,228\%\ mensual$$

b. $i = \frac{J}{m} \rightarrow i = \frac{0,36}{12} \rightarrow 0,03 \times 100 \rightarrow i = 3\%\ mensual$

c. $i = \frac{J}{m} \rightarrow i = \frac{0,4}{2} \rightarrow 0,2 \times 100 \rightarrow i = 20\%\ semestral$

$$TEM = (1 + i)^{1/6} - 1 \rightarrow (1 + 0,2)^{1/6} - 1 \rightarrow 0,03085 \times 100$$

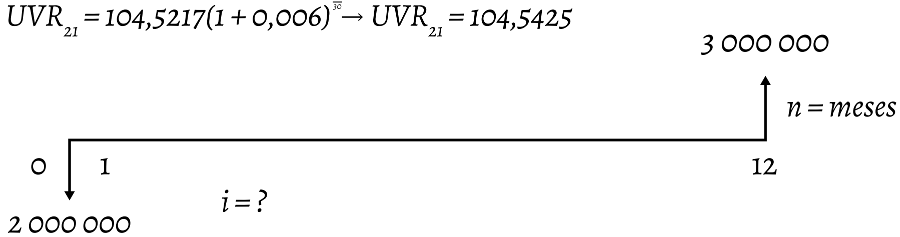
La mejor opción es la que ofrece Bancolombia (opción a), ya que la tasa es mayor.

3. $UVR_{19} = UVR_{18}\,(1 + inf)^{\frac{t}{d}} \rightarrow 104,48(1 + 0,006)^{\frac{1}{30}} \rightarrow UVR_{19} = 104,5008356$

$$UVR_{20} = 104,5008356(1 + 0,006)^{\frac{1}{30}} \rightarrow UVR_{20} = 104,5217$$

$$UVR_{21} = 104,5217(1 + 0,006)^{\frac{1}{30}} \rightarrow UVR_{21} = 104,5425$$

4.



$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 \rightarrow i = \sqrt[8]{\frac{3\,300\,000}{2\,000\,000}} - 1 \rightarrow i = 0,0645 \times 100 \rightarrow i = 6,4597$$

Fue acertada la decisión, porque la primera alternativa le representa una tasa de interés mayor a la segunda alternativa. Se obtiene así una mayor compensación por su inversión.

5. $TEM = (1 + 0{,}05)^{\frac{1}{3}} - 1 \rightarrow TEM = 0{,}01640 \times 100 \rightarrow 1{,}640\%\ mensual$

$RN = TE(1 + Timp) \rightarrow RN = 0{,}01640(1 - 0{,}01) \rightarrow RN = 0{,}016236 \times 100$

$RN = 1{,}6236\%\ mensual$

$$\mathrm{RR} = \frac{RN - INF}{1 + INF} \rightarrow \mathrm{RR} = \frac{0{,}016236 - 0{,}009}{1 - 0{,}009} \rightarrow \mathrm{RR} = 0{,}007317 \times 100$$

$RR = 0{,}7302\%\ mensual$

6. $i = \sqrt[1]{(\frac{1178}{950})} - 1 \rightarrow i = 24\%\ E.A.$

$TE = (1 + TR)(1 + inf\,()(1 + 0{,}12)(1 + 0{,}24))$

$TE = 38{,}88\ \%EA$

7. $TEA = (1 + 0{,}09)(1 + 0{,}05) - 1 = 0{,}1445 \times 100 \rightarrow TEA = 14{,}45\ \%$

$i = (1 + 0{,}1145)^{1/12} - 1 \rightarrow i = 1{,}13\%\ mensual$

8. $ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0{,}6}{12} \rightarrow 0{,}05 \rightarrow 5\%\ mensual$

$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0{,}36}{4} \rightarrow 0{,}09 \rightarrow 9\%\ trimestral$

$ip = 12\%\ trimestral$

$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0{,}18}{2} \rightarrow 0{,}09 \rightarrow 9\%\ semestral$

$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0{,}18}{12} \rightarrow 0{,}015 \rightarrow 1{,}5\%\ mensual$

9. $F = 100\,000\,000(1 + 0{,}20)^5 = \$248\,832\,000$ *En lo que debio vender la casa*

$248\,832\,000 - 180\,000\,000 = \$68\,832\,000$ *Lo que perdio*

$180\,000\,000(1 + 0{,}20)^{-5} = \$72\,337\,962{,}96$ *Valor de venta de la casa*

10. $F = 100\,000\,000(1 + 0{,}20)^5 = \$248\,832\,000$ *En lo que debio vender la casa*

$248\,832\,000 - 180\,000\,000 = \$68\,832\,000$ *Lo que perdio*

$180\,000\,000(1 + 0{,}20)^{-5} = \$72\,337\,962{,}96$ *Valor de venta de la casa*

4.13 Solución de situaciones propuestas Manuales y en Excel en paralelo

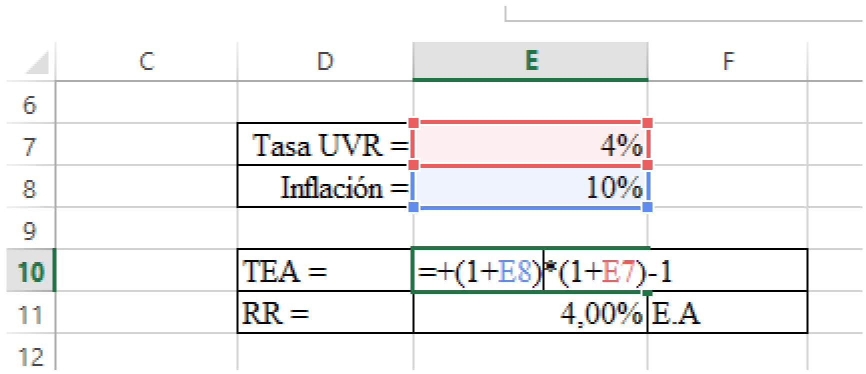
1. Solución manual

$$TEA = (1 + inf)(1 + i)\text{-}1 \rightarrow (1 + 0{,}1)(1 + 0{,}04)\text{-}1$$

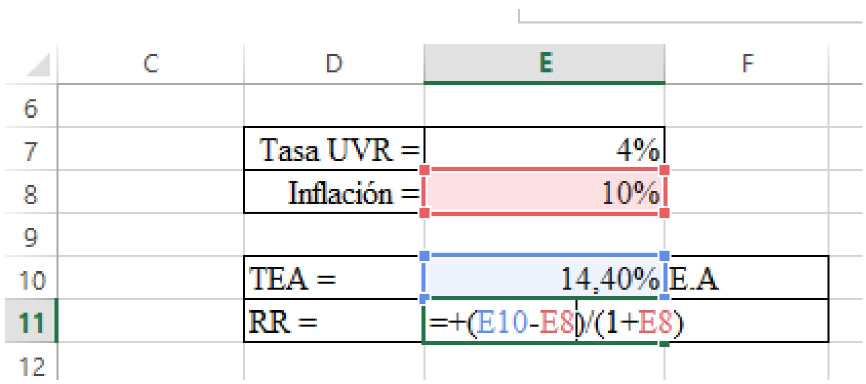
$$TEA = 14{,}4\%\ EA$$

$$RR = \frac{RN - Inf}{1 + Inf} \rightarrow \frac{0{,}144 - 0{,}1}{1 + 0{,}1} \rightarrow RR = 4\%\ EA$$

Solución en Excel



	C	D	E	F
6				
7		Tasa UVR =	4%	
8		Inflación =	10%	
9				
10		TEA =	=+(1+E8)*(1+E7)-1	
11		RR =	4,00%	E.A
12				



	C	D	E	F
6				
7		Tasa UVR =	4%	
8		Inflación =	10%	
9				
10		TEA =	14,40%	E.A
11		RR =	=+(E10-E8)/(1+E8)	
12				

2. Solución manual

a. $i = \frac{J}{m} \rightarrow i = \frac{0{,}4}{4} \rightarrow 0{,}01 \times 100 \rightarrow i = 10\%\ trimestral$

$TEM = (1 + i)^{1/4} - 1 \rightarrow (1 + 0{,}1)^{1/4} - 1 \rightarrow 0{,}024113 \times 100$

$TEM = 2{,}4113\%\ mensual$

b. $i = \frac{J}{m} \rightarrow i = \frac{0{,}36}{12} \rightarrow 0{,}03 \times 100 \rightarrow i = 3\%\ mensual$

c. $i = \dfrac{J}{m} \rightarrow i = \dfrac{0{,}4}{2} \rightarrow 0{,}2 \times 100 \rightarrow i = 20\%\ semestral$

$TEM = (1+i)^{1/6} - 1 \rightarrow (1+0{,}2)^{1/6} - 1 \rightarrow 0{,}03085 \times 100$

$TEM = 3{,}0853\%\ mensual$

La mejor opción es la que ofrece Bancolombia (opción a), ya que la tasa es mayor.

Solución en Excel

	C	D	E	F	G
19					
20		a.	Tasa =	40%	T.V
21			n =	4	
22					
23			=F20/F21	trimestral	
24			2,41%	Mensual	
25					
26		b.	Tasa =	36%	M.V
27			n =	12	
28					
29			3,00%	mensual	
30					
31		c.	Tasa =	40%	S.V
32			n =	2	
33					
34			20,00%	Semestral	
35			3,09%	Mensual	
36					

	C	D	E	F	G	H
19						
20		a.	Tasa =	40%	T.V	
21			n =	4		
22						
23			10,00%	trimestral		
24			=+POTENCIA(1+E23;1/4)-1			
25			POTENCIA(número; potencia)			
26		b.	Tasa =	36%	M.V	
27			n =	12		
28						
29			3,00%	mensual		
30						
31		c.	Tasa =	40%	S.V	
32			n =	2		
33						
34			20,00%	Semestral		
35			3,09%	Mensual		
36						

3. Solución manual

$$UVR_{19} = UVR_{18}\,(1 + inf)^{\frac{t}{d}} \rightarrow 104{,}48(1 + 0{,}006)^{\frac{1}{30}} \rightarrow UVR_{19} = 104{,}5008356$$

$$UVR_{20} = 104{,}5008356(1 + 0{,}006)^{\frac{1}{30}} \rightarrow UVR_{20} = 104{,}5217$$

$$UVR_{21} = 104{,}5217(1 + 0{,}006)^{\frac{1}{30}} \rightarrow UVR_{21} = 104{,}5425$$

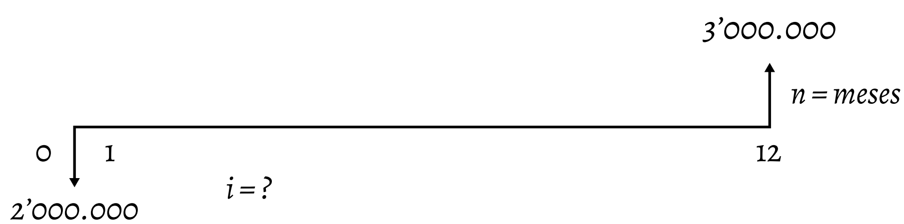
Solución en Excel

	C	D	E	F
45				
46		UVR 18 de Junio	$ 104,48	
47		Inflación	0,60%	
48				
49				
50		UVR19 =	=$E$46*(1+$E$47)^(1/30)	
51		UVR20 =	$ 104,5217	
52		UVR21 =	$ 104,5425	

	C	D	E	F
45				
46		UVR 18 de Junio	$ 104,48	
47		Inflación	0,60%	
48				
49				
50		UVR19 =	$ 104,5008	
51		UVR20 =	=\$E\$46*(1+\$E\$47)^(2/30)	
52		UVR21 =	$ 104,5425	

	C	D	E	F
45				
46		UVR 18 de Junio	$ 104,48	
47		Inflación	0,60%	
48				
49				
50		UVR19 =	$ 104,5008	
51		UVR20 =	$ 104,5217	
52		UVR21 =	=\$E\$46*(1+\$E\$47)^(3/30)	
53				

4.



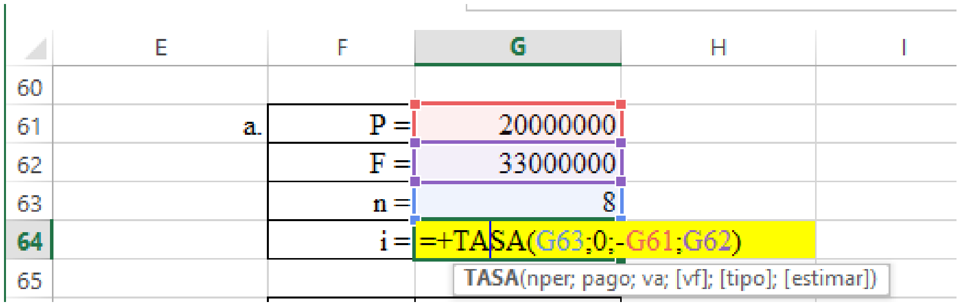
a. $i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 \rightarrow i = \sqrt[8]{\frac{3'300.000}{2'000.000}} - 1 \rightarrow i = 0,0645 \times 100 \rightarrow i = 6,4597$

b.
$$F = P * (1 + i)^n$$
$$F = \$2.000.000 * (1 + 2,8\%)^8$$
$$F = \$2.494.450,63$$

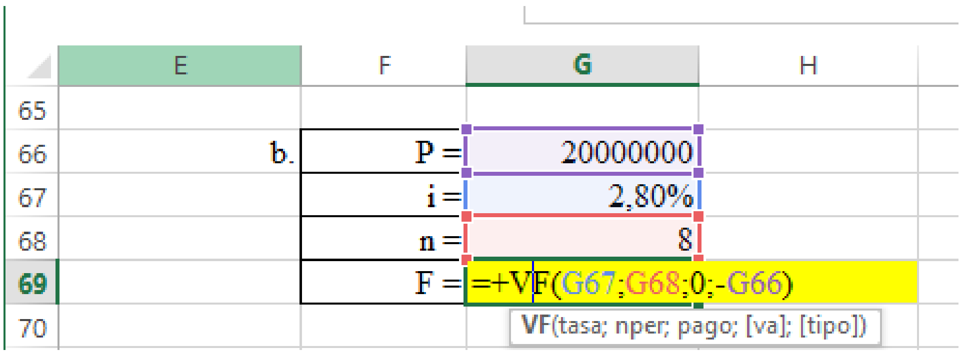
Fue acertada la decisión, porque la primera alternativa le representa una tasa de interés mayor a la segunda alternativa. Obteniendo así una mayor compensación por su inversión.

Solución en Excel

a.



b.



5. Solución manual

$$TEM = (1 + 0{,}05)^{1/4} - 1 \rightarrow TEM = 0{,}01227 \times 100 \rightarrow 1{,}227\%\ Mensual$$

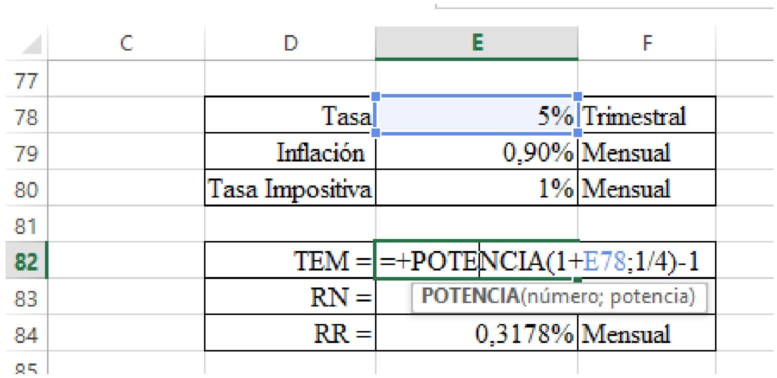
$$RN = TE(1 + Timp) \rightarrow RN = 0{,}01227(1 - 0{,}01) \rightarrow RN = 0{,}00{,}01215 \times 100$$

$$RN = 1{,}215\%\ mensual$$

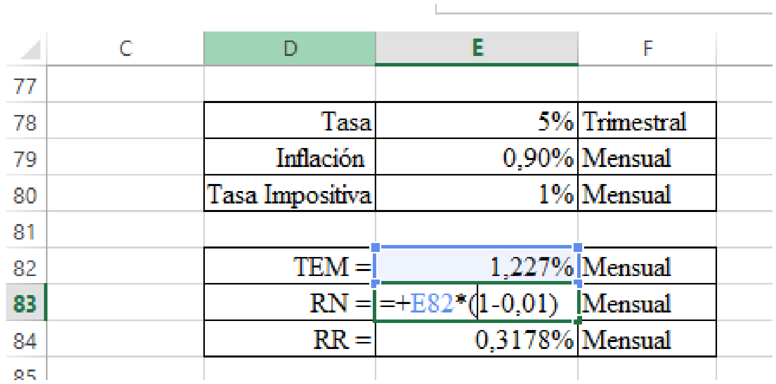
$$RR = \frac{RN - INF}{1 + INF} \rightarrow RR = \frac{0{,}01215 - 0{,}009}{1 - 0{,}009} \rightarrow RR = 0{,}003178 \times 100$$

$$RR = 0{,}3178\%\ Mensual$$

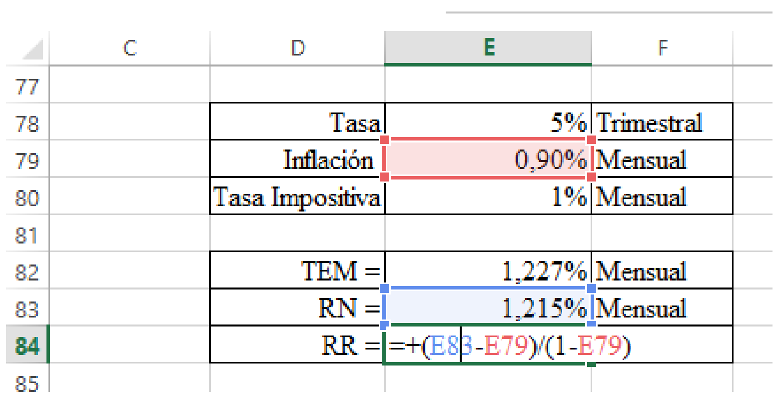
Solución en Excel



	C	D	E	F
77				
78		Tasa	5%	Trimestral
79		Inflación	0,90%	Mensual
80		Tasa Impositiva	1%	Mensual
81				
82		TEM =	=+POTENCIA(1+E78;1/4)-1	
83		RN =	POTENCIA(número; potencia)	
84		RR =	0,3178%	Mensual
85				



	C	D	E	F
77				
78		Tasa	5%	Trimestral
79		Inflación	0,90%	Mensual
80		Tasa Impositiva	1%	Mensual
81				
82		TEM =	1,227%	Mensual
83		RN =	=+E82*(1-0,01)	Mensual
84		RR =	0,3178%	Mensual
85				



	C	D	E	F
77				
78		Tasa	5%	Trimestral
79		Inflación	0,90%	Mensual
80		Tasa Impositiva	1%	Mensual
81				
82		TEM =	1,227%	Mensual
83		RN =	1,215%	Mensual
84		RR =	=+(E83-E79)/(1-E79)	
85				

6. Solución manual

$$i = \sqrt[1]{\left(\frac{1178}{950}\right)} - 1 \rightarrow i = 24\%\ E.A.$$

$$TE = (1 + TR)(1 + inf) - 1 \rightarrow (1 + 0{,}12)(1 + 0{,}24) - 1$$

$$TE = 38{,}88\ \%EA$$

Solución en Excel

	B	C	D	E	F
90					
91		tasa de interés	12%	anual	
92		P	950		
93		F	1178		
94		n	1		
95					
96		Tasa Efectiva	=+TASA(D94;0;-D92;D93)		
97			TASA(nper; pago; va; [vf]; [tipo]; [estimar])		
98		RE =	38,880%	E.A.	
99					

	B	C	D	E
90				
91		tasa de interés	12%	anual
92		P	950	
93		F	1178	
94		n	1	
95				
96		Tasa Efectiva	24,00%	E.A.
97				
98		RE =	=+(1+D91)*(1+D96)-1	
99				

7. Solución manual

$TEA = (1 + 0{,}09)(1 + 0{,}05) - 1 = 0{,}1445 \times 100 \rightarrow TEA = 14{,}45\ \%$

$i = (1 + 0{,}1145)^{1/12} - 1 \rightarrow i = 1{,}13\%\ mensual$

Solución en Excel

	C	D	E	F
105				
106		Tasa UVR =	5%	
107		Inflación =	9%	E.A
108				
109		TEA =	=+(1+E107)*(1+E106)-1	
110		i =	1,13%	Mensual
111				

	C	D	E	F	G
105					
106		Tasa UVR =	5%		
107		Inflación =	9%	E.A	
108					
109		TEA =	14,45%	E.A	
110		i =	=+POTENCIA(1+E109;0,0833333333333333)-1		
111			POTENCIA(número; potencia)		
112					

8. Solución manual

$$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0,6}{12} \rightarrow 0,05 \rightarrow 5\%\ mensual$$

$$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0,36}{4} \rightarrow 0,09 \rightarrow 9\%\ trimestral$$

$$ip = 12\%\ trimestral$$

$$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0,18}{2} \rightarrow 0,09 \rightarrow 9\%\ semestral$$

$$ip = \frac{J}{m} \rightarrow \frac{0,18}{12} \rightarrow 0,015 \rightarrow 1,5\%\ mensual$$

Solución en Excel – se aplica una división

	E	F	G
122			
123		a.	=60%/12
124		b.	9,00%
125		c.	3,00%
126		d.	9,00%
127		e.	1,50%

9.

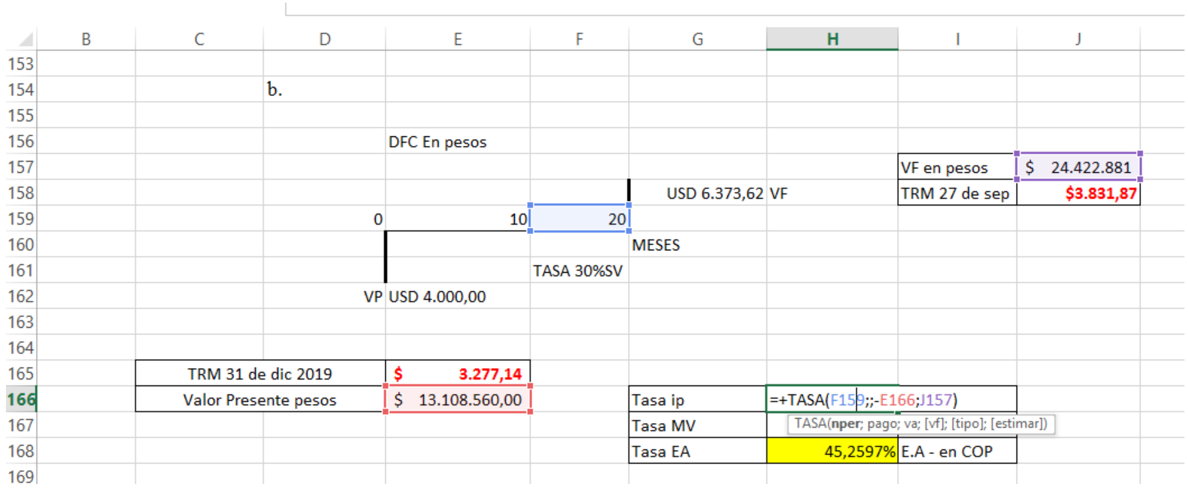
a.

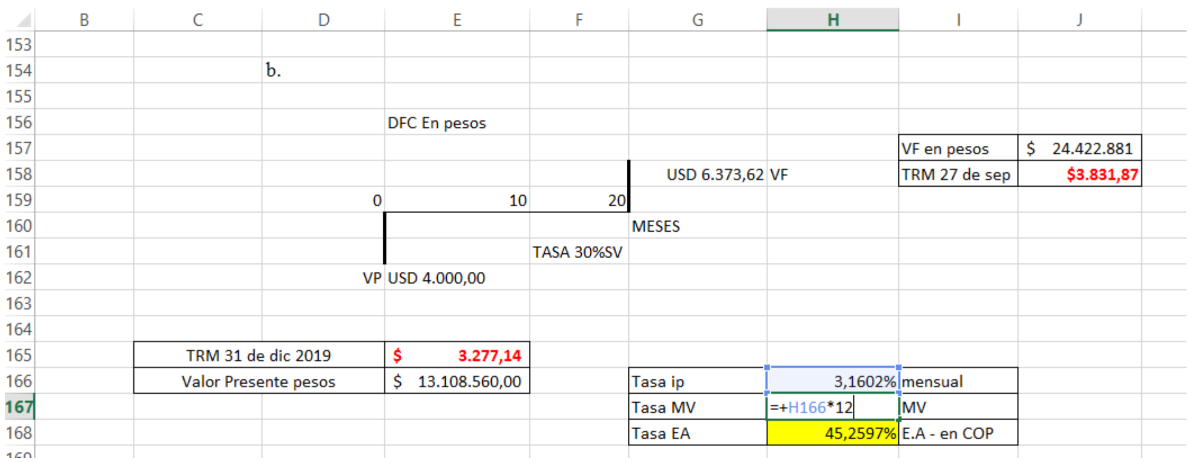
	C	D	E	F	G
137					
138		VF =	?		
139		VP =	4000	USD	
140		Tasa =	30%	SV	
141		Plazo =	20	MESES	
142					
143					
144		a.			
145		Se convierte la tasa a mensual			
146					
147		ip =	=+E140/2	semestral	
148		n =	6		
149		tasa =	2,3567%	mensual	
150					
151		VF =	USD 6.374		
152			Este sería el valor a recibir despues de 20 meses		

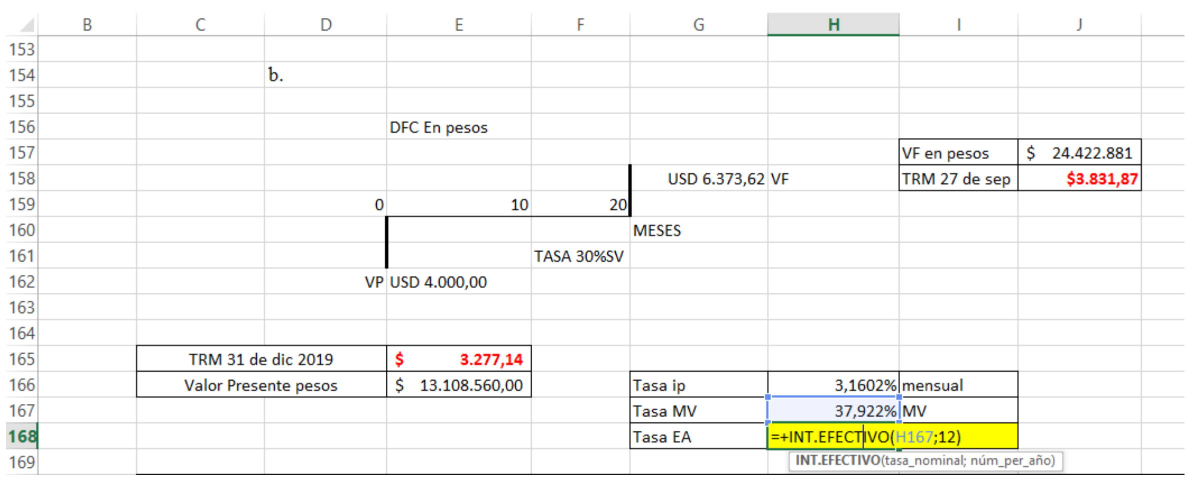
	C	D	E	F	G
144		a.			
145		Se convierte la tasa a mensual			
146					
147		ip =	15%	semestral	
148		n =	6		
149		tasa =	=+((1+E147)^(1/E148))-1		
150					
151		VF =	USD 6.374		
152			Este sería el valor a recibir despues de 20 meses		

	C	D	E	F	G
144		a.			
145		Se convierte la tasa a mensual			
146					
147		ip =	15%	semestral	
148		n =	6		
149		tasa =	2,3567%	mensual	
150					
151		VF =	=+VF(E149;E141;;-E139)		
152			Es VF(tasa; **nper**; pago; [va]; [tipo]) despues de 20 meses		
153					

b.







10. Solución manual

$$F = 100.000.000(1+0{,}20)^5 = \$248\ 832\ 000 \text{ En lo que debio vender la casa}$$

$$248\ 832\ 000 - 180\ 000\ 000 = \$68\ 832\ 000 \text{ Lo que perdio}$$

$$180\ 000\ 000(1+0{,}20)^{-5} = \$72\ 337\ 962{,}96 \text{ Valor de venta de la casa}$$

Solución en Excel

a.

	C	D	E
176			
177		a.	=+E178-180000000
178		b.	$248.832.000
179		c.	$ 72.337.963
180			

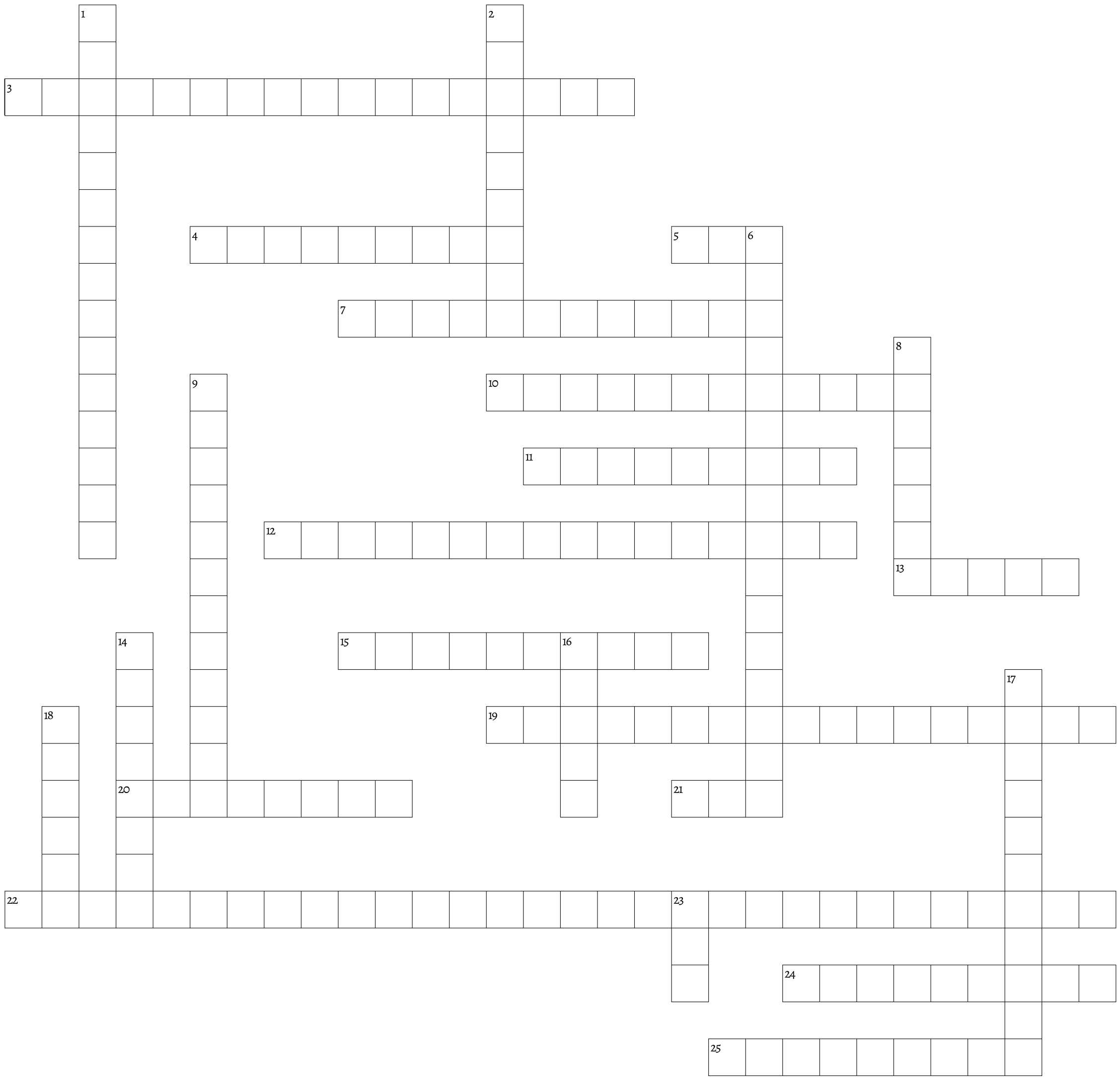
b.

	C	D	E	F
76				
77		a.	$68.832.000	
78		b.	=+VF(20%;5;0;-100000000)	
79		c.	$ VF(tasa; nper; pago; **[va]**; [tipo])	
80				

c.

	C	D	E	F
76				
77		a.	$68.832.000	
78		b.	$248.832.000	
79		c.	=180000000*(1+20%)^-5	
80				

¡BIENVENIDO AL DESAFÍO DE PALABRAS! N° 4



Horizontales

3. —Tasa que se define como la tasa equivalente, si la capitalización se hiciera sólo una vez al año
4. —Otro nombre para la tasa conjugada
5. —Mecanismo de ajuste diario del valor del dinero, que utilizan las Corporaciones de Ahorro y Vivienda
7. —Operación de cálculo que consiste en quitarle a una suma de dinero en precios corrientes o nominales el efecto de la inflación de manera tal que la suma quede en precios reales o constantes
10. —Precio que se paga en moneda nacional por cada una de las monedas extranjeras
11. —Efecto contrario a la inflación, es decir, la bajada continuada y sustancial en los niveles de precios
12. —Precio que cobran los intermediarios financieros por prestar el dinero.
13. —Tasa de referencia para las negociaciones efectuadas en eurodólares, y corresponde al promedio de los principales bancos europeos.
15. —Tasa de interés que se cobra por adelantado, en cada periodo de utilización del dinero.
19. —UVR
20. —Rentabilidad que queda después de descontarle a la tasa de interés la tasa de inflación
21. —Tasa efectiva anual
22. TASADEINTERESPROMEDIOPONDERADO—Tasa que resulta al invertir en un capital diferentes porciones a distintas tasas de interés

DESAFÍO DE PALABRAS! Nº 4

(CONTINUACIÓN)

24. PERIODICA—Tasa que resulta de dividir la tasa nominal, entre el número de periodos en que se capitaliza
25. INFLACION—Incremento persistente de los precios de los bienes y servicios producidos por la economía de un país

Verticales

1. TASADECAPTACION—Tasa que ofrecen los intermediarios financieros por obtener los recursos de las personas y las empresas que tienen excedente de dinero
2. CONJUGADA—Tasa que resulta de la aplicación simultanea de dos o más tasas de interés
6. RENTABILIDADNETA—Rentabilidad efectiva de una inversión corregida por los impuestos
8. NOMINAL—Tasa de interés que expresada en un periodo capitaliza varias veces en dicho periodo
9. EQUIVALENTES—Dos tasas de interés que, obrando en condiciones diferentes, producen la misma tasa efectiva anual o el mismo valor futuro.
14. EFECTIVA—Tasa que mide el costo efectivo de un crédito o la rentabilidad efectiva de una inversión, y que resulta de capitalizar la tasas nominal
16. PRIME—Corresponde a la denominada "tasa preferencial", y es la base más utilizada para la negociación de los créditos en moneda extranjera. Su cálculo, depende de la situación del mercado de capitales en E.U.A
17. DEVALUACION—Pérdida del valor de la moneda de un país con respecto a una divisa.
18. DIVISA—Moneda extranjera aceptada como medio de pago internacional
23. DTF—Indicador económico que representa el promedio de las tasas de interés reconocidas por los Bancos, Corporaciones Financieras, Corporaciones de Ahorro y Vivienda y Compañías de Financiamiento Comercial

Capítulo 5

SERIES UNIFORMES

5.1. Objetivos del capítulo

General

- Desarrollar el concepto de series uniformes o anualidades y su utilidad en las operaciones financieras. este concepto es ampliamente utilizado en las distintas operaciones financieras como la compra de activos, la amortización de deudas, convenios de pago, entre otras.

Específicos

- Explicar teóricamente qué son las series uniformes o anualidades al igual que los conceptos asociados a estas.
- Determinar y revisar el campo de aplicación de las series uniformes.
- Definir las fórmulas de aplicación.
- Conocer el manejo matemático del tema.
- Identificar los distintos tipos de series uniformes y contrastar las diferencias existentes entre estas.
- Explicar el uso de la calculadora financiera y de la hoja de cálculo para la resolución de los distintos contextos problemáticos.
- Realizar ejercicios para afianzar el manejo teórico-práctico del tema.

5.2. Introducción

Las series uniformes son sistemas cuyos pagos poseen la característica de ser iguales durante el número de periodos que dure el sistema; se ha acuñado el término *anualidades* para referirse a ellas, pues las más frecuentes son las de frecuencia anual. Significa esto que la cantidad de dinero que se deposita o que se recibe como ingreso no varía durante el periodo pactado. Existen en la práctica muchos ejemplos de series uniformes; la compra de electrodomésticos, vehículos y vivienda son tres ejemplos en los que se puede observar que durante el tiempo que dura la obligación el comprador está sujeto al pago de cuotas iguales.

5.3. Definición y elementos

En matemática financiera, series uniformes significan pagos uniformes o iguales hechos a intervalos de tiempo iguales, que pueden ser anuales, semestrales, trimestrales, mensuales, entre otros.

Los elementos o variables asociadas a una serie uniforme son:

Pago o renta

También se conoce como primer pago. Es el valor de la cuota periódica y de igual valor. Se representa con la letra C o A o con la palabra *cuota*. Al usar Excel la función para su cálculo es PAGO.

Intervalo o periodo de pago o renta

Tiempo que transcurre entre un pago y otro. Este puede ser anual, semestral, mensual, entre otros.

Plazo de una serie uniforme

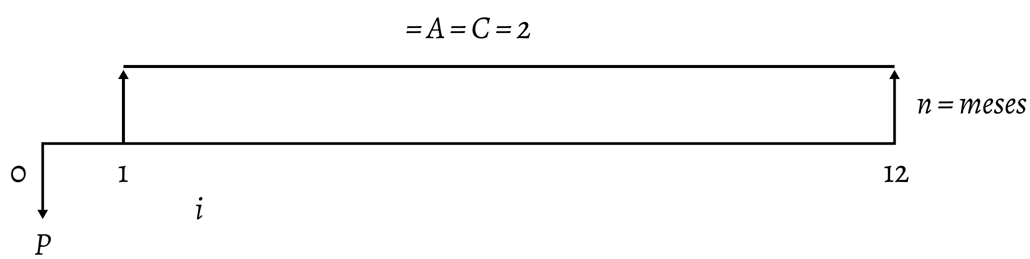
Tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el periodo final de pago. Se diferencia del anterior en que este tiene en cuenta la totalidad de la duración de la anualidad, no la diferencia entre un pago y otro. Se representa con la letra n. Al usar Excel la función para su cálculo es NPER.

Tasa de interés

Costo de uso del dinero durante el número de periodos o tiempo que dura el sistema de pagos. Se representa con la letra $i\%$. Al usar Excel, la función para su cálculo es TASA.

Gráficamente, en un flujo de caja las series uniformes se representan como se observa en la figura 5.1.

Figura 5.1. Diagrama flujo de caja – DFC de una serie uniforme o anualidad.



Fuente: elaboración propia.

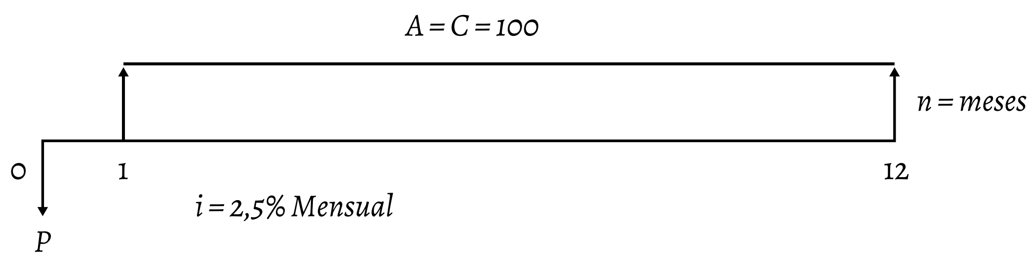
Como se puede apreciar, en el flujo de caja de las series uniformes se incorpora un nuevo elemento, el cual es una línea horizontal que une el periodo donde inicia y finaliza el sistema de pagos iguales.

Dependiendo del momento en el que se cancelan o reciben las cuotas iguales, una serie uniforme puede ser anticipada (las cuotas se pagan o reciben al principio del periodo) o vencida (las cuotas se reciben o pagan al final del periodo). A continuación, se estudiarán más a fondo ambos tipos de series uniformes, las cuales varían en la fecha de pago.

5.4. Series uniformes vencidas

Las series uniformes vencidas son aquellas en las cuales los pagos son realizados o se reciben al final de cada periodo.

Figura 5.2. Diagrama flujo de caja de una serie uniforme vencidas.



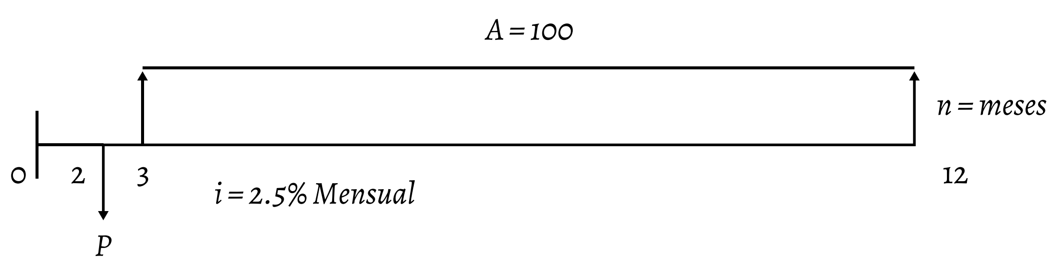
Fuente: elaboración propia.

Significa esto que, si los periodos corresponden a meses, los pagos serán realizados el último día del mes; si son semestres, se realizarán en el sexto mes; si es anual, se realizarán el último mes del año (mes doce), y así según corresponda.

5.4.1. Valor presente de una serie uniforme vencida

El valor presente de una serie uniforme vencida se encontrará un periodo antes del primer pago.

Figura 5.3. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente de una serie uniforme vencida.



Fuente: elaboración propia.

Así, como se puede ver en el flujo de caja (figura 5.3), si el primer ingreso se recibe al tercer mes del año, entonces el valor presente de la serie uniforme vencida pago se encontrará en el segundo periodo. Además de esto, del flujo de caja anterior, se pueden identificar los demás elementos de una serie uniforme. Se tiene, así, que el número de periodos que dura la serie uniforme o el número de pagos es 10, la tasa de interés es 2,5 % mensual y que el valor de las cuotas es 100.

Para hallar el valor presente de esta serie uniforme se utilizará la siguiente fórmula:

$$P = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \tag{5.1}$$

Ejemplo (5.1)

Aplicando esta fórmula al ejercicio anterior se tiene:

$$P = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \rightarrow P = 100 \times \left[\frac{(1+0{,}025)^{10} - 1}{0{,}025(1+0{,}025)^{10}} \right] \rightarrow P = 875{,}21$$

Como resultado, se obtiene que el valor presente del sistema de pagos iguales de 100 es 875,21. De igual manera, conociendo el valor del presente o de contado del sistema de pagos, la tasa de interés y el número de pagos igual, se puede calcular el valor de las cuotas. Esto se logra despejando de la ecuación (5.1) la variable *A*.

$$A = P \times \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \tag{5.2}$$

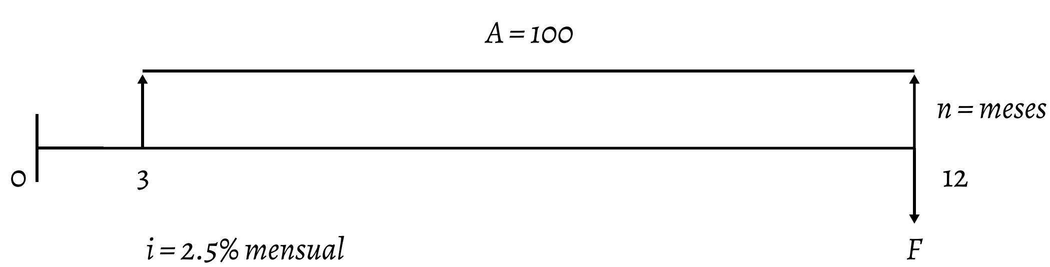
Aplicando los datos conocidos del ejemplo:

$$A = P \times \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \rightarrow A = 875{,}21 \times \left[\frac{0{,}025(1+0{,}025)^{10}}{(1+0{,}025)^{10} - 1} \right] \rightarrow A = 100$$

5.4.2. Valor futuro de una serie uniforme vencida

El valor futuro de una serie uniforme vencida se encuentra en el mismo periodo de la última cuota del sistema. En el ejemplo que se tiene a continuación, el valor futuro se encuentra en el periodo 12, el cual corresponde a la última cuota.

Figura 5.4. Diagrama flujo de caja – DFC del valor futuro de una serie uniforme vencida.



Fuente: elaboración propia.

La fórmula para hallar el valor futuro, conocido el valor de la cuota es la siguiente:

$$F = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \tag{5.3}$$

Ejemplo (5.2)

Aplicando la fórmula al contexto del ejercicio, se tiene:

$$F = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \rightarrow F = 100 \times \left[\frac{(1+0{,}025)^{10} - 1}{0{,}025} \right] \rightarrow F = 1120{,}74$$

Despejando de la ecuación (5.3) la variable A, se calcula el valor de las cuotas si se conoce el valor futuro del sistema, la tasa de interés y el número de cuotas.

$$A = F \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \tag{5.4}$$

Ejemplo (5.3)

Aplicando esta fórmula al ejemplo:

$$A = F \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \rightarrow A = 1120{,}74 \times \left[\frac{0{,}025}{(1+0{,}025)^{10} - 1} \right] \rightarrow A = 100$$

5.4.3. Número de cuotas de una serie uniforme vencida

El número de cuotas que contiene una serie uniforme se puede hallar en función del valor presente por medio de la siguiente formula:

$$n = \frac{LogA - Log(A - Pi)}{Log(1+i)} \tag{5.5}$$

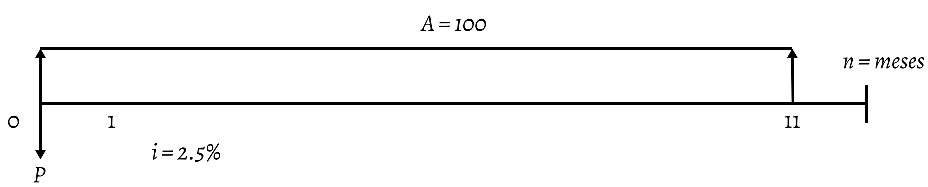
También se puede hallar en función del valor futuro:

$$n = \frac{Log(Fi + A)LogA}{Log(1+i)} \tag{5.6}$$

5.5. Series uniformes anticipadas

Las series uniformes anticipadas son aquellas cuyas cuotas se cancelan o reciben al principio del periodo. En el caso de que los periodos sean meses, estas se efectuarán al principio del mes; si son trimestres, se realizarán en el primer mes del trimestre; cuando sean anuales, se realizarán en el primer mes del año, y así con las demás periodicidades.

Figura 5.5. Diagrama flujo de caja – DFC de una serie uniforme anticipada.



Fuente: elaboración propia.

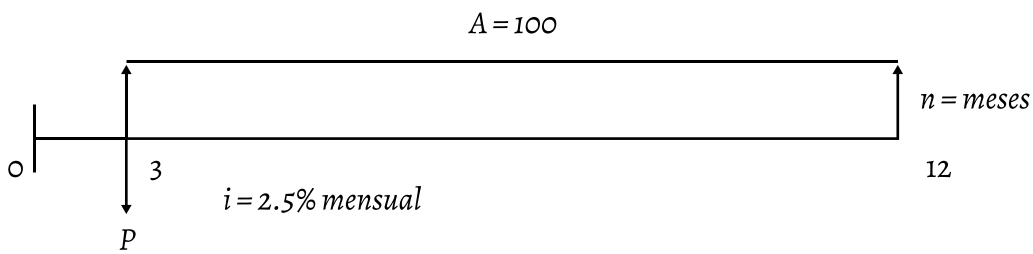
Esto implica un cambio en la forma en que se representan estos pagos en un flujo de caja. Como en este tipo de series uniformes los pagos o ingresos se efectúan de manera anticipada, estos se ubicarán un periodo antes del periodo al que se realizan. Así, por ejemplo, si los pagos son mensuales y el primer pago se realiza en el primer mes, para efectos de la ubicación en el flujo de caja, esta cantidad se graficará en el periodo cero (figura 5.5). Esta característica se cumple para cada uno de los periodos que dura la serie uniforme.

Importante: para conocer el número de periodos que dura una anualidad, se debe saber cuántos pagos existen desde el primero hasta el último. Recuerde siempre incluir el primer pago.

5.5.1. Valor presente de una serie uniforme anticipada

El valor presente de una serie uniforme anticipada se encuentra en el periodo en el que se realiza el primer pago o cuota.

Figura 5.6. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente de una serie uniforme anticipada.



Fuente: elaboración propia.

Significa esto que al momento en que se recibe o paga la primera cuota se encontrará el valor presente de la serie uniforme.

Para efectos de cálculos matemáticos, se utilizará la siguiente fórmula para calcular el valor presente de una serie uniforme anticipada.

$$P = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] (1+i) \tag{5.7}$$

Como se logra apreciar, esta es la misma fórmula utilizada en el cálculo del valor presente de las series uniformes vencidas, con la diferencia de que en el caso de las anticipadas se agrega el término $(1+i)$, el cual multiplica todo el término.

Ejemplo (5.4)

Aplicando la fórmula al flujo de caja inicial, se tiene:

$$P = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right](1+i) \rightarrow P = 100 \left[\frac{(1+0{,}025)^{10} - 1}{0{,}025(1+0{,}025)^{10}} \right](1+0{,}025)$$

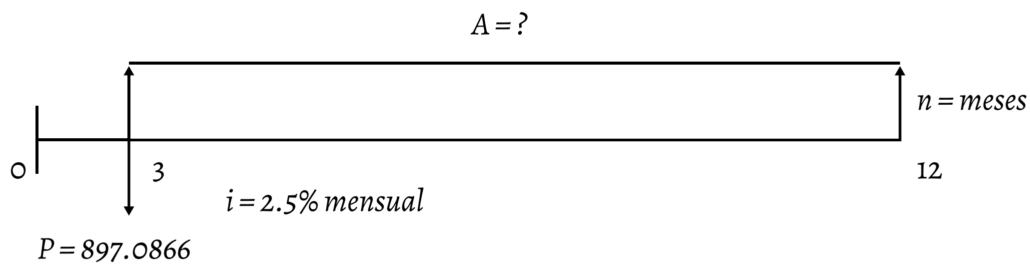
$$P = 897{,}0866$$

De la fórmula anterior, se puede despejar el término A, correspondiente al valor de las cuotas:

$$A = \frac{P \times \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]}{(1+i)} \qquad \text{(Ec. 8)}$$

Análogamente, del flujo de caja inicial se puede hallar el valor de las cuotas (asumiendo que no se tienen), si se conocen el valor presente, el número de cuotas y la tasa de interés.

Figura 5.7. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 5.4



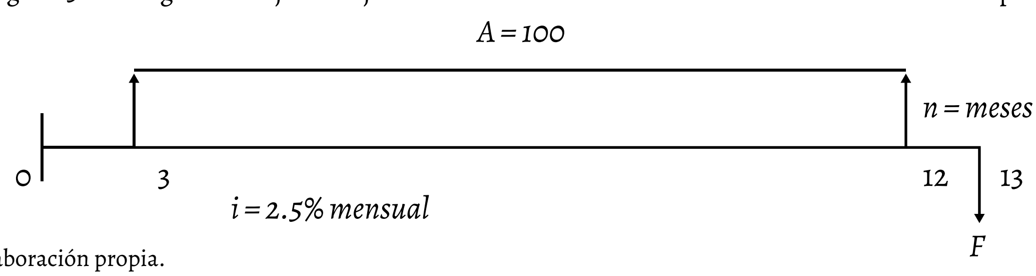
Fuente: elaboración propia.

$$A = \frac{P \times \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]}{(1+i)} \rightarrow A = \frac{897.0866 \left[\frac{0.025(1+0.025)^{10}}{(1+0.025)^{10} - 1} \right]}{(1+0.025)} \rightarrow A = 100$$

5.5.2. Valor futuro de una serie uniforme anticipada

El valor futuro de una serie uniforme se encuentra en un periodo posterior a la última cuota o pago.

Figura 5.8. Diagrama flujo de caja – DFC del valor futuro de una serie uniforme anticipada.



Fuente: elaboración propia.

Para el ejemplo tratado, en el cual se presenta una serie uniforme compuesta de 10 pagos, cuyo inicio se encuentra en el mes 3 y su finalización en el periodo 12, el valor futuro se encuentra en el mes 13, es decir, un periodo después del último pago, el cual se realiza en el mes 12.

La fórmula para hallar el futuro equivalente de una serie uniforme anticipada es la siguiente:

$$F = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right](1+i) \tag{5.9}$$

Ejemplo (5.5)

Utilizando el flujo de caja anterior, se tiene:

$$F = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right](1+i) \rightarrow F = 100 \times \left[\frac{(1+0{,}025)^{10} - 1}{0{,}025} \right](1+0{,}025)$$

$$F = 1148{,}3466$$

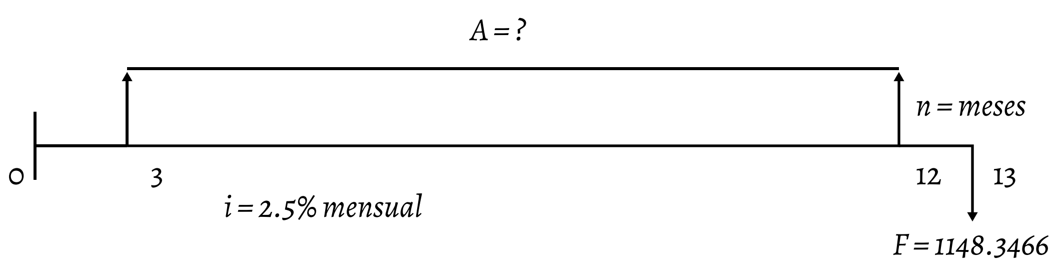
De la fórmula, anterior se puede despejar el valor de las cuotas (el cual está representado por la variable *A*). La fórmula quedaría así:

$$A = \frac{F \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]}{(1+i)} \tag{5.10}$$

Ejemplo (5.6)

Asumiendo que se conoce el valor futuro de la serie uniforme, la tasa de interés y el número de pagos, se calcula el valor de las cuotas.

Figura 5.9. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 5.6.



Fuente: elaboración propia.

$$A = \frac{F \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]}{(1+i)} \rightarrow A = \frac{1148{,}3466 \left[\frac{0{,}025}{(1 + 0.025)^{10} - 1} \right]}{(1 + 0.025)} \rightarrow A = 100$$

5.5.3. Número de cuotas de una serie uniforme anticipada

El número de pagos o cuotas que conforman una serie uniforme o anualidad se puede calcular de dos maneras dependiendo de las variables que se conozcan.

- Si se conoce el valor presente del sistema, se calculan las cuotas de la siguiente manera:

$$n = \frac{LogA - Log\left[A - i(P - A)\right]}{Log\ (1 + i)} + 1 \tag{5.11}$$

- Si se tiene el valor futuro del sistema, se utiliza la siguiente fórmula:

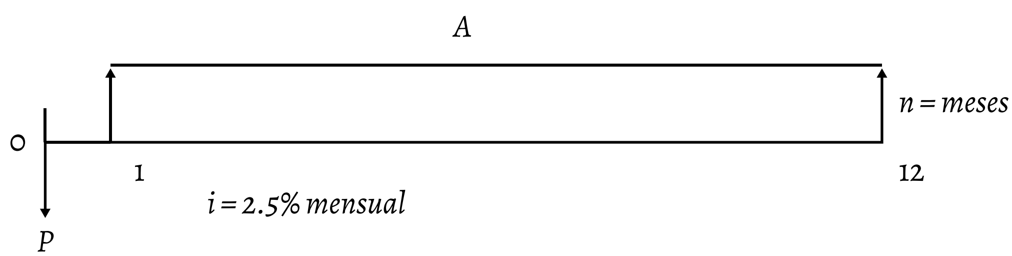
$$n = \frac{Log\ \left[\frac{Fi}{A} + (1 + i)\right]}{Log(1 + i)} - 1 \tag{5.12}$$

5.6. Series uniformes inmediatas

Las series uniformes inmediatas son aquellas en las que, como su nombre lo dice, los pagos empiezan de manera inmediata. Significa esto que los pagos o ingresos se efectúan inmediatamente y no existe periodo de gracia o de no pago de cuotas.

Para cálculos matemáticos, se utilizan las fórmulas anteriormente expuestas.

Figura 5.10. Diagrama flujo de caja – DFC de una serie uniforme inmediata.



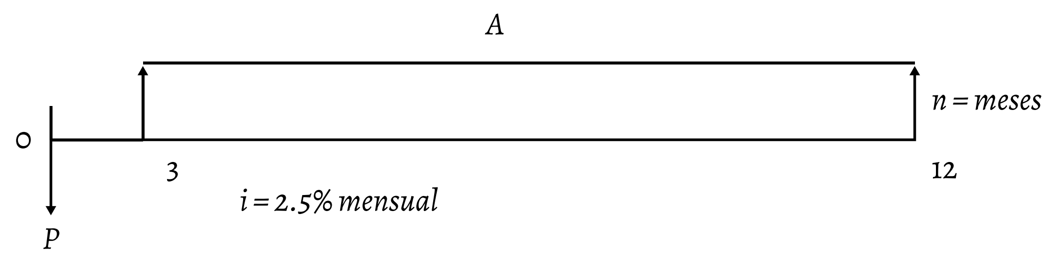
Fuente: elaboración propia.

5.7. Series uniformes diferidas

Estas series uniformes se caracterizan por que entre el valor presente del sistema y la primera cuota existen periodos en los cuales no se efectúan pagos o se perciben ingresos por medio de las cuotas. Es decir que existen periodos en los que no existen cuotas. Ejemplo de estas es la financiación de vehículos en los cuales se le otorga al cliente un año en el cual no paga mensualidades.

Para cálculos matemáticos, en las series uniformes diferidas se utilizan las fórmulas anteriormente mencionadas, dependiendo de si los sistemas son vencidos o anticipados.

Figura 5.11. Diagrama flujo de caja – DFC de una serie uniforme diferida.

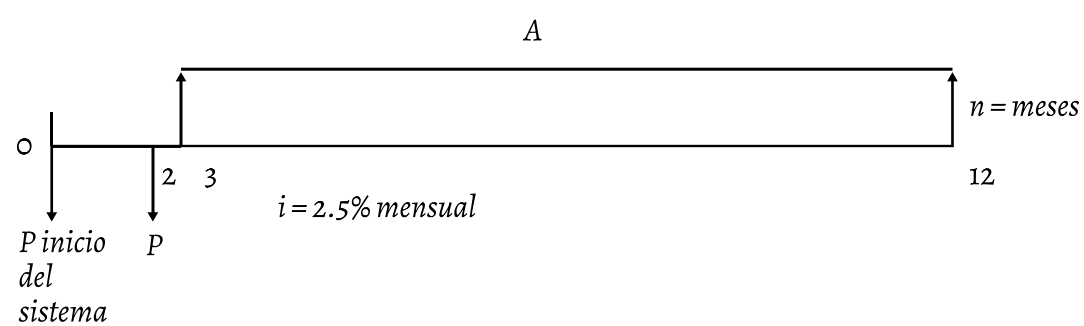


Fuente: elaboración propia.

El flujo de caja de la figura 5.11 muestra una serie uniforme diferida. Como se puede observar, el sistema inicia en el momento cero; sin embargo, las cuotas se empiezan a pagar en el tercer mes.

En este tipo de series uniformes se pueden presentar dos situaciones. Ambas se relacionan con la causación de intereses. Si durante el periodo de gracia no se causan (generan) intereses, entonces el valor presente, el cual se encuentra un periodo antes del pago de la primera cuota, será el mismo que el de hoy o periodo cero.

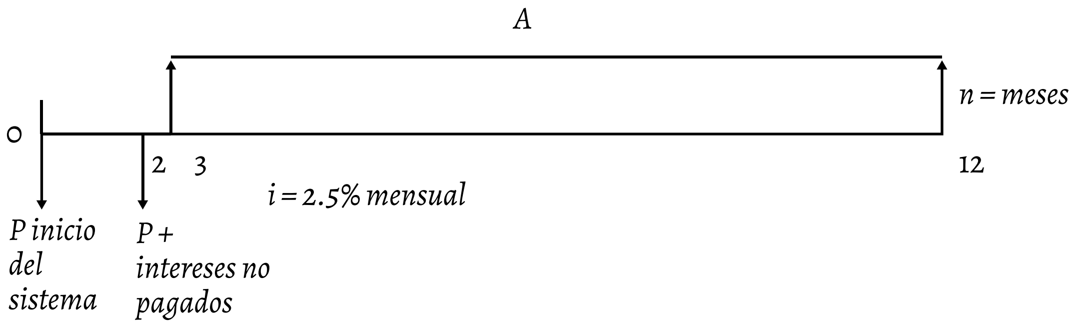
Figura 5.12. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente de series uniformes diferidas.



Fuente: elaboración propia.

La otra situación que se puede presentar es si se generan intereses durante el periodo de gracia. En este caso, los intereses causados y no pagados se capitalizan (se suman al capital inicial), lo cual hace que la deuda aumente; por el contrario, si se pagan los intereses, entonces el capital se mantiene constante. En razón a esto, antes de empezar a efectuarse las cuotas se requiere hacer o recibir los intereses generados.

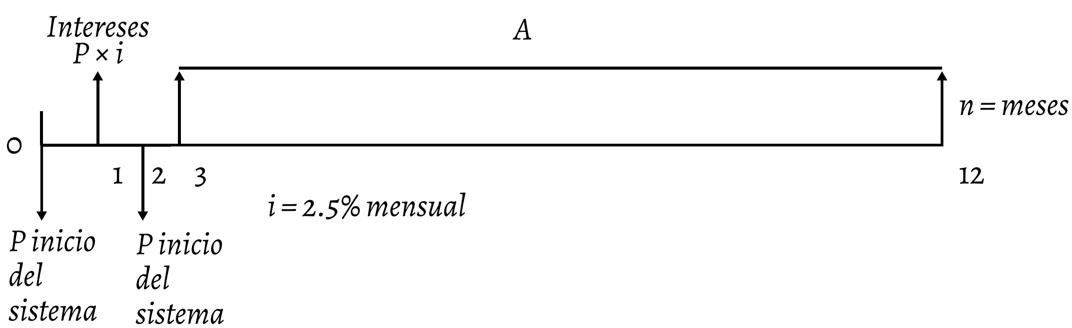
Figura 5.13. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente actualizado de la serie uniforme diferida.



Fuente: elaboración propia.

La figura 5.13 representa una serie uniforme diferida en la cual no se pagan los intereses causados durante el periodo de gracia, como consecuencia el valor presente actualizado al inicio del pago de las cuotas es el valor presente del inicio del sistema más los intereses generados en el periodo de gracia.

Figura 5.14. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente de una serie uniformes diferidas



Fuente: elaboración propia.

La figura 5.14 representa un sistema de serie uniforme diferida donde se efectúan ingresos correspondientes a los intereses generados; por lo tanto, el valor presente del inicio del sistema es el mismo del inicio de las cuotas.

Importante: el valor presente de las anualidades vencidas se encuentra un periodo antes de la primera cuota. Para las anticipadas se encuentra en el mismo periodo de la primera cuota. Esto es importante para los flujos de caja donde se presentan varias anualidades o combinación con anualidades diferidas.

Tabla 5.1. Contraste de características, series uniformes anticipadas vs vencidas

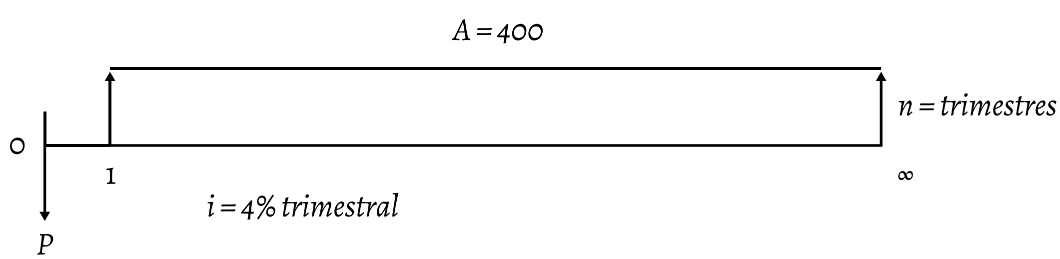
	Series uniformes anticipadas	**Series uniformes vencidas**
Valor presente	Periodo en que se efectúa la primera cuota.	Un periodo antes de la primera cuota.
Valor futuro	Un periodo después de la primera cuota.	Periodo en que se efectúa la última cuota.

Fuente: elaboración propia.

5.8. Series uniformes perpetuas

Existen otro tipo de series uniformes, las cuales se caracterizan por no tener un periodo de duración definido. Significa esto que en estos sistemas de pagos no se conoce el valor de *n*, por lo tanto se considera infinito el número de periodos. Estas se presentan frecuentemente en el mercado inmobiliario, más exactamente en los arriendos de vivienda en los que no se especifica la duración del arriendo del inmueble. Otro caso donde se presentan es en el pago del cargo fijo de los servicios públicos, ya que, por ser un valor constante y no conocerse con exactitud por cuánto tiempo se cobrará este, se considera una serie uniforme perpetua.

Figura 5.15. Diagrama flujo de caja – DFC de una serie uniforme perpetua.



Fuente: elaboración propia.

El flujo de caja de la figura 15.15 es una representación gráfica de las series uniformes perpetuas. Estos se diferencian de los flujos de las demás series uniformes en que no se conoce el periodo del último pago; es por esto que aparece el símbolo ∞ que representa el infinito.

Por no conocerse el número de periodos, la fórmula que se debe utilizar es la siguiente:

$$P = \frac{A}{i} \tag{5.13}$$

Ejemplo (5.7)

Para hallar el valor presente de la serie uniforme perpetua descrita en el flujo de caja anterior se utiliza la ecuación (5.13):

$$P = \frac{A}{i} \rightarrow P = \frac{400}{0{,}04} \rightarrow P = 10\,000$$

De esta manera, se tiene que el valor presente de un sistema de ingresos cuyas cuotas indefinidas se reciben cada trimestre, cuyo valor es de 400 y se tiene un rendimiento del 4 %, es de 10 000.

5.9. Series uniformes con interés global

Las cuotas que se pagan o reciben en un sistema de pagos uniforme están conformadas por los intereses y la amortización a capital. Existe un tipo de series uniformes en las cuales los intereses no se calculan sobre el saldo insoluto (que resulta de restar al capital inicial la amortización a capital), sino que siempre se toma el saldo inicial del sistema para calcular los intereses de cada periodo. Por lo tanto, los intereses que se pagan durante el tiempo de existencia del sistema son iguales y, a la vez, mucho mayores que si se calcularan sobre el saldo insoluto. Esto debido a que este saldo va disminuyendo a medida que se pagan o reciben las cuotas. El interés global puede presentarse tanto en las series uniformes anticipadas como en las vencidas.

Debido a esto, la tasa efectiva que se cobra en realidad es mayor, lo cual genera costos *invisibles* para los usuarios en los sistemas de pagos.

La fórmula para calcular el valor de las cuotas es la siguiente:

$$A = \frac{P}{n} + Pi \tag{5.14}$$

De esta fórmula también se puede despejar el valor presente de un sistema de series uniformes cuyo interés se calcula de manera global. La ecuación es la siguiente:

$$P = (A - Pi)n \tag{5.15}$$

Ejemplo (5.8)

Héctor va a adquirir un apartamento por valor de \$ 90 000 000. El vendedor le pide a Héctor que le cancele cuotas mensuales iguales de \$ 2 000 000 durante 10 años. ¿Cuál será la tasa de interés global que cobra el vendedor a Héctor?

Despejando de la ecuación (5.14) la variable i, se tiene:

$$A = \frac{P}{n} + Pi \rightarrow i = \frac{(A - \frac{P}{n})}{P} \rightarrow i = \frac{2\,000\,000 - \frac{90\,000\,000}{120}}{90\,000\,000} \rightarrow i = 1{,}3889\,\%$$

5.10. Situaciones a resolver

1. Carolina desea adquirir un automóvil en un concesionario. Decide visitar los concesionarios A y B, los cuales ofrecen los siguientes sistemas de pagos.

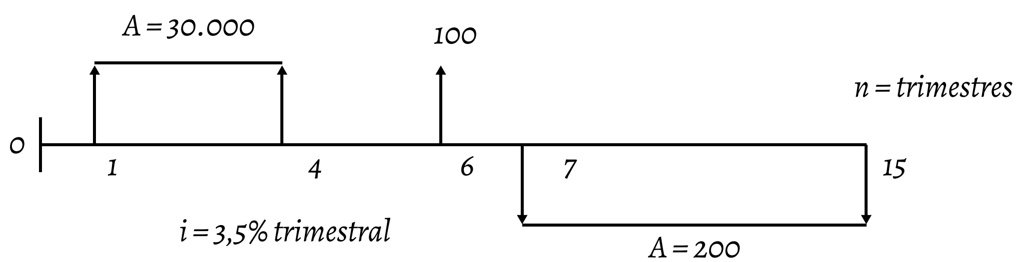
a. Se le hace entrega del auto hoy y se le otorga un periodo de gracia en el cual los intereses causados se pagan. Al séptimo mes debe pagar cuotas iguales de $ 1 000 000 durante cinco años.

b. El día de hoy se le entrega el auto y debe pagar una cuota inicial del 10 % del valor del auto. A partir del primer mes debe pagar cuotas mensuales iguales por valor de $ 1 800 000 durante dos años.

Si la tasa de financiación que cobran ambos concesionarios es del 3 % mensual, ¿cuál de las dos opciones le conviene más a Carolina para la compra de su automóvil? Nota: tome como referencia el valor presente de las opciones de financiación para conocerla mejor.

Rta.: La primera opción. Deberá pagar en total $ 23 177 848,87.

2. Halle el valor presente del flujo de caja siguiente:



Rta.: 109 035,9548.

3. Del flujo de caja anterior halle el valor futuro en el mes 15.

Rta.: 182 673,2592.

4. Usted se suscribe al servicio de telefonía celular. Decide tomar un plan de 300 minutos mensuales cuyo cargo fijo es de $ 65 000. Si el contrato se firma de manera indefinida, ¿cuál es el valor presente de los pagos realizados por la prestación del servicio? Para los cálculos matemáticos asuma una tasa de interés del 2 %.

Rta.: $ 3 250 000.

5. Luís decide matricularse en la Universidad Tecnológica de Bolívar. Debido a que no posee la totalidad del dinero para la matrícula, decide pedir financiación a seis meses del 70 % de esta. Si el valor de la matrícula del programa en el cual se desea matricular es de $ 2 240 000 y la tasa de financiación de la universidad es del 10 % semestral, ¿de qué valor deben ser las cuotas mensuales para poder cancelar la deuda al finalizar el semestre?

Rta.: $ 276 172,6953.

6. Sofía va a adquirir un juego de sala. El valor presente de este es de $ 500 000. Sofía, como maneja a la perfección los conceptos de la matemática financiera, pide al asesor que le informe cuál es el valor futuro del juego de sala, el cual resulta ser de 700 000 dentro de un año. Con base en estos datos, ¿cuál es la tasa anual de financiación? ¿Cuál es el valor de las cuotas que debe pagar Sofía en caso de que prefiera pagos mensuales, trimestrales y semestrales?

Rta.: Tasa anual de financiación: 18,3216 % EA.
Pago mensual: $ 45 588,5198.
Pago trimestral: $ 138 705,9033.
Pago semestral: $ 283 369,9734.

7. Se tiene un crédito de $ 12 000 000 para pagarlo en 24 cuotas mensuales vencidas de $ 300 000 más cuatro cuotas extras en los meses 6, 12, 18 y 24. Si la operación financiera se realiza con un interés del 30 % MV, calcular el valor de las cuotas extras.

Rta.: $ 2 369 550,4305.

8. Un ahorrador decide hacer depósitos de $ 1 200 000 por mes vencido, durante un año, en una entidad que le paga una tasa de interés del 2 % mensual. Al llegar a hacer el séptimo depósito, le informan que la tasa de interés ha aumentado al 2,2 % mensual; por ello, decide aumentar a $ 1 600 000 el valor de los depósitos. ¿Qué valor tiene acumulado al final del año?

Rta.: $ 18 752 412,8229.

9. Juan José está interesado en comprar un vehículo usado que vale de contado $ 25 000 000. Solo tiene capacidad para pagar cuotas mensuales iguales de $ 1 000 000. Si el concesionario acepta este pago mensual y le cobra una tasa de interés de financiación del 2,2 % mensual, calcular el número entero de pagos mensuales.

Rta.: 37 pagos.

10. Se comienzan a hacer depósitos de $ 500 000 del mes 3 al mes 8, y retiros de $ 350 000 del mes 12 al 18. Si pagan un interés del 2 % mensual, ¿qué saldo disponible se tendrá al final de 2 años?

Rta.: 1 399 575,45 pesos.

11. Una maquinaria industrial tiene un precio de contado de $18 000 000. Se puede comprar a crédito, sin cuota inicial, con pagos de $700 000 pesos cada mes. Si se concede un periodo de gracia de 3 meses y la tasa de interés es del 3 % mensual, calcular el número de pagos enteros necesarios para cancelar el valor de la máquina.

Rta.: 63 pagos mensuales iguales.

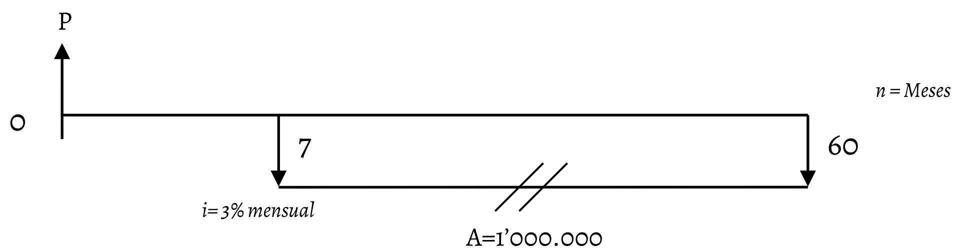
12. Una universidad para, facilitar el ingreso de estudiantes a sus posgrados, financia parte de su valor así: valor a financiar $5 625 000, tasa de interés = 1,5 % mensual, número de pagos = 4 ciclos trimestrales. Se pide calcular el valor de cada pago trimestral.

Rta.: $1 570 422,4110 pesos.

5.11. Solución de las situaciones propuestas

1.

a. **Solución manual**

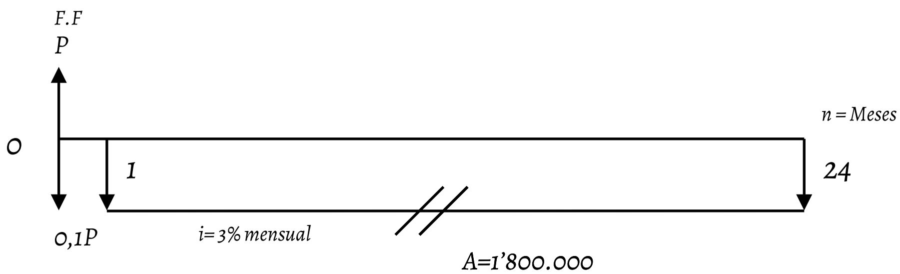


$$P = \frac{1'000.000\left[\frac{(1+0,03)^{60}-1}{0,03(1+0,03)^{60}}\right]}{(1+0,03)^{6}} \rightarrow P = 23'177.848,87$$

Solución en Excel

	D	E	F	G
12				
13		Tasa	3%	mensual
14		Cuotas	$ 1.000.000	
15		n	54	
16				
17		a.	=+VA(F13;F15;-F14;)	
18			VA(tasa; nper; pago; [vf]; [tipo])	

b. Solución manual



$$P = 0{,}1P + 1'800.000\left[\frac{(1+0{,}03)^{24}-1}{0{,}03(1+0{,}03)^{24}}\right] \rightarrow P - 0{,}1P = 30'483.975{,}82$$

$$0{,}9P = 30'483.975{,}82 \rightarrow P = \frac{30'483.975{,}82}{0{,}9} \rightarrow P = 33'871.084{,}24$$

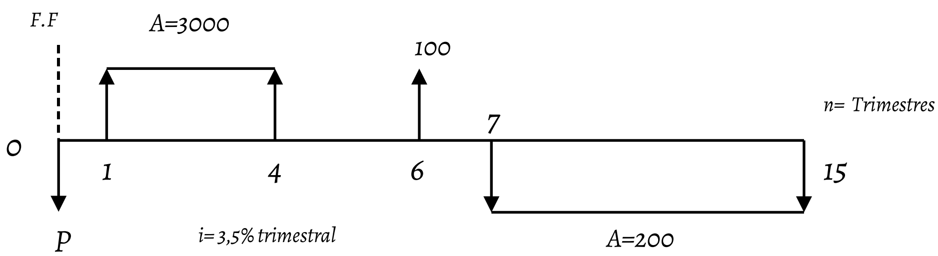
Solución en Excel

	E	F	G	H
20				
21	b.	P	$ 1.800.000	
22		n	24	
23		tasa	3%	
24				
25		Valor de auto	=+VA(G23;G22;-G21;)	
26		10% del valor del auto	VA(tasa; nper; pago; [vf]; [tipo]) $ 3.048.397,58	
27		Valor final a pagar	$33.532.373,40	
28				

	E	F	G
20			
21	b.	P	$ 1.800.000
22		n	24
23		tasa	3%
24			
25		Valor de auto	$30.483.975,82
26		10% del valor del auto	=+G25*10%
27		Valor final a pagar	$33.532.373,40
28			
29			

	E	F	G
20			
21	b.	P	$ 1.800.000
22		n	24
23		tasa	3%
24			
25		Valor de auto	$30.483.975,82
26		10% del valor del auto	$ 3.048.397,58
27–28		Valor final a pagar	=+G25+G26

2. Solución manual



$$P + \frac{200\left[\frac{(1+0,035)^{9}-1}{0,035\,(1+0,035)^{9}}\right]}{(1+0,035)^{6}} = 30000\left[\frac{(1+0,035)^{4}-1}{0,035\,(1+0,035)^{4}}\right] + \frac{100}{(1+0,035)^{6}}$$

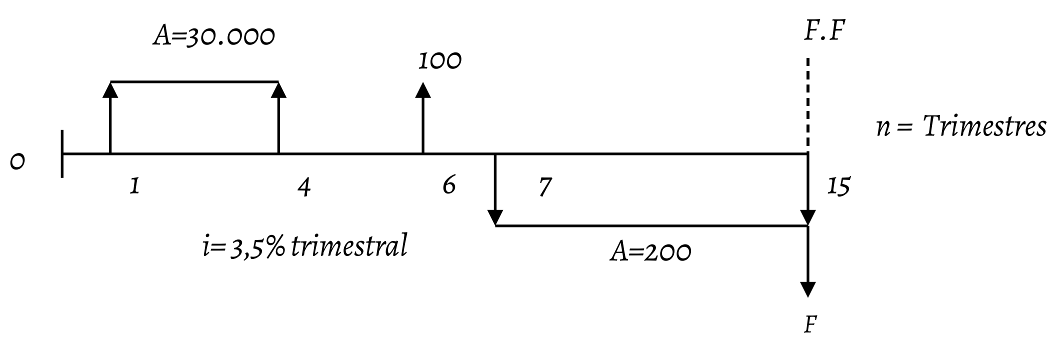
$$P + 1237,7716 = 110192,3763 + 81,3501 \rightarrow P = 110192,3763 + 81,3501 - 1237,7716$$

$$P = 1\,09.035,9548$$

Solución Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
32																				
33			Eje del tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Trim
34			FCN		$ 30.000	$ 30.000	$ 30.000	$ 30.000	$ -	$ 100	-$ 200	-$ 200	-$ 200	-$ 200	-$ 200	-$ 200	-$ 200	-$ 200	-$ 200	
35																				
36					Tasa	3,50%	Trim													
37																				
38				Valor presente de lo flujos	VPN	=+VNA(F36;E34:S34)														
39						VNA(tasa; valor1; [valor2]; [valor3]; ...)														

3. Solución manual

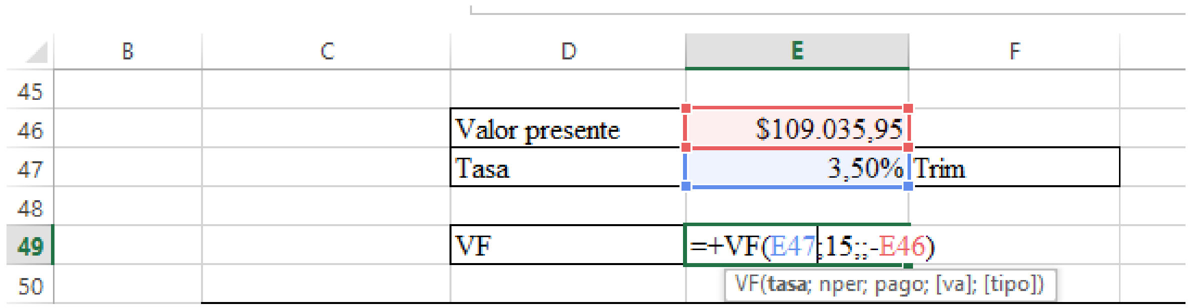


$$200\left[\frac{(1+0{,}035)^{9}-1}{0{,}035}\right]+F=100(1+0{,}035)^{9}+30000\left[\frac{(1+0{,}035)^{4}-1}{0{,}035}\right](1+0{,}035)^{11}$$

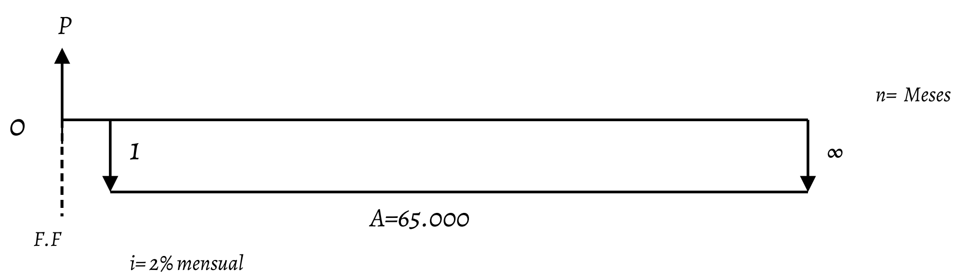
$$2073{,}6992+F=136{,}2897+184610{,}6687\rightarrow F=136{,}2897+184610{,}6687-2073{,}6992$$

$$F=182.673{,}2592$$

Solución en Excel



4. Solución manual



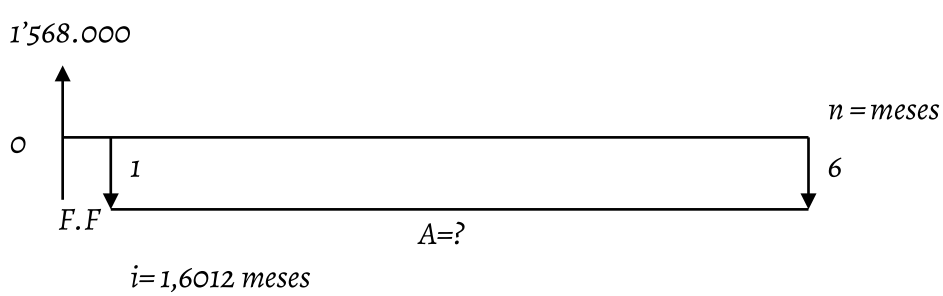
$$P=\frac{A}{i}\rightarrow P=\frac{65.000}{0{,}02}\rightarrow P=3'250.000$$

5. Solución manual

La tasa de interés es semestral, debido a que las cuotas son semestrales, esta se debe convertir en su equivalente mensual.

$$i=10\%\ Semestral$$

$$i=(1+0{,}1)^{1/6}-1\rightarrow i=0{,}016012\rightarrow i=1{,}6012\ Mensual$$



$$A = 1'568.000\left[\frac{0,016012\ (1 + 0,016012\ )^{6}}{(1 + 0,016012\ )^{6} - 1}\right] \rightarrow\ A = 276.172,6953$$

Solución en Excel

	C	D	E	F	G	H
65						
66		Valor matricula	$ 2.240.000	Tasa	=+(1+0,1)^(0,166666666666667)-1	
67		A financiar	$ 1.568.000			
68		Dinero de Luis	$ 672.000	Cuota	$276.172,70	
69						

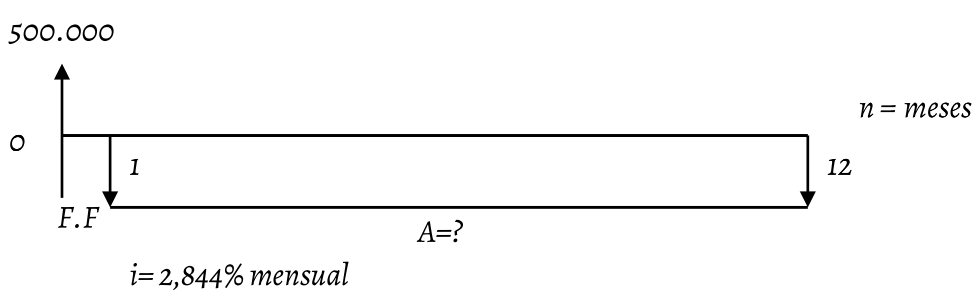
	C	D	E	F	G	H
65						
66		Valor matricula	$ 2.240.000	Tasa	1,6012%	Mensual
67		A financiar	$ 1.568.000			
68		Dinero de Luis	$ 672.000	Cuota	=+PAGO(G66;6;-E67)	
69					PAGO(tasa; nper; va; [vf]; [tipo])	

6. Solución manual

Tasa de financiación anual

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 \rightarrow i = \sqrt[1]{\frac{700.000}{500.000}} - 1 \rightarrow i = 40,00\%\ E.A.$$

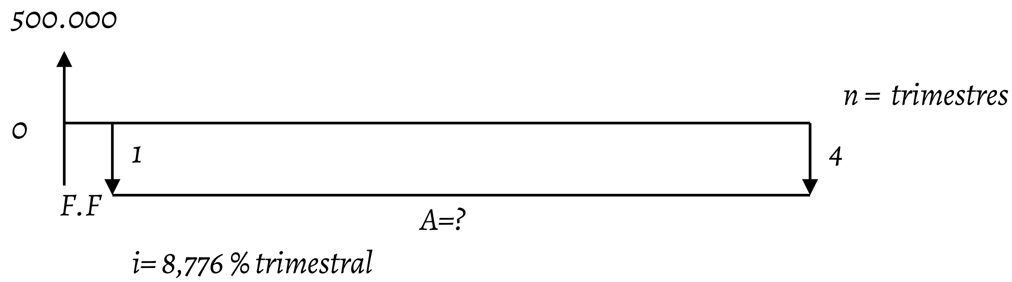
Pagos mensuales:



$$TEM\ = (1 + 0,4)^{1/12} - 1 \rightarrow\ TEM\ = 2,844\ \%\ Mensual$$

$$A\ = P\left[\frac{i(1 + i)^{n}}{(1 + i)^{n} - 1}\right] \rightarrow\ A\ = 500.000\left[\frac{0.02844\ (1 + 0.02844\ )^{12}}{(1 + 0.02844\ )^{12} - 1}\right] \rightarrow A\ = 49.763,27$$

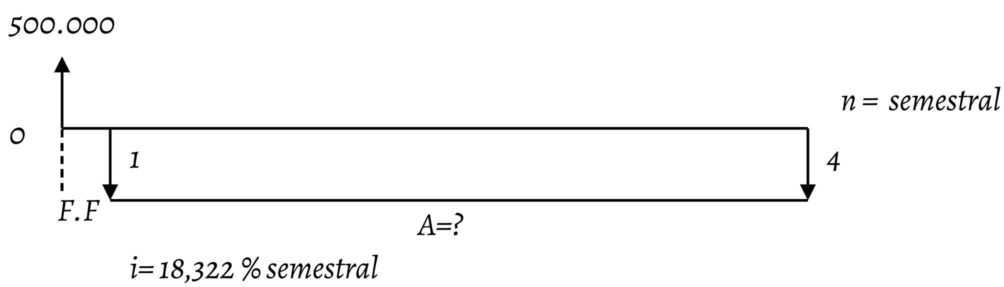
Pagos trimestrales:



$$TEM = (1+0,4)^{1/4} - 1 \rightarrow TEM = 8,776\ \%\ Trimestral$$

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \rightarrow A = 500.000\left[\frac{0.08776\ (1+0.08776)^4}{(1+0.08776)^4 - 1}\right] \rightarrow A = 153.575,29$$

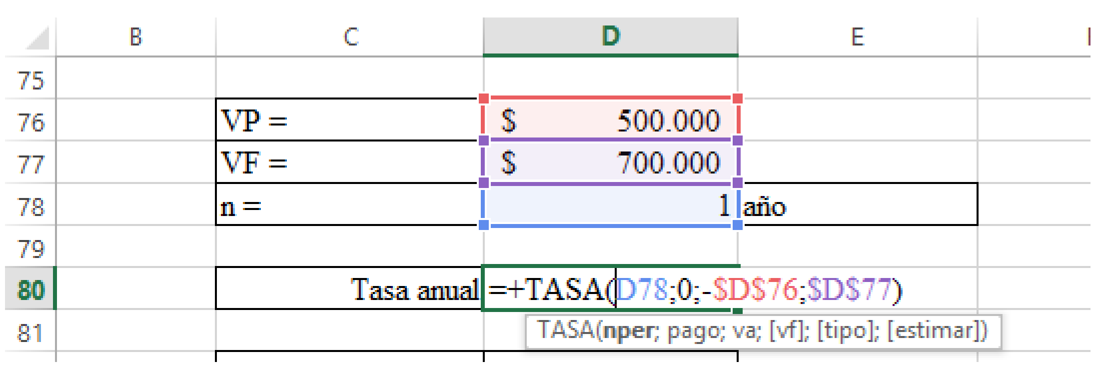
Pagos semestrales:



$$TEM = (1+0,4)^{1/2} - 1 \rightarrow TEM = 18,322\ \%\ \ Semestral$$

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \rightarrow A = 500.000\left[\frac{0.018322\ \ (1+0.018322\ )^2}{(1+0.0183227)^2 - 1}\right] \rightarrow A = 320.627,92$$

Solución en Excel

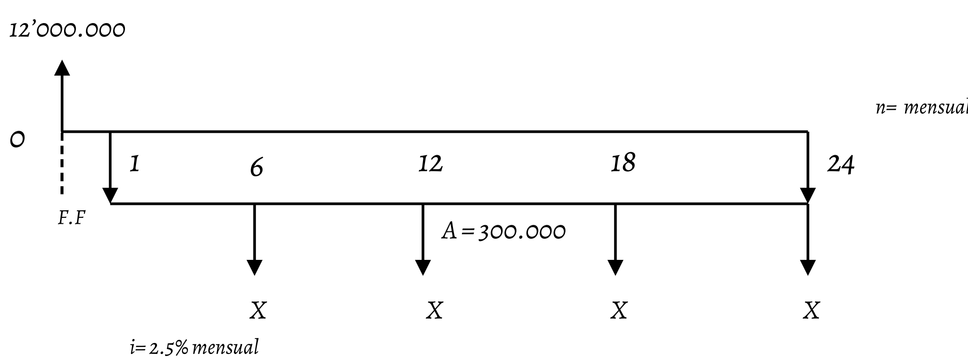


	B	C	D	E
75				
76		VP =	$ 500.000	
77		VF =	$ 700.000	
78		n =	1	año
79				
80		Tasa anual	=+TASA(D78;0;-$D$76;$D$77)	
81			TASA(nper; pago; va; [vf]; [tipo]; [estimar])	

	B	C	D	E
79				
80		Tasa anual	40,000%	
81				
82		n =	12	
83		TEM	=+TASA(D82;0;-$D$76;D$77)	
84		Cuotas mensuales	TASA(**nper**; pago; va; [vf]; [tipo]; [estimar])	
85				
86		n =	4	
87		TET	8,776%	trimestral
88		Cuotas trimestrales	$153.575,29	
89				
90		n =	2	
91		TES	18,322%	semestral
92		Cuotas semestrales	$320.627,92	

	B	C	D	E
79				
80		Tasa anual	40,000%	
81				
82		n =	12	
83		TEM	2,844%	mensual
84		Cuotas mensuales	=+PAGO(D83;12;-$D$76)	
85			**PAGO**(tasa; nper; va; [vf]; [tipo])	
86		n =	4	
87		TET	8,776%	trimestral
88		Cuotas trimestrales	$153.575,29	
89				
90		n =	2	
91		TES	18,322%	semestral
92		Cuotas semestrales	$320.627,92	

7. Solución manual



$$TEM = \frac{0.3}{12} \rightarrow 0.025 \times 100 \rightarrow i = 2.5\%\ mensual$$

$$12'000.000 = 300.000\left[\frac{(1+0.025)^{24}-1}{0.025(1+0.025)^{24}}\right] + \frac{x}{(1+0.025)^{6}} + \frac{x}{(1+0.025)^{12}} +$$

$$\frac{x}{(1+0.025)^{18}} + \frac{x}{(1+0.025)^{24}}$$

$$12'000.000 = 5'365.495,75 + 0.8623x + 0.7436x + 0.6412x + 0.5529x$$

$$12'000.000 - 5'365495,75 = 2,8x \rightarrow x = \frac{6'6345.074,25}{2,8} \rightarrow x = 2'369.550,4305$$

Solución en Excel

	D	E	F	G	H	I
1						
2		TEM =	=30%/12			
3		Crédito =	12000000			
4		Número Cuotas =	24 cuotas			
5		Valor cuotas =	300000			
6		Valor cuotas Extra =	100			
7						
8		No	Depósito	Interés	Abono	Saldo
9		0				=+F3
10		1	=+$F$5	=+I9*$F$2	=+F10-G10	=+I9-H10
15		6	=+$F$5+F6	=+I14*$F$2	=+F15-G15	=+I14-H15
21		12	=+$F$5+F6	=+I20*$F$2	=+F21-G21	=+I20-H21
27		18	=+$F$5+F6	=+I26*$F$2	=+F27-G27	=+I26-H27
33		24	=+$F$5+F6	=+I32*$F$2	=+F33-G33	=+I32-H33
34						
35						

TEM =	2,50%
Crédito =	$ 12.000.000
Número Cuotas =	24 cuotas
Valor cuotas =	$ 300.000
Valor cuotas Extra =	$ 100

No	Depósito	Interés	Abono	Saldo
0				$ 12.000.000
1	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
2	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
3	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
4	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
5	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
6	$ 300.100	$ 300.000	$ 100	$ 11.999.900
7	$ 300.000	$ 299.998	$ 3	$ 11.999.898
8	$ 300.000	$ 299.997	$ 3	$ 11.999.895
9	$ 300.000	$ 299.997	$ 3	$ 11.999.892
10	$ 300.000	$ 299.997	$ 3	$ 11.999.890
11	$ 300.000	$ 299.997	$ 3	$ 11.999.887
12	$ 300.100	$ 299.997	$ 103	$ 11.999.784
13	$ 300.000	$ 299.995	$ 5	$ 11.999.779
14	$ 300.000	$ 299.994	$ 6	$ 11.999.773
15	$ 300.000	$ 299.994	$ 6	$ 11.999.767
16	$ 300.000	$ 299.994	$ 6	$ 11.999.762
17	$ 300.000	$ 299.994	$ 6	$ 11.999.756
18	$ 300.100	$ 299.994	$ 106	$ 11.999.650
19	$ 300.000	$ 299.991	$ 9	$ 11.999.641
20	$ 300.000	$ 299.991	$ 9	$ 11.999.632
21	$ 300.000	$ 299.991	$ 9	$ 11.999.623
22	$ 300.000	$ 299.991	$ 9	$ 11.999.613
23	$ 300.000	$ 299.990	$ 10	$ 11.999.603
24	$ 300.100	$ 299.990	$ 110	$ 11.999.494

Buscar objetivo

Definir la celda: $I$33

Con el valor: 0

Cambiando la celda: $F$6

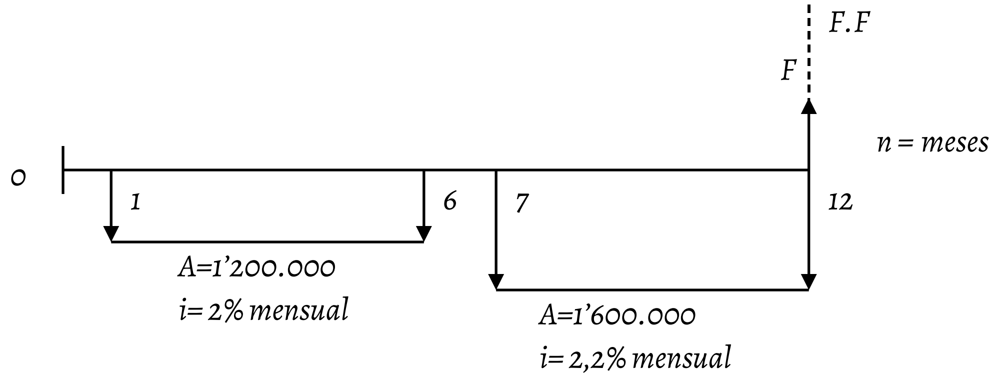
Aceptar Cancelar

Resultado final

TEM =	2,50%
Crédito =	$ 12.000.000
Número Cuotas =	24 cuotas
Valor cuotas =	$ 300.000
Valor cuotas Extra =	$ 2.369.555

No	Depósito	Interés	Abono	Saldo
0				$ 12.000.000
1	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
2	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
3	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
4	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
5	$ 300.000	$ 300.000	$ -	$ 12.000.000
6	$ 2.669.555	$ 300.000	$ 2.369.555	$ 9.630.445
7	$ 300.000	$ 240.761	$ 59.239	$ 9.571.206
8	$ 300.000	$ 239.280	$ 60.720	$ 9.510.486
9	$ 300.000	$ 237.762	$ 62.238	$ 9.448.248
10	$ 300.000	$ 236.206	$ 63.794	$ 9.384.454
11	$ 300.000	$ 234.611	$ 65.389	$ 9.319.065
12	$ 2.669.555	$ 232.977	$ 2.436.579	$ 6.882.487
13	$ 300.000	$ 172.062	$ 127.938	$ 6.754.549
14	$ 300.000	$ 168.864	$ 131.136	$ 6.623.412
15	$ 300.000	$ 165.585	$ 134.415	$ 6.488.998
16	$ 300.000	$ 162.225	$ 137.775	$ 6.351.223
17	$ 300.000	$ 158.781	$ 141.219	$ 6.210.003
18	$ 2.669.555	$ 155.250	$ 2.514.305	$ 3.695.698
19	$ 300.000	$ 92.392	$ 207.608	$ 3.488.090
20	$ 300.000	$ 87.202	$ 212.798	$ 3.275.293
21	$ 300.000	$ 81.882	$ 218.118	$ 3.057.175
22	$ 300.000	$ 76.429	$ 223.571	$ 2.833.604
23	$ 300.000	$ 70.840	$ 229.160	$ 2.604.444
24	$ 2.669.555	$ 65.111	$ 2.604.444	$ 0

8. Solución manual



$$1'200.000\left[\frac{(1+0{,}02)^{6}-1}{0{,}02}\right](1+0{,}02)(1+0{,}022)^{5}+1'600.000\left[\frac{(1+0{,}022)^{6}-1}{0{,}022}\right]=F$$

$$8'6'08.667{,}014 + 10'143.745{,}81 = F$$

$$F = 18'752.412{,}82$$

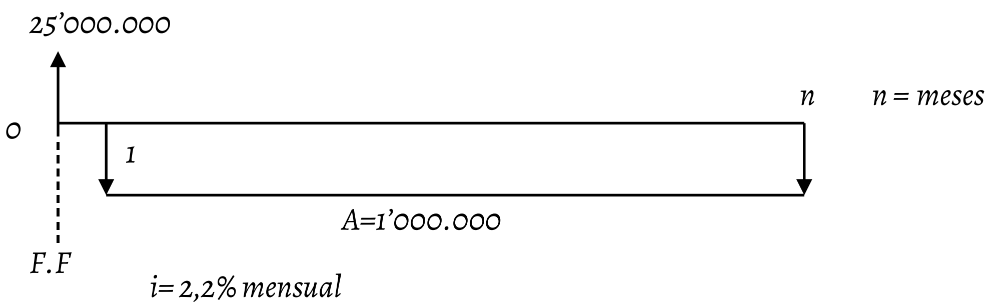
Solución en Excel

	B	C	D	E	F	G	H
1							
2		Cuotas primeros 6 meses	1200000				
3		Cuptas últimos 6 meses	1600000				
4		Tasa primeros 6 meses	0,02				
5		Tasa últimos 6 meses	0,022				
6							
7		No	Depósito	Interés	Depósito + Interés	Saldo	Tasa
8		0				0	
9		1	=+$D$2			=+D9	0,02
10		2	=+$D$2	=+G9*H9	=+E10+D10	=+G9+F10	0,02
15		7	=+$D$3	=+G14*H14	=+E15+D15	=+G14+F15	0,022
16		8	=+$D$3	=+G15*H15	=+E16+D16	=+G15+F16	0,022
20		12	=+$D$3	=+G19*H19	=+E20+D20	=+G19+F20	0,022
21							

Cuotas primeros 6 meses	$ 1.200.000
Cuptas últimos 6 meses	$ 1.600.000
Tasa primeros 6 meses	2%
Tasa últimos 6 meses	2,20%

No	Depósito	Interés	Depósito + Interés	Saldo	Tasa
0				0	
1	$ 1.200.000			$ 1.200.000	2%
2	$ 1.200.000	$ 24.000	$ 1.224.000	$ 2.424.000	2%
3	$ 1.200.000	$ 48.480	$ 1.248.480	$ 3.672.480	2%
4	$ 1.200.000	$ 73.450	$ 1.273.450	$ 4.945.930	2%
5	$ 1.200.000	$ 98.919	$ 1.298.919	$ 6.244.848	2%
6	$ 1.200.000	$124.897	$ 1.324.897	$ 7.569.745	2%
7	$ 1.600.000	$151.395	$ 1.751.395	$ 9.321.140	2,20%
8	$ 1.600.000	$205.065	$ 1.805.065	$ 11.126.205	2,20%
9	$ 1.600.000	$244.777	$ 1.844.777	$ 12.970.982	2,20%
10	$ 1.600.000	$285.362	$ 1.885.362	$ 14.856.343	2,20%
11	$ 1.600.000	$326.840	$ 1.926.840	$ 16.783.183	2,20%
12	$ 1.600.000	$369.230	$ 1.969.230	$ 18.752.413	2,20%

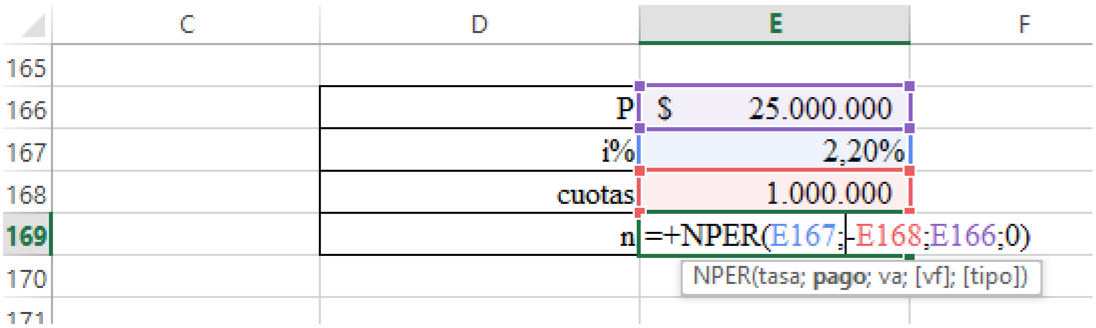
9. Solución manual



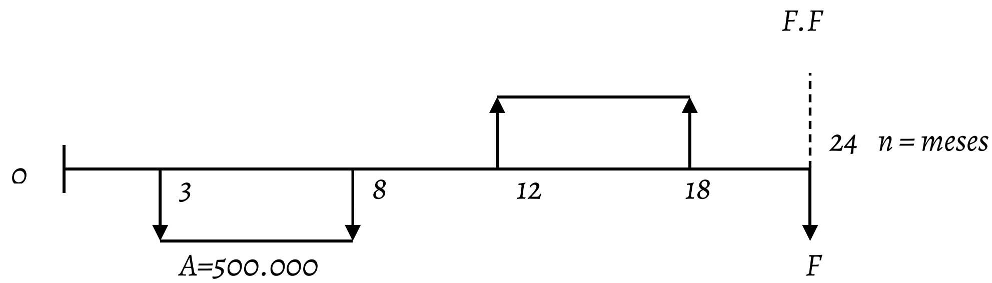
$$n = \frac{LogA - Log\,(A - Pi)}{Log\,(1 + i)} \rightarrow \frac{Log\,(1'000.000) - Log\,(1'000.000 - 25'000.000 \times 0{,}022)}{Log\,(1 + 0{,}022)}$$

$$n = 36{,}69 \approx 37 \ \ pagos$$

Solución en Excel



10. Solución manual



$i = 2\ \%$ *mensual*

$$500.000\left[\frac{(1+0{,}02)^{6}-1}{0{,}02}\right](1+0{,}02)^{16}+F=350.000\left[\frac{(1+0{,}02)^{7}-1}{0{,}02}\right](1+0{,}02)^{6}$$

$$3'154.060{,}48\,(1+0{,}02)^{16}+F=2'601.999{,}18\,(1+0{,}02)^{6}$$

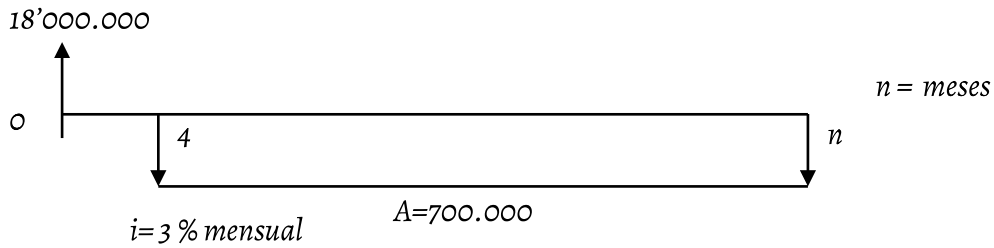
$$F=4'329849{,}14-3'571987{,}279 \rightarrow F=1'399.575{,}448$$

Solución en Excel

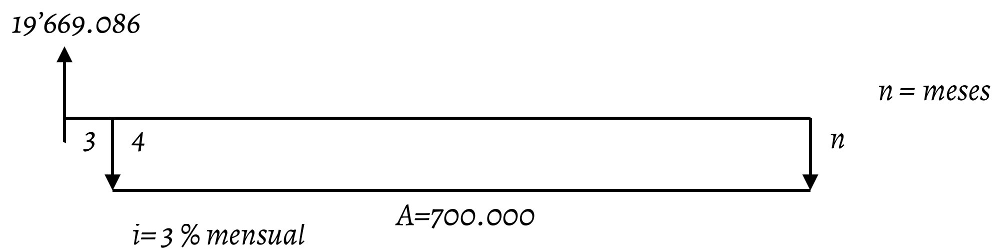
	C	D	E	F	G	H
1						
2						
3		Tasa	0,02			
4						
5		No	Depósito	Interés	Depósito + Interés	Saldo
6		0				
7		1				=+E7
8		2		=+H7*$E$3	=+F8+E8	=+H7+G8
9		3	500000	=+H8*$E$3	=+F9+E9	=+H8+G9
15		9		=+H14*$E$3	=+F15+E15	=+H14+G15
18		12	-350000	=+H17*$E$3	=+F18+E18	=+H17+G18
30		24		=+H29*$E$3	=+F30+E30	=+H29+G30

	C	D	E	F	G	H
176						
177		Tasa	2%			
178						
179		No	Depósito	Interés	Depósito + Interés	Saldo
180		0				
181		1				$ -
182		2		$ -	$ -	$ -
183		3	$ 500.000	$ -	$ 500.000	$ 500.000
184		4	$ 500.000	$ 10.000	$ 510.000	$ 1.010.000
185		5	$ 500.000	$ 20.200	$ 520.200	$ 1.530.200
186		6	$ 500.000	$ 30.604	$ 530.604	$ 2.060.804
187		7	$ 500.000	$ 41.216	$ 541.216	$ 2.602.020
188		8	$ 500.000	$ 52.040	$ 552.040	$ 3.154.060
189		9		$ 63.081	$ 63.081	$ 3.217.142
190		10		$ 64.343	$ 64.343	$ 3.281.485
191		11		$ 65.630	$ 65.630	$ 3.347.114
192		12	-$ 350.000	$ 66.942	-$ 283.058	$ 3.064.056
193		13	-$ 350.000	$ 61.281	-$ 288.719	$ 2.775.338
194		14	-$ 350.000	$ 55.507	-$ 294.493	$ 2.480.844
195		15	-$ 350.000	$ 49.617	-$ 300.383	$ 2.180.461
196		16	-$ 350.000	$ 43.609	-$ 306.391	$ 1.874.070
197		17	-$ 350.000	$ 37.481	-$ 312.519	$ 1.561.552
198		18	-$ 350.000	$ 31.231	-$ 318.769	$ 1.242.783
199		19		$ 24.856	$ 24.856	$ 1.267.639
200		20		$ 25.353	$ 25.353	$ 1.292.991
201		21		$ 25.860	$ 25.860	$ 1.318.851
202		22		$ 26.377	$ 26.377	$ 1.345.228
203		23		$ 26.905	$ 26.905	$ 1.372.133
204		24		$ 27.443	$ 27.443	$ 1.399.575

11. Solución manual



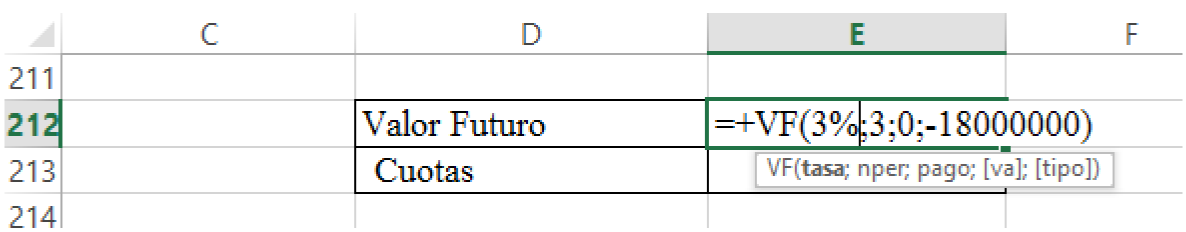
$F = 18'000.000(1 + 0,03)^{3} \rightarrow F = 19'669.086$ *Este es el valor presente actualizado al inicio del pago de la cuotas*



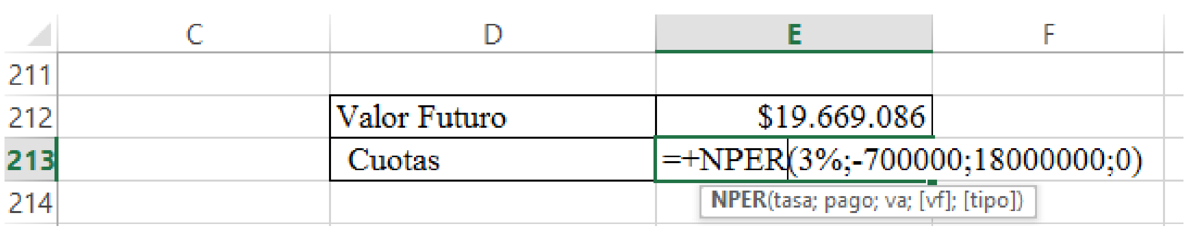
$$n = \frac{Log A - Log (A - Pi)}{Log (1 + i)} \rightarrow \frac{Log (700.000) - Log (700.000 - 19'669.086 \times 0,03)}{Log (1 + 0,03)}$$

$n = 62,63 \approx 63$ *pagos*

Solución en Excel

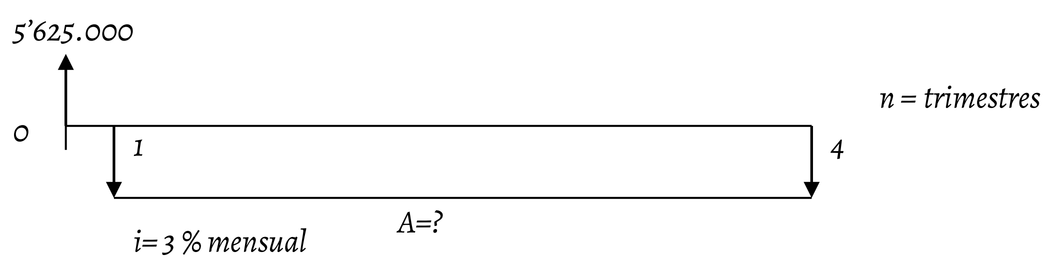


	C	D	E	F
211				
212		Valor Futuro	=+VF(3%;3;0;-18000000)	
213		Cuotas	VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])	
214				



	C	D	E	F
211				
212		Valor Futuro	$19.669.086	
213		Cuotas	=+NPER(3%;-700000;18000000;0)	
214			NPER(tasa; pago; va; [vf]; [tipo])	

12. Solución manual



$$TET = (1 + 0{,}015)^4 - 1 \rightarrow 0{,}0623 \times 100 \rightarrow i = 6{,}23\ \%\ trimestral$$

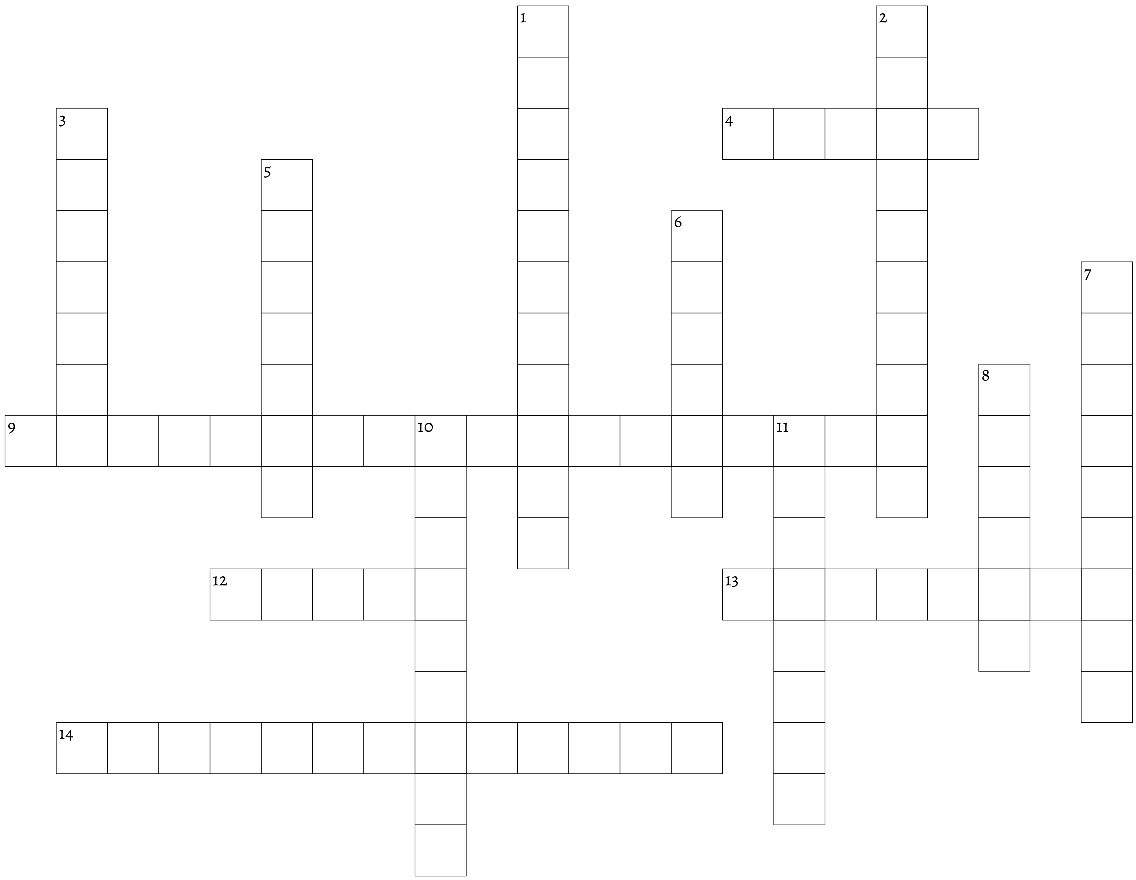
$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \rightarrow A = 5'625.000\left[\frac{0{,}0623\,(1 + 0{,}0623)^4}{(1 + 0{,}0623)^4 - 1}\right] \rightarrow A = 1'631.957{,}03$$

Solución en Excel

	C	D	E	F
220				
221		Valor a financiar	$ 5.625.000	
222		Tasa de interés	1,50%	mensual
223		Cuotas trimestrales	4	
224				
225		TET =	=+VF(-E222;-E223;0;-1)-1	
226			VF(tasa; nper; pago; [va]; [tipo])	
227		CUOTA	$1.631.957,03	
228				

	C	D	E	F
220				
221		Valor a financiar	$ 5.625.000	
222		Tasa de interés	1,50%	mensual
223		Cuotas trimestrales	4	
224				
225		TET =	6,232%	trimestral
226				
227		CUOTA	=+PAGO(E225;E223;-E221)	
228			PAGO(tasa; nper; va; [vf]; [tipo])	
229				

¡BIENVENIDO AL DESAFÍO DE PALABRAS! N° 5



Horizontales

4. —Pago o cuota
9. —Tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final de pago
12. —En anualidad el número de periodos es igual al número de…
13. —Tipo de anualidad que también puede ser llamada indefinida
14. —Tiempo que transcurre entre un pago y otro

Verticales

1. —Tipo de anualidad en donde la fecha del primer y último pago no están fijadas de antemano
2. —Los pagos se efectúan al principio de cada periodo
3. —Tipo de anualidad en la que el periodo de capitalización de los intereses y el periodo de pago no coinciden
5. —Tipo de anualidad en la que los pagos se efectúan al final del periodo
6. —Tipo de anualidad en la que el periodo de pago coinciden con el de capitalización de los intereses.
7. —Otro tipo de anualidad según el momento en que se inician
8. —Tipo de anualidad en la que las fechas son fijas y se estipulan de antemano
10. —Pagos iguales y secuenciales afectados por la misma tasa
11. —En estas anualidades, los pagos se empiezan a hacer tiempo después de la formalización del trato.

Capítulo 6

SERIES VARIABLES O GRADIENTES

6.1. Objetivos

General

- Desarrollar el concepto de series variables o gradientes y su utilidad en las operaciones financieras. Este es un concepto ampliamente utilizado en las distintas operaciones financieras como la compra de vivienda.

Específicos

- Explicar teóricamente qué son las series variables o gradientes al igual que los conceptos asociados a estas.
- Determinar y revisar el campo de aplicación de las series variables o gradientes.
- Definir las fórmulas de aplicación.
- Conocer el manejo matemático del tema.
- Identificar los distintos tipos de series variables o gradientes y contrastar las diferencias existentes entre estas.
- Realizar ejercicios para afianzar el manejo teórico-práctico del tema.

6.2. Introducción

Las series variables o gradientes son la base de esquemas de financiación de vivienda de largo plazo. En Colombia fueron la base para el sistema UPAC y hoy con el sistema bajo UVR. Este capítulo de dedica a comprender cómo operan, sus consideraciones y sus potenciales para seguir explorando mecanismos alternos de financiación a las tradicionales series uniformes.

6.3. Definición

Se llama *gradiente* a una serie de flujos de dinero periódicos que pueden aumentar o disminuir en cada pago de esta serie de flujos; pueden ser en una cantidad constante o en un porcentaje.

Para que una serie de pagos sea un gradiente debe presentar las siguientes condiciones:

- Los pagos deben tener una ley de formación (aumentan o disminuyen en una cantidad constante o en un porcentaje fijo).
- Los pagos deben ser periódicos.
- La serie de pagos debe tener un valor presente (P) equivalente y un valor futuro (F) equivalente.
- El número de periodos debe ser igual al número de pagos.

6.4. Gradiente lineal o aritmético

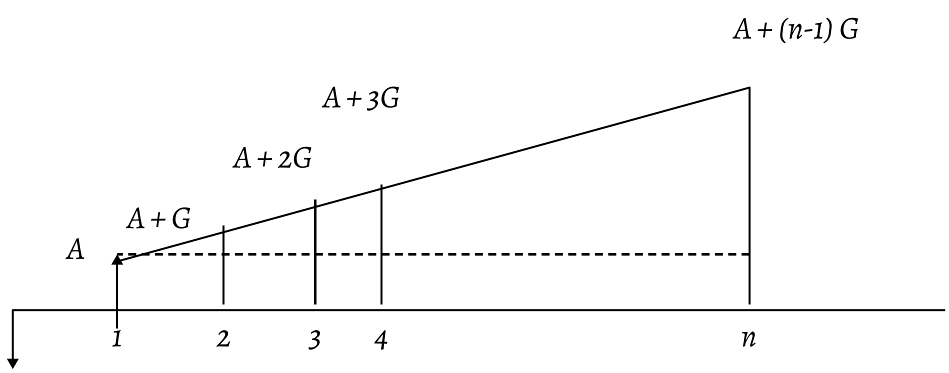
El gradiente lineal o aritmético hace referencia a una serie de pagos que se aumentan o disminuyen con respecto al pago anterior, de forma aritmética, o sea, en una cantidad constante en peso.

6.4.1. Valor presente de un gradiente lineal creciente

Las series de pagos, como ya se dijo anteriormente, pueden aumentar o disminuir con respecto al pago anterior. Cuando las series de pago aumentan en cada periodo en una cantidad constante (G), se conoce como un gradiente lineal creciente (GLC).

El flujo de caja para (GLC) es el mostrado en la figura 6.1.

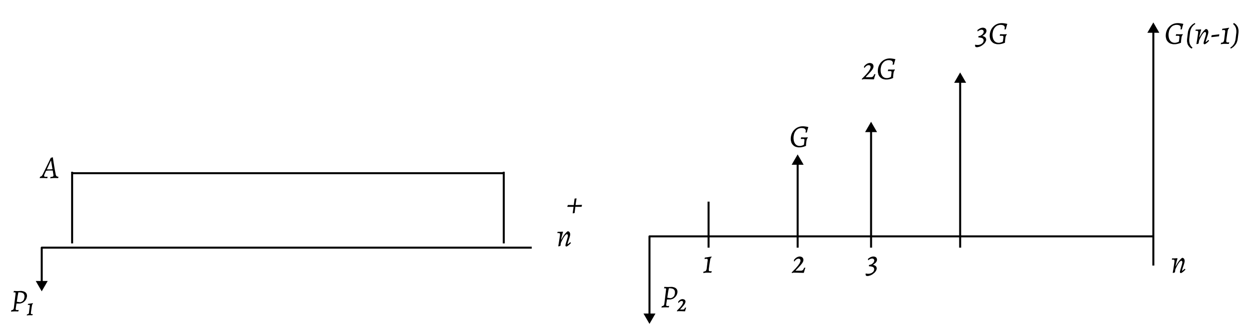
Figura 6.1. Diagrama flujo de caja - DFC del valor presente de Gradiente lineal creciente - GLC



Fuente: elaboración propia.

Como se observa, si no existiera la variación (G), la serie de pagos sería considerada una anualidad, así que se puede descomponer el anterior flujo de caja, en dos flujos equivalentes (figura 6.2).

Figura 6.2. Diagrama flujo de caja - DFC de un GLC detallado por anualidad y componente de variación.



Fuente: elaboración propia.

El valor presente del primer flujo de caja es la suma del valor presente de los dos flujos de caja calculado de forma individual.

$P = P_{1+} P_2$

En el primer flujo de caja, es una anualidad vencida, cuyo valor presente se representa en la siguiente fórmula.

$$P1 = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Analizando el segundo flujo de caja, se observa que el incremento de la cuota comienza en el periodo 2; por eso, en el momento *n*, el valor en el que aumenta el primer pago (*A*) es igual a la variación (*G*) multiplicado por el número de periodos transcurridos menos 1 (G (n-1)).

El valor presente del segundo flujo de caja es:

$$P2 = G\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

A través de ciertos cálculos matemáticos que se omitirán aquí, se llega a la siguiente expresión generalizadora.

V $$P2 = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

Ahora, sumando los dos valors presentes se obtiene:

$$P = P1 + P2 = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \tag{6.1}$$

Donde:

P = Valor presente de la serie de pago

A = Valor de la primera cuota

I = Tasa de interés de la operación

N = Número de pagos

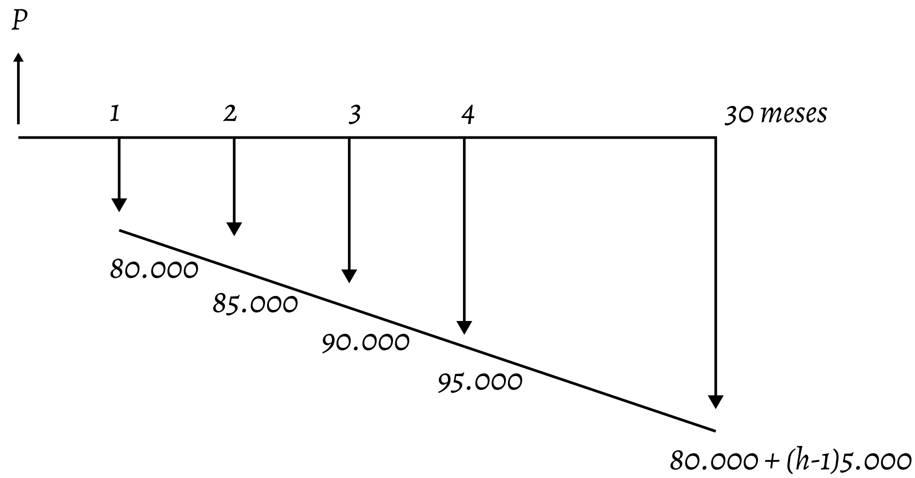
G = Valor constante en que aumenta cada cuota. El valor presente que se calcula con la expresión (6.1) se ubica en un periodo inmediatamente anterior al primer pago.

Ejemplo (6.1)

El valor de un automóvil se acordó cancelar con 30 cuotas mensuales, que aumentan cada una en $ 5000, siendo la primera cuota de $ 80 000. Si la tasa de interés de la operación es del 2,5 % mensual, calcular el valor de la máquina.

El flujo de caja:

Figura 6.3. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 6.1



Fuente: elaboración propia.

Datos:
$P = ?$
$G = \$\,5000$
$i = 2{,}5\,\%$ mensual
$n = 30$ meses

El número de periodos del gradiente está dado por la diferencia entre el periodo en que termina y el periodo en que está localizado su presente o cero. Para este caso, el periodo en que termina es 30 y el periodo en que está su valor presente es en el momento cero, entonces el número de pagos 30-0= 30

Aplicando la fórmula:

$$P = 80\,000 \left[\frac{(1{,}025)^{30} - 1}{0{,}025\ (1{,}025)^{30}} \right] + \frac{5.000}{0{,}025} \left[\frac{(1{,}025)^{30} - 1}{0{,}025\ (1{,}025)^{30}} - \frac{30}{(1{,}025)^{30}} \right]$$

Este resultado indica que es equivalente cancelar hoy $ 3 000 025 814 que cancelar 30 cuotas mensuales que aumentan mes a mes en $ 5000, con una tasa de interés del 2,5 % mensual y una primera cuota de $ 80 000.

Si se desea saber la cuota a pagar en cierto periodo, sería muy tedioso sumar el incremento (*g*) al pago inicial hasta llegar a la cuota deseada. Para evitar estas complicaciones, se ha desarrollado una fórmula que permite encontrar la cuota en cualquier momento.

En el ejemplo (6.1) la caja aumenta en $ 5000 cada mes, siendo la primera cuota $ 80 000, la segunda sería $ 85 000 (A+G), la tercera $ 90 000 (A+2G), la cuarta $ 95 000, la próxima A +(n-1)G.

Así, la expresión para calcular la cuota en el número (*n*) es:

$$Cn = A + (n-1)G \tag{6.2}$$

Supongamos que se desea saber cuánto es el valor de la cuota 18 aplicando la expresión (6.2):

C18= 80 000+ (18-1) 5 000

C18= 165 000

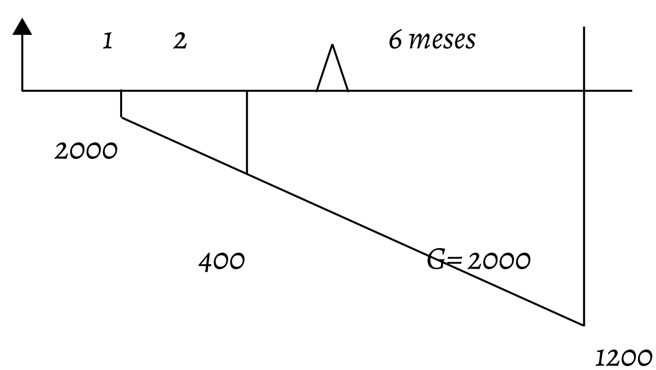
Donde:
C_n = Valor cuota *n*
n = Número de la cuota
A = Valor primera cuota
G = Variación de cada cuota

Ejemplo (6.2)

Se depositan hoy $ 18 480,5 en una corporación y se hacen retiros mensuales de $ 2000 dentro de un mes, $ 4000 dentro de dos meses y así sucesivamente hasta el 6 mes, de tal manera que cuando se haga el ultimo retiro el saldo en la cuenta sea $ 0 en contra del interés mensual.

El flujo de caja es el de la figura 6.4.

Figura 6.4. Diagrama flujo de caja - DFC del ejemplo 6.2



Fuente: elaboración propia.

Datos:
$P = 36\,231\,343$
$G = 2000$
$A = 2000$
$n = (6\text{-}0) = 6$ meses
$i = ?$

Aplicando fórmula:

$$36\,231\,343 = 2000\left[\frac{(1+i)^6 - 1}{i(l+i)^6}\right] + \frac{2000}{i}\left[\frac{(1+i)^6 - 1}{i(1+i)^6} - \frac{6}{(1+i)^6}\right]$$

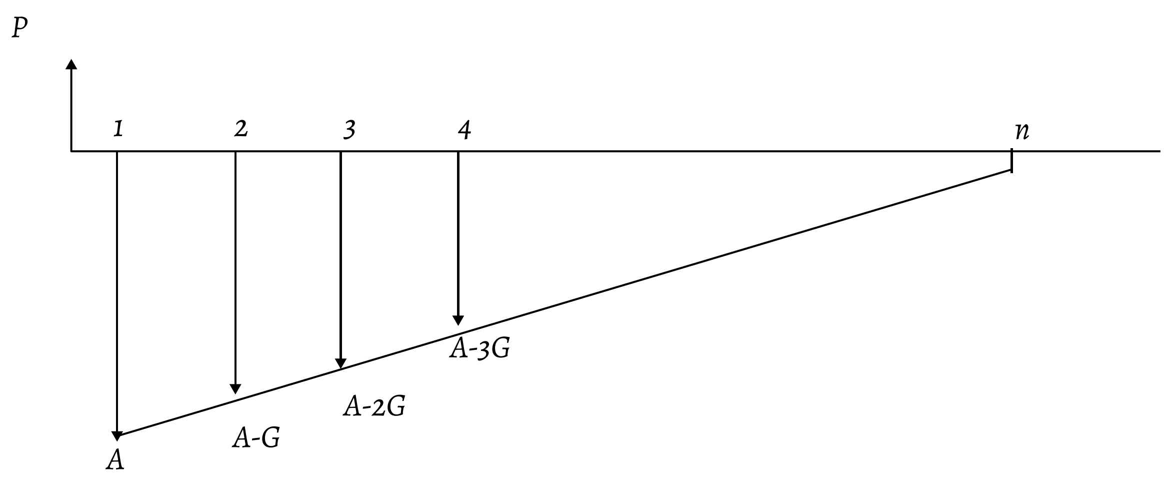
Al aplicar el método de interpolación lineal el ejercicio este arroja una tasa de interés del 3,5 % mensual.

6.4.2. Valor presente de un gradiente lineal decreciente

Cuando las series de pagos disminuyen en una cantidad constante (G), se denominan gradientes lineales decrecientes (GLD).

El flujo que arroja para un (GLD) es el mostrado en la figura 6.5.

Figura 6.5. Diagrama flujo de caja – DFC del valor Gradiente lineal decreciente - GLD



Fuente: elaboración propia.

Al gradiente lineal decreciente se le da un trámite muy parecido al creciente pero el factor en que varía la primera cuota será menor al de la primera en una cantidad (G), la tercera será menor a la segunda en una cantidad (G), y así sucesivamente hasta la enésima cuota. Se ha llegado a la conclusión de que la única diferencia entre el GLC y el GLD es el signo de G.

Si se ajusta la fórmula (6.1) sin realizar operación matemática alguna, solo cambiando el signo de la cantidad constante G de más (+) a menos (-), se tiene:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \tag{6.3}$$

Como ahora las cuotas disminuyen en la cantidad G, para encontrar la cuota en el momento n solo se cambia el signo positivo de G en la expresión (6,2) por uno negativo:

$$Cn = A(n\text{-}1)\,G \tag{6.4}$$

Ejemplo (6.3)

Un local se ha financiado con una cuenta inicial de \$1 000 000 y 40 pagos trimestrales que decrecen en \$200 000 cada mes, siendo el primer pago de \$1 200 000. Si la tasa de interés que se está nombrando es del 2,5 % mensual, calcular el valor del local.

Datos:

$P = ?$

$G = \$\,20\,000$

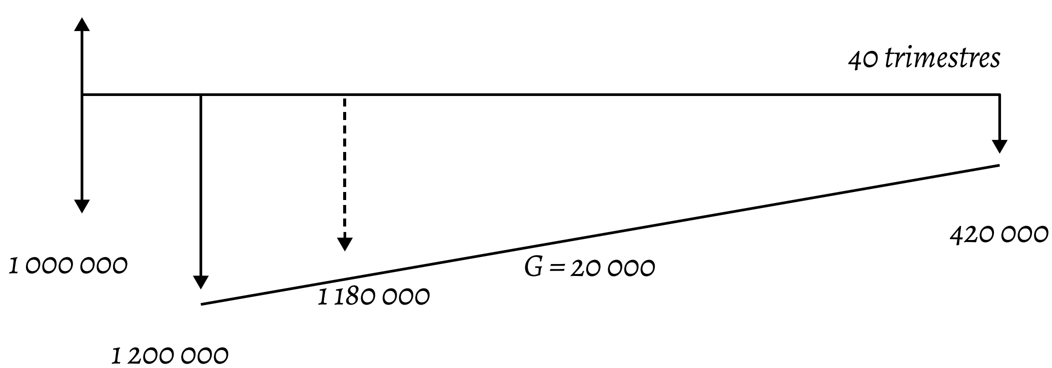
$A = 1\,200\,000$

$CI = 1\,000\,000$

$n = (40\text{-}0) = 40$

$i = 2{,}5\,\%$ mensual

Figura 6.6. Diagrama flujo de caja - DFC del ejemplo 6.3



Fuente: elaboración propia.

Aplicando la expresión (6.3), se obtiene:

$$P = 1\,000\,000 + 1\,200\,000 \left[\frac{(1{,}025)^{90} - 1}{0{,}025\ (1{,}025)^{40}} \right] - \frac{20\,000}{0{,}025} \left[\frac{(1{,}025)^{40} - 1}{(1{,}025)^{40} \cdot 0{,}025} - \frac{40}{(1{,}025)^{40}} \right]$$

$$P = 39\,287\,770{,}14$$

Ejemplo (6.4)

¿En qué cantidad debe disminuir mensualmente una serie de pagos constituidos por 45 cuotas para financiar una inversión de presupuestos que tienen un valor de contado de $ 24 500 000, si la primera cuota es de $ 180 000 y se cobra una tasa de interés del 2 % mensual?

Datos:
$P = 24\,500\,000$
$A = 180\,000$
$i = 2\,\%$ mensual
$n = 45$
$G = ?$

Se aplica la fórmula (6.3):

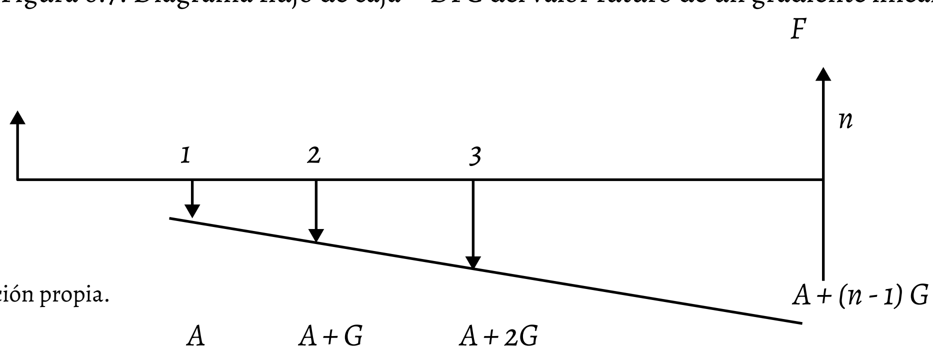
$$24\,500\,000 = 180\,000 \left[\frac{(1{,}02)^{45} - 1}{0{,}02\ (1{,}02)^{45}} \right] - \frac{G}{0{,}02} \left[\frac{(1{,}02)^{45} - 1}{0{,}02\ (1{,}02)^{45}} - \frac{40}{(1{,}02)^{45}} \right]$$

Desarrollando la ecuación, se obtiene G = $ 34 795,10969, lo que indica que mensualmente la primera cuota (*a*) de $ 180 000 tiene que disminuir en una cantidad constante (*G*) de $ 34 795,10969, para que al momento de pagar la cuota 45 se pueda cancelar por completo la deuda.

6.4.3. Valor futuro de un gradiente lineal

Consiste en calcular el valor futuro equivalente a una serie de pagos periódicos que aumentan (GCL) o disminuyen (GLD) en una cantidad constante (G). El flujo de caja es el mostrado en la figura 6.7.

Figura 6.7. Diagrama flujo de caja – DFC del valor futuro de un gradiente lineal



Fuente: elaboración propia.

Partiendo de la ecuación básica $F = P\,(1+i)^n$, se puede calcular el valor futuro (F) de un gradiente lineal trato creciente como reciente: la ecuación de un gradiente lineal, ya sea creciente (G positiva) o decreciente (G negativa) es:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

Si se reemplaza en:

$$F = P(1+i)^n$$

Se obtiene:

$$F = \left[A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \pm \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right](1+i)^n$$

Simplificando:

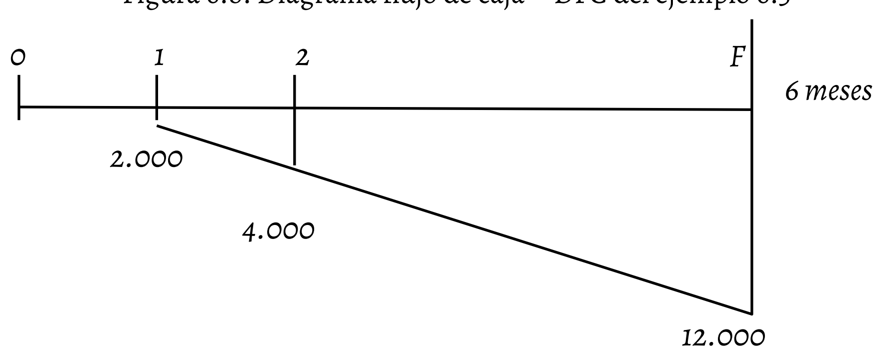
$$F = \left[A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \pm \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\right] \quad (6.5)$$

El valor futuro del gradiente, ya sea creciente o decreciente, estará ubicado en la fecha del último pago o ingreso, como se puede ver en el flujo de caja.

Ejemplo (6.5)

Una empresa decide ahorrar \$2 000 000 dentro de un mes, \$4 000 000 dentro de 2 meses, \$6 000 000 al tercer mes, y así sucesivamente hasta el mes 6 en el banco BBVA, que le reconoce una tasa de interés del 28 % mensual. ¿Cuánto tendrá la empresa acumulada en la cuenta una vez realizado el último depósito?

Figura 6.8. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 6.5



Fuente: elaboración propia.

Datos:

$A = 2\,000\,000$

$n = 6$ meses

$F = ¿$
$i = 2{,}8\,\%$ mensual
$G = 2\,000\,000$

Como los depósitos van aumentando en \$2 000 000, la serie de depósito es un gradiente lineal creciente; en la expresión (6.5) el valor de G es positivo.

Aplicando la fórmula:

$$F = 2.000.000\left[\frac{(1.028)^{6} - 1}{0.028}\right] + \frac{2.000.000}{0.028}\left[\frac{(1.028)^{6} - 1}{0.028} - 6\right]$$
$$F = 44`015.810{,}61$$

6.4.4 Gradiente lineal anticipado (creciente y decreciente)

Cuando un gradiente lineal, ya sea creciente o decreciente, es de manera anticipada es porque el primer pago o flujo de dinero, ya sea ingreso o egreso, se realiza en el mismo momento en que se hace la operación financiera.

Para darle solución, al gradiente lineal se le da el mismo tratamiento que a una anualidad.

Como ya se sabe por la forma para llegar a la fórmula de la anualidad anticipada, simplemente se multiplica por $(1+i)$ tanto al valor presente como al valor futuro de un gradiente lineal (creciente y decreciente).

De lo anterior podemos establecer la siguiente fórmula:

$$P = \left[A * \left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i * (1+i)^{n}}\right] \pm \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i * (1+i)^{n}} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]\right] * (1+i)$$
$$P = A * \left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i * (1+i)^{n-1}}\right] \pm \frac{G}{i} * \left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i * (1+i)^{n-1}} - \frac{n}{(1+i)^{n-1}}\right] \qquad (6.6)$$

Al calcular el valor futuro con la fórmula (6.5), se obtendría el valor acumulado un periodo antes del plazo o tiempo de negociación; por eso, se debe, como en las anualidades, multiplicar el valor Futuro por $(1+i)$. Deduciendo la fórmula para obtener el valor futuro de un GLC o un GLD, dependiendo del caso, se obtiene:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right] \pm \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} - n(1+i)\right] \qquad (6.7)$$

Obsérvense los siguientes ejemplos para ayudar a la comprensión de lo anterior.

Ejemplo (6.6)

Se ha financiado un automóvil en 24 cuotas bimestrales de manera anticipada, que crecen cada mes en \$ 25 000, siendo la primera de \$ 100 000 y la tasa de interés del 5 % bimestral. Calcular el valor presente del automóvil.

Datos:
$P = ?$
$n = 24$
$G = 25\,000$
$A = 1\,000\,000$
$I = 5\,\%$ bimestral

Aplicando la expresión (6.6) para un GLC, se obtiene:

$$P = 10\,000\,000\left[\frac{(1.05)^{6}-1}{0{,}05(1{,}05)^{24-1}}\right] + \frac{25\,000}{0.05}\left[\frac{(1{,}05)^{24}-1}{(1{,}05)^{24}}\right]$$

Ejemplo (6.7)

Celenia se propone depositar en una cuenta de ahorros en el Banco de Bogotá cantidades de dinero que van disminuyendo en \$ 35 000 cada mes, empezando hoy con un depósito de \$ 285 000. Si el Banco paga por las cuentas de ahorro una tasa de interés del 1,7 % mensual, ¿cuánto tendrá acumulado al cabo de un año?

Datos:
$F = ?$
$G = 35\,000$
$i = 1{,}7\,\%$ mensual
$A = 285\,000$
$n = 12$ meses

Aplicando la formula (6.7), para un GLD:

$$F = 285\,000\left[\frac{(1{,}017)^{12+1}-(1{,}017)}{0{,}017}\right] - \frac{35\,000}{0{,}017}\left[\frac{(1{,}017)^{12+1}-(1{,}017)}{0{,}017} - 12(1{,}017)\right]$$

$F =$

6.4.5. Gradiente lineal diferido

Al igual que en las anualidades, existe en tiempo en el cual no se hacen pagos, el cual es denominado *periodo de gracia*.

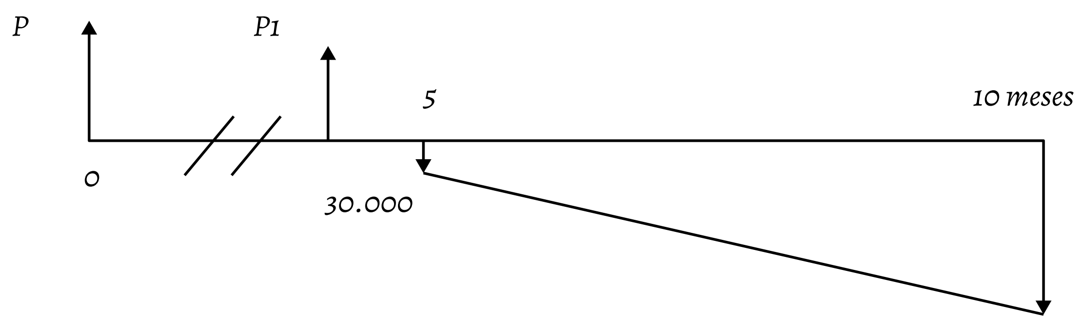
Existen dos maneras de manejar el periodo de gracia. Primero: si en el periodo de gracia se pagan los intereses, permanecerá constante el capital inicial hasta cuando se realice el primer pago de la serie. Segundo: los intereses causados en el periodo de gracia no se pagan, capitalizándose y creando un capital más alto.

Ejemplo (6.8)

Una deuda obtenida hoy al 2 % mensual en una entidad financiera se debe cancelar en 6 pagos mensuales, el primero de $ 30 000, el segundo de $ 60 000 y así sucesivamente. Si el primer pago se hace dentro de 5 meses, encontrar el valor de la deuda, primero, si los intereses se pagan, y, segundo, si no se pagan.

El flujo de caja es el de la figura 6.9.

Figura 6.9. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 6.8



Fuente: elaboración propia.

Datos:
$i = 2\,\%$ mensual
$G = 30\,000$
$A = 30\,000$
$n = (10\text{-}4) = 6$

El valor presente del GLC se encuentra un periodo inmediatamente anterior al del primer pago, es decir que el valor presente de este ejercicio se encuentra en el mes 4.

Si los intereses, en el periodo de gracia, se cancelan, tanto el valor presente (P) en el momento 0 (cero) como el valor presente ($P1$) en el mes 4 serán iguales; en otras palabras, no habría que trasladar ninguno de estos dos flujos al momento del otro, es decir, son equivalentes.

$$P = P1 = 30\,000\left[\frac{(1{,}02)^6 - 1}{0{,}02(1{,}02)^6}\right] - \frac{30\,000}{0{,}02}\left[\frac{(1{,}02)^6 - 1}{0{,}02(1{,}02)^6} - \frac{6}{(1{,}02)^6}\right]$$

$$P = P1 = 578\,446{,}8052$$

Si los intereses no se pagan en el periodo de gracia, el valor presente en el momento 0 (cero) será distinto al valor presente en el mes 4, es decir, no son equivalentes. Para que sean equivalentes habrá que trasladar uno de los dos flujos al momento del otro. Como se busca saber el valor presente en el momento 0 (hoy), se traslada $P1$ hasta P.

$$P = P1 = \left[30\,000\left[\frac{(1{,}02)^{6}-1}{0{,}02(1{,}02)^{6}}\right] - \frac{30\,000}{0{,}02}\left[\frac{(1{,}02)^{6}-1}{0{,}02(1{,}02)^{6}} - \frac{6}{(1{,}02)^{6}}\right]\right](1{,}02)^{-4}$$

$$P = P1 = [578\,446{,}8052](1{,}02)^{-4}$$

$$P = 534\,395{,}4352$$

Al igual que en las anualidades, cuando en el ejercicio no se especifique si se pagan o no los intereses en el periodo de gracia, se toma por dicho que no se pagan.

6.4.6. Cálculo del saldo de un gradiente lineal

En el mundo de los negocios es de suma importancia determinar el valor adeudado o saldo en un momento específico.

Para la determinación del saldo existen dos procedimientos, que podrán ser apreciados con mayor claridad en los siguiente ejemplos.

Ejemplo (6.9)

Sandra ha financiado la compra de su casa con un valor de \$ 120 000 000 por medio de 60 pagos mensuales que van disminuyendo en \$ 20 000 cada mes. Si el banco cobra una tasa de interés del 2,8 % mensual, calcular el valor del primer pago y el saldo de la deuda después de cancelada la cuota 23.

El flujo de caja es el de un gradiente lineal decreciente y los datos son:

$P = \$120\,000\,000$
$n = 60$
$i = 2\,8\,\%$
$G = 20\,000$
$A = ?$

Aplicando la expresión (6.3) se obtiene:

$$120\,000\,000 = A\left[\frac{(1{,}028)^{60}-1}{0{,}028(1{,}028)^{6}}\right] - \frac{30\,000}{0{,}028}\left[\frac{(1{,}028)^{60}-1}{0{,}02(1{,}028)^{60}} - \frac{6}{(1{,}028)^{60}}\right]$$

$$A = 4\,583\,349{,}312$$

Ya se ha obtenido el valor del primer pago. Ahora se calcula el saldo después de pagada la cuota 23.

Como se había dicho antes, existen dos procedimientos para realizar este cálculo.

Primer procedimiento: el saldo en función de las cuotas ya pagadas.

El saldo de una obligación es igual al valor inicial trasladado al momento o periodo en el que se desea saber el saldo, menos el valor futuro de las cuotas ya pagadas.

$$Sn = P(1+i)^n - \left[A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \pm \left[\frac{G}{i}\;\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\right] \tag{6.8}$$

Donde:

P = Valor inicial de la obligación
i = Tasa de interés periódica
n =Número de cuotas ya pagadas
A = Valor de la primera cuota
G = Variación de las cuotas

Se aplicando la anterior fórmula para resolver el ejercicio con los siguientes datos:

$P = 120\,000\,000$
$A = 4\,583\,349,312$
$G = 20\,000$
$n = 23$
$i = 2\,8\,\%$ mensual

$$s23 = 120\,000\,000(1{,}028)^{23}$$
$$- \left[4\,583\,349{,}312\left[\frac{(1{,}028)^{23}-1}{0{,}028}\right] - \frac{20\,000}{0{,}028}\left[\frac{(1{,}028)^{23}-1}{0{,}028} - 23\right]\right]$$
$$s23 = 87\,439\,606{,}81$$

Segundo procedimiento: el saldo en función de las cuotas que faltan por pagar.

Al pagar la cuota 23 queda un gradiente nuevo con 37 cuotas, cuya primera cuota es la ubicada en el periodo siguiente, es decir, en el momento 24. De lo anterior se establece una expresión que permite el cálculo del saldo:

$$Sn = C\,(n+1)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \pm \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \tag{6.9}$$

Donde:

$C(n+1)$ = Primera cuota ubicada un periodo después de cancelada la última cuota
i = Tasa de interés periódica
n = Número de cuotas que faltan por pagar
G = Variación de las cuotas

Aplicando la expresión (6.9), se obtiene:

$$C(n+1) = A - (n+1-1)G$$
$$C(n+1) = A - nG$$
$$C\,(23+1) = 4\,583\,349{,}312 - 23 \quad 20\,000$$
$$C24 = 4\,123\,349{,}312$$

$$S23 = 4123\,349{,}312 \left[\frac{(1{,}028)^{37}-1}{0{,}028(1{,}028)^{37}}\right] - \frac{20\,000}{0{,}028}\left[\frac{(1{,}028)^{37}-1}{0{,}028(1{,}028)^{37}} - \frac{37}{(1{,}028)^{37}}\right]$$
`$S23 = 87\,439\,606{,}70$

Ejemplo (6.10)

Una institución financiera me presta \$ 1 000 000 al 2,5 % mensual, para ser cancelado en 30 cuotas que aumentan periódicamente en \$ 6 000. Si una vez cancelada la cuota 10 decido hacer un abono de \$ 235 000:

1. Encontrar el valor de las cuotas al momento de hacer la operación financiera.
2. En cuánto disminuye el valor de las cuotas si el plazo del préstamo sigue siendo el mismo

Datos:

$P = 1\,000\,000$
$n = 30$
$i = 2{,}5\%$
$G = 6.000$
$A = ?$

Reemplazando en la expresión (6.1), se obtiene:

$$1\,500\,000 = A\left[\frac{(1{,}025)^{30}-1}{0{,}025(1{,}025)^{30}}\right] - \frac{3.000}{0{,}025}\left[\frac{(1{,}025)^{30}-1}{0{,}025(1{,}025)^{30}} - \frac{30}{(1{,}025)^{30}}\right]$$
$$A = 33\,665{,}9678$$

Después de realizado el abono en el mes 10, la cuota para el mes 11 tiene que disminuir, ya que lo adeudado es menor.

Primero, se calcula el saldo en el mes 10.

$$C(10+1)=33\ 665{,}9678+10*3.000$$
$$C11=63\ 665{,}9678$$
$$S10=63\ 665{,}9678\left[\frac{(1{,}025)^{20}-1}{0{,}025(1{,}025)^{20}}\right]-\frac{3.000}{0{,}025}\left[\frac{(1{,}025)^{20}-1}{0{,}025(1{,}025)^{20}}-\frac{20}{(1{,}025)^{20}}\right]$$
$$S10=1\ 398\ 548{,}314$$

El saldo en el mes 10 es de $ 1 398 548,314, al cual se le abonará una suma de $ 235 000, para quedar un saldo final de $ 1 163 548,314. Como el saldo adeudado ha disminuido, la serie de pagos también debe de disminuir, pero solo si el plazo de la negociación es el mismo. Si la serie de pagos no cambia, el tiempo que le queda a la operación debe ser menor que antes de haber sido realizado el abono.

$$1\ 398\ 548{,}314=C(10+1)\left[\frac{(1{,}025)^{20}-1}{0{,}025(1{,}025)^{20}}\right]+\frac{3.000}{0{,}025}\left[\frac{(1{,}025)^{20}-1}{0{,}025(1{,}025)^{20}}-\frac{20}{(1{,}025)^{20}}\right]$$
$$C11=48\ 591{,}3925$$

Después de realizado el abono, la cuota del mes 11 disminuyó inmediatamente.

6.4.7. Gradiente aritmético perpetuo

El valor presente de un gradiente aritmético perpetuo viene dado por la siguiente expresión:

$$P=\frac{A}{i}+\frac{G}{i^2} \tag{6.10}$$

Ejemplo (6.11)

Cuál es el valor presente de un proyecto de vida perpetua que tiene una serie de gastos mensuales de la siguiente manera: dentro de 5 meses $ 10 000 y de allí en adelante se incrementará en $ 1000 siendo la tasa de interés del 3 % mensual.

Aplicando la fórmula:

$$P=\frac{10.000}{0{,}03}+\frac{1.000}{(0{,}03)^2}$$
$$P=1\ 444\ 444{,}444$$

6.5. Gradiente geométrico o exponencial

Se denomina gradiente geométrico (GG) a toda variación periódica de manera porcentual (J), que experimenta una serie de ingresos o egresos. Está variación puede ser creciente (GGC) o decreciente (GGD).

Al trabajar los gradientes geométricos se deben distinguir dos casos:

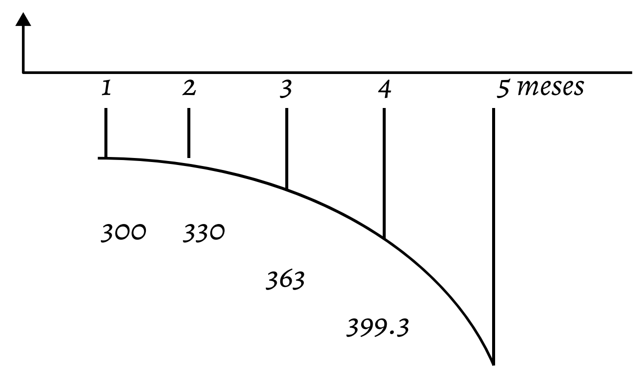
1. Cuando *j* es diferente de *i*, es decir, el incremento o la reducción porcentual de los ingresos o egresos tiene un valor diferente al del interés de la operación financiera.
2. Cuando *j* es igual a *i*, es decir, el incremento porcentual de los ingresos o egresos es igual a la tasa de interés de la operación.

6.5.1. Valor presente del gradiente geométrico creciente (GGC)

Es un valor ubicado en el presente, que es equivalente a una serie de ingresos o egresos que aumentan con respecto al anterior en un porcentaje (*j*).

Suponga el flujo de la caja de la figura 6.10.

Figura 6.10. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente del gradiente geométrico creciente – GGC caso hipotetico



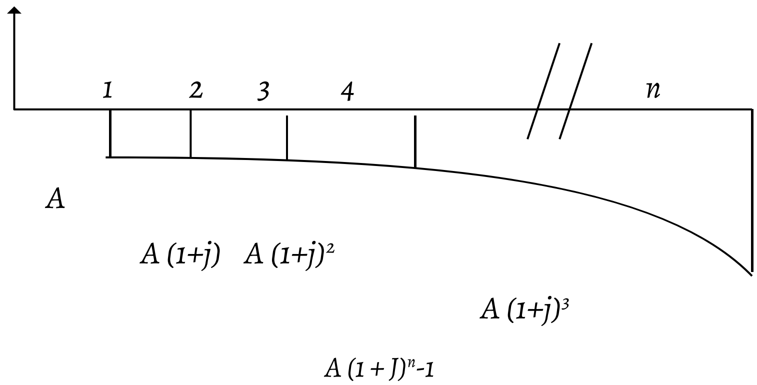
Fuente: elaboración propia.

El crecimiento de las cuotas se maneja como interés compuesto.

$C1 = A = 3000$
$C2 = A(1 + j) = 300(1,01) = 330$
$C3 = A(j + j)^2 = 300(1,1)^3 = 399,3 \quad J = 10\%$
$C4 = A(1 + i)^3 = 300(1,1)^3 = 399,3$
$C5 = A(1 + j)^4 = 300\ (1,1)^4 = 439,23$

El flujo de caja de manera generaliza es el de la figura 6.11.

Figura 6.11. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente del gradiente geométrico creciente – GGC caso genérico



Fuente: elaboración propia.

Cuando j es diferente de i, la expresión para el cálculo del valor presente de un GGC es:

$$P = A\left[\frac{(1+j)^n - (1+i)^n}{(j-i)(1+i)^n}\right] \tag{6.11}$$

Donde:

P = Valor presente
A = Valor primero parcial
j = Variación porcentual de los pagos
i = Tasa de interés periódica
n = Números de pago

Cuando j es igual a i, el valor presente es:

$$P = \frac{nA}{(1+i)} \tag{6.12}$$

Donde:

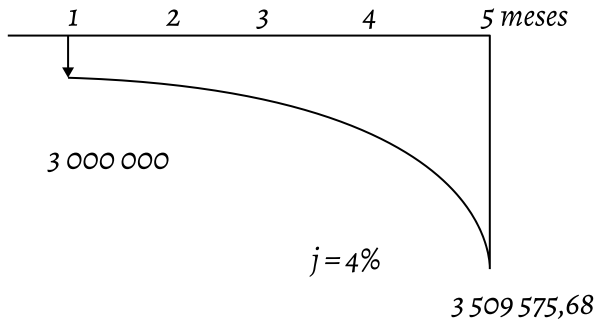
n = Numero de pagos
i = Tasa de interés periódica
A = Primera cuota

Ejemplo (6.12)

Sebastián hace un préstamo hoy al 3 % mensual y debe cancelarlo en 5 cuotas mensuales que se incrementan en un 4 % cada mes, siendo la primera de &3 000 000. Calcular el valor presente.

El flujo de caja es el de la figura 6.12.

Figura 6.12. Diagrama flujo de caja – DFC de ejemplo 6.12



Fuente: elaboración propia.

Datos:

$P = ?$
$A = 3\,000\,000$
$j = 3\,\%$
$n = 5$

Aplicando la expresión (6.11), se obtiene:

$$P = 3\,000\,000\left[\frac{(1{,}04)^5 - (1{,}03)^5}{(0{,}04 - 0{,}03)(1{,}03)^5}\right]$$
$$P = 14\,848\,644{,}2$$

Para calcular el valor de cuota en cualquier momento o periodo de la operación, se utiliza la siguiente fórmula:

$$Cn = A(1 + j)^{n-1} \tag{6.13}$$

6.5.2. Valor futuro del gradiente geométrico creciente (GGC)

El valor futuro de un gradiente geométrico creciente viene dado por la siguiente fórmula:
Cuando *j* es diferente de *i*:

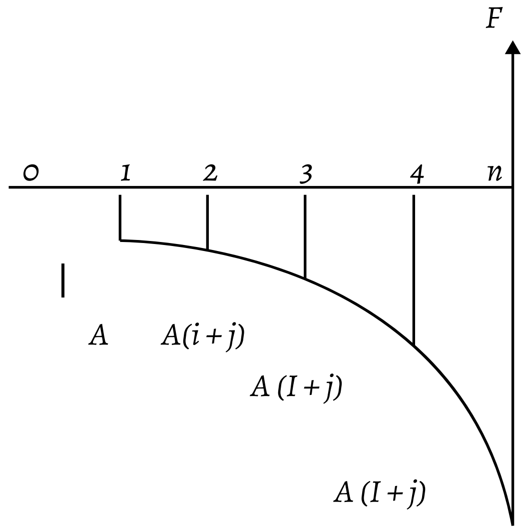
$$F = A\left[\frac{(1 + j)^n - (1 + i)^n}{(j - i)}\right] \tag{6.14}$$

Cuando *j* es igual a *i*:

$$F = nA(1 + i)^{n-1} \tag{6.15}$$

El flujo de la caja aumenta como se muestra en la figura 6.13.

Figura 6.13. Diagrama flujo de caja – DFC del valor futuro del gradiente geométrico



Fuente: elaboración propia.

Ejemplo (6.13)

Calcular el valor futuro equivalente a los pagos que aumentan cada trimestre en un 20 %, si se cubre una tasa del 3 % mensual, siendo el primer valor de $ 1 000 000.

El flujo de caja corresponde a un GGC:

Datos:

$n = 10$
$j = 2\,\%$
$i = 3\,\%$
$A = 1\,000\,000$
$F = ?$

Aplicando la fórmula, se obtiene:

$$F = 1\,000\,000 \left[\frac{(1{,}02)^{10} - (1{,}03)^{10}}{(0{,}02 - 0{,}03)} \right]$$
$$F = 12\,492\,195{,}9$$

Ejemplo (6.14)

Una empresa estimó que sus ventas al final del mes serán de $ 3 000 000 y han proyectado que mes a mes esta se incremente en un 4 %. Si estos dineros son depositados en una corporación que reconoce el 4 % mensual, cuál será el valor acumulado después de 5 meses.

El flujo de caja es:

Datos

$F =$
$A = 3\,000\,000$
$j = i = 4\,\%$ mensual
$n = 5$

Aplicando la expresión (6.15), se obtiene:

$$F = 3`000.000(5)(1{,}04)^{5-1}$$
$$F = 17`547.878{,}4$$

6.5.3. Saldo de un gradiente geométrico creciente (GGC)

Ejemplo (6.15)

Alfredo piensa financiar la compra de un camión de carga por valor de $ 50 000 000 a una tasa de interés del 2 % mensual, por medio de 120 cuotas mensuales que crecen mes a mes en un 10 %. Calcule el saldo después de cancelada la cuota 20.

Primero, se calcula el valor de la primera cuota de la serie de pagos, aplicando la formula (6.13).

Datos
$P = 50\,000\,000$
$A = ?$
$i = 2\,\%$
$j = 1\,\%$
$n = 120$

Ya calculada la primera cuota, se prosigue a encontrar el saldo después de cancelada la cuota 20. Al igual que en el gradiente aritmético, existen dos procedimientos para el cálculo del saldo.

Primer procedimiento: saldo en función de las cuotas ya pagadas.

Cuando j es diferente de i:

$$Sn = P(1+i)^n - A\left[\frac{(1+j)^n - (1+i)^n}{(j-i)}\right] \tag{6.16}$$

Cuando j es igual a i:

$$Sn = P(1+i)^n - An(1+i)^{n-1} \tag{6.17}$$

$$S20 = 50\ 000\ 000(1{,}02)^{20} - 721\ 064{,}02\left[\frac{(1{,}01)^{20} - (1{,}02)^{20}}{(0{,}01 - 0{,}02)}\right]$$
$$S20 = 55\ 134\ 522{,}39$$

Segundo procedimiento: saldo en función de las cuotas que faltan por pagar.

Al igual que en los gradientes lineales, se calcula la cuota en un periodo después del momento en que se debe saber el saldo.

Cuando j es diferente a i:

$$Sn = C(n+1)\left[\frac{(1+j)^n - (1+i)^n}{(j-i)(1+i)^n}\right] \tag{6.18}$$

Cuando j es igual a i:

$$Sn = C(n+1)\left[\frac{n}{(1+i)}\right] \tag{6.19}$$

$$C(n+1) = A(1+i)^{n-1+1}$$
$$C(n+1) = A(1+i)^{n}$$
$$C(20+1) = 721\ 064{,}02(1{,}01)^{20}$$
$$C(21) = 879\ 835{,}1354$$
$$S20 = 879\ 835{,}1354\left[\frac{(1{,}01)^{100} - (1{,}02)^{100}}{(0{,}01 - 0{,}02)(1{,}02)^{100}}\right]$$
$$S20 = 55\ 134\ 562{,}7$$

6.5.4. Valor presente de un gradiente geométrico decreciente

Es una serie de ingresos o egresos que disminuyen periódicamente en un porcentaje fijo.

La fórmula de resolver los problemas de los gradientes geométricos decrecientes es similar a la de los gradientes geométricos crecientes.

La única diferencia se presenta en la estructura de las fórmulas, pero los procedimientos e interpretaciones son iguales a los de los gradientes geométricos crecientes.

Cuando j es diferente de i:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - (1-J)^n}{(j+i)(1+i)^n}\right] \tag{6.20}$$

Cuando j es igual a i:

$$P = \frac{A}{(1+i)} \tag{6.21}$$

Cálculo de la cuota:

$$Cn = A(1 - j)^{n-1} \tag{6.22}$$

6.5.5. Valor futuro de un gradiente geométrico decreciente

Cuando *j* es diferente de *i*:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - (1-j)^n}{(j+i)}\right] \tag{6.23}$$

Cuando *j* es igual a *i*:

$$F = A(1+i)^{n-1} \tag{6.24}$$

6.5.6. Saldo de un gradiente geométrico decreciente (GGC)

Primer procedimiento: saldo en función de las cuotas ya pagadas.

Cuando *j* es diferente de *i*:

$$Sn = P(1+i)^n - A\left[\frac{(1+i)^n - (1-j)^n}{(j+i)}\right] \tag{6.25}$$

Cuando *j* es igual a *i*:

$$Sn = P(1+i)^n - A(1+i)^{n-1} \tag{6.26}$$

Segundo procedimiento: saldo en función de las cuotas que faltan por pagar.

Cuando *j* es diferente de *i*:

$$Sn = C(n+1)\left[\frac{(1+i)^n - (1-j)^n}{(j+i)(1+i)^n}\right] \tag{6.27}$$

Cuando *j* es igual a *i*:

$$Sn = \frac{C(n+1)}{(1+i)} \tag{6.28}$$

6.6. Valor presente de un gradiente geométrico perpetuo

El cálculo del valor presente de gradiente geométrico perpetuo viene dado por la siguiente expresión:

$$P = \frac{K}{i - j} \tag{6.29}$$

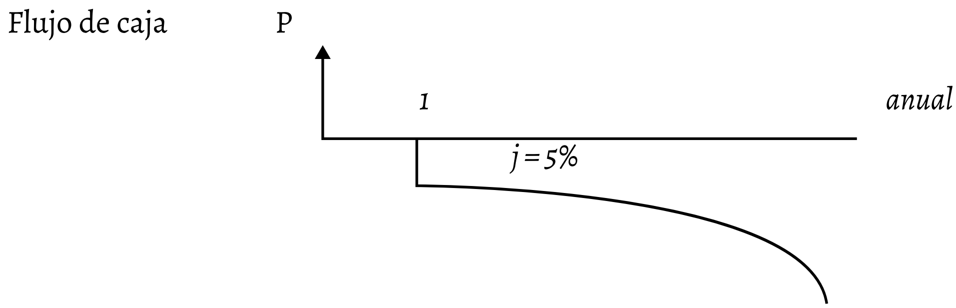
Solo si:

$i \rangle j$

Ejemplo (6.16)

Para el mantenimiento de una carretera, el gobierno departamental tiene previsto hacer una inversión de \$30 000 000, ya que año tras año se incrementa en un 5 % (infracción prevista). ¿Cuánto debe el gobierno departamental consignar hoy en una corporación que le reconoce el 7 % MV, para poder hacer los gastos en materiales, si el proyecto es de vida perpetua?

Figura 6.14. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente de Gradiente geométrico perpetuo - GGP, ejemplo 6.16



Fuente: elaboración propia.

La tasa de incremento de los gastos (5 %) está expresada como tasa efectiva anual, mientras la tasa de interés es nominal, es decir, la tasa de interés hay que convertirla a efectiva anual.

$i = 7\,\%$ mes vencido
$i = (1+0,07)^{12-1}$
$i = 7,23\,\%$ EA.

Ahora, como el rendimiento del dinero (i) es mayor que la variación de las cuotas (j), el valor presente es:

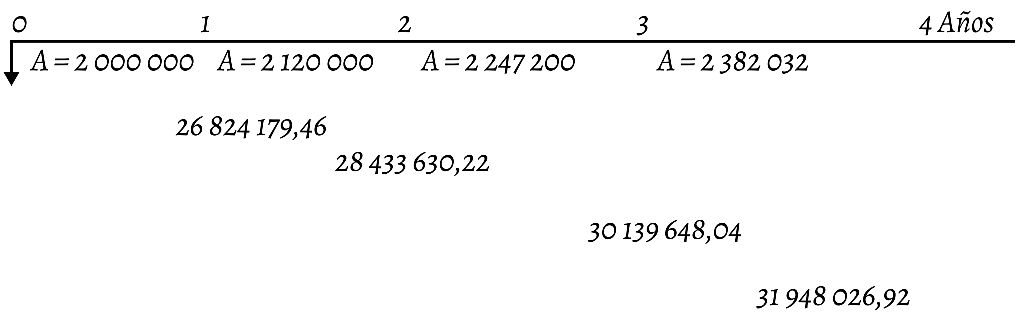
$$P = \frac{30\,000\,000}{(0,0723 - 0,05)}$$

$$P = 1\,345\,291\,480$$

6.7. Valor presente de un gradiente geométrico escalonado

Supóngase el flujo de caja de la figura 6.15.

Figura 6.15. Diagrama flujo de caja – DFC del valor presente de un Gradiente geométrico escalonado – GGE



Fuente: elaboración propia.

Como se puede observar en el flujo de caja anterior, los periodos se dividen en años; en cada año se presenta una serie de pagos en forma de anualidad, pero al observar año tras año se puede establecer que es un gradiente creciente de forma geométrica. Al final de cada año existirá un valor futuro para la anualidad. El primer pago o la primera cuota del gradiente geométrico es el valor futuro de la anualidad del primer año. De lo anterior y con la expresión (6.11) con la cual se calcula el valor presente de un GGC típico, se puede establecer la siguiente fórmula:

$$F1 = A1\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1)$$

$$PE = F1\left[\frac{(1+TEA)^{N}-(1+j)^{N}}{(1+TEA)^{N}(TEA-j)}\right](2)$$

Se reemplaza (1) en (2) y se obtiene:

$$PE = A1\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]\left[\frac{(1+TEA)^{N}-(1+j)^{N}}{(1+TEA)^{N}(TEA-j)}\right] \quad (6.30)$$

Donde:
PE = Valor presente del gradiente escalonado
$A1$ = Primera cuota de la anualidad del primer año
i = Tasa de interés periódica de la anualidad
TEA = Tasa de interés efectiva anual, equivalente a la tasa periódica de la anualidad
j = Incremento del porcentaje de las cuotas del gradiente o valores futuros de las anualidades
n = Plazo total de la obligación o número de cuotas del gradiente.

Ejemplo (6.17)

Un préstamo se debe cancelar en 5 años con cuotas iguales en cada año, pero que año tras año se incrementa en el 10 %. Si el valor de la cuota mensual del primer año es de \$ 30 000 y el interés es del 3 %, mensual calcular el valor del préstamo.

Se calcula el valor futuro de la primera anualidad:

$$F1 = 30\,000\left[\frac{(1{,}03)^{12} - 1}{0{,}03}\right]$$
$$F1 = 425\,760{,}8868$$

Se convierte la tasa de interés periódica en efectiva anual:

$$TEA = (1{,}03)^{12} - 1$$
$$TEA = 42{,}57\ \%E.A.$$

Ahora, se puede aplicar la expresión (6.30):

$$PE = 425\,760{,}8868\left[\frac{(1{,}4257)^{5} - (1{,}1)^{5}}{(1{,}4257)^{5}(0{,}4257 - 0{,}1)}\right]$$
$$PE = 949\,804{,}6748$$

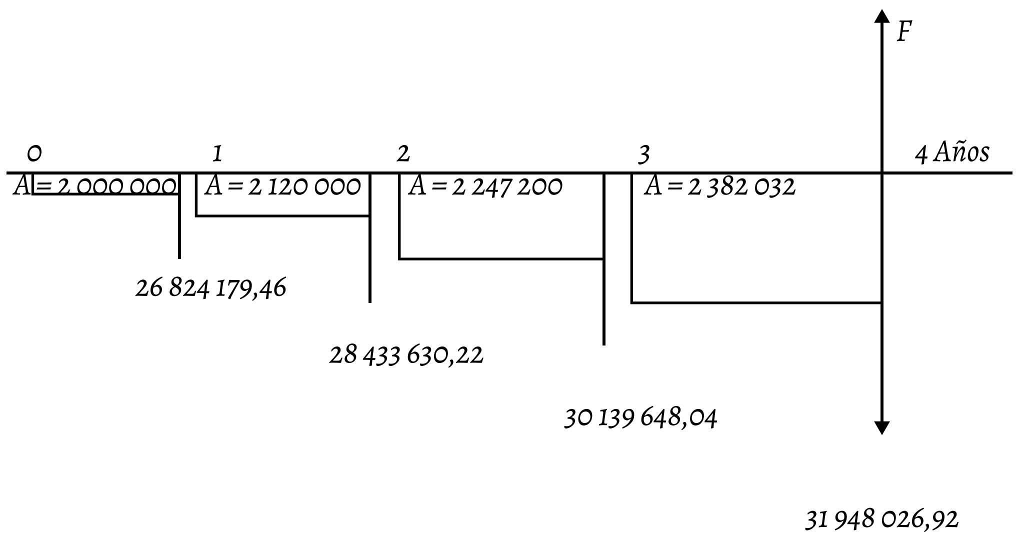
Valor futuro

De la expresión (6.30) se puede encontrar un valor futuro equivalente de la siguiente manera:

$$FE = PE\,(1 + TEA)^{N}$$
$$PE = F1\left[\frac{(1 + TEA)^{N} - (1 + J)^{N}}{(1 + TEA)^{N}(TEA - J)}\right]$$
$$FE = F1\left[\frac{(1 + TEA)^{N} - (1 + J)^{N}}{(TEA - J)}\right]$$

Flujo de caja:

Figura 6.16. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 6.17



Fuente: elaboración propia.

Ejemplo (6.18)

Andrea devenga un sueldo de $ 5 000 000. Cada fin de mes deposita el 40 % de su sueldo ($ 2 000 000) en una cuenta de ahorros del Banco de CONAVE. Si el banco le reconoce el 2 % mensual de interés y aspira tener un incremento en su sueldo en sus próximos 3 años del 6 % (inflación esperada), ¿cuánto tendrá acumulado en la cuenta al final de los 4 años?

6.8. Casos especiales

Existen operaciones financieras en las cuales los flujos de cajas no se ajustan a los modelos de series uniformes o gradientes, pero sí existe una relación entre los valores.

Ejemplo (6.19)

Si se depositan hoy $ 500 000 en una corporación que reconoce el 3 % mensual y al final del periodo se hacen retiros de las tres cuartas partes del saldo que se tiene en el periodo anterior, encontrar el saldo acumulado en la cuenta después de 4 meses.

6.9. Situaciones a resolver

1. Calcular el P equivalente a 20 pagos mensuales, cuyo primer pago es de 120.000 y que cada periodo aumenta en 3.000 a una tasa de interés del 36% M.V.

2. Se hacen depósitos trimestrales que CRECEN en un 4% durante 3 años, en una institución financiera que paga el 7,5% trimestral, si se desea tener disponible $5.000.000 al final de los 3 años, determinar el primer pago.
3. El valor de un automóvil se acordó cancelar con 30 cuotas mensuales, que aumentan cada una en $ 5.000, siendo la primera cuota de $ 80.000 si la tasa de interés de la operación es del 2.5 % mensuales, calcular el valor hoy del automóvil.
4. Un local se ha financiado con una cuota inicial de $ 1.000.000 y 40 pagos trimestrales que decrecen en un 2% cada mes, siendo el primer pago de $ 1.200.000, si la tasa de interés pactada es del 2.5% mensual, calcular el valor del local.
5. ¿En qué % debe decrecer mensualmente una serie de pagos constituidos por 45 cuotas para financiar una inversión de presupuestos que tienen un valor de contado de 24.500.000 si la primera cuota es de 180.000 y se cobra una tasa de interés del 2% mensual?

6.10 Solución de las situaciones a resolver

1.

	B	C	D	E	F	G	H
1							
2		P =	100	Se coloca un valor hipotetico			
3		i =	0,36				
4		G =	3000				
5		Primera cuota	120000				
6							
7			No	Cuota	Interés	Abono	Saldo
8			0				=+D2
9			1	=+D5	=+H8*$D$3	=+E9-F9	=+H8-G9
10			2	=+E9+$D$4	=+H9*$D$3	=+E10-F10	=+H9-G10
11			3	=+E10+$D$4	=+H10*$D$3	=+E11-F11	=+H10-G11
29							

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			P =	100				
3			i =	36%				
4			G =	3000				
5			Primera cuota	$ 120.000				
6								
7				No	Cuota	Interés	Abono	Saldo
8				0				100
9				1	120.000	36	119.964	- 119.864
10				2	123.000	- 43.151	166.151	- 286.015
11				3	126.000	- 102.965	228.965	- 514.980
12				4	129.000	- 185.393	314.393	- 829.373
13				5	132.000	- 298.574	430.574	- 1.259.948
14				6	135.000	- 453.581	588.581	- 1.848.529
15				7	138.000	- 665.470	803.470	- 2.652.000
16				8	141.000	- 954.720	1.095.720	- 3.747.719
17				9	144.000	- 1.349.179	1.493.179	- 5.240.898
18				10	147.000	- 1.886.723	2.033.723	- 7.274.622
19				11	150.000	- 2.618.864	2.768.864	- 10.043.486
20				12	153.000	- 3.615.655	3.768.655	- 13.812.140
21				13	156.000	- 4.972.371	5.128.371	- 18.940.511
22				14	159.000	- 6.818.584	6.977.584	- 25.918.095
23				15	162.000	- 9.330.514	9.492.514	- 35.410.609
24				16	165.000	- 12.747.819	12.912.819	- 48.323.428
25				17	168.000	- 17.396.434	17.564.434	- 65.887.862
26				18	171.000	- 23.719.630	23.890.630	- 89.778.493
27				19	174.000	- 32.320.257	32.494.257	- 122.272.750
28				20	177.000	- 44.018.190	44.195.190	- 166.467.941

Buscar objetivo

Definir la celda: $H$28

Con el valor: 0

Cambiando la celda: $D$2

Aceptar Cancelar

P =	355.365
i =	36%
G =	3000
Primera cuota	$ 120.000

No	Cuota	Interés	Abono	Saldo
0				355.365
1	120.000	127.931	- 7.931	363.296
2	123.000	130.787	- 7.787	371.083
3	126.000	133.590	- 7.590	378.673
4	129.000	136.322	- 7.322	385.995
5	132.000	138.958	- 6.958	392.954
6	135.000	141.463	- 6.463	399.417
7	138.000	143.790	- 5.790	405.207
8	141.000	145.875	- 4.875	410.082
9	144.000	147.629	- 3.629	413.711
10	147.000	148.936	- 1.936	415.647
11	150.000	149.633	367	415.280
12	153.000	149.501	3.499	411.781
13	156.000	148.241	7.759	404.022
14	159.000	145.448	13.552	390.470
15	162.000	140.569	21.431	369.039
16	165.000	132.854	32.146	336.893
17	168.000	121.282	46.718	290.175
18	171.000	104.463	66.537	223.638
19	174.000	80.510	93.490	130.147
20	177.000	46.853	130.147	- 0

2.

j= % de en el que decrecen los depósitos	0,04
k= Primera cuota	100
#pagos=	=4*3
i=	0,075
F= valor acumulado en cuenta de ahorros	5000000

Periodo	Intereses	Cuota	Cuota ext	Abono	Saldo
0					0
1	=+H42*$C$39	=+C37	0	=+E43+F43+D43	=+H42+G43
2	=+H43*$C$39	=+$E$43*(1+$C$36)	0	=+E44+F44+D44	=+H43+G44
3	=+H44*$C$39	=+E44*(1+$C$36)	0	=+E45+F45+D45	=+H44+G45

	B	C	D	E	F	G	H	I
2								
3		j= % de en el que decrecen los depósitos	4,00%					
4		k= Primera cuota	100,00					
5		#pagos=	12					
6		i=	7,50% trimestral					
7		F= valor acumulado en cuenta de ahorros	5.000.000					
8			Periodo	Intereses	Cuota	Cuota ext	Abono	Saldo
9			0					0
10			1	0	100,00	0	100	100
11			2	8	104	0	112	212
21			12	145	154	0	299	2.231

Buscar objetivo

Definir la celda: $I$21

Con el valor: 5000000

Cambiando la celda: $D$4

Aceptar Cancelar

	A	B	C	D	E	F	G	H
35								
36		j= % de en el que decrecen los depósit	4,00%					
37		k= Primera cuota	224.144,20					
38		#pagos=	12					
39		i=	7,50% trimestral					
40		F= valor acumulado en cuenta de	5.000.000					
41			Periodo	Intereses	Cuota	Cuota ext	Abono	Saldo
42			0					0
43			1	0	224.144,20	0	224.144	224.144
44			2	16.811	233.110	0	249.921	474.065
45			3	35.555	242.434	0	277.989	752.054
46			4	56.404	252.132	0	308.536	1.060.590
47			5	79.544	262.217	0	341.761	1.402.351
48			6	105.176	272.706	0	377.882	1.780.233
49			7	133.518	283.614	0	417.131	2.197.365
50			8	164.802	294.958	0	459.761	2.657.126
51			9	199.284	306.757	0	506.041	3.163.167
52			10	237.238	319.027	0	556.265	3.719.431
53			11	278.957	331.788	0	610.746	4.330.177
54			12	324.763	345.060	0	669.823	5.000.000

1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
66								
67		Datos:						
68		P=?	100					
69		A = C=	80000					
70		G=	5000					
71		i=	0,025	mensual				
72		No de cuotas	30	mensual				
73								
74			No de cuotas mensuales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
75			0					=+C68
76			1	=+H75	=+C69	=+E76-G76	=+D76*$C$71	=+D76-F76
77			2	=+H76	=+E76+$C$70	=+E77-G77	=+D77*$C$71	=+D77-F77
78			3	=+H77	=+E77+$C$70	=+E78-G78	=+D78*$C$71	=+D78-F78

	B	C	D
67	Datos:		
68	P=?	100,00	
69	A = C=	80.000,00	
70	G=	5.000,00	
71	i=	2,50%	mensual
72	No de cuotas	30	mensual

Buscar objetivo
Definir la celda: $H$105
Con el valor: 0
Cambiando la celda: $C$68
Aceptar Cancelar

	No de cuotas mensuales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
75	0					100,00
76	1	100,00	80.000,00	79.997,50	2,50	-79.897,50
77	2	-79.897,50	85.000,00	86.997,44	-1.997,44	-166.894,94
78	3	-166.894,94	90.000,00	94.172,37	-4.172,37	-261.067,31
104	29	-5.560.544,56	220.000,00	359.013,61	-139.013,61	-5.919.558,17
105	30	-5.919.558,17	225.000,00	372.988,95	-147.988,95	-6.292.547,13

	B	C	D
67	Datos:		
68	P=?	3.000.025,81	
69	A = C=	80.000,00	
70	G=	5.000,00	
71	i=	2,50%	mensual
72	No de cuotas	30	mensual

	No de cuotas mensuales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
75	0					3.000.025,81
76	1	3.000.025,81	80.000,00	4.999,35	75.000,65	2.995.026,46
77	2	2.995.026,46	85.000,00	10.124,34	74.875,66	2.984.902,12
78	3	2.984.902,12	90.000,00	15.377,45	74.622,55	2.969.524,67
104	29	428.792,39	220.000,00	209.280,19	10.719,81	219.512,20
105	30	219.512,20	225.000,00	219.512,20	5.487,80	0,00

2.

	B	C	D	E	F
115	Datos:				
116	P=?	100			
117	Cuota inicial	1000000			
118	A = C=	1200000			
119	g	-0,02		tasa mensual	0,025
120	ip trimestral	=+(1+F119)^3-1	Trimestral		

	No de cuotas trimestrales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
123	0					=+C116-C117
124	1	=+H123	=+C118	=+E124-G124	=+D124*$C$120	=+D124-F124
125	2	=+H124	=+E124*(1+$C$119)	=+E125-G125	=+D125*$C$120	=+D125-F125
126	3	=+H125	=+E125*(1+$C$119)	=+E126-G126	=+D126*$C$120	=+D126-F126

	B	C	D	E	F
115	Datos:				
116	P=?	1.000,00			
117	Cuota inicial	1.000.000,00			
118	A = C=	1.200.000,00			
119	g	-2%		tasa mensual	2,50%
120	ip trimestral	7,69%	Trimestral		

Buscar objetivo
Definir la celda: $H$163
Con el valor: 0
Cambiando la celda: $C$116
Aceptar Cancelar

	No de cuotas trimestrales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
123	0					- 999.000,00
124	1	- 999.000,00	1.200.000,00	1.276.813,73	- 76.813,73	- 2.275.813,73
125	2	- 2.275.813,73	1.176.000,00	1.350.988,74	- 174.988,74	- 3.626.802,47
126	3	- 3.626.802,47	1.152.480,00	1.431.347,11	- 278.867,11	- 5.058.149,58
161	38	- 201.596.880,42	568.258,64	16.069.168,77	- 15.500.910,13	- 217.666.049,19
162	39	- 217.666.049,19	556.893,47	17.293.372,03	- 16.736.478,56	- 234.959.421,22
163	40	- 234.959.421,22	545.755,60	18.611.932,34	- 18.066.176,75	- 253.571.353,56

Datos:

P=?	13.099.945,70			
Cuota inicial	1.000.000,00			
A = C=	1.200.000,00			
g	-2%		tasa mensual	2,50%
ip trimestral	7,69%	Trimestral		

No de cuotas trimestrales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
0					12.099.945,70
1	12.099.945,70	1.200.000,00	269.627,61	930.372,39	11.830.318,09
2	11.830.318,09	1.176.000,00	266.359,45	909.640,55	11.563.958,64
3	11.563.958,64	1.152.480,00	263.319,99	889.160,01	11.300.638,65
38	1.444.894,11	568.258,64	457.159,83	111.098,81	987.734,29
39	987.734,29	556.893,47	480.945,96	75.947,51	506.788,33
40	506.788,33	545.755,60	506.788,33	38.967,27	- 0,00

5.

Datos:

P=	24500000	
A=	1800000	PRIMERA CUOTA DE LA SERIE
i=	0,02	mensual
n= Cuotas	45	mensuales
g=?	0,01	

No de cuotas mensuales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
0					=+C174
1	=+H182	=+C175	=+E183-G183	=+H182*$C$176	=+H182-F183
2	=+H183	=+E183*(1-$C$178)	=+E184-G184	=+H183*$C$176	=+H183-F184
3	=+H184	=+E184*(1-$C$178)	=+E185-G185	=+H184*$C$176	=+H184-F185
4	=+H185	=+E185*(1-$C$178)	=+E186-G186	=+H185*$C$176	=+H185-F186

Datos:

P=	24.500.000,00	
A=	1.800.000,00	PRIMERA CUOTA DE LA SERIE
i=	2,00%	mensual
n= Cuotas	45,00	mensuales
g=?	1,0000%	

Buscar objetivo

Definir la celda: $H$227

Con el valor: 0

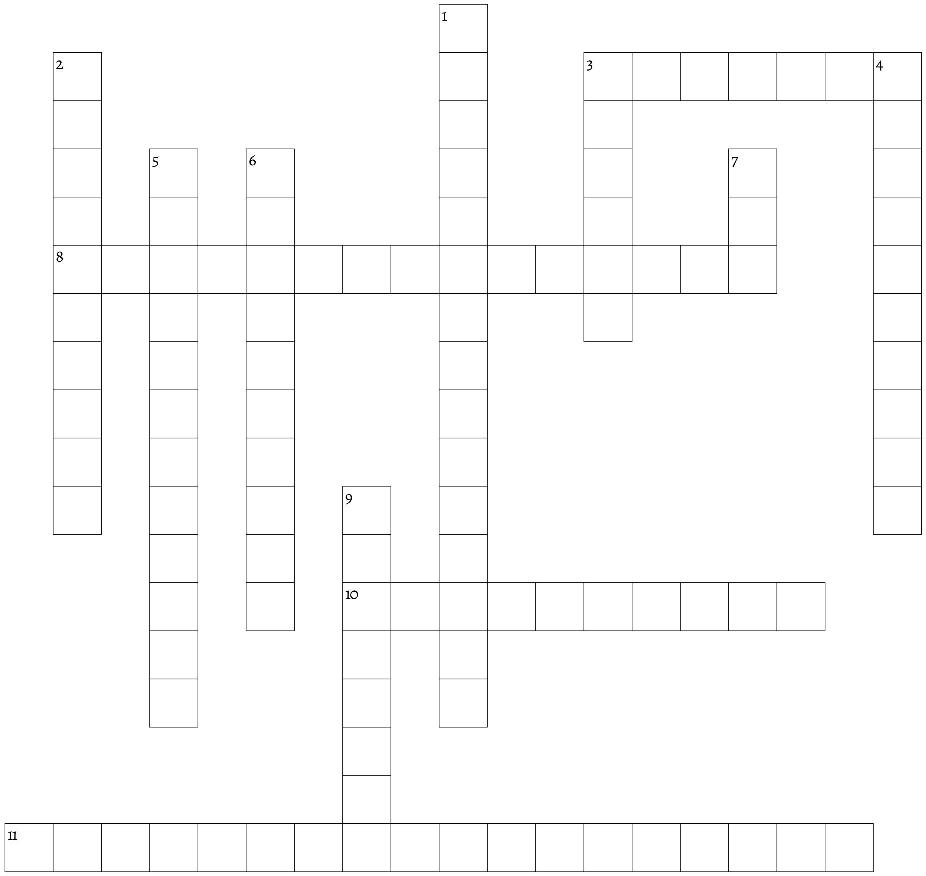
Cambiando la celda: $C$178

Aceptar Cancelar

No de cuotas mensuales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
0					24.500.000,00
1	24.500.000,00	1.800.000,00	1.310.000,00	490.000,00	23.190.000,00
2	23.190.000,00	1.782.000,00	1.318.200,00	463.800,00	21.871.800,00
3	21.871.800,00	1.764.180,00	1.326.744,00	437.436,00	20.545.056,00
43	-42.212.625,31	1.180.186,60	2.024.439,10	- 844.252,51	- 44.237.064,41
44	-44.237.064,41	1.168.384,73	2.053.126,02	- 884.741,29	- 46.290.190,43
45	-46.290.190,43	1.156.700,88	2.082.504,69	- 925.803,81	- 48.372.695,12

	A	B	C	D	E	F	G	H
172								
173		Datos:						
174		P=	24.500.000,00					
175		A=	1.800.000,00	PRIMERA CUOTA DE LA SERIE				
176		i=	2,00%	mensual				
177		n= Cuotas	45,00	mensuales				
178		g=?	5,0550%					
179								
180								
181			No de cuotas mensuales	Saldo inicial	Valor cuota	Abono a Capital	Intereses	Saldo final adeudado
182			0					24.500.000,00
183			1	24.500.000,00	1.800.000,00	1.310.000,00	490.000,00	23.190.000,00
184			2	23.190.000,00	1.709.010,72	1.245.210,72	463.800,00	21.944.789,28
185			3	21.944.789,28	1.622.620,91	1.183.725,13	438.895,79	20.761.064,15
225			43	558.785,23	203.755,04	192.579,33	11.175,70	366.205,90
226			44	366.205,90	193.455,30	186.131,18	7.324,12	180.074,72
227			45	180.074,72	183.676,21	180.074,72	3.601,49	- 0,00

¡BIENVENIDO AL DESAFÍO DE PALABRAS! N° 6



Horizontales

3. Contrato de arrendamiento financiero mediante el cual el dueño de un activo (el arrendador) le otorga a otra parte (el arrendatario) el derecho exclusivo de utilizarlo, normalmente por un periodo de tiempo convenido, a cambio de un alquiler.
8. Planteamiento de equivalencias de valores en una misma fecha
10. Momento de comparación a la que se llevan todos los flujos de dinero, en una ecuación de valor
11. Lo que se sacrifica cuando se toma una decisión

Verticales

1. Tiempo durante el cual no se hacen abonos a capital pero si se causan intereses
2. Serie de pagos que aumentan o disminuyen en un porcentaje constante. También recibe el nombre de exponencial
3. Serie de pagos que aumentan o disminuyen en una cantidad constante de dinero. También recibe el nombre de aritmético
4. Flujos de caja conformados por una serie de pagos que aumentan o disminuyen periodicamente en una cantidad o porcentaje fijo
5. Criterio que dice que dos cantidades diferentes ubicadas en diferentes fechas pueden producir el mismo resultado económico, dependiendo de la tasa de interés
6. Tipo de gradiente cuyas cuotas permanecen fijas durante un tiempo y después aumentan en una cantidad fija, ya sea en pesos o en porcentaje
7. Diferentes sistemas de amortización de créditos de vivienda en Colombia están basados en esta unidad
9. Gradiente en el que el primer pago se realiza períodos después de formalizada la operación financiera

Capítulo 7

EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN

7.1. Objetivos del capítulo

General

- Conocer los diferentes métodos utilizados para evaluar la factibilidad de los proyectos de inversión y fundamentar bases, en los estudiantes, para el desarrollo de materias que se verán más adelante.

Específicos

- Manejar los tres métodos más importantes de la evaluación de proyectos: VPN, CAUE y TIR.
- Lograr que el estudiante analice proyectos para poder tomar una decisión de inversión acertada.

7.2. Introducción

Las inversiones, desde el punto de vista financiero, son la asignación de recursos para la obtención de beneficios en un futuro; por eso, al realizar un proyecto, este debe ser evaluado para saber si la inversión traerá ganancias o pérdidas y, por lo tanto, si se debería invertir o no en este. Este análisis debe ser realizado de manera objetiva y con mucha precaución, para evitar errores de juicio.

Existen muchos índices que pueden dar una idea de lo que sucederá financieramente con el proyecto, pero en este capítulo solo se tratarán VPN, CAUE y TIR.

7.3. Valor presente neto (VPN)

El *valor presente neto* de un proyecto, a una tasa de interés i, es igual a la sumatoria del valor presente de los ingresos netos, a una tasa de interés i, menos la sumatoria del valor presente de los egresos netos, a una tasa de interés i; o, lo que es lo mismo, traer todos los ingresos y los egresos futuros de un flujo de caja a valor presente (a pesos de hoy) empleando para ello una tasa de interés determinada, restando los egresos de los ingresos.

$$VPN = \sum VPI - \sum VPE$$

Por lo tanto, al relacionarlo con el diagrama de flujo, se tiene que:

$$VPN = \sum \uparrow - \sum \downarrow$$

Esto da a lugar a que se pueda presentar una de tres situaciones:

- Si VPN > 0, el proyecto es viable porque se obtendría una ganancia en pesos de hoy.
- Si VPN < 0, el proyecto no es viable porque en pesos de hoy habría una pérdida.
- Si VPN = 0, desde el punto de vista financiero, es indiferente realizar o no el proyecto.

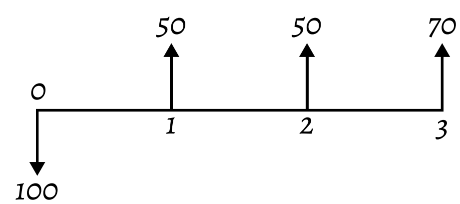
Se debe tener en cuenta que el VPN depende de la tasa de interés que se utilice para traer a valor presente los flujos de caja. Esta tasa se denomina *tasa de interés de oportunidad* (TIO) y se puede definir como aquel rendimiento que alternativamente se obtendría con los fondos si no se invirtiera en el proyecto en consideración.

La TIO varía de un inversionista a otro, y para el mismo inversionista varía con el tiempo, debido al entorno económico que lo esté afectando.

Ejemplo (7.1)

Un industrial quiere evaluar la adquisición de una máquina que hoy vale $100 y estima que obtendrá ganancias netas de $50 en el primer y segundo año, y de $70 en el tercer año, teniendo en cuenta una tasa de interés del 35 % EA. Analizar el proyecto de adquirir la máquina.

Figura 7.1. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 7.1



Fuente: elaboración propia.

$$VPN = -100 + 50(P/A, 35\,\%, 2) + 70(1 + 0{,}35)^{-3}$$
$$VPN = -\$7{,}08$$

Como VPN < 0, entonces se dice que el proyecto no es viable.

Supóngase ahora que hay otro industrial que tiene una TIO del 25 % y desea adquirir el mismo tipo de máquina. Al evaluar el proyecto al 25 %, se tiene:

$$VPN = -100 + 50(P/A, 25\,\%, 2) + 70(1 + 0{,}25)^{-3}$$
$$VPN = +\$7{,}84$$

Como en este caso VPN > 0, se dice que el proyecto para este inversionista sí es viable.

El VPN puede utilizarse en proyectos individuales, en cuyo caso solo interesa conocer el signo que toma el VPN, como se mostró en el ejercicio anterior, o también para decidir entre varias alternativas, en cuyo caso no solo interesa el signo sino también el valor que toma.

7.3.1. Alternativas de igual vida útil

Se dan cuando todas las alternativas propuestas tienen la misma duración o, por la naturaleza del proyecto para el cual se van a usar las alternativas, estas alcanzan a cubrir la vida del proyecto. En este caso se empieza a hacer el análisis directamente.

7.3.2. Alternativas de diferente vida útil

En este caso las alternativas propuestas difieren en su duración, no alcanzan a cubrir la vida del proyecto o los proyectos son muy diferentes.

Para poder comparar dineros es necesario ubicarlos en el mismo periodo, de manera que, al comparar alternativas de diferente vida, el primer problema es la duración. Entonces, hay necesidad de hacer algunas suposiciones o usar algunos modelos que permitan igualar los servicios de las alternativas.

Existen cuatro modelos:

- **Reemplazo en idénticas condiciones**

  Este modelo presupone que todas las alternativas en consideración se repiten indefinidamente, con una estructura de ingresos y una de egresos exactamente iguales.

- **Reducción de la vida económica de las alternativas más extensas**

  Este modelo presupone que el proyecto para el cual se van a estudiar las distintas alternativas tiene una duración menor o igual a la vida económica de ellas. Además, usa como evento central del proceso la vida real del proyecto y ajusta todas las alternativas a dicha vida.

- **Extensión de la vida económica de las alternativas más cortas**

  Este modelo presupone que el proyecto para el cual se van a estudiar las distintas alternativas tiene una duración mayor o igual a la vida económica de ellas. También considera la vida real del proyecto y ajusta las alternativas a dicha vida.

- **Reemplazo en condiciones reales**

  Consiste en suponer que habrá reemplazos de los equipos, pero dicho reemplazo se reconsiderará no con base en los valores de hoy, sino estimando los costos futuros de adquisición, operación, mantenimiento y los valores de mercado de cada alternativa.

7.3.3. Alternativas de inversión mutuamente excluyentes

En este caso se tienen varias alternativas de manera que, por estar vinculadas a la solución del mismo problema o por política organizacional, carece de sentido realizar más de una de ellas. Entonces, el proceso decisorio tiene que estar orientado a escoger una sola alternativa.

Ejemplo (7.2)

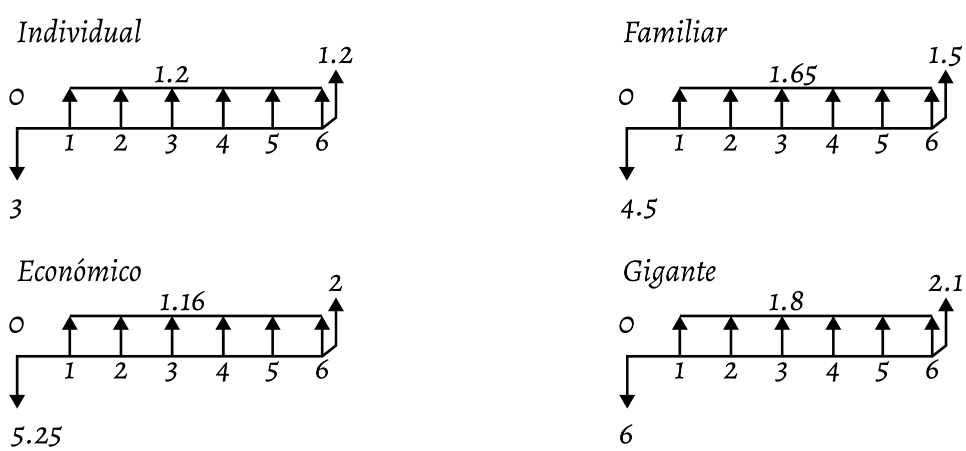
La compañía productora Colombiana tiene en análisis el tamaño de distribución de uno de sus productos. Debido a problemas de empaque, distribución y justificación económica de varias empacadoras, ellos desean determinar el tamaño óptimo entre los cuatro disponibles. La tasa mínima de retorno de la empresa es del 20 % anual. Se estima un ciclo de 6 años del producto, y la información económica es la consignada en la tabla 7.1 y la mostrada en la figura 7.2.

Tabla 7.1. Datos del ejemplo 7.2

Tamaño	**Inversión inicial ($)**	**Ingresos Anuales Netos ($)**	**Valor de mercado en el año 6 ($)**
Individual Familiar Económico Gigante	3'000000 4'500000 5'250000 6'000000	1'200000 1'650000 1'160000 1'800000	1'200000 1'500000 2'000000 2'100000

Fuente: elaboración propia.

Figura 7.2. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 7.2.



Fuente: elaboración propia.

$$VPN_{Individual} = 1\,200\,000(P/A,20,6) + 1\,200\,000(P/F,20,6) - 3\,000\,000$$
$$VPN_{Individual} = \$1\,392\,489{,}71$$

$$VPN_{Familiar} = 1\,650\,000(P/A,20,6) + 1\,500\,000(P/F,20,6) - 4\,500\,000$$
$$VPN_{Individual} = \$1\,489\,438{,}66$$

$$VPN_{Económico} = 1\,160\,000(P/A,20,6)+2\,000\,000(P/F,20,6) - 5\,250\,000$$
$$VPN_{Económico} = \$722\,612{,}31$$

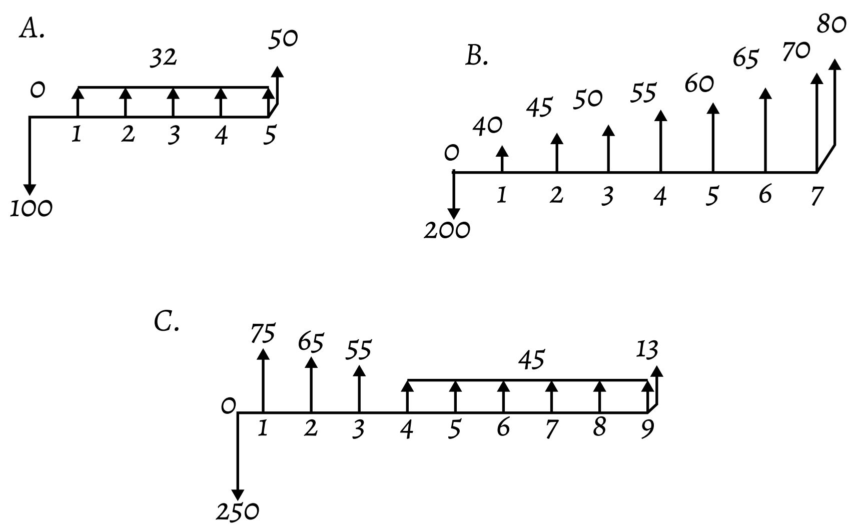
$$VPN_{Gigante} = 1\,800\,000(P/A,20,6)+2\,100\,000(P/F,20,6) - 6\,000\,000$$
$$VPN_{Gigante} = \$689\,203{,}96$$

Se escoge la alternativa de mayor VPN, que es el tamaño familiar.

Ejemplo (7.3)

Dados los diagramas de tiempo de las inversiones A, B, y C (figura 7.3), las cuales son mutuamente excluyentes, determine la mejor si i es el 15 % anual.

Figura 7.3. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 7.3.



Fuente: elaboración propia.

$$VPN_A = 32(P/A,15,5) + 50(P/F,15,5) - 100$$
$$VPN_A = \$32{,}13$$

$$VPN_B = [40 + 5(A/G,15,7)](P/A,15,7) + 80(P/F,15,7) - 200$$
$$VPN_B = \$47{,}45$$

$$VPN_C = [75 - 10(A/G,15,3)](P/A,15,3) + 45(P/A,15,9) + 13(P/F,15,9) - 250$$
$$VPN_C = \$16{,}20$$

La mejor alternativa es aquella que tiene el mayor VPN positivo, por lo que la alternativa óptima en este ejercicio es la B.

7.3.4. Alternativas de Inversión Independientes

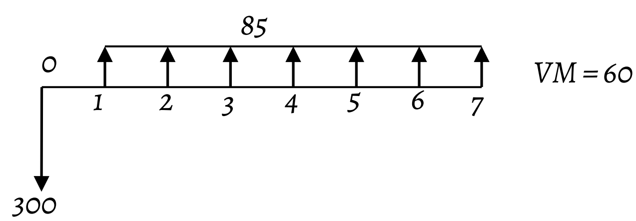
En este caso, se tienen varias alternativas en las cuales se cumple que la realización de una de ellas no afecta ni los datos económicos ni los indicadores de las demás. Aquí el proceso decisorio tiene que estar orientado a una combinación de las alternativas.

Ejemplo (7.4)

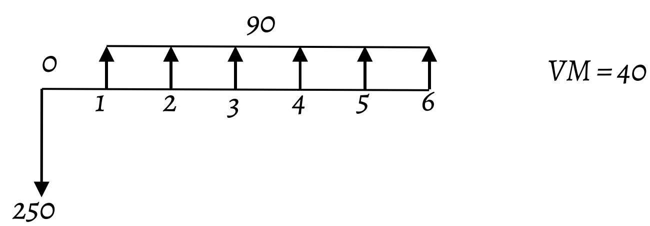
Una compañía manufacturera dispone de $ 700 000 000 para invertir en este año y tiene en su consideración cuatro inversiones (A, B, C, D). Si su tasa mínima es del 20 % anual y los datos de las inversiones están en los diagramas de tiempo de la figura 7.4, determine la mejor combinación de ellas. Las cifras de los diagramas están en millones de pesos.

Figura 7.4. Diagrama flujo de caja- DFC del ejemplo 7.4.

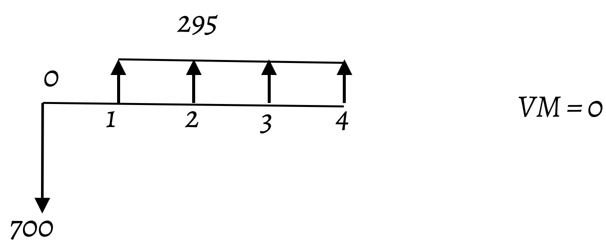
A.



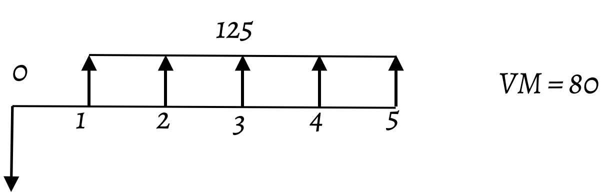
B.



C.



D.



Fuente: elaboración propia.

$$VPN_A = 85\left[\frac{1-(1+0{,}2)^{-7}}{0{,}2}\right] + 60\ (1+0{,}2)^{-7} - 300 = \$23{,}1351$$

$$VPN_B = 90\left[\frac{1-(1+0{,}2)^{-6}}{0{,}2}\right] + 40\ (1+0{,}2)^{-6} - 250 = \$62{,}692$$

$$VPN_C = 295\left[\frac{1-(1+0{,}2)^{-4}}{0{,}2}\right] - 700 = \$63{,}0675$$

$$VPN_D = 125\left[\frac{1-(1+0{,}2)^{-5}}{0{,}2}\right] + 80(1+0.2)^{-5} - 400 = \$5.977$$

Los cuatro proyectos considerados individualmente son factibles económicamente (VPN > 0); además, en términos de recursos, ninguno requiere una inversión superior a los $ 700 000 000 disponibles de la empresa.

Las combinaciones posibles serían:

- Inversión A + inversión B
- Inversión A + inversión D
- Inversión B + inversión D
- Inversión C

Tabla 7.2. Resumen de resultados de VPN ejemplo 7.4

Combinación	VPN (millones)	Capital utilizado	
A + B	**85,8271**	**550**	**Mejor**
A + D	29,1121	700	
B + D	68,668	650	
C	63,0675	700	

Fuente: elaboración propia.

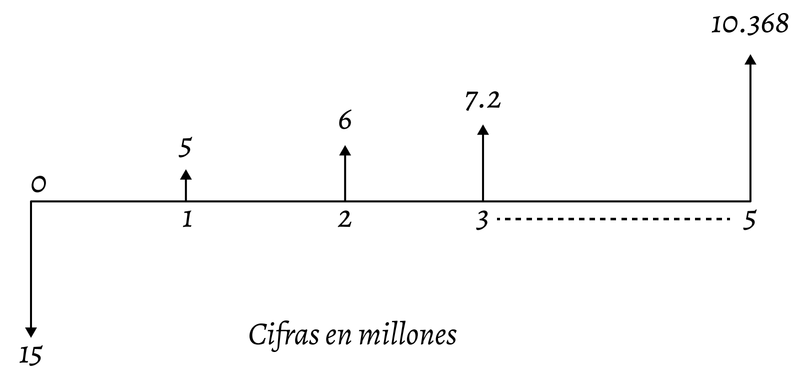
7.4. Tasa interna de retorno (TIR)

La *tasa interna de retorno* (TIR) mide la rentabilidad de un proyecto como un porcentaje. Matemáticamente, la TIR es la tasa de interés a la cual el VPN se hace 0; financieramente, la TIR es la tasa a la cual son descontados todos los flujos de caja de forma tal que los ingresos y los egresos sean iguales.

Ejemplo (7.5)

Una persona está pensando en construir un parqueadero, para tal fin toma en alquiler un lote por un plazo de 5 años. El costo de la construcción, incluidos los impuestos y las licencias son de $ 15 000 000. Se estima que los ingresos después de descontar el valor de los arriendos e impuestos, es decir, los ingresos netos, son de $ 5 000 000, los cuales crecerán cada año aproximadamente de acuerdo al índice de inflación que se estima en un 20 % anual. Si el inversionista gana normalmente un 35 %, ¿es aconsejable este negocio?

Figura 7.5. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 7.5.



Fuente: elaboración propia.

$$VPN = -15 + 5(P/G{,}35\%{,}5{,}20\%) = 0$$

$$VPN = -15 + \frac{5\,[(1+0{,}2)^5\,(1+i)^{-5} - 1]}{0{,}2 - i} = 0$$

Para solucionarlo manualmente se necesita interpolar, dándole valores a i no muy alejados entre sí, de tal forma que la función sea una vez positiva y otra negativa.

Escogiendo inicialmente un 30 %:

$$f(30\ \%) = -15 + \frac{5\,[(1+0{,}2)^5\,(1+0{,}3)^{-5} - 1]}{0{,}2 - 0{,}3} = 1{,}49115$$

Luego un 34 %:

$$f(34\ \%) = -15 + \frac{5\,[(1+0{,}2)^5\,(1+0{,}34)^{-5} - 1]}{0{,}2 - 0{,}34} = 0{,}14476$$

Como no se ha encontrado una negativa, se sigue intentando, ahora con un 35 %:

$$f(35\ \%) = -15 + \frac{5\,[(1+0{,}2)^5\,(1+0{,}35)^{-5} - 1]}{0{,}2 - 0{,}35} = 0{,}1643$$

Tabla 7.3. Resumen de resultados de VPN del ejemplo 7.5

i	VPN
30 %	1,49115
34 %	0,14476
35 %	-0,1643

Fuente: elaboración propia.

Para interpolar, se toman los valores más cercanos a cero y se plantean las proporciones como se muestra en la figura 7.5.

Figura 7.5. "Regla de 5" ejemplo 7.5 para interpolación matemática.

$$\left[\begin{array}{ccc} 34 & \text{———} & 0{,}14476 \\ x & \text{———} & 0 \\ 35 & \text{———} & -0{,}1643 \end{array}\right]$$

Fuente: elaboración propia.

$$\frac{34-35}{34-x}=\frac{0{,}14476-(-0{,}1643)}{0{,}14476-0}$$

$$x = 34{,}468\ \%$$

Finalmente, se concluye que el proyecto no debe ser aceptado porque:

$$TIO > TIR \longrightarrow 35\ \% > 34{,}468\ \%$$

Para que el inversionista se interese habría que ofrecer una tasa más alta que haga atractivo el proyecto, esta tasa se denomina *tasa mínima atractiva de retorno* (TMAR).

Si escasamente la TMAR iguala a la tasa del inversionista, él preferirá seguir realizando sus inversiones normales. Por otra parte, la TIO debe ser superior a la inflación local, porque si el inversionista colocara su dinero por debajo de la inflación estaría obteniendo una RR negativa.

Se puede concluir que:

- Si TIR > TMAR, el proyecto es bueno.
- Si TIR < TMAR, el proyecto no es aconsejable.

7.5. Inconsistencias entre VPN y TIR

Hay ocasiones en que el VPN y la TIR difieren a la hora de escoger un proyecto de inversión.

El problema consiste en que la TIR solo mide la rentabilidad de los dineros que permanecen invertidos en el proyecto y no toma en cuenta los dineros que son liberados, o los toma en cuenta suponiendo que los reinvierte a la misma tasa del proyecto, lo cual es un error porque no necesariamente los dineros se reinvierten a la misma tasa del proyecto.

Para solucionar esta dificultad se debe tener en cuenta la reinversión; esta nueva TIR recibe el nombre de *TIR modificada* (TIRM). Esta elimina la inconsistencia de ordenamiento entre la TIR y el VPN, en la gran mayoría de los casos.

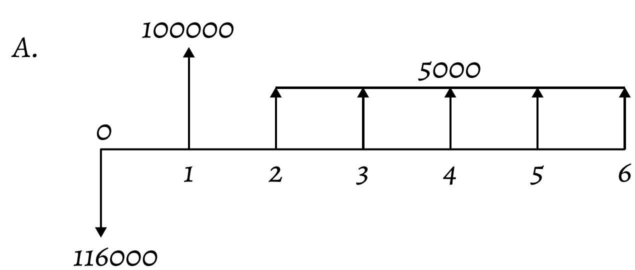
7.5.1. TIRM

Para calcular la TIRM se trasladan al punto inicial todos los egresos, utilizando una tasa determinada por el mercado de colocación, y se trasladan a valor final todos los ingresos, utilizando la tasa TIO. Es muy común que se utilice para ambas operaciones la TIO.

Ejemplo (7.6)

Supóngase que para un inversionista la TIO es del 3 % mensual, con esta tasa seleccionar uno de los siguientes proyectos:

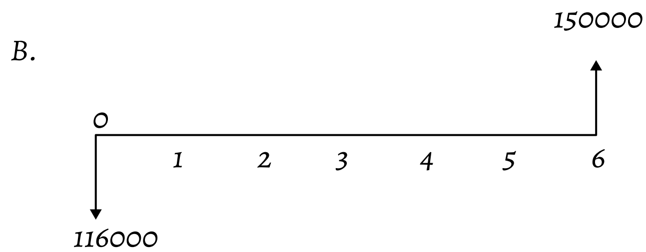
Figura 7.6. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 7.6 proyecto A.



Fuente: elaboración propia.

$VPN_A = -116\,000 + 100\,000(1+0{,}03)^{-1} + 5000(P/A, 3\%, 5)\,(1+0{,}03)^{-1}$
$VPN_A = \$3\,318{,}97$

Figura 7.7. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo 7.6 proyecto B.



Fuente: elaboración propia.

$$VPN_B = -116\,000 + 150\,000(1 + 0{,}03)^{-6}$$
$$VPN_B = \$9\,622{,}64$$

El análisis utilizando el VPN indica que es mejor el proyecto B, puesto que $VPN_B > VPN_A$.

Ahora, se hace el análisis con la TIR para escoger el proyecto:

$$VPN_A = -116\,000 + 100\,000(1 + i)^{-1} + 5000(P/A,\, i,\, 5)\ (1 + i)^{-1} = 0$$

La solución manual requiere interpolación y por calculadora el resultado aproximado es: TIR_A = 4,91 % mensual.

$$VPN_B = -116\,000 + 150\,000(1 + 0{,}03)^{-6} = 0$$

De donde se obtiene que TIR = 4,38% mensual.

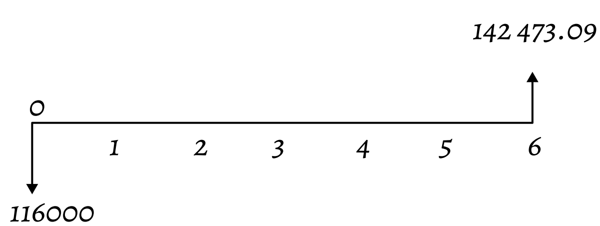
El análisis utilizando el TIR indica que es mejor el proyecto B, puesto que $TIR_A > TIR_B$.

Al mirar la gráfica del proyecto A (figura 7.6) se observa que solo hay un egreso y que, además, está ubicado en el punto inicial, entonces solo queda trasladar al punto 6 (punto final) todos los ingresos, y para ello se utilizará una tasa del 3 % mensual que es la tasa del inversionista.

$$Ingresos = 100\,000(1 + 0{,}03)^5 + 5000(F/A,\, 3\,\%,\, 5) = \$142\,473{,}09$$

El flujo de caja queda modificado como se muestra en la figura 7.8.

Figura 7.8. Diagrama flujo de caja – DFC ejemplo 7.6 proyecto A modificado



Fuente: elaboración propia.

Utilizando la fórmula del interés compuesto, se puede podemos hallar la tasa del diagrama de flujo anterior, así:

$$142\,473{,}09 = 116\,000(1 + TIRM)^{6}$$

$$TIRM = \left(\frac{142\,473{,}09}{116\,000}\right)^{-6} - 1$$

$$TIRM = 3{,}485\%\ mensual$$

En el proyecto B (figura 7.7), la TIRM es la misma TIR, puesto que solo hay un egreso, que se encuentra en el presente, y un ingreso, que se encuentra en el futuro. Por lo tanto, $TIRM_B = 4{,}38\,\%$ mensual.

Se concluye que si $TIR_B > TIR_A$, el proyecto B es mejor que el proyecto A. Esta conclusión concuerda con la decisión que se toma tomando el VAN como indicador.

7.5.2. TIR múltiples

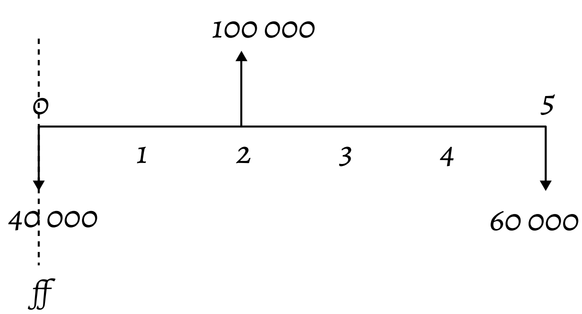
Existen dos tipos de flujos de caja, los *convencionales*, que son aquellos en los que primero aparecen los egresos y luego los ingresos o viceversa y solo tienen una tasa; y los *no convencionales*, que son aquellos en los que los ingresos y los egresos están intercalados y además en este caso pueden existir varias tasas. Hasta ahora, se ha calculado la TIR en flujos de caja convencionales, pero al calcularla en un flujo no convencional se presentan problemas tanto matemáticos como financieros, que serán explicados con un ejemplo.

Ejemplo (7.7): Bacca (2015)

Un proyecto requiere una inversión inicial de \$ 40 000. En el periodo 1 los ingresos son iguales a los egresos, en el periodo 2 hay un ingreso neto de \$ 100 000, en los periodos 3 y 4 los ingresos y los egresos vuelven a dar un flujo de caja neto de \$ 0, finalmente, en el periodo 5 hay un ingreso de \$ 60 000. Calcular la TIR del proyecto.

Se hace el diagrama de flujo de la figura 7.9, se plantea la ecuación de valor y se le dan valores a *i*.

Figura 7.9. Diagrama flujo de caja – DFC del ejemplo.7.7.



Fuente: elaboración propia.

$$-40\,000 + 100\,000(1+i)^{-2} - 60\,000(1+i)^{-5} = 0$$

Tabla 7.4. Perfil de VPN ejemplo 7.7.

i%	**VPN**
0 %	0
10 %	5,39
20 %	5,33
30 %	3,01
40 %	-135

Fuente: elaboración propia.

Con la tabla de valores 7.4 se puede ver el comportamiento de la gráfica y así determinar las tasas.

Teniendo en cuenta que los dineros generan intereses, por lo que no puede haber una tasa del 0 %, hay una tasa que está entre el 30 % y el 40 %, que se concluye de la tabla anterior. Con el fin de hacer una interpolación, se buscan dos valores para *i* no muy lejanos de forma tal que la función tome valores de diferente signo.

Tabla 7.5. Identificación de tasas para hacer interpolación

i%	**VPN**
39 %	193,976
40 %	-135,658

Fuente: elaboración propia

Figura 7.10. “Regla de 5” para hacer interpolación.

$$\left[\begin{array}{ccc} 39 & \text{———} & 193,976 \\ x & \text{———} & 0 \\ 40 & \text{———} & -135,658 \end{array}\right]$$

Fuente: elaboración propia.

$$X = 39,588\%$$

Los resultados mostrados en la tabla 7.5 y la figura 7.10 indican que existen dos tasas, y no se sabe a cuál atenerse; por tal razón, se debe utilizar una TIR modificada, que daría una única tasa y así se puede decidir si el proyecto es aconsejable realizarlo o no.

Suponiendo una tasa del 30 % para la reinversión, los ingresos serán:

$$Ingresos = 100000(1 + 0{,}3)^3 = \$219\,700$$

Para traer al presente los egresos, se usa la tasa del 25 % (tasa del crédito corriente) y se tiene:

$$Egresos = 40\,000 + 60\,000(1 + 0{,}25)^{-5} = \$59\,660{,}80$$

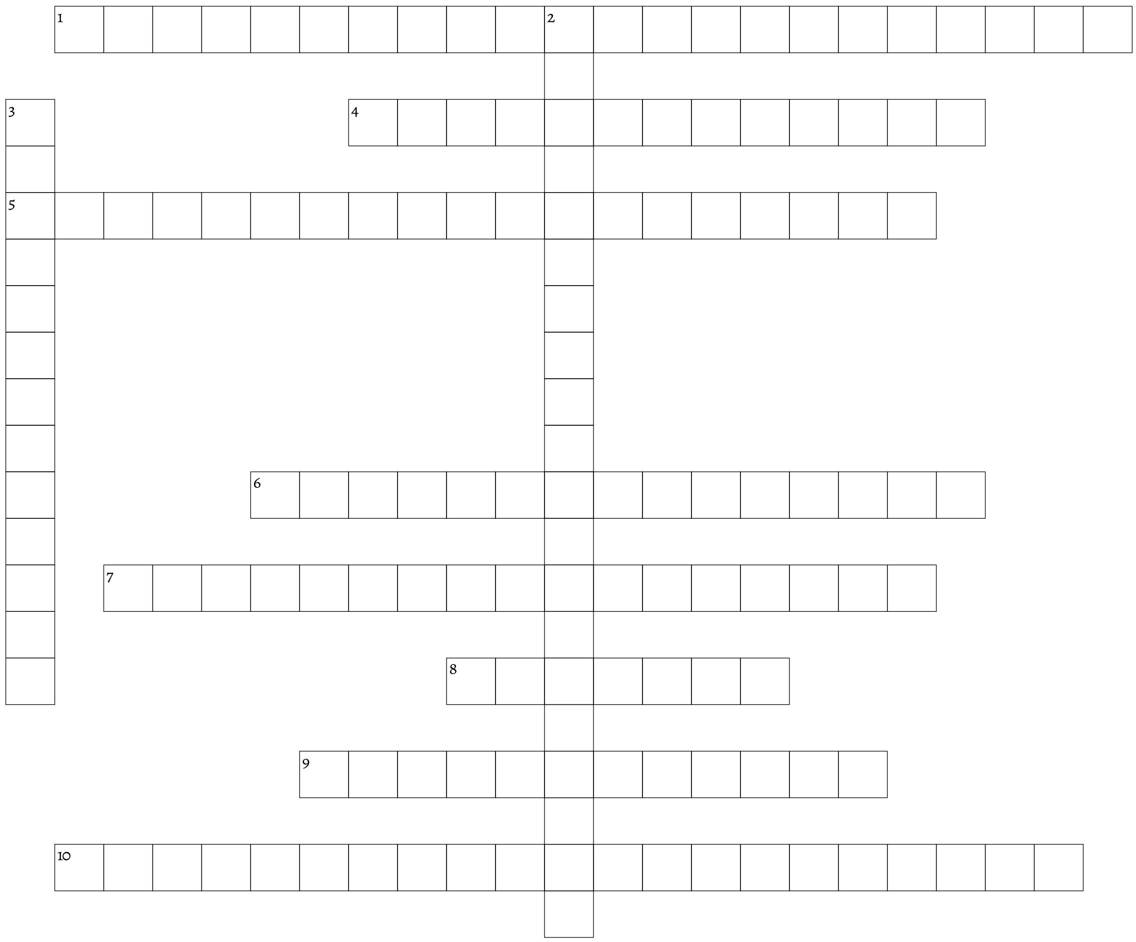
La TIRM será:

$$219\,700 = 59\,660,\,8(1 + i)^5$$
$$i = 29{,}786\,\%$$
$$\text{TIRM} = i = 29{,}786\,\%$$

Esta tasa se debe comparar con la TIO para tomar una decisión.

Vale la pena anotar que no es por una simple manipulación matemática que el proyecto rinda el 29,79 %. Desde el punto de vista financiero, es mejor recibir $ 100 000 en 2 meses que recibir $ 40 000 ahora y $ 60 000 en 5 meses.

¡BIENVENIDO AL DESAFÍO DE PALABRAS! Nº 7



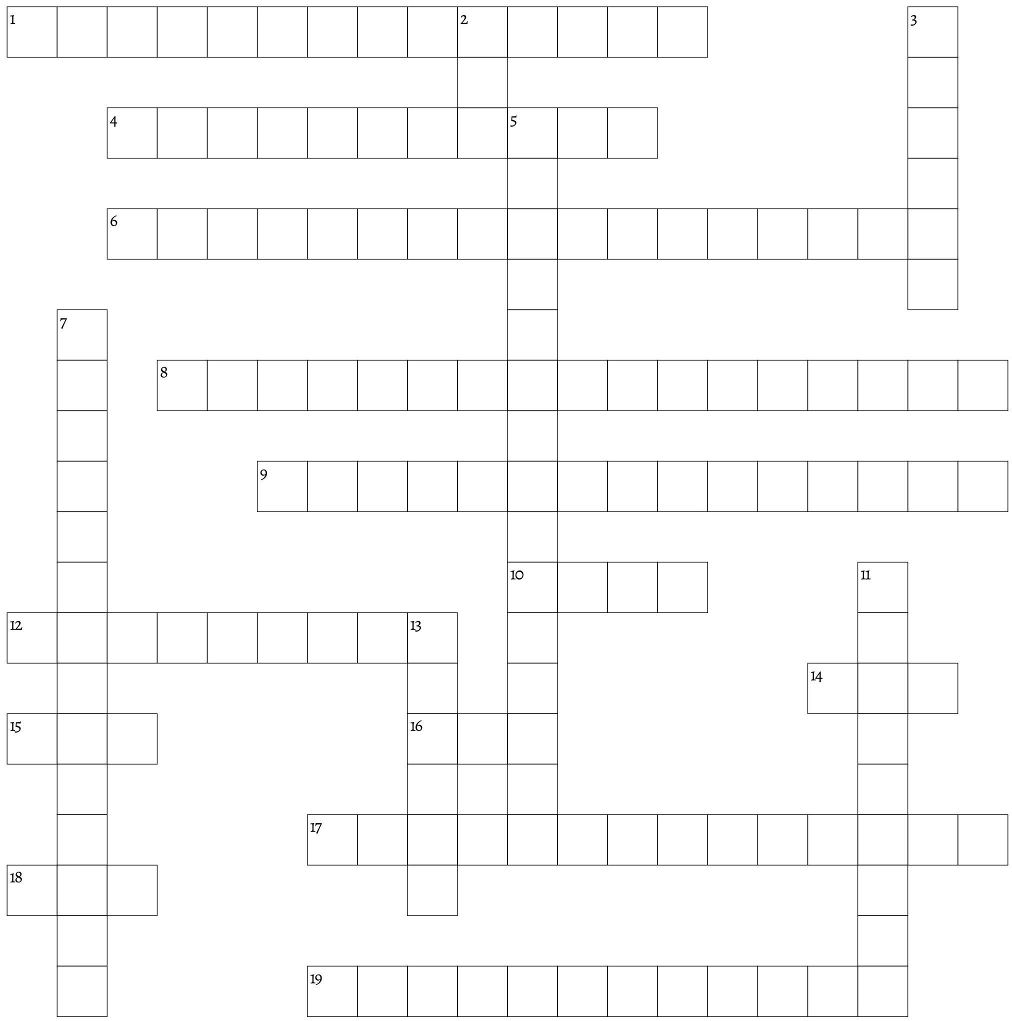
Horizontales

1. —Sistema de amortización con…en el que en cada período se abona a capital una cantidad de dinero que es igual al monto del préstamo dividido entre el número de períodos de pago
4. —Tiempo que transcurre entre un pago y otro
5. —Donde se registra, período a período, la forma como va evolucionando el pago de la deuda
6. —Es un tiempo en el cual no hay amortización de capital pero si hay causación de intereses y estos últimos pueden o no pagarse
7. —Mecanismo de ajuste diario del valor del dinero y que reemplazó a la UPAC y que se utiliza de referencia para liquidar los prestamos de vivienda
8. —Amortización en la que los pagos son iguales y periódicos
9. AMORTIZACION—Proceso por medio del cual se cancela una deuda junto con sus intereses, mediante una serie de pagos, en un tiempo determinado y con un esquema pactado entre prestamista y prestatario
10. —Abonos adicionales al capital hechos en el plazo del crédito para lograr disminuir el valor de las cuotas periódicas, o el número de cuotas restantes

Verticales

2. —Monto que se le abona a la deuda en el período
3. —Sistema de amortización con… en el que los intereses que se cobran período a período son sobre el capital inicial, sin tener en cuenta que se han hecho abonos a capital en cada uno de los pagos anteriores

¡BIENVENIDO AL DESAFÍO DE PALABRAS! N° 8



Horizontales

1. Pretende determinar el número de periodos que el proyecto o alternativa debe operar, para que cumpla la condición de factibilidad
4. Dos o más alternativas son mutuamente.....cuando, independiente de la disponibilidad de recursos, si se elige una las otras deben descartarse
6. Proyectos financiados en su totalidad por recursos externos
8. Cifra monetaria que resulta de comparar el valor presente de los ingresos con el valor presente de los egresos
9. Se presentan estas alternativas cuando la realización simultanea de diferentes alternativas mejoran los resultados que se obtendrían sí estas se hicieran aisladamente
10. Método de evaluación financiera de proyectos que se aplica en casos en los cuales el flujo de caja está compuesto sólo por egresos o gastos
12. Serie de pagos consecutivos, iguales y en periodos iguales
14. Tasa mínima de retorno
15. Tasa que convierte el VPN en 0
16. Es igual a la sumatoria de los flujos netos futuros
17. Costo correspondiente a una tasa de interés promedio ponderada, que involucra la tasa de oportunidad del inversionista y el costo del préstamo
18. Depósito a término fijo

DESAFÍO DE PALABRAS! Nº 8

(CONTINUACIÓN)

19. Proyecto de inversión que está constituido por una inversión inicial y por beneficios futuros

Verticales

2. Valor presente neto
3. Tipo de gradiente que aumenta en una cantidad fija
5. Precio que se paga por los fondos requeridos para cubrir la inversión de un proyecto
7. Se presentan estas alternativas cuando al tenerse una serie de alternativas, la elección de una alternativa NO excluye la elección de las otras
11. Tipo de tasa que se paga cada dos meses
13. Moneda extranjera que tiene una buena economía que la respalde

REFERENCIAS

Álvarez Arango, A. (2010). *Matemáticas Financieras*. 3.ra ed.. Mc Graw Hill.

Baca Urbina, G. (2015). *Ingeniería Económica*. 7.ª ed. Editorial Mc Graw Hill.

García, J. (2008). *Matemáticas Financieras*. Editorial Pearson

Meza Orozco, J. de J. (2012). *Matemáticas Financieras Aplicadas: uso de las calculadoras financieras y EXCEL*. 4.ª ed. ECOE Ediciones.

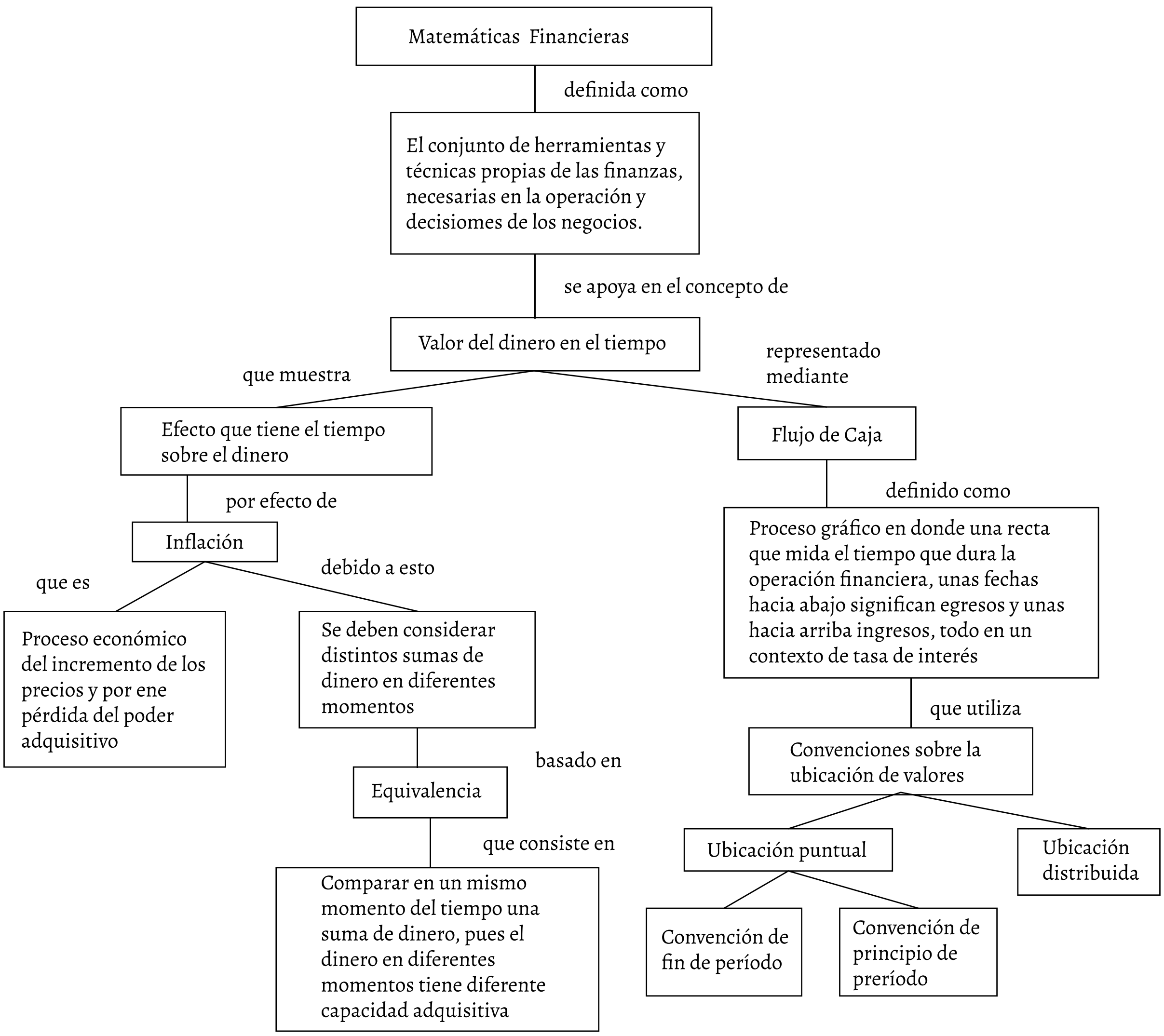
Vélez Pareja, I. (2002). *Herramientas para el análisis de la rentabilidad. Guías empresariales*. Editorial Alfaomega.

Vélez Pareja, I. (2010). *Decisiones Financieras de Inversión*. 5.ª ed. Ediciones Pontificia Universidad Javeriana.

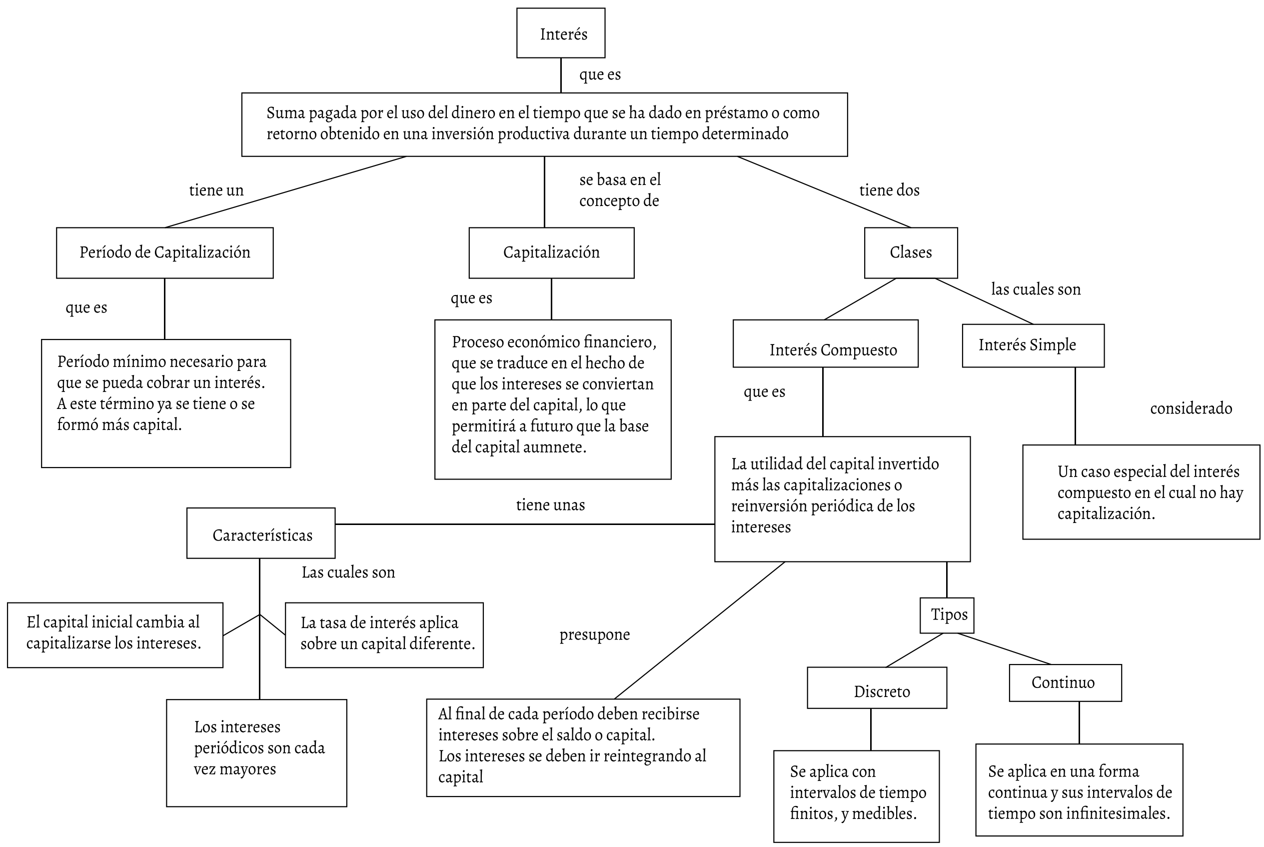
ANEXOS

9.1. Mapas conceptuales

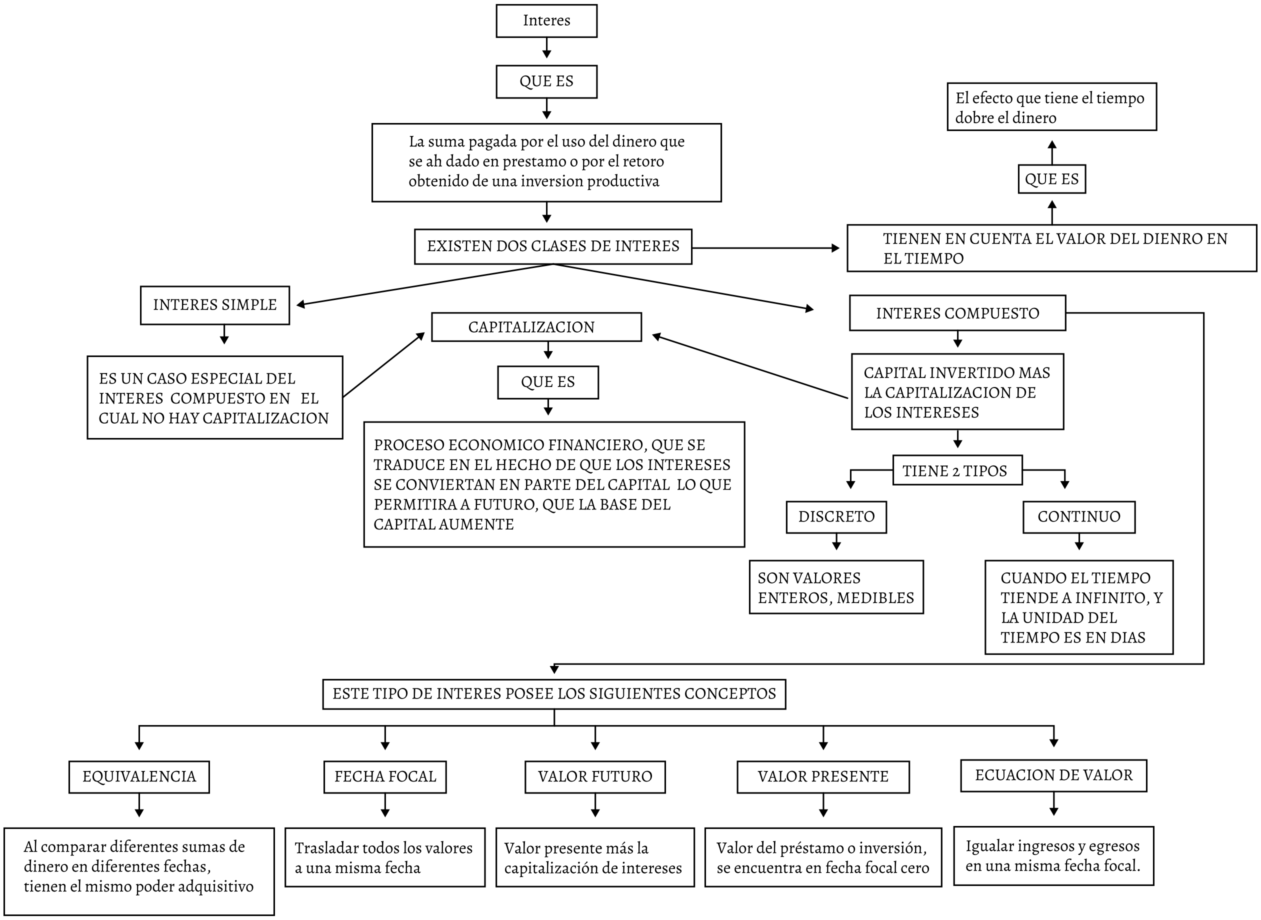
Mapa conceptual de conceptos básicos de las matemáticas financieras



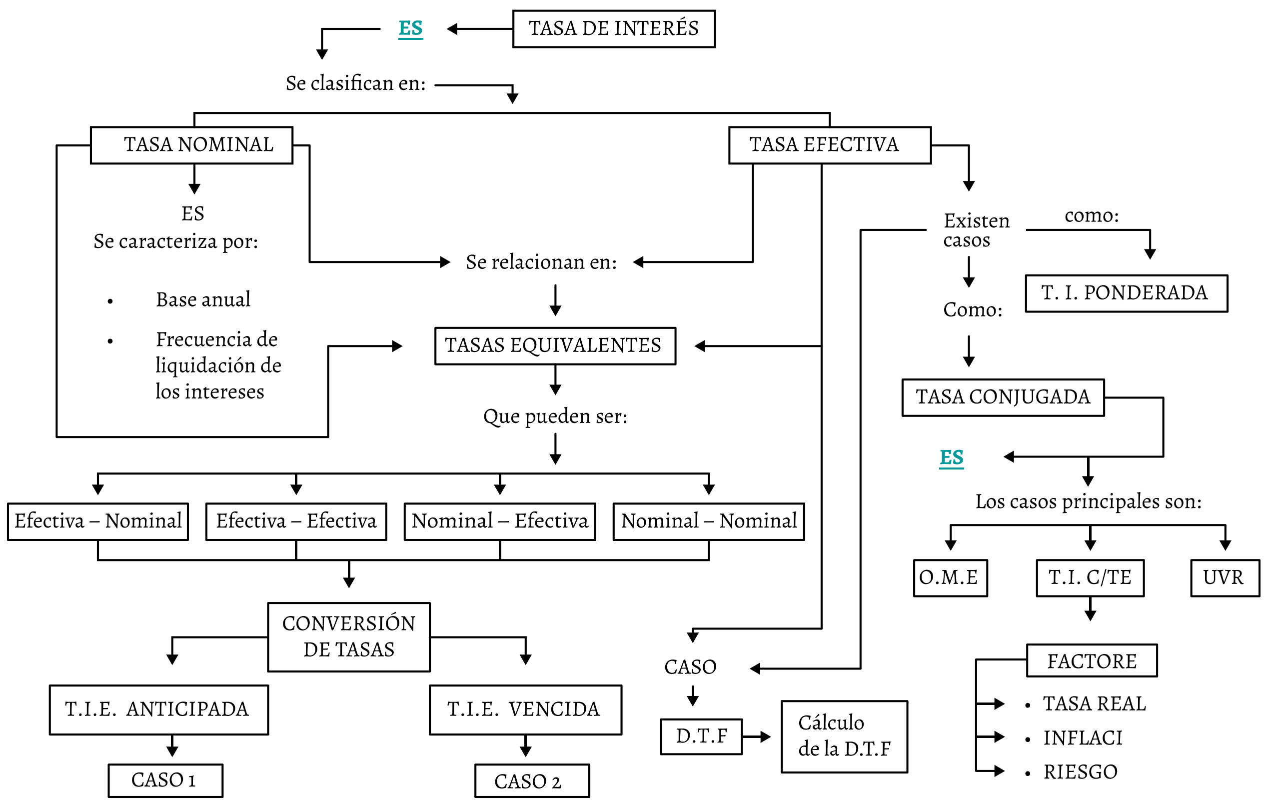
Mapa conceptual del concepto de interés



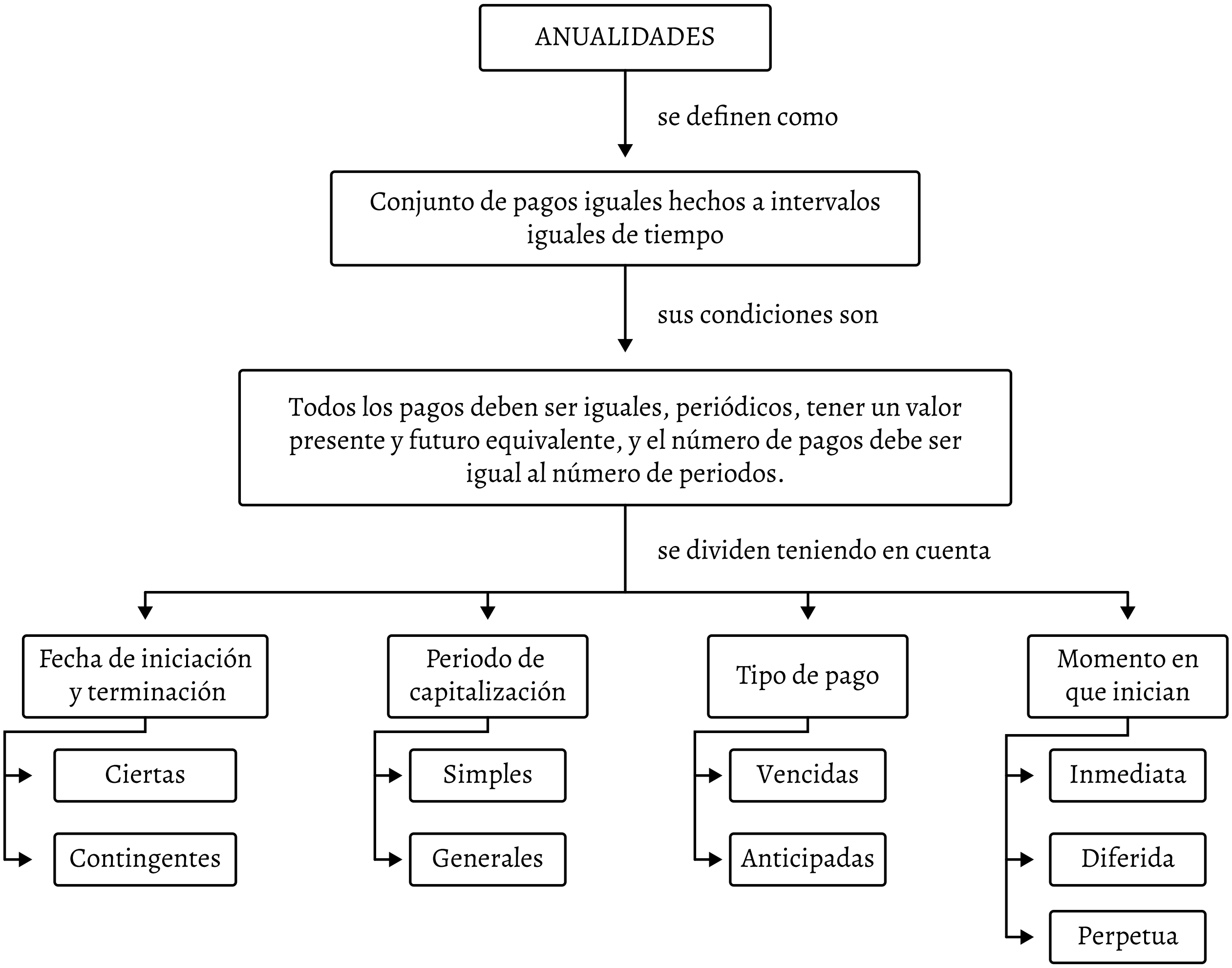
Mapa conceptual de definición y tipos de interés



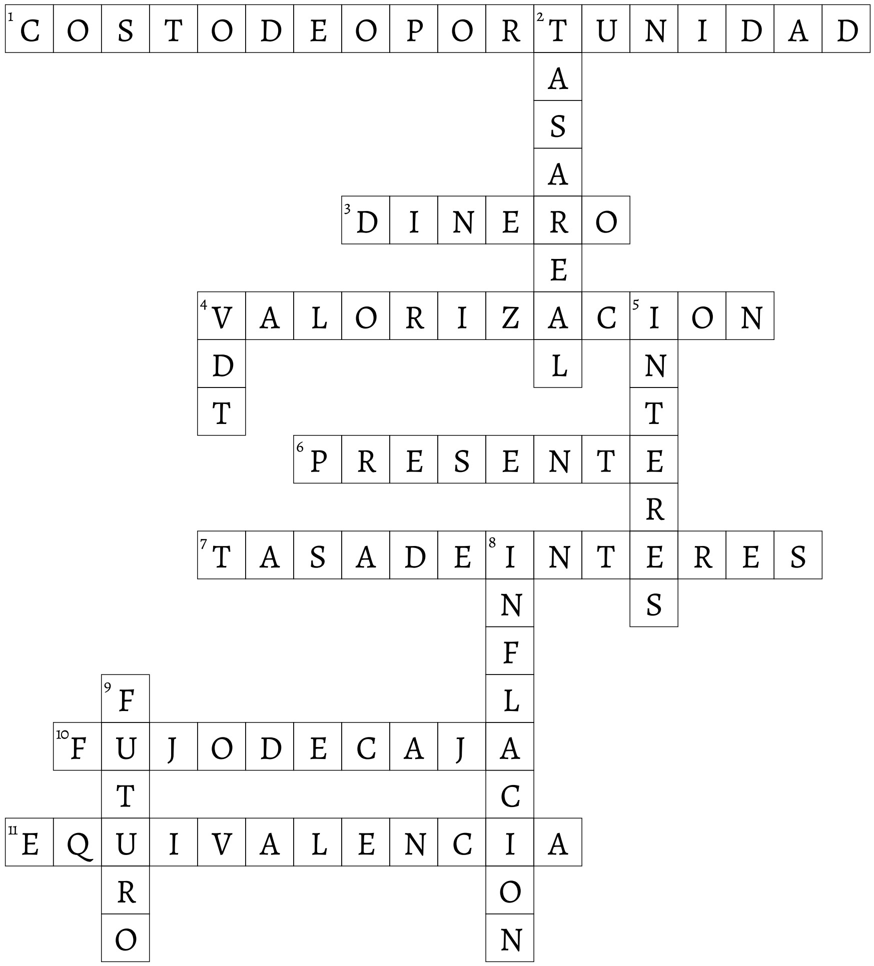
Mapa conceptual de tasas de interés



Mapa conceptual de series uniformes, también conocidas como anualidades



RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 1



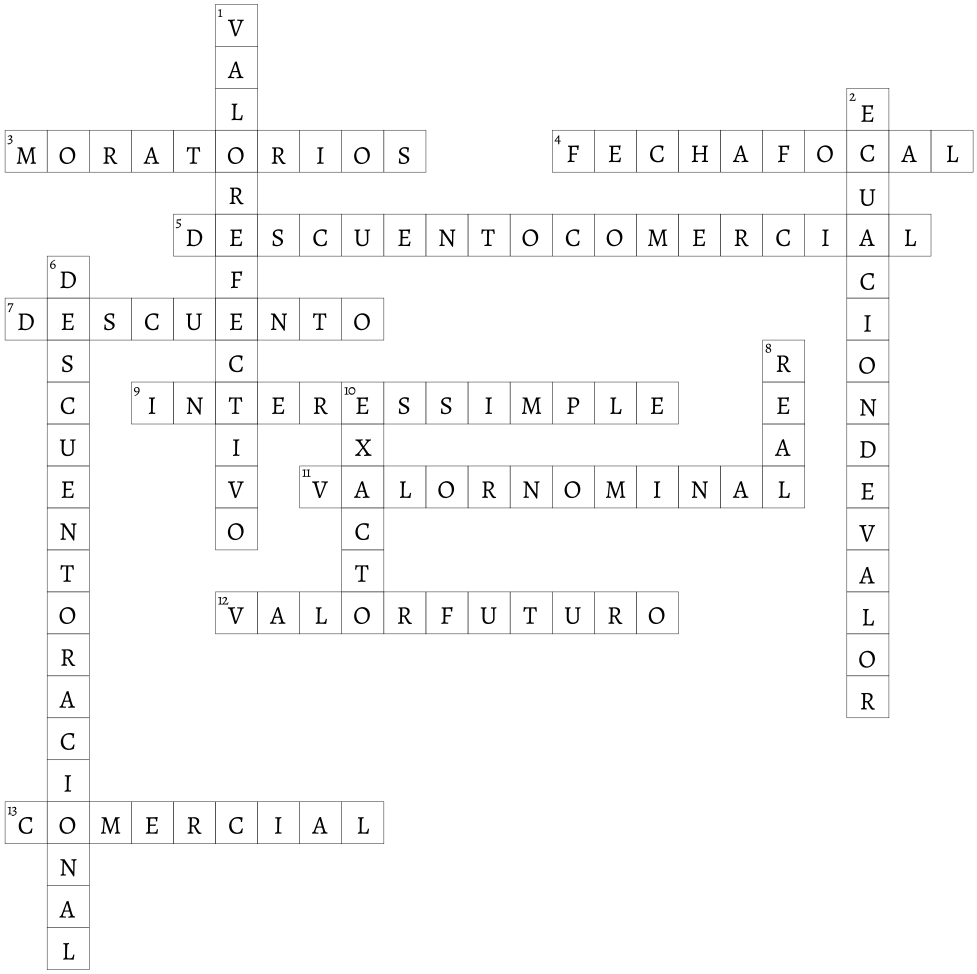
Horizontal

1. COSTODEOPORTUNIDAD—Lo que se sacrifica cuando se toma una decisión
3. DINERO— Bien económico que tiene la capacidad intrínseca de generar más de él mismo
4. VALORIZACION—Efecto producido por la alicación de una tasa de interés que se traduce en un aumento del valor inicial del dinero por adición de los intereses
6. PRESENTE—P
7. TASADEINTERES—indicador expresado como porcentaje que mide el valor de los intereses
10. FUJODECAJA—Registro gráfico de entradas y salidas de dinero durante el tiempo que dure la operación financiera
11. EQUIVALENCIA—Criterio que dice que dos cantidaddes diferentes ubicadas en diferentes fechas pueden producir el mismo resultado económico, dependiendo de la tasa de interés

Vertical

2. TASAREAL—Medición porcentual del crecimiento real de una inversión
4. VDT—Concepto que define que una cantidad de dinero en el presente vale más que la misma cantidad en el futuro.
5. INTERES—Diferencia entre el valor futuro y el valor presente, entendido como la medida del valor del dinero en el tiempo
8. INFLACION—Fenómeno económico que hace que el dinero día a día pierda poder adquisitivo
9. FUTURO—F

RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 2



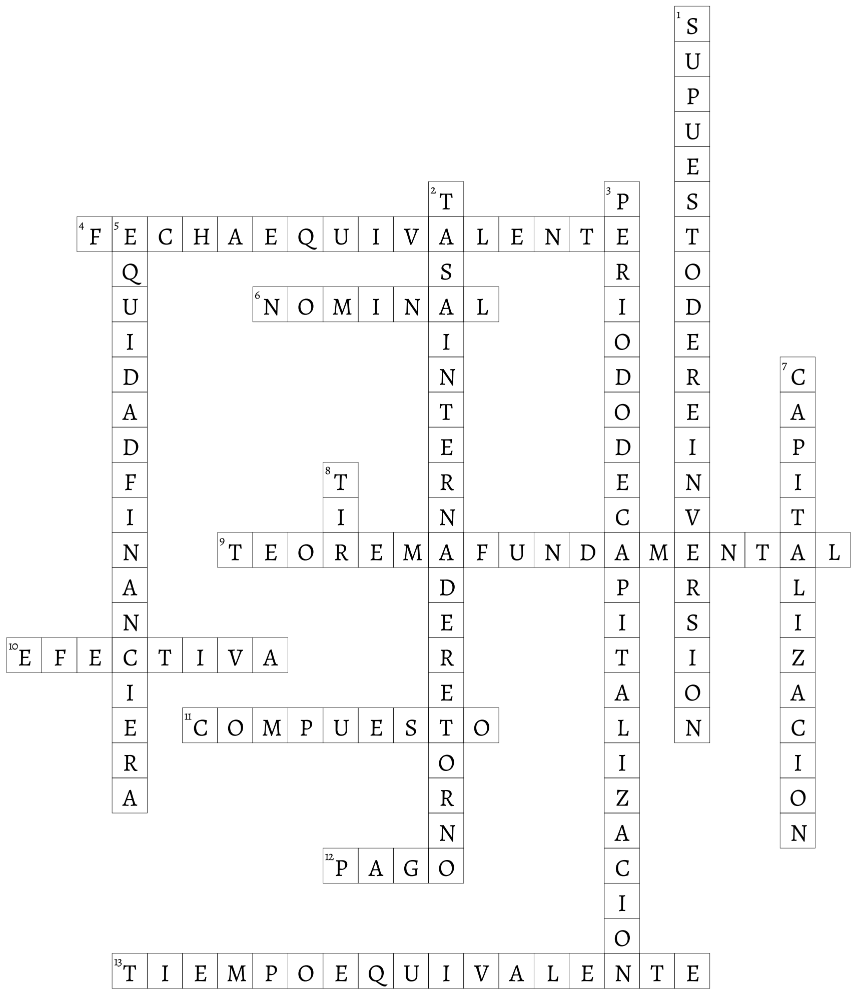
Horizontal

3. MORATORIOS—Intereses que se ganan o cancelan, cuando una deuda no se paga en la fecha de vencimiento
4. FECHAFOCAL—Momento de comparación a la que se llevan todos los flujos de dinero, en una ecuación de valor
5. DESCUENTOCOMERCIAL—Operación en la que los intereses se calculan sobre el valor nominal
7. DESCUENTO—Intereses cobrados en forma anticipada en operaciones financieras en las cuales hay que negociar antes del vencimiento un papel o título
9. INTERESSIMPLE—Tipo de interés en el que los intereses devengados en un período no ganan intereses en los períodos siguientes, independientemente de que se paguen o no
11. VALORNOMINAL—Monto que aparece en el pagaré de una operación con descuento
12. VALORFUTURO—quel que es igual al capital prestado más los intereses
13. COMERCIAL—Interés que se calcula teniendo en cuenta el año de 360 días

Vertical

1. VALOREFECTIVO—Cantidad de dinero que recibe el tenedor de un título una vez descontados los intereses
2. ECUACIONDEVALOR—Planteamiento de equivalencias de valores en una misma fecha
6. DESCUENTORACIONAL—Operación en la que los intereses se le calculan sobre el valor efectivo
8. REAL—Interés que se calcula considerando el año de 365 días o 366 días si se trata de un año bisiesto
10. EXACTO—Otro nombre para el interés real

RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 3



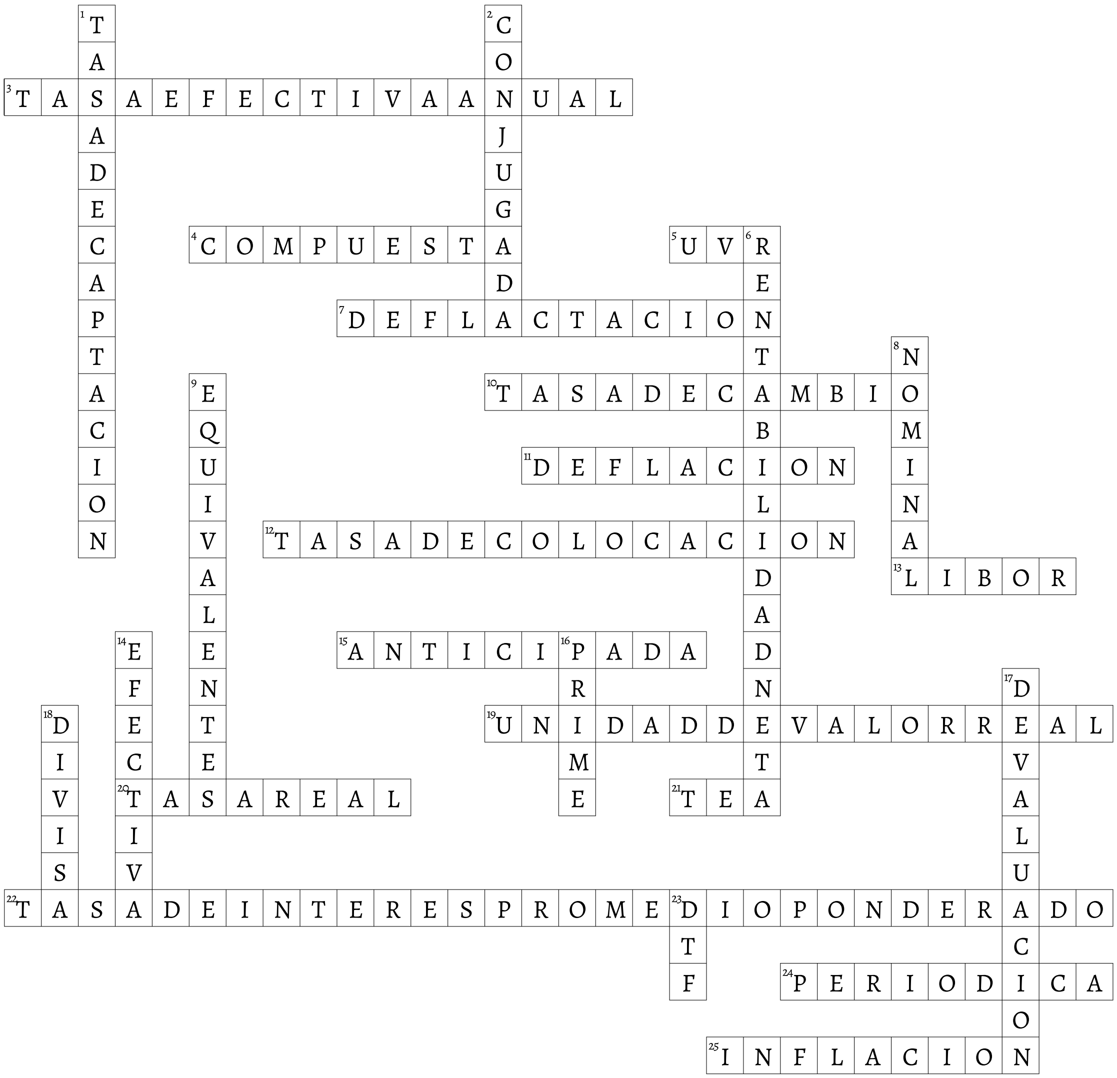
Horizontal

4. FECHAEQUIVALENTE—Fecha en la cual un conjunto de deudas con fechas de vencimiento diferentes, puede ser pagado mediante un valor único equivalente a la suma de las distintas deudas
6. NOMINAL—Tasa que se pacta en una operación financiera
9. TEOREMAFUNDAMENTAL—Otro nombre para el principio de equidad financiera
10. EFECTIVA—Tasa que realmente se paga en una operación financiera
11. COMPUESTO—Interés en el que los intereses se van capitalizando período a período
12. PAGO—Otro nombre para anualidad
13. TIEMPOEQUIVALENTE—Tiempo que debe transcurrir desde el momento actual hasta la fecha equivalente

Vertical

1. SUPUESTODEREINVERSION—Aquel que considera que todos los fondos que libera un proyecto o préstamo (intereses) son reinvertidos a la misma tasa de interés
2. TASAINTERNADERETORNO—Tasa de interés que brinda un proyecto de inversión
3. PERIODODECAPITALIZACION—Periodo pactado para convertir el interés en capital
5. EQUIDADFINANCIERA—Principio que consiste en establecer una igualdad entre los egresos y los ingresos que intervienen en cualquier operación financiera
7. CAPITALIZACION—Proceso mediante el cual los intereses que se van causando se suman al capital anterior
8. TIR—Costo de una operación financiera o comercial, que viene determinado por la tasa de interés que se cobra sobre la porción de capital al principio de cada periodo se adeuda

RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 4



Horizontales

3. TASAEFECTIVAANUAL—Tasa que se define como la tasa equivalente, si la capitalización se hiciera sólo una vez al año
4. COMPUESTA—Otro nombre para la tasa conjugada
5. UVR—Mecanismo de ajuste diario del valor del dinero, que utilizan las Corporaciones de Ahorro y Vivienda
7. DEFLACTACION—Operación de cálculo que consiste en quitarle a una suma de dinero en precios corrientes o nominales el efecto de la inflación de manera tal que la suma quede en precios reales o constantes
10. TASADECAMBIO—Precio que se paga en moneda nacional por cada una de las monedas extranjeras
11. DEFLACION—Efecto contrario a la inflación, es decir, la bajada continuada y sustancial en los niveles de precios
12. TASADECOLOCACION—Precio que cobran los intermediarios financieros por prestar el dinero.
13. LIBOR—Tasa de referencia para las negociaciones efectuadas en eurodólares, y corresponde al promedio de los principales bancos europeos.
15. ANTICIPADA—Tasa de interés que se cobra por adelantado, en cada periodo de utilización del dinero.
19. UNIDADDEVALORREAL—UVR
20. TASAREAL—Rentabilidad que queda después de descontarle a la tasa de interés la tasa de inflación
21. TEA—Tasa efectiva anual
22. TASADEINTERESPROMEDIOPONDERADO—Tasa que resulta al invertir en un capital diferentes porciones a distintas tasas de interés

RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 4

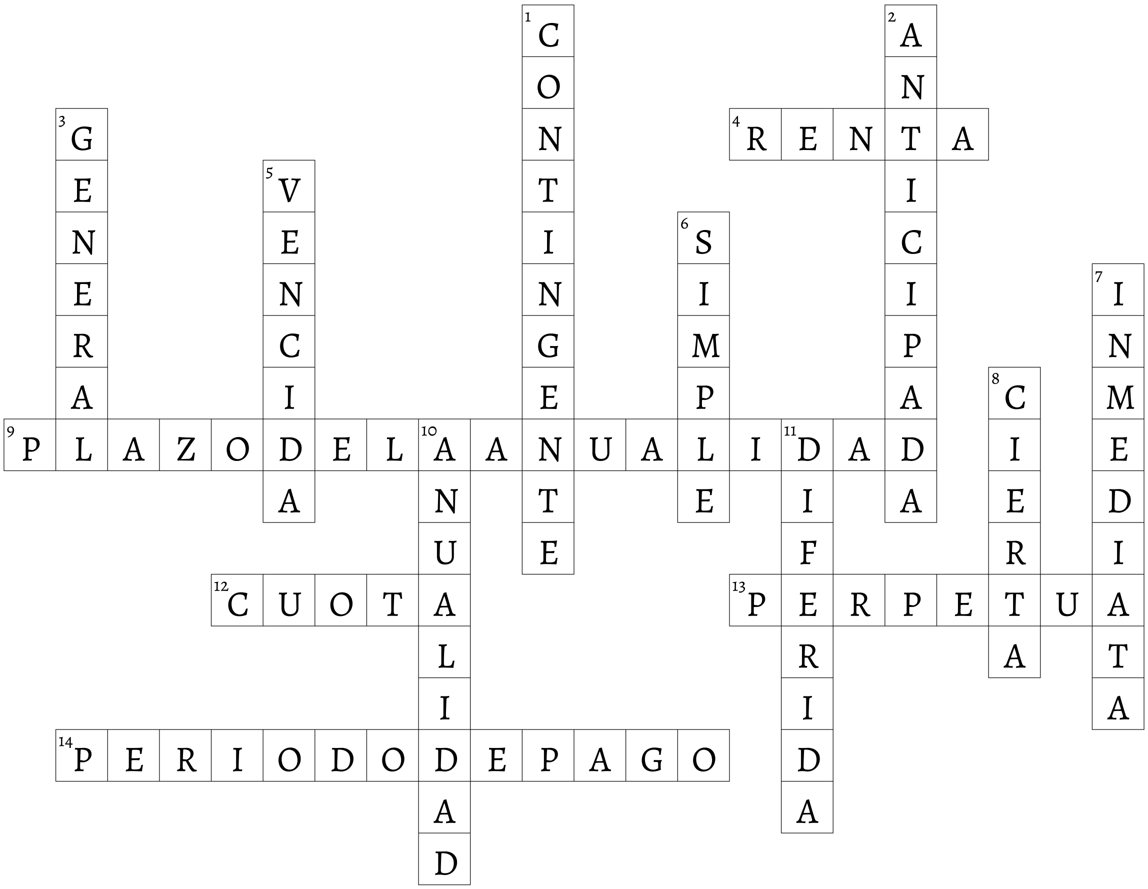
(CONTINUACIÓN)

24. PERIODICA—Tasa que resulta de dividir la tasa nominal, entre el número de periodos en que se capitaliza
25. INFLACION—Incremento persistente de los precios de los bienes y servicios producidos por la economía de un país

Verticales

1. TASADECAPTACION—Tasa que ofrecen los intermediarios financieros por obtener los recursos de las personas y las empresas que tienen excedente de dinero
2. CONJUGADA—Tasa que resulta de la aplicación simultanea de dos o más tasas de interés
6. RENTABILIDADNETA—Rentabilidad efectiva de una inversión corregida por los impuestos
8. NOMINAL—Tasa de interés que expresada en un periodo capitaliza varias veces en dicho periodo
9. EQUIVALENTES—Dos tasas de interés que, obrando en condiciones diferentes, producen la misma tasa efectiva anual o el mismo valor futuro.
14. EFECTIVA—Tasa que mide el costo efectivo de un crédito o la rentabilidad efectiva de una inversión, y que resulta de capitalizar la tasas nominal
16. PRIME—Corresponde a la denominada "tasa preferencial", y es la base más utilizada para la negociación de los créditos en moneda extranjera. Su cálculo, depende de la situación del mercado de capitales en E.U.A
17. DEVALUACION—Pérdida del valor de la moneda de un país con respecto a una divisa.
18. DIVISA—Moneda extranjera aceptada como medio de pago internacional
23. DTF—Indicador económico que representa el promedio de las tasas de interés reconocidas por los Bancos, Corporaciones Financieras, Corporaciones de Ahorro y Vivienda y Compañías de Financiamiento Comercial

RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 5



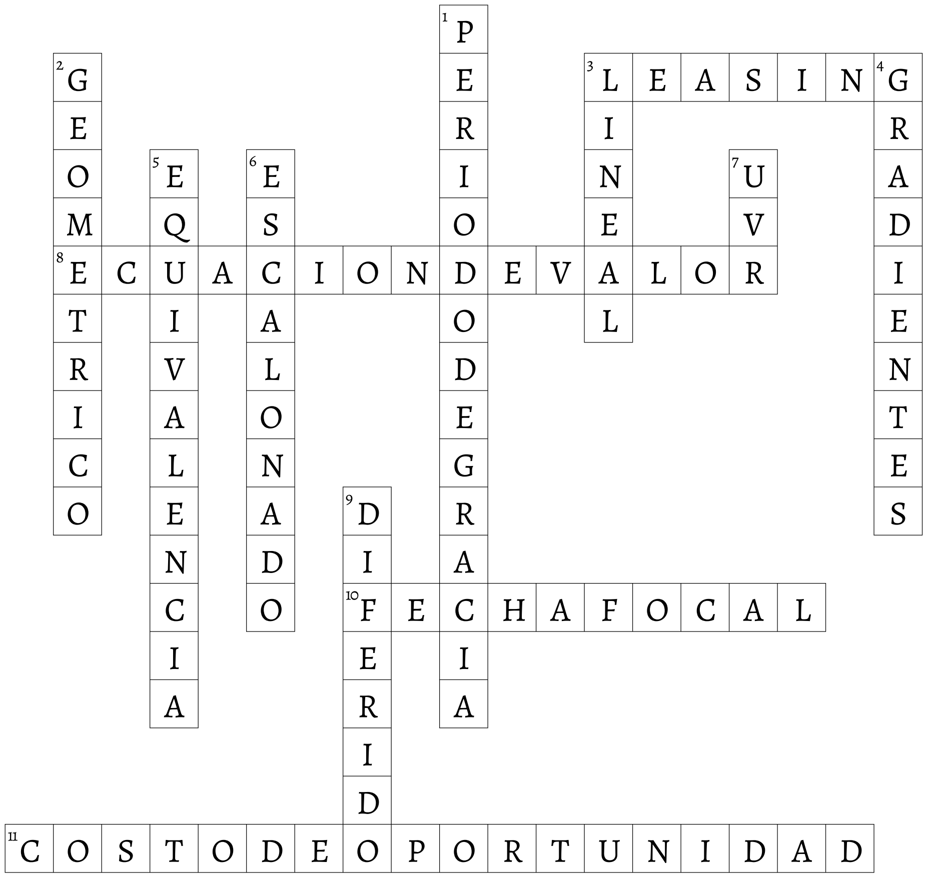
Horizontales

4. RENTA—Pago o cuota
9. PLAZODELAANUALIDAD—Tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final de pago
12. CUOTA—En anualidad el número de periodos es igual al número de…
13. PERPETUA—Tipo de anualidad que también puede ser llamada indefinida
14. PERIODODEPAGO—Tiempo que transcurre entre un pago y otro

Verticales

1. CONTINGENTE—Tipo de anualidad en donde la fecha del primer y último pago no están fijadas de antemano
2. ANTICIPADA—Los pagos se efectúan al principio de cada periodo
3. GENERAL—Tipo de anualidad en la que el periodo de capitalización de los intereses y el periodo de pago no coinciden
5. VENCIDA—Tipo de anualidad en la que los pagos se efectúan al final del periodo
6. SIMPLE—Tipo de anualidad en la que el periodo de pago coinciden con el de capitalización de los intereses.
7. INMEDIATA—Otro tipo de anualidad según el momento en que se inician
8. CIERTA—Tipo de anualidad en la que las fechas son fijas y se estipulan de antemano
10. ANUALIDAD—Pagos iguales y secuenciales afectados por la misma tasa
11. DIFERIDA—En estas anualidades, los pagos se empiezan a hacer tiempo después de la formalización del trato.

RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 6



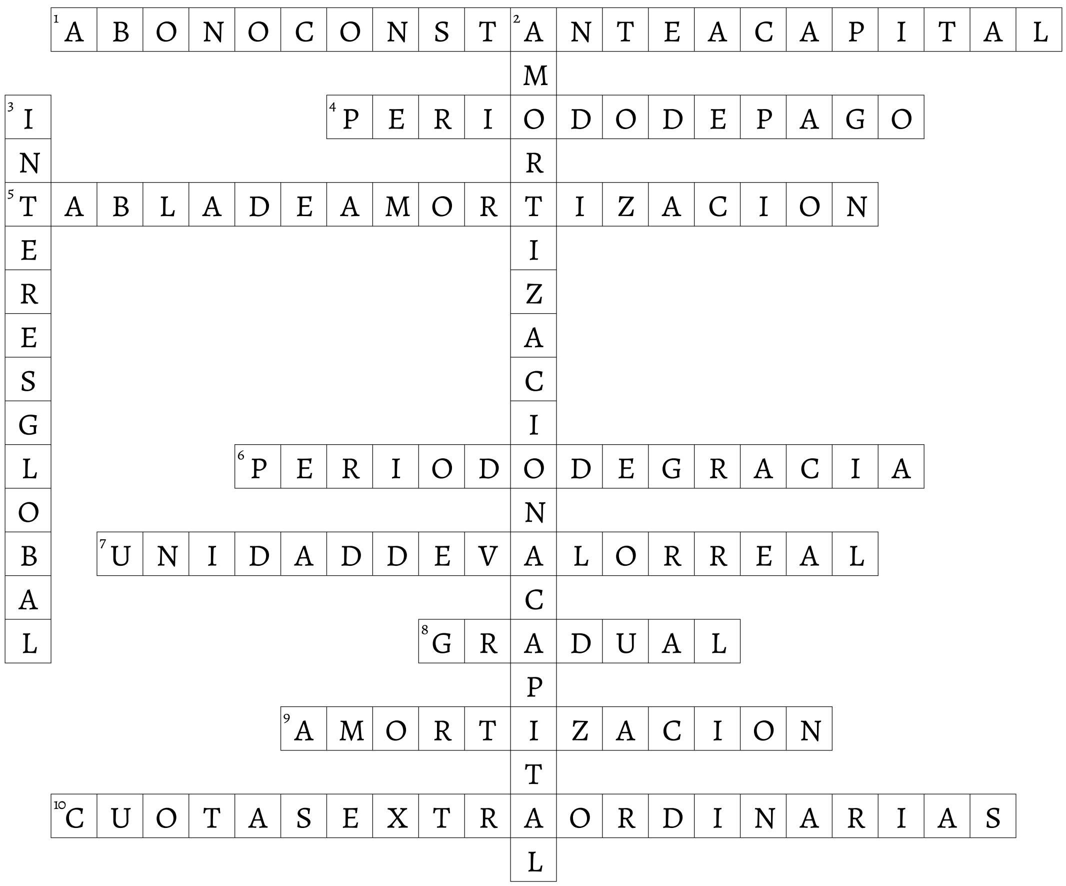
Horizontales

3. LEASING—Contrato de arrendamiento financiero mediante el cual el dueño de un activo (el arrendador) le otorga a otra parte (el arrendatario) el derecho exclusivo de utilizarlo, normalmente por un periodo de tiempo convenido, a cambio de un alquiler.
8. ECUACIONDEVALOR—Planteamiento de equivalencias de valores en una misma fecha
10. FECHAFOCAL—Momento de comparación a la que se llevan todos los flujos de dinero, en una ecuación de valor
11. COSTODEOPORTUNIDAD—Lo que se sacrifica cuando se toma una decisión

Verticales

1. PERIODODEGRACIA—Tiempo durante el cual no se hacen abonos a capital pero si se causan intereses
2. GEOMETRICO—Serie de pagos que aumentan o disminuyen en un porcentaje constante. También recibe el nombre de exponencial
3. LINEAL—Serie de pagos que aumentan o disminuyen en una cantidad constante de dinero. También recibe el nombre de aritmético
4. GRADIENTES—Flujos de caja conformados por una serie de pagos que aumentan o disminuyen periodicamente en una cantidad o porcentaje fijo
5. EQUIVALENCIA—Criterio que dice que dos cantidades diferentes ubicadas en diferentes fechas pueden producir el mismo resultado económico, dependiendo de la tasa de interés
6. ESCALONADO—Tipo de gradiente cuyas cuotas permanecen fijas durante un tiempo y después aumentan en una cantidad fija, ya sea en pesos o en porcentaje
7. UVR—Diferentes sistemas de amortización de créditos de vivienda en Colombia están basados en esta unidad
9. DIFERIDO—Gradiente en el que el primer pago se realiza períodos después de formalizada la operación financiera

RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 7



Horizontales

1. ABONOCONSTANTEACAPITAL—Sistema de amortización con...en el que en cada período se abona a capital una cantidad de dinero que es igual al monto del préstamo dividido entre el número de períodos de pago
4. PERIODODEPAGO—Tiempo que transcurre entre un pago y otro
5. TABLADEAMORTIZACION—Donde se registra, período a período, la forma como va evolucionando el pago de la deuda
6. PERIODODEGRACIA—Es un tiempo en el cual no hay amortización de capital pero si hay causación de intereses y estos últimos pueden o no pagarse
7. UNIDADDEVALORREAL—Mecanismo de ajuste diario del valor del dinero y que reemplazó a la UPAC y que se utiliza de referencia para liquidar los prestamos de vivienda
8. GRADUAL—Amortización en la que los pagos son iguales y periódicos
9. AMORTIZACION—Proceso por medio del cual se cancela una deuda junto con sus intereses, mediante una serie de pagos, en un tiempo determinado y con un esquema pactado entre prestamista y prestatario
10. CUOTASEXTRAORDINARIAS—Abonos adicionales al capital hechos en el plazo del crédito para lograr disminuir el valor de las cuotas periódicas, o el número de cuotas restantes

Verticales

2. AMORTIZACIONACAPITAL—Monto que se le abona a la deuda en el período
3. INTERESGLOBAL—Sistema de amortización con... en el que los intereses que se cobran período a período son sobre el capital inicial, sin tener en cuenta que se han hecho abonos a capital en cada uno de los pagos anteriores

RESPUESTAS DEL N° 8 DESAFÍO DE PALABRAS

Horizontales

1. VIDADESERVICIO—Pretende determinar el número de periodos que el proyecto o alternativa debe operar, para que cumpla la condición de factibilidad
4. EXCLUYENTES—Dos o más alternativas son mutuamente.....cuando, independiente de la disponibilidad de recursos, si se elige una las otras deben descartarse
6. PROYECTOSDESALIVA—Proyectos financiados en su totalidad por recursos externos
8. VALORPRESENTENETO—Cifra monetaria que resulta de comparar el valor presente de los ingresos con el valor presente de los egresos
9. COMPLEMENTARIAS—Se presentan estas alternativas cuando la realización simultanea de diferentes alternativas mejoran los resultados que se obtendrían sí estas se hicieran aisladamente
10. CAUE—Método de evaluación financiera de proyectos que se aplica en casos en los cuales el flujo de caja está compuesto sólo por egresos o gastos
12. ANUALIDAD—Serie de pagos consecutivos, iguales y en periodos iguales
14. TMR—Tasa mínima de retorno
15. TIR—Tasa que convierte el VPN en 0
16. VFN—Es igual a la sumatoria de los flujos netos futuros

17. COSTODECAPITAL—Costo correspondiente a una tasa de interés promedio ponderada, que involucra la tasa de oportunidad del inversionista y el costo del préstamo

RESPUESTAS DEL DESAFÍO DE PALABRAS N° 8

(CONTINUACIÓN)

18. DTF—Depósito a término fijo
19. CONVENCIONAL—Proyecto de inversión que está constituido por una inversión inicial y por beneficios futuros

Verticales

2. VPN—Valor presente neto
3. LINEAL—Tipo de gradiente que aumenta en una cantidad fija
5. TASADEDESCUENTO—Precio que se paga por los fondos requeridos para cubrir la inversión de un proyecto
7. INDEPENDIENTES—Se presentan estas alternativas cuando al tenerse una serie de alternativas, la elección de una alternativa NO excluye la elección de las otras
11. BIMESTRAL—Tipo de tasa que se paga cada dos meses
13. DIVISA—Moneda extranjera que tiene una buena economía que la respalde

Universidad Tecnológica de Bolívar
Editorial