

**DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UN PROTOTIPO QUE GENERA
ENERGIA ELECTRICA A PARTIR DEL FENOMENO DE RESONANCIA**

PILAR DE LAS MERCEDES PAREJO SANCHEZ

ADOLFO ENRIQUE ORTIZ LAFAURIE

TECNOLÓGICA DE BOLIVAR INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA

CARTAGENA DE INDIAS D. T. Y C.

2002

**DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UN PROTOTIPO QUE GENERA
ENERGIA ELECTRICA A PARTIR DEL FENOMENO DE RESONANCIA**

PILAR DE LAS MERCEDES PAREJO SANCHEZ

ADOLFO ENRIQUE ORTIZ LAFAURIE

**Trabajo de Grado presentado como requisito para optar el título de
Ingenieros Mecánicos**

Asesor

JUAN VICENTE VILLAMIZAR HERNANDEZ

Ingeniero Mecánico

TECNOLÓGICA DE BOLIVAR INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA

CARTAGENA DE INDIAS D. T. Y C.

2002

Cartagena octubre 16 de 2001

Señores:
COMITÉ DE PROYECTO DE GRADO
TECNOLÓGICA DE BOLIVAR INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
Ciudad.

Apreciados señores:

Por medio de la presente me dirijo a ustedes con el fin de manifestarles que brindé mi asesoría durante el desarrollo del proyecto de grado titulado "DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO QUE GENERA ENERGIA ELECTRICA A PARTIR DEL FENÓMENO DE RESONANCIA", que fue elaborado por los estudiantes PILAR DE LAS MERCEDES PAREJO SANCHEZ y ADOLFO ENRIQUE ORTIZ LAFAURIE como requisito para optar el titulo de ingenieros mecánicos.

Atentamente,

JUAN VICENTE VILLAMIZAR HERNANDEZ
C.C. N° 91'211.280 de Bucaramanga

Cartagena octubre 16 de 2001

Señores:
COMITÉ DE PROYECTO DE GRADO
TECNOLÓGICA DE BOLIVAR INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
Ciudad.

Apreciados señores:

Por medio de la presente nos permitimos poner a consideración el estudio del trabajo de grado titulado "DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO QUE GENERA ENERGIA ELECTRICA A PARTIR DEL FENÓMENO DE RESONANCIA", como requisito para optar el titulo de ingenieros mecánicos.

Nos encontraremos atentos a las indicaciones que ustedes consideren necesarias para aportar al proyecto.

Muy cordialmente,

PILAR PAREJO SANCHEZ
C.C. N° 26'670.231 de Santa Martha

ADOLFO ORTIZ LAFAURIE
C.C. N° 73'164.701 de Cartagena

NOTA DE ACEPTACION

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Cartagena, octubre de 2001_____

ARTICULO 105

La Corporación Universitaria Tecnológica de Bolívar se reserva el derecho de propiedad intelectual de todos los trabajos de grado aprobados y no pueden ser explotados comercialmente sin autorización.

DEDICATORIA

A Dios, por dirigir mis pasos cuando estuve cansada y trate de renunciar.

A mi madre, quien con su esfuerzo hoy ha logrado ver su sueño hecho realidad.

A mi padre, quien donde quiera que este, estará orgulloso de mí.

A toda mi familia por su apoyo moral.

Pilar

DEDICATORIA

A Dios, por estar siempre a mi lado.

A mis padres, por su apoyo, tolerancia e inagotable paciencia.

A toda mi familia por su apoyo moral.

Adolfo

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por iluminarnos y conducirnos por el camino correcto, a lo largo de la elaboración de esta tesis.

A Juan Vicente Villamizar, quien nos brindó su experiencia, la cual fue de mucha ayuda.

A Carlos Cuadro, Meza, Jhonny Torres y el señor Escobar, por su ayuda incondicional en todos los momentos que fue necesaria una asesoría de carácter técnica.

A Federico Lafaurie por permitirnos utilizar su taller, en donde se llevo a cabo el diseño y la construcción del prototipo.

A Leonor Sánchez, por la mano tendida en los momentos más oscuros de la carrera.

A Nayibe Arrieta, por ayuda desinteresada.

A Lucy Lafaurie y Carlos Ortiz, por su valiosa colaboración.

Y a todas aquellas personas que de una u otra manera influyeron en el desarrollo de este proyecto: Lolimar Mendoza, Tomas Sierra, Alonso Gaviria, entre otros.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCION	
1. INTRODUCCIÓN A LAS VIBRACIONES MECÁNICAS	3
1.1. ELEMENTOS DEL FENÓMENO VIBRATORIO	4
1.1.1. Excitación	5
1.1.2. Sistema	6
1.1.3. Respuesta	7
1.2. MOVIMIENTO DINÁMICO	8
1.2.1. Vibraciones libres sin amortiguamiento	15
1.2.2. Vibraciones libres con amortiguamiento	17
1.2.3. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento	25
1.2.4. Vibraciones forzadas con amortiguamiento	26
2. RESONANCIA	31
2.1. FACTORES QUE AFECTAN A LA FRECUENCIA NATURAL	32
2.2. CARACTERÍSTICAS DEL FENÓMENO	36
3. ENERGIA DE LOS MATERIALES	40
3.1. FUERZA Y ENERGIA	44

3.2. PROPIEDADES MECANICAS	46
3.2.1. Deformación elástica	47
4. EL PROTOTIPO	49
4.1. FUENTE DE VIBRACIONES O PERTURBACIÓN	51
4.2. BASE RESONANTE	52
4.3. MECANISMO	55
4.4. CALCULOS ADICIONALES	56
4.4.1. Vida útil de la base	61
4.4.2. Estructura	63
4.5. GENERACIÓN DE ENERGIA ELECTRICA	65
4.5.1. Potencia generada y consumida	71
5. ANÁLISIS ECONOMICO DEL PROYECTO	72
CONCLUSIONES	73
BIBLIOGRAFIA	

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Péndulo sencillo	9
Figura 2. Vectores	14
Figura 3. Vibración libre sin amortiguamiento	16
Figura 4. Vibración libre con amortiguamiento	18
Figura 5. Amortiguamiento	23
Figura 6. Decremento logarítmico	27
Figura 7. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento	28
Figura 8. Vibraciones forzadas con amortiguamiento	30
Figura 9. Sistema de resorte	34
Figura 10. Resonancia	39
Figura 11. Modelo atómico de masas y resortes	41
Figura 12. Fuerzas interatómicas	43
Figura 13. Circuito regulador de voltaje	53
Figura 14. Variables que intervienen en la frecuencia natural	53
Figura 15. Mecanismo corredera – manivela	57
Figura 16. Relación de transmisión	60

Figura 17. Estructura y base	66
Figura 18. Esquema general del mecanismo	69
Figura 19. Método gráfico de velocidades relativas	70

INTRODUCCION

En Colombia y en todo el mundo en general, se está atravesando por una crisis energética que afecta a la población rural, urbana e industrial de cada país. Actualmente se están desarrollando nuevas formas de producir energía, con el fin de suplir una de las principales necesidades del hombre hoy en día.

Ese es el motivo de nuestra investigación, la cual consiste en construir un prototipo que genera energía eléctrica a partir del fenómeno de resonancia.

El estudio de la resonancia data desde los años 50, como una componente de las vibraciones, y es en los años 60 cuando se desarrolla apropiadamente la medición y el análisis de estos fenómenos.

La gran mayoría de los estudios realizados, se centran en las diversas maneras de evitarlos; es este el principal motivo por el cual la resonancia como generador de energía, no tiene antecedentes históricos.

Durante el desarrollo del presente proyecto, logramos corroborar las hipótesis planteadas, contribuyendo así a la base de otro campo poco explorado por la

ciencia. La limitante encontrada durante el camino recorrido, fue la falta de tecnología, que en algunos momentos no permitió obtener datos exactos, pero sin embargo, a cambio incentivó la creatividad y el ingenio para llegar a los resultados esperados.

Lo logrado fue el resultado de largas y agotadoras sesiones de pruebas, en donde el factor preponderante, fue el ingenio para mezclar la teoría con la práctica.

RESUMEN

Los grandes inventos son realizados por la percepción de una necesidad latente, es por esto, que ideamos el diseño y construcción de un sistema generador de energía eléctrica, a partir de las vibraciones, como una alternativa en el campo de la producción de energía. Quizás la solución a este gran problema, llegue con este proyecto; aunque no sabemos si será de manera inmediata o algo demorada.

Las investigaciones y las pruebas realizadas nos condujeron a los resultados plasmados en este texto. El diseño se caracteriza por presentar de una manera sencilla, la transmisión de fuerzas para generar, primero vibración y luego con ella, movimiento circular que se acopla a un generador eléctrico por medio del clásico mecanismo biela – manivela.

Los primeros capítulos enfocan al lector en lo que hemos hecho y, lo que todavía seguimos desarrollando.

1. INTRODUCCIÓN A LAS VIBRACIONES MECANICAS

Las máquinas utilizadas en la mayoría de procesos industriales, no obstante sean sometidas a cuidadosos procedimientos de fabricación, montaje y operación, presentan imperfecciones en los elementos componentes que entran en movimiento vibratorio con la estructura de la máquina y sus alrededores.

El desarrollo tecnológico ha facilitado nuevos métodos y medios para el tratamiento de las vibraciones, gracias a los cuales actualmente es posible controlar los niveles de vibración, detectar y predecir las causas generadoras del movimiento vibratorio.

Las vibraciones en las maquinas pueden ser causadas por fuerzas de inercia o por fuerzas externas, cuyos niveles se incrementan con la presencia de fallas desperfectos o deterioros en los componentes dinámicos de las máquinas.

La **vibración** es la oscilación de un sistema físico o de una propiedad alrededor de una posición de equilibrio o de referencia. Por ejemplo, el

movimiento oscilatorio de un cuerpo unido a una resorte, oscilaciones de presión, de temperatura, de corriente eléctrica, entre otras.

Un sistema mecánico vibra cuando sobre él actúan fuerzas variables y la intensidad o amplitud de la vibración depende de la movilidad del sistema.

1.1. ELEMENTOS DEL FENÓMENO VIBRATORIO

El fenómeno vibratorio esta constituido por tres elementos fundamentales: la excitación del sistema dada por la **fuerza** que sobre él actúa, las características del sistema representadas por la **movilidad**, y la respuesta del sistema que es la **vibración** resultante. La vibración representa la transformación y/o transferencia de energía causada por las fuerzas que actúan sobre el sistema.

$$V = F \times Mov$$

Donde, V = vibración; F = fuerza; Mov = movilidad.

1.1.1. Excitación. Es la acción externa o inherente al movimiento del sistema que causa la vibración del mismo, representada por una fuerza variable o un movimiento que desplaza al sistema alternativamente en torno

a su posición de equilibrio. La excitación puede ser debida a fuerzas que actúan directamente sobre el sistema (por ejemplo impactos) o causada por el movimiento del mismo (autoexcitado), o por otros sistemas en movimiento.

Las vibraciones en máquinas están relacionadas principalmente con piezas rotativas desequilibradas, movimiento relativo de piezas en contacto, desalineamiento de partes acopladas, tolerancias de mecanización, desajuste de elementos mecánicos y en general por fallas técnicas de diseño, manufactura, montaje u operación. La excitación a que puede estar sometido un sistema mecánico suele clasificarse en los siguientes grupos:

- A. Condiciones iniciales.
- B. Excitación armónica.
- C. Excitación periódica no armónica.
- D. Excitación no periódica (determinística)
- E. Excitación aleatoria.

1.1.2. Sistema. Es un conjunto de elementos (mecánicos), interconectados y dispuestos en forma apropiada para cumplir una función dada. Por ejemplo, una máquina o equipo mecánico, una estructura, una viga. Para el estudio analítico del comportamiento vibratorio del sistema, es de interés caracterizarlo y prever su respuesta.

Es necesario elaborar un modelo físico matemático del sistema mecánico con sus elementos que asocian fuerzas al movimiento como son inercia, rigidez y amortiguamiento. Se debe tener en cuenta la configuración geométrica, las restricciones al movimiento, opción para concentración de parámetros, alineación, etc.; lo cual conduce a establecer las ecuaciones que gobiernan el movimiento, en las correspondientes coordenadas del sistema. Desde el punto de vista técnico interesa establecer el efecto que la excitación (fuerzas), y la respuesta (movimiento), causan sobre la estructura del sistema (máquina).

El efecto de la vibración en una máquina se manifiesta en fuerzas alternativas, rozamiento, desgaste, holguras, impacto, ruido, calentamiento y otros factores que generan esfuerzos alternativos en la estructura de la máquina causando deterioros progresivos que pueden conducir a la falla por fatiga de los elementos mecánicos del sistema.

1.1.3. Respuesta. Es el movimiento que adquiere el sistema por acción de la excitación y de las fuerzas recuperadoras inherentes a los parámetros del mismo. La respuesta depende de la excitación y de las características del sistema; sin embargo, a veces el tipo de excitación predomina sobre las características del sistema y es determinante del tipo de respuesta y los métodos de análisis.

Al estudiar la respuesta de un sistema vibratorio es de interés establecer los métodos y procedimientos apropiados para su determinación y análisis. La respuesta es una excitación periódica que se establece analíticamente mediante la aplicación del teorema de Fourier (series). En el estudio de la respuesta a una excitación determinística no periódica se aplica la transformada de Fourier (integral). Cuando la excitación es aleatoria, es necesario un tratamiento estadístico para el estudio de la respuesta del sistema. Según el momento en que actúe la excitación la respuesta se clasifica en:

- Vibración libre: cuando la excitación actúa solamente en condiciones iniciales del movimiento.
- Vibración forzada: cuando la excitación actúa durante el movimiento del sistema.
- Vibración paramétrica: cuando la vibración es causada por la variación de un parámetro del sistema, como inercia o rigidez.

1.2. MOVIMIENTO DINAMICO

Para poder apreciar totalmente las características de la respuesta a la vibración de la maquinaria, es esencial entender lo básico del movimiento dinámico. Esto incluye la influencia de la rigidez y la amortiguación sobre

una masa oscilante, y también, como es la interrelación entre el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

Para comenzar a considerar el péndulo sencillo que se ve en la figura 1, suponga la masa del péndulo esté suspendida por un hilo sin masa e inextensible; suponga además que el sistema opera sin fuerzas de fricción para disipar la energía. Por intuición, si el péndulo se desplaza de una posición vertical de equilibrio, oscilará de un lado para el otro bajo la influencia de la gravedad.

FIGURE 1

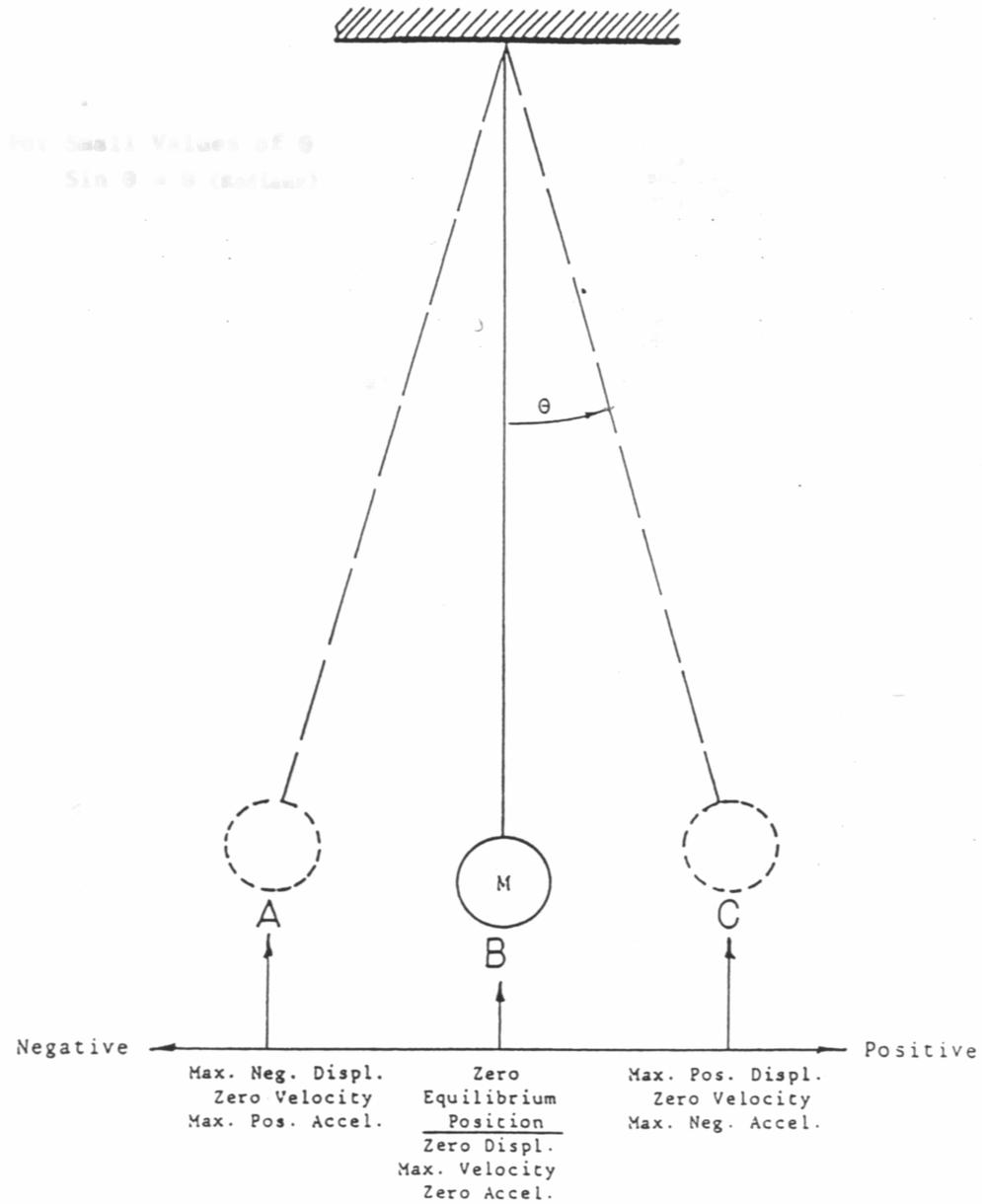


Figura 1. Péndulo sencillo

La masa se mueve en la misma trayectoria, y necesita la misma cantidad de tiempo para regresar a cualquier punto específico de referencia. Debido a este ambiente sin fricción la amplitud de este movimiento permanece siempre constante; el tiempo necesario para una oscilación completa o ciclo, se llama el **período** del movimiento. El número de ciclos terminados por unidad de tiempo es la **frecuencia** de la oscilación; por ende la frecuencia es el recíproco del período.

El movimiento exhibido por el péndulo es repetitivo y periódico. Fourier comprobó que las funciones periódicas pueden ser expresadas en términos de funciones circulares (es decir, una serie de senos y cosenos), en donde la frecuencia para cada término en la ecuación es un múltiplo de la fundamental. Por consiguiente, es común referirse al movimiento periódico como movimiento armónico. Aún cuando muchos tipos de movimiento vibratorios son armónicos, tenemos que reconocer que el movimiento armónico tiene que ser periódico, sin embargo, el movimiento periódico no tiene que ser necesariamente armónico.

Regresando al péndulo, es evidente que una fuerza gravitacional vertical está actuando constantemente sobre la masa. A medida que oscile el péndulo a través de un desplazamiento angular (θ) la fuerza gravitacional se divide en dos componentes perpendiculares, una fuerza $W\cos\theta$ que es igual y opuesta

a la tensión del hilo que sostiene el péndulo y la otra componente $W\sin\theta$, que es la fuerza restauradora que actúa para dirigir la masa de vuelta a la posición inicial de equilibrio.

Es significativo trazar la posición de la masa durante un ciclo completo, comenzando en la posición vertical de equilibrio "B" donde el desplazamiento es cero a tiempo igual a cero. A un cuarto de ciclo más tarde la masa se ha movido a la posición positiva máxima "C"; esto es seguido por una transición donde cruza cero a "B" antes que la masa se acerque al valor negativo máximo en el punto "A". El último cuarto de ciclo se completa a medida que la masa regresa a la posición de equilibrio.

Por definición, el número de coordenadas independientes necesarias para definir el movimiento de un sistema dinámico se llama el grado de libertad de aquel sistema. Para el péndulo solo se identifica una coordenada; por consiguiente es un sistema de un solo grado de libertad exhibiendo movimiento armónico. Este es un ejemplo clásico de un movimiento dinámico básico en donde la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento. Al considerar la velocidad de la masa a medida que oscila de un lado para el otro, es evidente que es cero en los puntos de máximo desplazamiento "A" y "C"; por otra parte, la velocidad positiva máxima ocurre a medida que la masa se mueve a través del punto "B" de izquierda a

derecha, combinada con una velocidad negativa máxima a medida que la masa se mueve de derecha a izquierda a través de "B".

Finalmente vamos a considerar la aceleración de la masa. Esta tiene que desacelerar al pasar de "B" a "C", acelerar de "C" volviendo a "B", desacelerar de "B" a "A" y entonces acelerar de "A" regresando al origen "B".

En el campo del tiempo se puede demostrar que la velocidad conduce a desplazamiento y que la aceleración conduce a velocidad. Describiendo este tipo de movimiento matemáticamente el desplazamiento periódico puede ser representado adecuadamente por:

$$X = A \sin 2\pi f t \quad (1.1)$$

en donde:

X = desplazamiento instantáneo.

A = desplazamiento máximo.

f = frecuencia de oscilación.

t = tiempo.

En un sistema rotativo se tiene la frecuencia rotativa dada por:

$$\omega = 2\pi f \quad (1.2)$$

entonces el desplazamiento puede expresarse como:

$$X = A \sin w t \quad (1.3)$$

La velocidad del movimiento es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo, produciendo:

$$V = \frac{dx}{dt} = A w \cos w t = A w \sin (w t + \mathbf{p}/2) \quad (1.4)$$

Es evidente que la velocidad conduce al desplazamiento por $\pi/2$ o 90° . Una segunda derivada del desplazamiento dará como resultado la aceleración:

$$A_c = \frac{d^2x}{dt^2} = -A w^2 \sin w t = A w^2 \sin (w t + \mathbf{p}) \quad (1.5)$$

La aceleración conduce al desplazamiento por π o 180° . La figura 2 muestra esta relación en un sistema de coordenadas polares. Para poder aclarar todo, debemos reconocer que las funciones circulares discutidas anteriormente pueden ser reemplazadas por una forma exponencial:

$$X = A e^{iwt} \quad (1.6)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y $e =$ base logaritmo natural = 2.71828

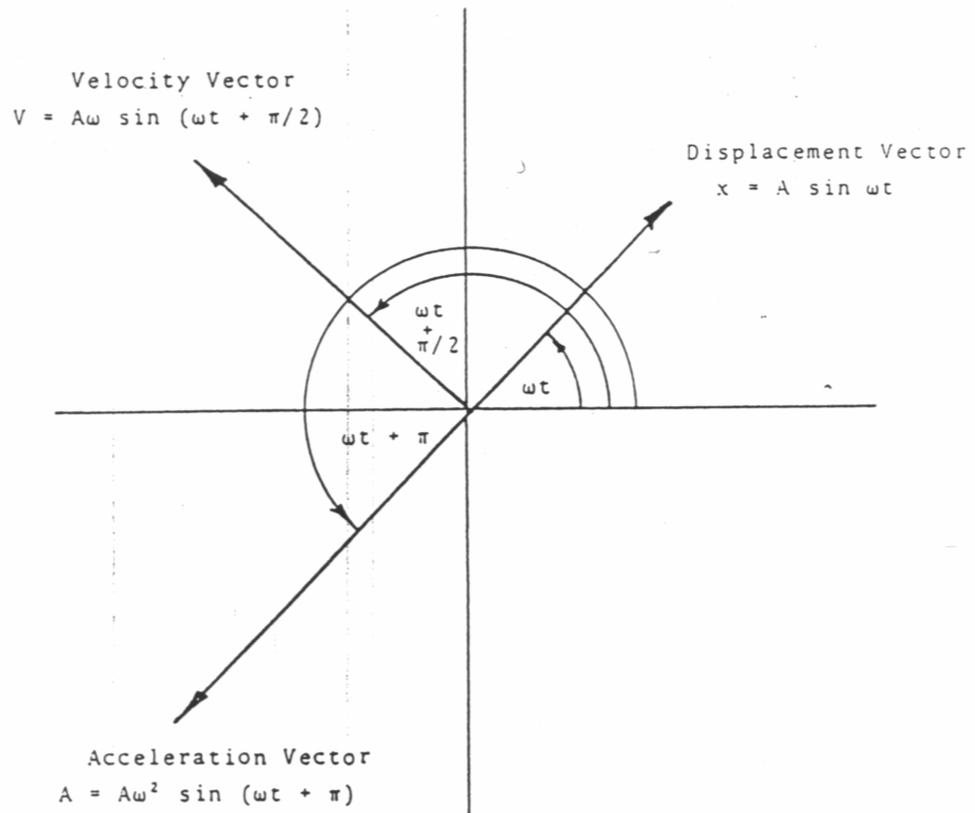


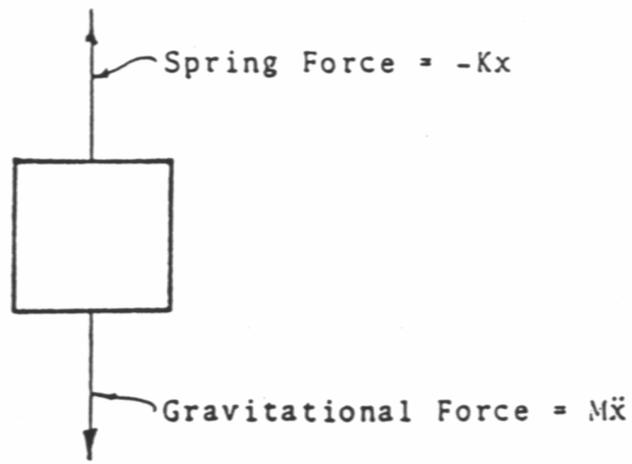
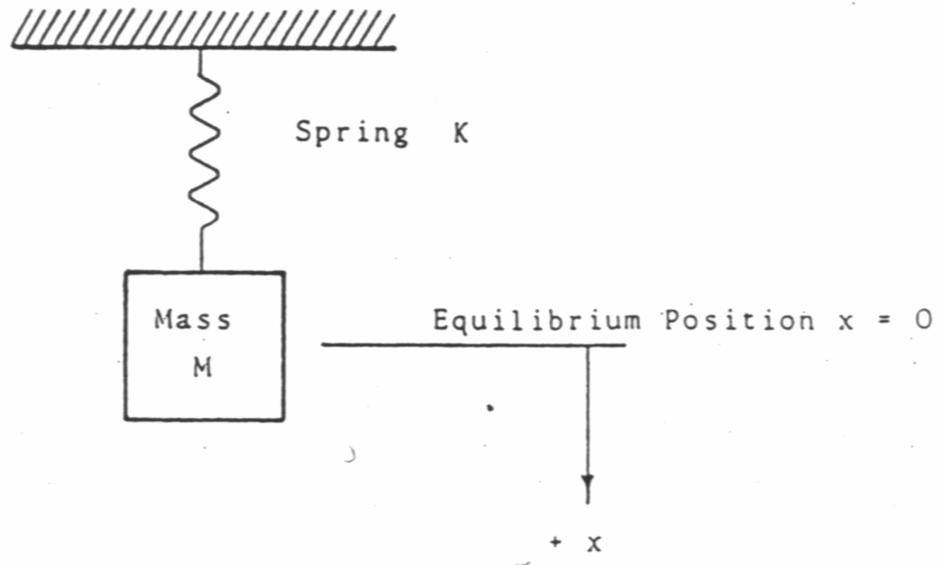
Figura 2. Vectores

1.2.1. Vibraciones libres sin amortiguación. Consideremos un sistema de un solo grado de libertad, como se ve en la figura 3; este sistema consiste en una masa apoyada en un resorte que puede vibrar libremente después de una perturbación inicial. El diagrama de cuerpo libre del sistema revela solamente dos fuerzas, la del resorte y el término de aceleración gravitacional. La ecuación de movimiento para este cuerpo es:

$$\begin{aligned} Mx'' &= -kx \\ Mx'' + kx &= 0 \\ x'' + \frac{k}{M}x &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden puede ser satisfecha por las funciones circulares o exponenciales como hemos descrito anteriormente. Suponiendo que la función exponencial como se presenta en la ecuación (1.6) se sustituye dentro de la ecuación (1.7) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Aw^2e^{iwt} + \frac{k}{M}Ae^{iwt} &= 0 \\ Ae^{iwt} \left(-w^2 + \frac{k}{M} \right) &= 0 \end{aligned}$$



$$M\ddot{x} = -Kx$$

Free Body Diagram

Figura 3. Vibración libre sin amortiguamiento

Esta ecuación esta satisfecha para todos los valores de t cuando:

$$\begin{aligned} -w^2 + \frac{k}{M} &= 0 \\ w^2 = \frac{k}{M} &\Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{M}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por consiguiente, la frecuencia de movimiento es una función de la constante del resorte y de la masa. En realidad, ésta es la frecuencia natural del sistema sencillo. Después de una perturbación inicial la masa oscila a esta frecuencia y la amplitud del movimiento se reduce gradualmente como función del tiempo (t); esto se debe a la disipación de energía dentro del sistema.

1.2.2. Vibraciones libres con amortiguación. Ahora vamos a considerar una masa suspendida como se ve en la figura 4. Observamos que ha sido agregada amortiguación viscosa (tipo de amortiguación), la cual indica que la fuerza resistente es proporcional a la velocidad. A partir del diagrama de cuerpo libre, la suma de las fuerzas produce:

$$\begin{aligned} Mx'' &= -kx - Dx' \\ Mx'' + Dx' + kx &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

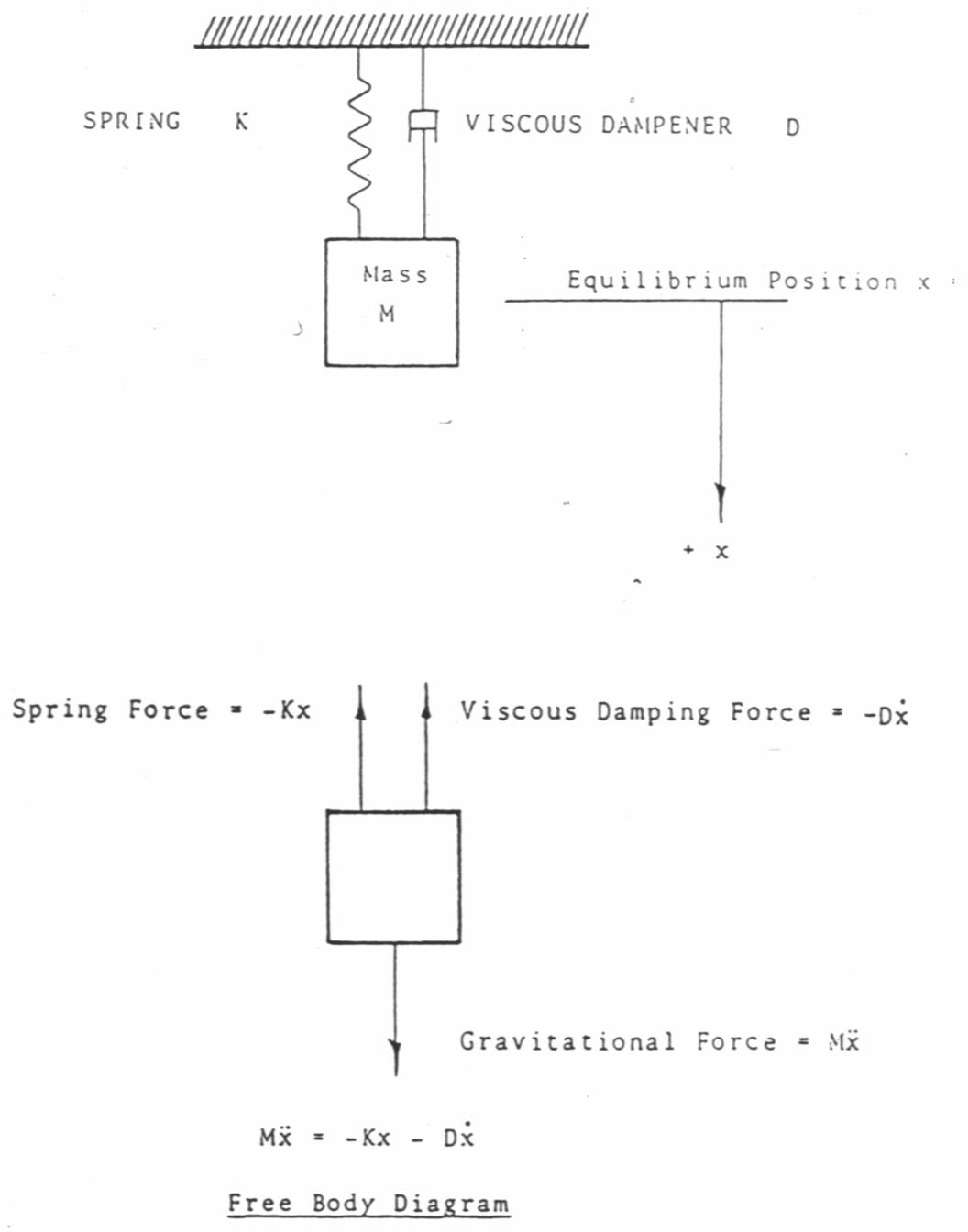


Figura 4. Vibraciones libres con amortiguamiento

De nuevo, utilizando una función exponencial para x y t , supongamos que:

$$x = e^{st} \quad (1.10)$$

Donde S es igual a una constante y sustituyendo esta ecuación en la (1.9), y tomando los derivados necesarios primero y segundo, el siguiente es el resultado:

$$\begin{aligned} MS^2 e^{St} + DSe^{St} + ke^{St} &= 0 \\ e^{St} (MS^2 + DS + k) &= 0 \\ \left(S^2 + \frac{D}{M}S + \frac{k}{M} \right) e^{St} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Esta expresión está satisfecha para todos los valores de t cuando:

$$S^2 + \frac{D}{M}S + \frac{k}{M} = 0 \quad (1.12)$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para S :

$$S_{1,2} = \frac{-D}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}} \quad (1.13)$$

Como se producen dos soluciones, la ecuación general tiene que ser extendida para corresponder, es decir:

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (1.14)$$

En donde las constantes A y B dependen de la forma en que fue comenzada la oscilación.

La conducta de un sistema amortiguado depende de sí el radical de la ecuación (1.14) es real, imaginario o cero. Cuando el radical es cero, se define como amortiguación crítica:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D_c}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M} &= 0 \\ \frac{D_c}{2M} &= \sqrt{\frac{k}{M}} = w_n \end{aligned} \quad (1.15)$$

Donde w_n es la frecuencia natural y D_c es la amortiguación crítica.

Por conveniencia vamos a definir una relación de amortiguación E de la siguiente manera:

$$E = \frac{D}{D_c}$$

Combinando ecuaciones tenemos:

$$\frac{D}{2M} = \frac{D}{2M} \times \frac{D_c}{D_c}$$

$$\frac{D_c}{2M} \times \frac{D}{D_c} = w_n E$$

Utilizando esta expresión para simplificar la ecuación (1.13):

$$S_{1,2} = -E w_n \pm \sqrt{E^2 w_n^2 - w_n^2}$$

$$S_{1,2} = \left(-E \pm \sqrt{E^2 - 1} \right) w_n \quad (1.16)$$

Para el caso de la amortiguación crítica $D = D_c$ y $E = 1$

$$S_{1,2} = -w_n$$

Utilizando esta expresión en la ecuación general (1.14) tenemos el siguiente resultado:

$$x = A e^{-w_n t} + B e^{-w_n t}$$

$$x = (A + B) e^{-w_n t} \quad (1.17)$$

La función se grafica sobre la figura 5 y el movimiento resultante es aperiódico, es decir, que el sistema regresa a la posición de reposo en el período más corto de tiempo sin oscilación.

Para un sistema con una amortiguación grande, es decir $E > 1$, se aplica:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(-E + \sqrt{E^2 - 1} \right) \omega_n \\ S_2 &= \left(-E - \sqrt{E^2 - 1} \right) \omega_n \end{aligned} \quad (1.18)$$

Y de la ecuación (1.14),

$$x = A e^{\left(-E + \sqrt{E^2 - 1} \right) \omega_n t} + B e^{\left(-E - \sqrt{E^2 - 1} \right) \omega_n t}$$

Esta función también se grafica sobre la figura 5. El cambio de desplazamiento con relación al tiempo es la suma de dos funciones exponenciales amortiguantes y la vibración del sistema no se mantiene. El movimiento es aperiódico y el cuerpo regresa a la posición de reposo sin oscilación. Observamos que esta condición de amortiguación no regresa a la posición de reposo rápidamente como el caso de una amortiguación crítica.

Finalmente, se va a considerar el caso de un sistema con una pequeña amortiguación, es decir $E < 1$, donde el radical de la ecuación (1.16) es imaginario.

$$\sqrt{E^2 - 1} = i\sqrt{1 - E^2} \quad (1.19)$$

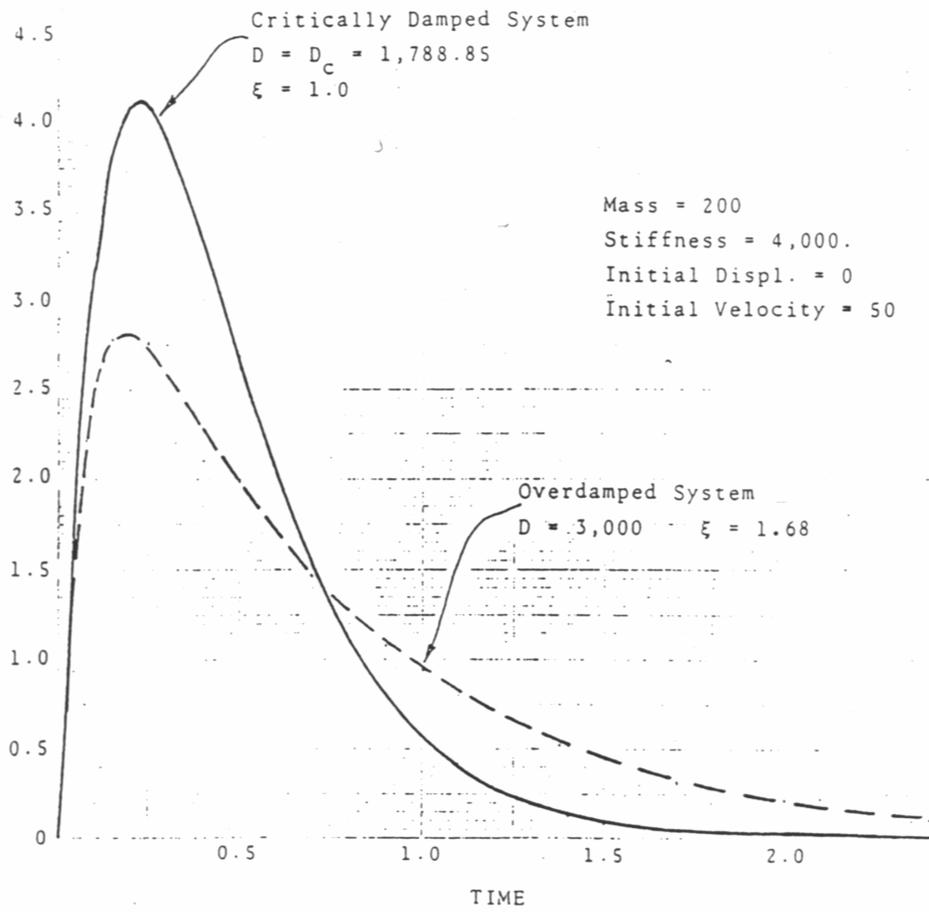


Figura 5. Amortiguamiento

Utilizando este término en la ecuación (1.16), se obtiene la siguiente

expresión para S_1 y S_2 :

$$S_1 = (-E + i\sqrt{1-E^2})w_n$$
$$S_2 = (-E - i\sqrt{1-E^2})w_n$$

Incluyendo estas ecuaciones dentro de la ecuación (1.14) general:

$$x = Ae^{(-E+i\sqrt{1-E^2})w_n t} + Be^{(-E-i\sqrt{1-E^2})w_n t}$$

Graficando esta ecuación en la figura 6, se observa que existe un movimiento oscilatorio que decae con el tiempo. La tasa de decaimiento de la oscilación lo da el decremento logarítmico que se define como:

$$\text{Dec Log} = \text{Ln} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)$$

En esta expresión x_1 y x_2 son amplitudes sucesivas en la señal de vibración de decaimiento. Es evidente que un gran valor para el decremento logarítmico es un sinónimo de un sistema bien amortiguado y por otro lado, un decremento logarítmico pequeño es indicio de una mala amortiguación.

1.2.3. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento. La figura 7 muestra varios casos en que se fuerza a una masa a vibrar por la acción de una fuerza que periódicamente cambia de dirección, como en a) y b), o bajo la acción de la inversión de un desplazamiento de un soporte como en c). En los tres casos se restringe la masa en consideración a moverse en una sola dirección, por lo que sólo tiene un grado de libertad. Estos casos están agrupados debido a que la ecuación diferencial del movimiento y su solución son semejantes. Para nuestro caso nos interesa la parte b) de la figura 7, donde se muestra una masa semejante a un monobloque de motor soportado simétricamente por cuatro resortes iguales, que se desplaza hacia arriba una distancia x bajo la acción de la fuerza de inercia de una masa (m) que rota con velocidad angular (w) alrededor de un eje fijo en el bloque (M). Se puede escribir la ecuación del movimiento para el cuerpo libre en la forma:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= MA_x \\ F_o \text{sen } wt - 4 \frac{k}{4} x &= MA_x = M \frac{d^2 x}{dt^2} \\ x'' + \frac{k}{M} x &= \frac{F_o}{M} \text{sen } wt \end{aligned} \quad (1.20)$$

Podemos observar la semejanza con la ecuación (1.7), teniendo en cuenta que ésta es forzada. F_o es la fuerza de inercia de rotación igual a mrw^2 .

1.2.4. Vibraciones forzadas con amortiguamiento. En esta sección estudiaremos los efectos de la fuerza de fricción. Ya que la fricción se opone al movimiento, en el sentido que es opuesta a la velocidad, sirve para reducir las amplitudes de la vibración y por tanto se dice que amortigua las vibraciones. La fricción puede presentarse como la resistencia viscosa de los fluidos, como la resistencia deslizante de los metales secos en contacto o como la resistencia interna al corte del flujo plástico de materiales que se aprecia en los ciclos de histéresis de los diagramas de esfuerzo- deformación. Los amortiguadores empleados en los automóviles y aviones son dispositivos que emplean la resistencia friccional de los fluidos para amortiguar las vibraciones. Los soportes comerciales de los resortes se hacen de materiales como el hule, fibras y corcho para utilizar la gran resistencia friccional interna.

Retomando la figura 4 pero, teniendo en cuenta la existencia de una fuerza perturbadora, la sumatoria de las fuerzas da como resultado la ecuación (1.9) con la variación que ya no es igual a cero:

$$Mx'' + Dx' + kx = F_0 \text{sen } \omega t \quad (1.21)$$

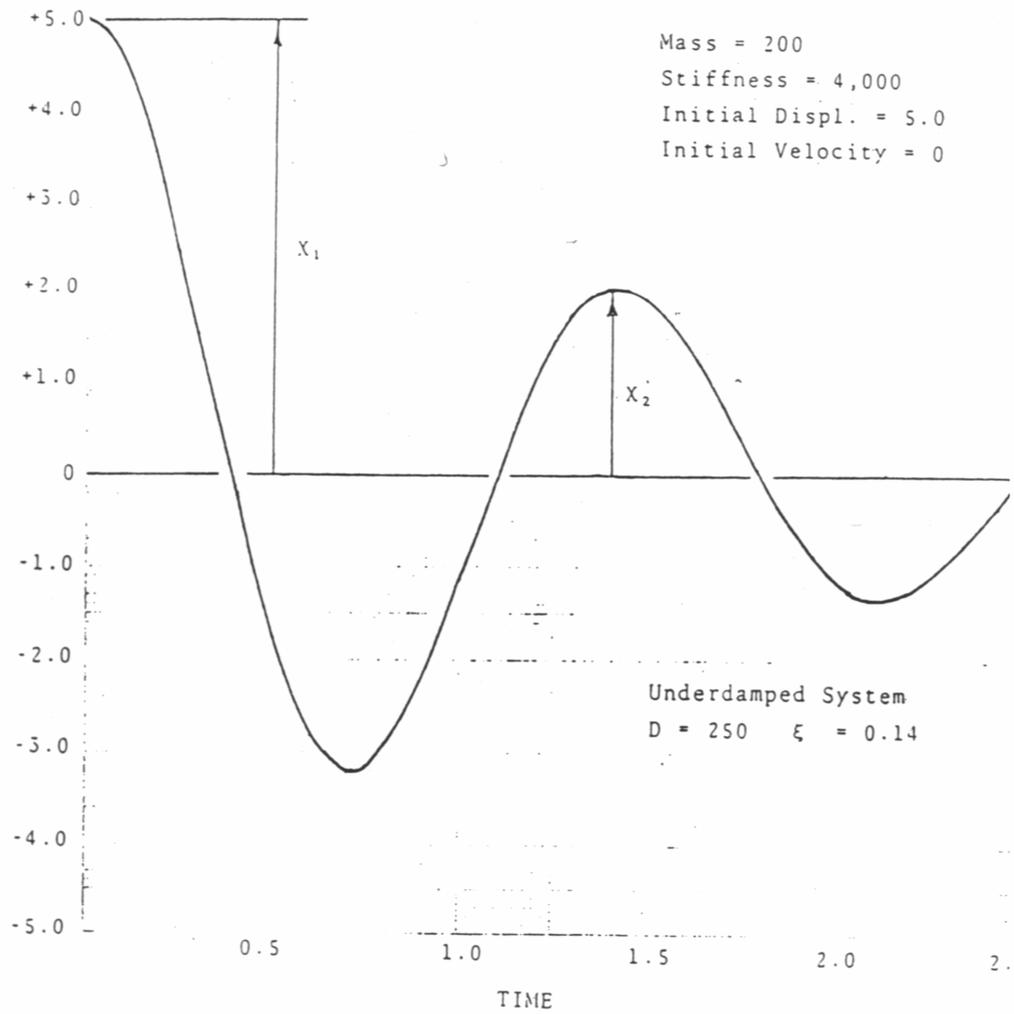


Figura 6. Decremento logaritmico

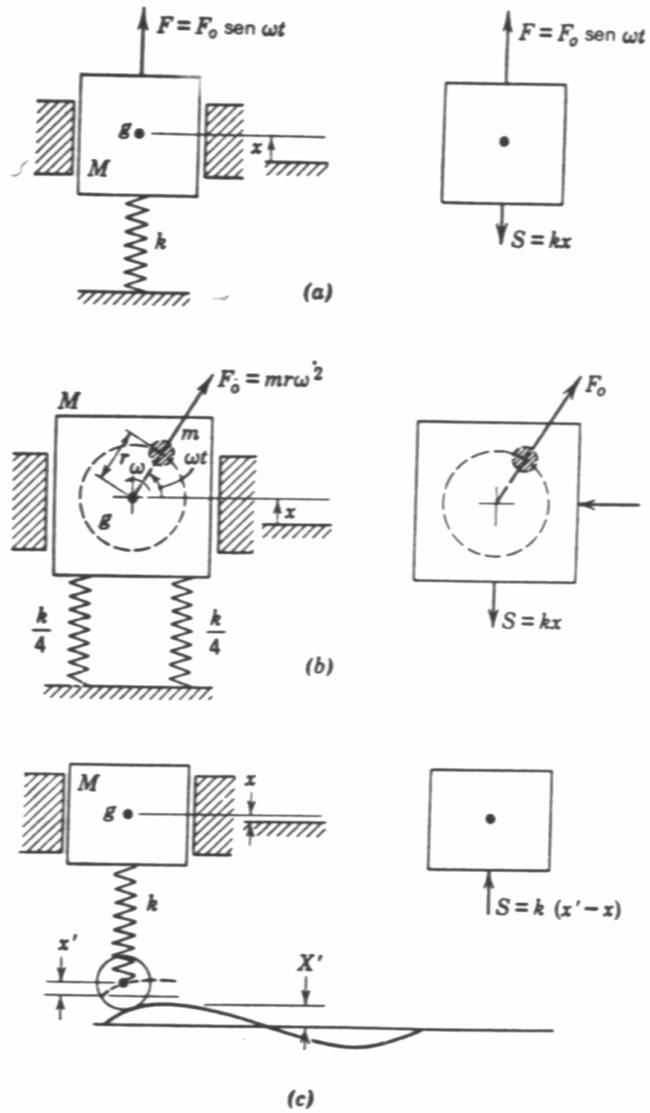


Figura 7. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento

La solución a esta ecuación es:

$$x = X \text{sen}(wt - \mathbf{f})$$

La amplitud esta dada por:

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - Mw^2/k)^2 + (Dw/k)^2}} \quad (1.22)$$

y el ángulo ϕ es:

$$\tan \mathbf{f} = \frac{Dw}{k - Mw^2} \quad (1.23)$$

ϕ es el ángulo de retraso del desplazamiento de la vibración con respecto a la fuerza que produce la vibración. La viscosidad provoca el retraso.

Es de interés conocer el efecto de la fricción o amortiguamiento, sobre la amplitud de la vibración forzada dada por la ecuación (1.22); cuando $F_0 = mrw^2$, se puede escribir esta ecuación en la forma siguiente y graficarla como se muestra en la figura 8:

$$\frac{MX}{mr} = \frac{(w/w_n)^2}{\sqrt{[1 - (w/w_n)^2]^2 + [(D/Mw_n)(w/w_n)]^2}} \quad (1.24)$$

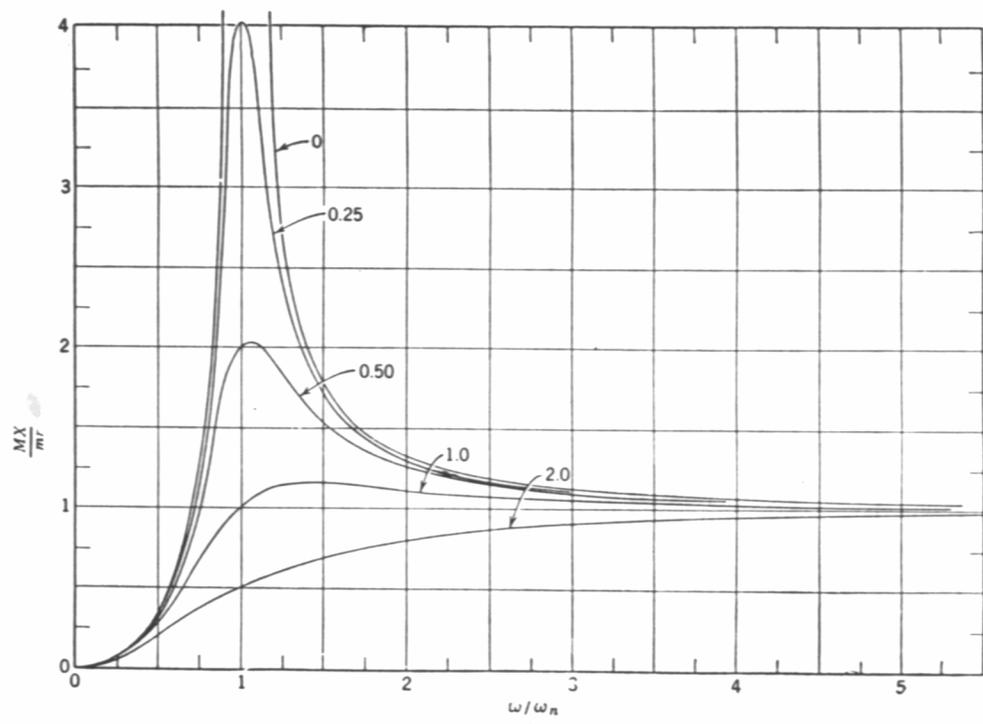


Figura 8. Vibraciones forzadas con amortiguamiento

2. RESONANCIA

La vibración puede tener muchos orígenes, si un origen crea una frecuencia de vibración que sea igual o casi igual a la frecuencia natural de una pieza, la pieza **resonará**. Por ejemplo, las vibraciones de una pieza bastante bien balanceada pueden verse amplificadas por la estructura dentro de la cual esté ensamblada. Cualquiera que haya conducido un automóvil sabe que vibrará más a cierta velocidad que otras. La fuerza centrífuga varía según el cuadrado de las rpm; la amplitud de la vibración no sólo aumenta con las rpm, si no que se eleva repentinamente en una proporción más alta cuando pasa por la resonancia de la pieza que responde; luego, disminuye cuando las rpm las sobrepasan.

Para visualizar lo que ocurre, considere un simple resorte plano con un peso montado en un extremo (similar a un trampolín), cuando se desvía el resorte tirando el peso y luego, soltándolo, el resorte oscilará y el sistema de resorte y peso vibrará a su frecuencia natural. Si se da un solo impulso, la amplitud de la vibración disminuirá progresivamente con el tiempo, debido a la fricción y a otras pérdidas de energía. Si durante impulsos periódicos continuos, la

sincronización o la dirección de los impulsos no coincide con su frecuencia natural, el resultado sería una vibración desafinada que no se acumularía; por otra parte, si la sincronización y la dirección de los impulsos coincidieran con la frecuencia natural de resorte, el resultado sería una vibración afinada y una amplitud progresivamente más grande con cada ciclo adicional; la amplitud finalmente alcanza un máximo debido a la fricción o las fuerzas amortiguadoras.

La resonancia amplifica la amplitud de las vibraciones en sistemas relativamente no amortiguados de 5 a 10 y a veces 20 veces sobre la amplitud de vibraciones no resonantes. La amortiguación a menudo reduce la amplificación, pero incluso con esta reducción, la amplitud es todavía suficientemente grande.

2.1. FACTORES QUE AFECTAN A LA FRECUENCIA NATURAL

Los sistemas de resonancia los describiremos en términos de un sistema de masa - resorte. Desde un punto de vista práctico cualquier máquina, pieza estructural o combinación de piezas ensambladas que pueden ser desviadas por una fuerza y luego volver a sus posiciones originales cuando se elimine la fuerza, pueden tratarse como un resorte o sistema de resorte. Es decir que la pieza misma debe flexionarse y poder volver a su posición inicial.

Cada resorte o sistema de resorte posee su propia frecuencia natural, la cual cuando es igualada por una frecuencia de vibración resonará. Mientras más flexible sea una pieza, más baja es su frecuencia natural; mientras más rígida, más alta será la frecuencia natural. Añadir peso a un sistema de resorte también bajará la frecuencia natural; ésta también puede cambiarse moviendo la ubicación del peso. Para darse una idea general de lo que afecta a la frecuencia de resonancia a la frecuencia de un resorte en la figura 9 se ilustra una viga plana voladiza que está levemente caída (desviación estática) debido a su propio peso.

En el gráfico 1 de dicha figura (9), hay una desviación estática debida al peso del resorte plano y su frecuencia de resonancia resultante es baja. Si el resorte plano se acortara como lo indica el gráfico 2 o se dejara menos voladizo con la adición de un puntal ilustrado en el 3, la desviación estática disminuirá; mientras más pequeña sea la desviación, más alta será la frecuencia de resonancia. Mientras mayor sea la desviación estática, menor será la frecuencia de resonancia.

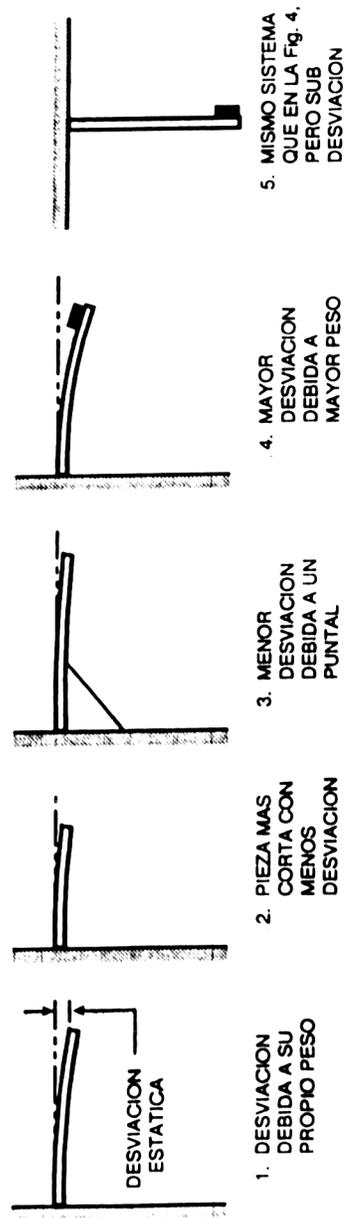


Figura 9. Sistemas de resorte

Para un sistema de resorte no voladizo como una sección de viga soportada por dos columnas, se aplica el mismo principio. Mientras más corta sea la viga, más rígida es, más alta es su frecuencia de resonancia. Mientras más larga sea la sección, menos rígida es (o más flexible), y más baja será su frecuencia de resonancia.

Suponiendo la misma rigidez y la misma longitud mostrada en 4, pero soportando ahora un peso, la desviación sería mayor. A mayor desviación, menor frecuencia de resonancia. Moviendo el peso a un lugar que de origen a una mayor desviación, disminuye aún más la frecuencia resonante. Moverlo a un lugar donde otorgue menos desviación, aumenta la frecuencia de resonancia.

Los sistemas de resorte de la "vida real" en la planta, como vigas, secciones de tubería, columnas, segmento de bases y pedestales, etc., combina los efectos de la rigidez, longitud y peso con sus efectos netos, dando como resultado más o menos desviación estática. Las analogías, incluyendo ésta, nunca son perfectas. El error de la analogía anterior presupone que el peso se ve afectado por la gravedad, causando una desviación estática. Sin embargo el mismo sistema de resorte podría reposicionarse como lo ilustra la gráfica 5 de la figura 9, de tal modo que el efecto de la gravedad no de cómo resultado la misma desviación estática. La frecuencia resonante

permanecería esencialmente igual a como se describe anteriormente. La intención de la analogía usando la desviación estática es únicamente ayudar al analista a visualizar como ajustar la frecuencia resonante de una sola pieza o un sistema entero.

2.2. CARACTERÍSTICAS DEL FENOMENO

Todos los objetos resuenan a ciertas frecuencias. Los metales son buenos resonadores. Las frecuencias de resonancia de los objetos, dependen de la rigidez de los materiales, su forma y su masa. A esa frecuencia en la que un material resuena, es a la que se le llama frecuencia natural.

La respuesta de vibración de cualquier sistema mecánico depende altamente de la frecuencia o velocidad de excitación y de la fuerza de entrada o generadora de la vibración. En un sistema resorte – masa, cuando la frecuencia está por debajo de la resonancia, es porque la fuerza de entrada es usada en su mayor parte para aumentar la compresión del resorte; la masa se mueve con facilidad a baja frecuencia, es por esto que a frecuencias menores a la resonante, el sistema está dominado por su rigidez. Cuando la frecuencia está por encima de la resonancia, es la inercia de la masa la que entra a dominar el sistema. La fuerza debida a la rigidez no depende de la frecuencia, de cualquier forma esta fuerza es constante.

La fuerza debida a la inercia es proporcional a la aceleración, la cual contiene el término w^2 , por lo tanto, la fuerza de inercia se incrementa con la frecuencia de manera cuadrática. Esta fuerza y la de rigidez, están siempre desfasadas 180° ; esto se debe a que la naturaleza de los resortes consiste en suministrar siempre fuerza de restitución a la masa. La magnitud de la fuerza de inercia se incrementa con la frecuencia y, se iguala en algún punto con la magnitud de la rigidez. Cuando esto ocurre se tienen dos fuerzas opuestas (180° entre ellas), y de igual magnitud, que esencialmente se cancelan una con la otra; cuando esto ocurre, la fuerza perturbadora o generadora de la vibración queda libre y sin restricciones. Este es el fenómeno de resonancia. Vea la figura 10.

El origen de la fuerza perturbadora puede ser, por ejemplo, el pequeño desbalanceo de una máquina rotativa unida a una estructura. Ese pequeño desbalanceo es transmitido completamente a la máquina y a sus partes como una fuerza de vibración. Si esta fuerza se sintoniza a la misma frecuencia de algún elemento del conjunto de la máquina, aparecería la resonancia.

En este caso la amplitud resultante, de dicho elemento, podría llegar a valores entre 10 y 100 veces mayores que los de la amplitud de la vibración generada por el desbalanceo. El valor exacto de amplificación depende sólo del amortiguamiento.

La resonancia es mucho más frecuente (95%) en partes estacionarias o fijas, que en partes de máquinas que están en movimiento. Una parte rotativa, por ejemplo, con sus puntos de apoyo lubricados, usualmente cuenta con un buen amortiguamiento que mantiene la amplitud de la vibración baja; excepto cuando trabaja a su velocidad crítica, siendo ésta la causa de aparición de la resonancia. El término "velocidad crítica", es usado para indicar que la frecuencia de trabajo igualó la frecuencia natural o resonante del eje en una máquina rotativa.

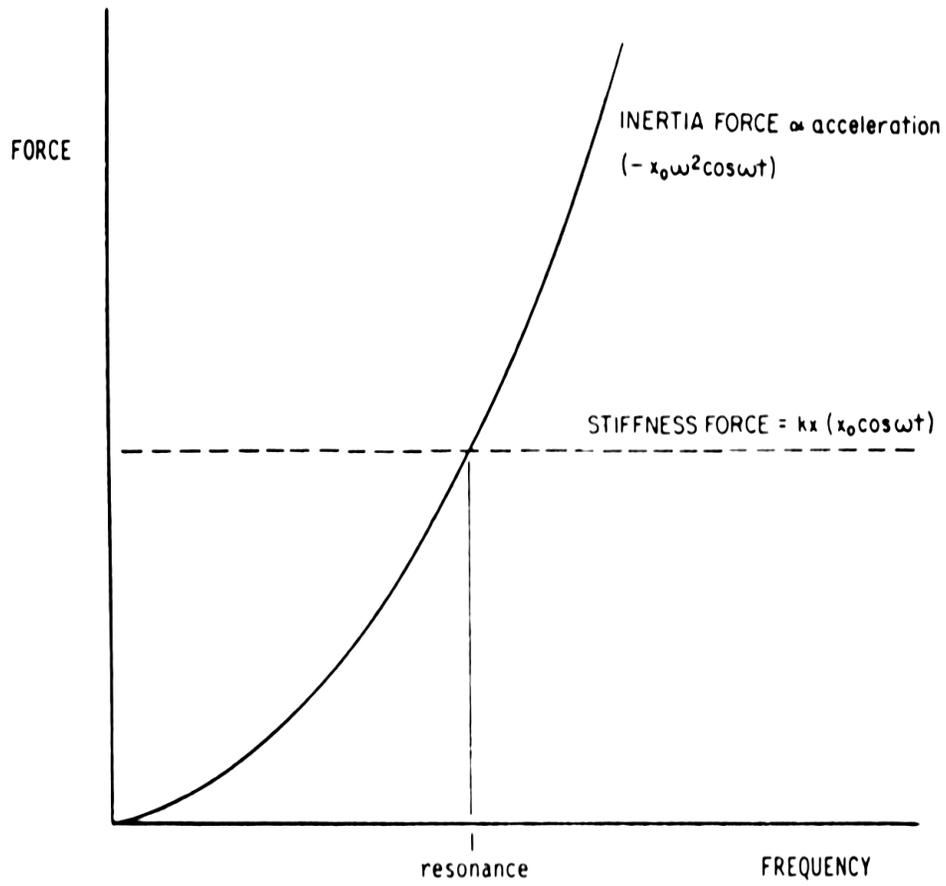


Figura 10. Resonancia

3. ENERGIA DE LOS MATERIALES

La teoría que hemos manejado a lo largo de esta investigación, se refiere a la energía interna que poseen los materiales. De acuerdo a la información que hemos manejado y a las pruebas realizadas estamos seguros de que los movimientos atómicos (vibración atómica), se reflejan en el comportamiento de dichos materiales en la resonancia. La energía térmica (fricción), esta asociada con este movimiento.

Refiriéndonos a los sólidos y utilizando el concepto de que son redes cristalinas de átomos que se mantienen por enlaces que no son perfectamente rígidos, es posible imaginarse que los átomos vibran en su posición de equilibrio como si estuviesen montados en resortes y, como tienen masa, oscilan en torno a una posición media con una amplitud que depende de la cantidad de calor que tiene el sólido. Ver figura 11.

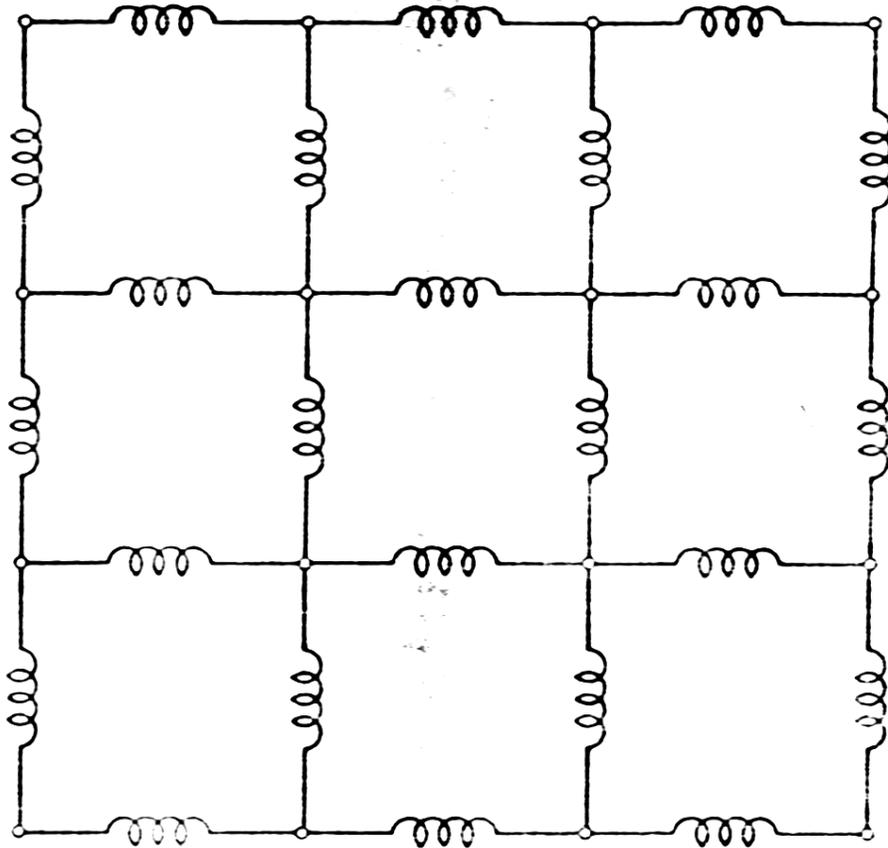


Figura 11. Modelo atómico de masas y resortes

Un enlace entre dos átomos constituye una fuerza de atracción neta que depende de la distancia que los separa y que está balanceada a la distancia de equilibrio con una repulsión, debida a la superposición de nubes electrónicas.

Para mostrar de una forma más clara lo que queremos decir, observemos la figura 12 y supóngase que es posible empujar un átomo a un lado con respecto a su posición de equilibrio, del punto a al punto b en la curva de la figura. Se ve que hay una fuerza de atracción ΔF , que es proporcional al desplazamiento Δr . Un desplazamiento y en sentido opuesto, hacia el punto c, produce una fuerza aproximadamente igual y en sentido opuesto, de manera que, recordando que la masa atómica es finita, se percibe que se cumplen las condiciones para el movimiento armónico simple.

Durante el movimiento del átomo, su energía total permanece constante, ya que se debe cumplir la ley de la conservación de la energía. Esta energía está constituida en parte por energía cinética y en parte por energía potencial. En los puntos en que el movimiento cambia (puntos a y b de la figura 12), el átomo que da momentáneamente fijo y su energía cinética es igual a cero, por lo tanto, en estos puntos su energía potencial es igual a su energía total.

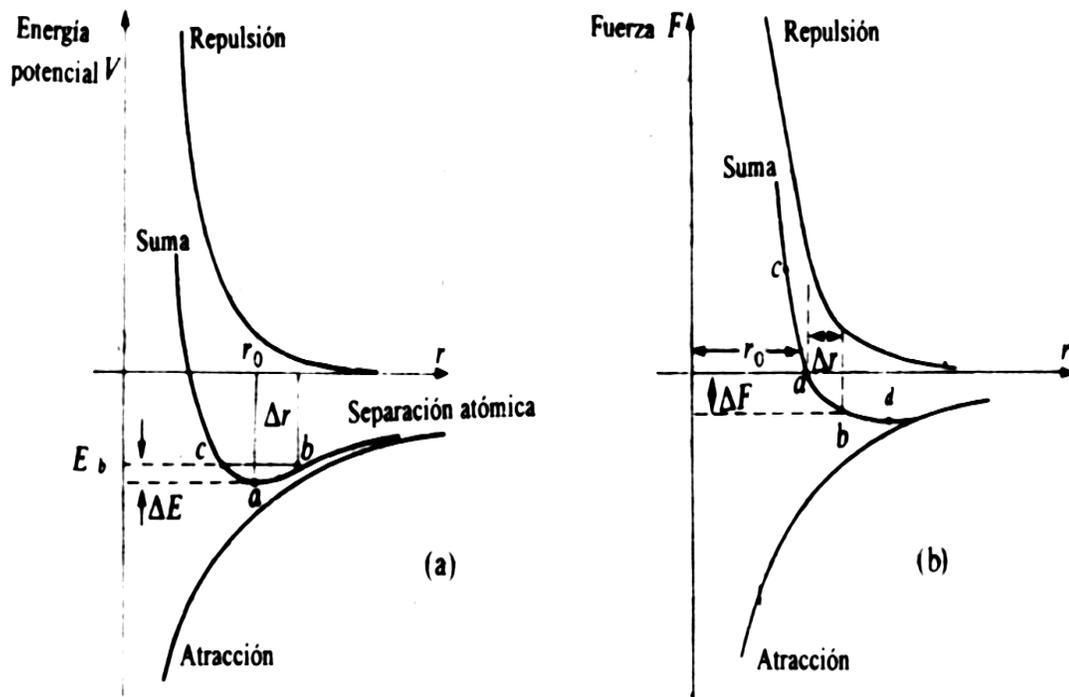


Figura 12. Fuerzas interatómicas. (a) Energía potencial (b) Fuerza

Por consiguiente, la línea horizontal bc de la parte (a) de la figura, representa una gráfica de la energía total contra la posición, y la distancia vertical entre esta línea y la curva de energía potencial de la energía cinética de átomo. Su valor máximo, que se indica como ΔE es la energía que se cedería si el átomo quedara permanentemente en reposo. Es razonable suponer que todos los átomos de sólido estarán en reposo en el límite de temperatura igual a cero absoluto. Por lo tanto, la energía ΔE citada anteriormente constituye la energía calorífica que tiene el átomo en cuestión.

Por supuesto, esta situación teórica no se da en la naturaleza; es imposible que un solo átomo vibre de manera aislada, puesto que al hacerlo ejerce fuerzas sobre sus vecinos y hace que también se muevan, presentándose así un movimiento más complejo, pero de la forma que se ha explicado esperamos facilitar su comprensión.

3.1. FUERZA Y ENERGIA

Consideremos un par de partículas i y j separadas por una distancia r. Se supone que la fuerza de interacción entre ellas, F_{ij} , depende sólo de la separación r entre las partículas, y de la orientación mutua del par de interacción. Es más conveniente emplear la energía potencial V de la interacción que la fuerza $F(r)$. La relación entre ambas es tal que, el trabajo

realizado para producir un pequeño incremento de r , es decir Fdr , es igual a la disminución de la energía potencial mutua $-dV$; en otras palabras:

$$F(r) = \frac{-dV(r)}{dr} \quad (3.1)$$

Para tener un punto de referencia, se supondrá que en cierto momento la distancia r es infinita. Es natural suponer que la energía de interacción será igual a 0, así:

$$V(r = \infty) = F(r = \infty) = 0$$

Sí la partícula j comienza a moverse hacia i , aparecerá una energía de interacción diferente de 0. A grandes distancias de separación entre las partículas, predominan las fuerzas de atracción y se supone, por convención, que esta energía es negativa; es decir, al aproximarse las partículas se produce una disminución neta de energía. La energía potencial en cuestión se llama energía de atracción. No obstante, al acercarse las dos partículas aparece otra fuerza, que toma el nombre de fuerza de repulsión. Evidentemente esta fuerza existe, de lo contrario, en cierto momento ambas partículas podrían ocupar simultáneamente el mismo punto del espacio. Como se supuso que la energía de atracción es negativa, se considerará la

energía de repulsión como positiva. La energía total de interacción es simplemente la suma algebraica de ambas energías, por lo que es obvio:

$$V(r) = V_{\text{atrac.}}(r) + V_{\text{repul.}}(r) \quad (3.2)$$

Según las ecuaciones (3.1) y (3.2), las fuerzas de atracción y repulsión, se pueden relacionar mediante una ecuación análoga:

$$F(r) = F_{\text{atrac.}}(r) + F_{\text{repul.}}(r) \quad (3.3)$$

A medida que se aproximan más las partículas, los valores de la fuerza de atracción y repulsión se aproximan, hasta que a cierta distancia r_0 se hacen iguales. A esta distancia el sistema alcanza su mayor estabilidad. Si se acercan más aún, se llega a una distancia llamada "diámetro de colisión" r_σ . Para distancias de $r_0 < r_\sigma$, es evidente que prevalece la repulsión; la energía aumenta cada vez con mayor rapidez y por consiguiente la estabilidad del sistema disminuye.

3.2. PROPIEDADES MECANICAS

Las propiedades mecánicas de un material se refieren a los efectos del esfuerzo sobre los mismos. Se sabe que los materiales reaccionan de

diversas maneras al aplicarles esfuerzo. Por ejemplo, si se aplica esfuerzo a un plato de acero inoxidable haciéndolo caer al piso duro, no se romperá, aunque probablemente quede marcado. Por otra parte, si se repite este "experimento" con una copa de vino, el vidrio invariablemente se romperá. A partir de esto se llega a la conclusión de que los esfuerzos pueden producir cambios de forma (por ejemplo, deformación) pero también pueden ocasionar que el material se rompa o fracture.

3.2.1. Deformación elástica. La importancia de la deformación elástica radica en que es instantánea, reversible, y que el esfuerzo y la deformación son linealmente proporcionales entre sí. Para comprender esto es necesario analizar lo que ocurre a escala atómica durante su formación elástica.

Al aplicar fuerza tensil externa a un cristal de longitud l_0 , los átomos de inmediato se separan y esto se manifiesta como una elongación elástica del cristal igual a Δl . Ver gráfica 12.(b), donde se muestra la fuerza interatómica contra la distancia interatómica. Los átomos se separan de sus posiciones de equilibrio debido a la fuerza externa, por ejemplo, desde a hasta b en la figura, hasta que la fuerza aplicada se balancea con el aumento de fuerza de atracción entre los átomos ΔF . La deformación elástica es $\Delta l/l_0$ y esto es igual a $\Delta r/r_0$, en donde Δr es el desplazamiento de los átomos respecto a su posición de equilibrio y r_0 es la distancia interatómica en el equilibrio. Al

eliminar la fuerza externa, los átomos regresan a sus posiciones de equilibrio bajo la acción de las fuerzas interatómicas; por este motivo la deformación elástica es reversible.

Como estas distancias interatómicas y en ciertos casos el enlace, varían según la dirección de un cristal único, el módulo Young es dependiente de la dirección del esfuerzo con los ejes cristalinos, es decir, los monocristales son anisotrópicos elásticamente. Esta conclusión es aplicable a todos los demás módulos elásticos, como por ejemplo el módulo de corte.

4. EL PROTOTIPO

A lo largo de esta investigación, hemos encontrado muchas barreras, entre ellas, la complejidad de los cálculos en sistemas no lineales. Es por eso y basándonos en algunas aplicaciones prácticas relacionadas con el estudio de las vibraciones mecánicas, que recurriremos a los fundamentos teóricos citados en los capítulos anteriores, para plasmar de una manera aproximada los resultados.

En todo momento nos hemos basado en un sistema de un grado de libertad, sobre el cual se ha asumido un comportamiento lineal, aún cuando es sabido que la linealidad no se conserva durante la resonancia.

Con este prototipo queremos demostrar que con respecto a las vibraciones, no todo está dicho, porque el enfoque que siempre se ha manejado es hacia el aislamiento, dejando a un lado la aplicabilidad que se le puede dar.

Los resultados teóricos obtenidos, siempre estuvieron muy cerca de los observados a lo largo de todas las pruebas y ensayos realizados. Es

importante resaltar que los aparatos y equipos usados, no son de última tecnología, lo que limita, pero a la vez vislumbra, buenos augurios sobre estudios futuros de este tema.

Encontramos que existen muchas formas para construir un prototipo, que genere energía eléctrica a partir del fenómeno de resonancia. Por esto llegamos al siguiente planteamiento:

1. Necesitamos una fuente de vibraciones.
2. Una base con las características necesarias (rigidez, masa), para que soporte la fuente y entre en resonancia con ésta.
3. Un mecanismo que transmita la energía que se libera con la resonancia, de forma tal que pueda ser aprovechada por un generador.
4. Un generador de energía eléctrica.

4.1. FUENTE DE VIBRACIONES O PERTURBACION

Luego de muchas pruebas con diferentes aparatos, decidimos utilizar un motor de corriente directa, con una masa desbalanceada (excéntrica), para aumentar la magnitud de la fuerza perturbadora que genera las vibraciones forzadas. Una de las razones fue que, al no poseer instrumentos de medición

y análisis de vibraciones y al alto costo que implicaba conseguirlos, nos resultaba dispendioso determinar la frecuencia de las vibraciones que transmiten máquinas comunes como motobombas, compresores, entre otras. Por el contrario, con una fuente reguladora de voltaje, podíamos variar las revoluciones del motor seleccionado y dar con la frecuencia adecuada al observar el comportamiento de la base que lo sostenía. Las características del motor son las siguientes:

- 60 watts de potencia.
- 3600 rpm.
- 12V Corriente Directa.

La disposición del motor es vertical; el extremo del eje fue roscado para facilitar el acople de un disco de acrílico, el cual lleva en su periferia el peso desbalanceado. El disco es de $4^{5/8}$ pulg (118 mm) de diámetro y $5/32$ pulg (4mm) de espesor; el peso adicional se encuentra sujeto a $1^{7/8}$ pulg (48 mm) del centro del disco y es de 0.2508 lb (114gr), el del disco es 0.1452 lb (66gr). Además, el motor se une a la base, por medio de placas de aluminio, las cuales se deforman para seguir la geometría del mismo y eliminar sus movimientos particulares con respecto a la base. Estas placas se sujetan al motor con una abrazadera, igualmente de aluminio; el espesor de las placas es de $3/32$ pulg (2.38 mm) y el de la abrazadera $1/16$ pulg (1.587 mm). El

peso total del conjunto motor y abrazaderas es de 2.63 lb (1195.4 gr). La alimentación de energía, la proporciona una batería de 12V; seguido de ésta, se colocó un circuito que permite regular el voltaje, ver figura 13.

4.2. BASE RESONANTE

La resonancia está directamente relacionada con la frecuencia natural, es decir, con las características de masa y rigidez de los materiales. Después de ensayar diversos valores de masa y rigidez, decidimos utilizar una platina de acero AISI 1020, con $14^{1/4}$ pulg (361.95 mm) de largo, 1 pulg (25.4 mm) de ancho y $3/32$ pulg (2.38 mm) de espesor. De acuerdo a la ecuación 1.8, y teniendo en cuenta las variaciones necesarias para determinar la frecuencia natural de la platina (figura 14), tenemos:

$$f_n = \frac{w_n}{2\pi}; w_n = \sqrt{\frac{k}{m + 0.23m_b}}; k = \frac{3EI}{L^3}$$

Donde k es la rigidez de la platina; m (peso / gravedad) la masa del conjunto que forma la fuente de vibraciones; m_b la masa de la platina; E el módulo de Young para el acero (30 Mpsi); L la longitud; I el momento de inercia ($bh^3/12$). Al reemplazar los valores se obtiene:

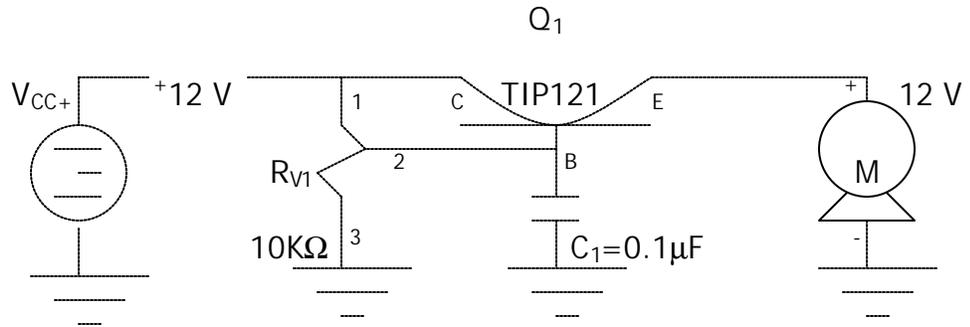


Figura 13. Circuito regulador de voltaje

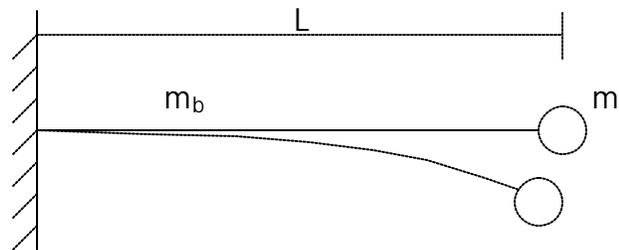


Figura 14. Variables que intervienen en la frecuencia natural

$$I = 6.866 \times 10^{-5} \text{ in}^4 ; k = 0.667 \text{ lb/in}$$
$$\rightarrow \omega_n = 9.06 \text{ rad/seg} \approx 87 \text{ cpm}$$

Las revoluciones del motor son aproximadamente 85 por minuto en el momento de presentarse la máxima amplitud del movimiento, si recordamos que cuando la relación entre las frecuencias perturbadora y natural se iguala a uno (1), estamos ante el fenómeno de resonancia, o sea,

$$\frac{85 \text{ (rpm del motor)}}{87 \text{ (Frecuencia natural)}} = 0.977$$

Nos podemos dar cuenta de la cercanía de este valor a las condiciones resonantes (relación = 1), por lo que consideraremos que la base, bajo estas condiciones, trabaja en resonancia.

El acople de la base a la estructura del prototipo es por medio de dos platinas dobladas en forma de L; el ancho y espesor de estas últimas, es $1^{1/16}$ (27mm) y $1/8$ de pulg (3.175 mm) respectivamente; los lados de la L son $3^{3/4}$ (95.25mm) y $1^{1/2}$ pulg (38.1 mm); figura 17. La sujeción de todos los elementos es por medio de tornillos con diámetro de $1/4$ de pulg.

4.3. MECANISMO

El mecanismo de corredera manivela ilustrado en la figura 15 se encuentra compuesto por:

- El eslabón 2 que es una manivela restringida a girar en torno al pivote fijo A.
- El eslabón 3 que es la biela.
- El eslabón 4 que es la corredera.

El mecanismo centrado de corredera y manivela, tiene una carrera B_1B_2 igual al doble del radio de la manivela, r_2 . Como se muestra, se encuentran las posiciones extremas B_1 y B_2 , llamadas también posiciones límites de la corredera, trazando arcos de círculo con centro en O_2 y cuyo radio sea, respectivamente $r_3 - r_2$ y $r_3 + r_2$. En general este mecanismo debe tener a r_3 más grande que r_2 . Una de las maneras más comunes de plantear este problema desde el punto de vista algebraico es observar en la figura que la posición vertical del punto B se puede relacionar con la longitud y el ángulo del eslabón 2, o bien del 3.

Las medidas principales, las mismas que se materializaron en el prototipo, son las de los eslabones R_{BA} y R_{BC} . Dichas medidas son $1^{7/8}$ y $5^{1/2}$ pulg

respectivamente. La distancia R_C varía con el movimiento y solo es necesaria para facilitar el desarrollo de cálculos normales.

Los valores dados fueron determinados a lo largo de las pruebas, teniendo en cuenta principalmente, la amplitud observada en la base. Para garantizar la continuidad del movimiento de la manivela, fue agregada una masa inercial a $1^{7/8}$ pulg del centro de ésta, en el punto colinealmente opuesto al punto de acople con la biela.

El mecanismo utilizado en el prototipo presenta una variación, con respecto a la corredera, la cual fue reemplazada por un eslabón que gira alrededor de su punto de apoyo. Con esto disminuimos las pérdidas por fricción.

4.4. CALCULOS ADICIONALES

Esta sección se relaciona directamente con la estructura y la duración de la base bajo el efecto de la resonancia. Para esto es necesario el desarrollo de algunas ecuaciones tratadas en el capítulo 1.

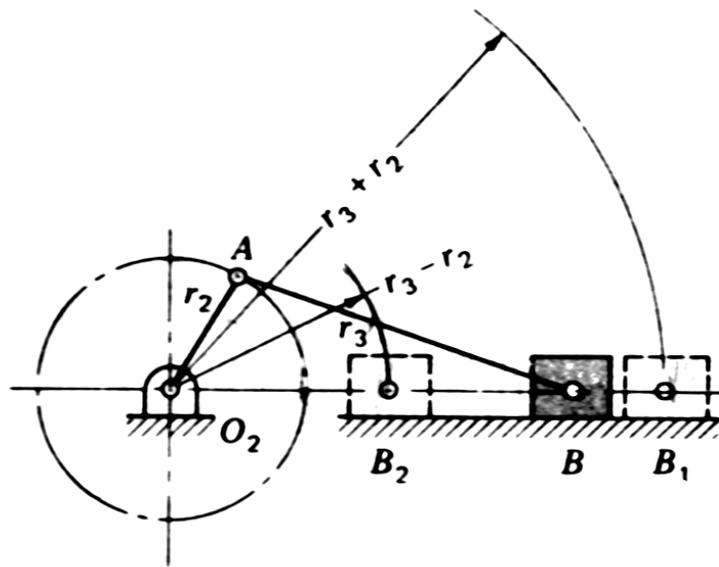
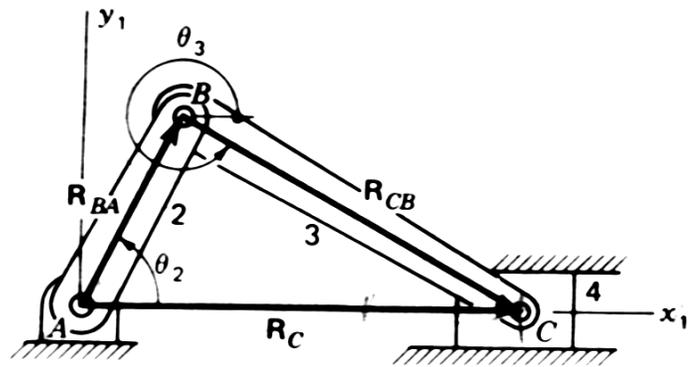


Figura 15. Mecanismo corredera - manivela

Basándonos en la ecuación 1.24, con las variaciones del caso, que resultan por la utilización de la relación de amortiguación (z), tenemos:

$$\frac{MX}{mr} = \frac{\left(\frac{W}{W_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{W^2}{W_n^2}\right)^2 + \left(2z \frac{W}{W_n}\right)^2}} \quad (4.1)$$

Esta ecuación permite calcular la relación de amortiguación, dado que las demás variables son conocidas. Es importante conocer el valor de esta relación, para poder determinar, aunque sea de manera aproximada, la fuerza que se está transmitiendo al mecanismo.

Se ha definido una relación de transmisión; la cual está dada por la fracción de la máxima fuerza impuesta que se transmite,

$$TR = \frac{\sqrt{1 + \left(2z \frac{W}{W_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{W^2}{W_n^2}\right)^2 + \left(2z \frac{W}{W_n}\right)^2}} \quad (4.2)$$

En la figura 16 se presenta una gráfica de la relación de transmisión, para varios valores de amortiguación. Volviendo a la ecuación 4.1, reemplazando los siguientes datos, obtenemos la relación de amortiguación:

M, sumatoria de masas que forman la fuente vibracional. Peso / gravedad.

m, masa excéntrica (desbalanceada) de la fuente vibracional.

r, distancia de m al eje del motor.

X, amplitud de la oscilación de la base.

$$\begin{aligned}M &= 7.88 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{seg}^2 / \text{pulg} ; m = 6.49 \times 10^{-4} \text{ lb} \cdot \text{seg}^2 / \text{pulg} \\r &= 1^{7/8} \text{ pulg} ; X = 2 \text{ pulg} ; w/w_n = 0.977 \\&\Rightarrow z = 0.03\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos en la ecuación 4.2 y determinamos la transmisibilidad. Esta se multiplica a la fuerza perturbadora y con el valor resultante trabajamos en los cálculos de la estructura y la base.

Recordemos que la fuerza perturbadora es la fuerza centrífuga, $F = w^2 r m$, donde w es igual a 8.9 rad/seg, r es igual a $1^{7/8}$ pulg y m es igual a 6.49×10^{-4} lb*seg²/pulg, es decir, $F = 0.308$ lb. La transmisibilidad obtenida es $TR=3.68$. La fuerza resultante transmitida, que actúa directamente sobre la base será:

$$F_{\text{Res.}} = F \times TR = 1.133 \text{ lb}$$

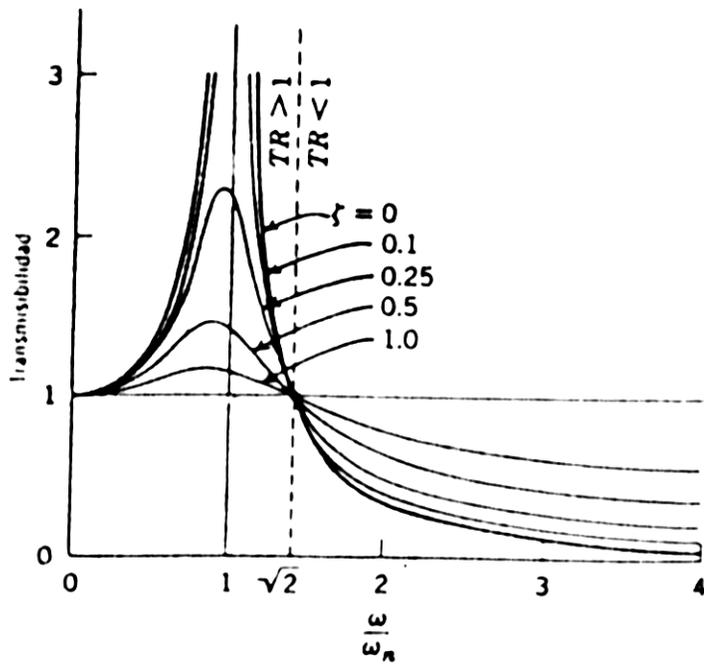


Figura 16. Relación de transmisión

4.4.1. Vida útil de la base. La vida útil de los materiales está directamente relacionada con la fatiga de los mismos. En nuestro caso analizaremos este fenómeno en la platina que tenemos como base.

El material es acero al carbono AISI 1020, el cual posee esfuerzos último y de fluencia de 55 kpsi y 30 kpsi respectivamente. Las medidas de la platina se dan en la sección 4.2. Esta está sometida a esfuerzos alternantes de flexión. Primero, determinamos el esfuerzo de fatiga que puede soportar, $S_e = k_a k_b k_c k_d k_e S_e'$; donde k_a es el factor de superficie y está dado por:

$$k_a = a S_{ut}^b$$

Siendo a y b constantes ($a = 14.4$ kpsi y $b = -0.718$), que dependen del proceso de manufactura del material y S_{ut} es el esfuerzo último; con lo que se obtiene, **$k_a = 0.81$** .

k_b es el factor de tamaño para secciones circulares, por lo que debemos usar una equivalencia para nuestra sección rectangular.

$$k_b = \left(\frac{d_{eq}}{0.3} \right)^{-0.1133} ; d_{eq} = \text{diámetro equivalente} = 0.808 (h \cdot b)^{\frac{1}{2}}$$

Reemplazando ($h = 3/32$ pulg y $b = 1$ pulg), llegamos a: $d_{eq} = 0.247$ pulg y $k_b = 1.022$.

k_c es el factor de carga, k_d es el factor de temperatura y k_e es el de efectos diversos; para nuestro caso $k_c = k_d = k_e = 1$. Por último, S_e' es el esfuerzo de fatiga teórico para una probeta hecha con el mismo material, y está dado por $S_e' = 0.504S_{ut}$, por lo tanto $S_e' = 27.72$ kpsi.

Reemplazando todos estos valores, encontramos el esfuerzo de fatiga que puede soportar la platina: $S_e = 22.94$ kpsi.

El esfuerzo al que está sometida la platina es:

$$s = \frac{Mc}{I}$$

Siendo M el momento flector, c la distancia desde el eje neutro hasta la fibra más externa e I el momento de inercia.

$$M = F \times L = 0.308 \text{ lb} \times 21 \text{ pulg} = 6.468 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

$$c = \frac{1}{2} d_{eq} = \frac{0.247}{2} = 0.1235 \text{ pulg}$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1 \cdot (3/32)^3}{12} = 6.86 \times 10^{-5} \text{ pulg}^4$$

$$\Rightarrow s = 11.64 \text{ kpsi}$$

A partir de estos valores se puede determinar la vida útil de la platina, según esta expresión:

$$N = \left(\frac{s}{a} \right)^{\frac{1}{b}}$$

Donde N es el número de ciclos, a es, $\frac{(0.9S_{ut})^2}{S_e}$ y b es $-\frac{1}{3} \log \frac{0.9S_{ut}}{S_e}$.

a = 106.81 kpsi; b = -0.111; se tiene entonces: **N = 470547006 ciclos.**

4.4.2. Estructura. En los planos del prototipo se puede apreciar la forma de la estructura. Está formada con ángulos de $1^{1/2} \times 1^{1/2}$ pulg, con espesor de $3/32$ de pulg.

La base se une a la estructura por medio de platinas dobladas en forma de "L" como se describió en la sección 4.2, junto con las medidas de las mismas.

Los cálculos se desarrollan para una de las dos platinas. Están sometidas a esfuerzo torsional, el cual se relaciona con la expresión:

$$t = \frac{T}{C_1 AB^2}$$

El esfuerzo cortante dado es para elementos delgados sometidos a torque; donde T es el torque o momento que se obtuvo anteriormente dividido entre

2, por ser éste el número de platinas, C_1 es una constante igual a

$\frac{1}{3}\left(1 - 0.63\frac{B}{A}\right)$, A es la suma de las longitudes de los lados que forman la "L"

y B es el espesor de la platina. El esfuerzo resulta entonces,

$$t = \frac{3.234 \text{ lb} \cdot \text{pulg}}{0.3283 \text{ pulg} \cdot 5.25 \text{ pulg} \cdot 0.015625 \text{ pulg}} = 120.1 \text{ psi}$$

Este valor lo comparamos con la resistencia al cortante del material, acero AISI 1020, que está dada por una fracción del esfuerzo de fluencia así, $S_{sy} = 0.577S_y$, llegando a obtener,

$$S_{sy} = 0.577 \cdot 30 \text{ kpsi} = 17.31 \text{ kpsi}$$

Con esto queda claramente demostrado que las platinas resisten fácilmente el esfuerzo obtenido, $17.31 \text{ kpsi} \gg 120.1 \text{ psi}$.

La estructura está sometida a momento flexionante, con la misma magnitud que el de la platina base, la diferencia en este caso es la sección transversal, ver figura 17.

$$s = \frac{Mc}{I}; M = 6.468 \text{ lb} \cdot \text{pulg}; c = 0.75 \text{ pulg}$$

$$I = \frac{1}{12}b_1h_1^3 + \frac{1}{12}b_2h_2^3 + b_2h_2d^2 = 0.069 \text{ pulg}^4$$

$$\Rightarrow s = 70.3 \text{ psi}$$

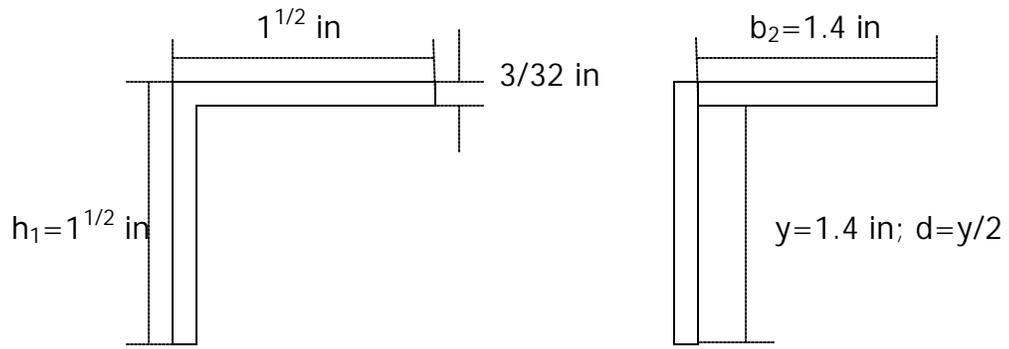
De la misma manera al comparar este valor con la resistencia del ángulo (acero AISI 1020), se tiene que $S_y = 30 \text{ kpsi} \gg \sigma = 70.3 \text{ psi}$, lo que indica el excelente comportamiento bajo esa carga.

4.5. GENERACIÓN DE ENERGIA ELECTRICA

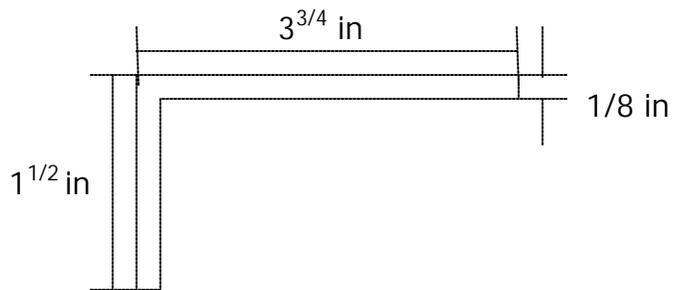
Partiendo de las medidas dadas en la sección 4.3, es necesario realizar un análisis que nos permita determinar la velocidad angular de la manivela. Para esto, nos valemos de un método gráfico por facilidad y confiabilidad.

Antes del método gráfico, debemos conocer la velocidad con que se está moviendo la "corredera". En la figura 18 se ilustra el esquema del mecanismo y la grafica que nos permite analizar y llegar a la magnitud de la velocidad de la misma.

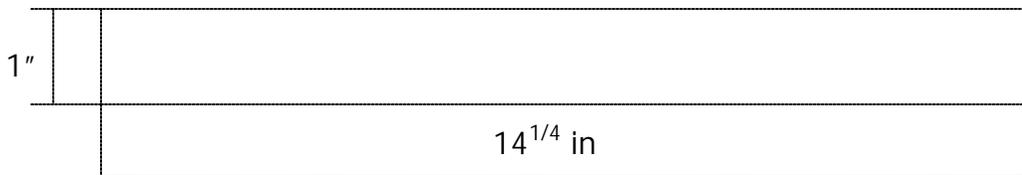
La amplitud (X) de la base desacoplada del mecanismo y su frecuencia natural son suficientes para determinar la velocidad de la "corredera", así:



a) Angulo de la estructura



b) Platina doblada en "L"



c) Platina base

Figura 17. Estructura y base

$$\text{Sen } \mathbf{q} = \frac{2}{14.25} = 0.15789 \rightarrow \mathbf{q} = 8.068^\circ$$

Este ángulo corresponde a la mitad del arco descrito por la base, es decir, 2θ será la totalidad del arco,

$$2\mathbf{q} = 16.136^\circ = 0.28 \text{ rad}$$

La frecuencia natural no circular es:

$$w_n = 2\pi f_n = 9.06 \text{ rad/seg} \rightarrow f_n = 1.44 \text{ Hz}$$

volviendo a la figura y realizando un análisis de las velocidades que se encuentran relacionadas, tenemos la siguiente ecuación:

$$V_D = V_{E/D} + V_E$$

La velocidad angular con que se mueve el eslabón ED, se puede determinar sabiendo que éste recorre 0.28 radianes a una frecuencia de 1.44 Hz,

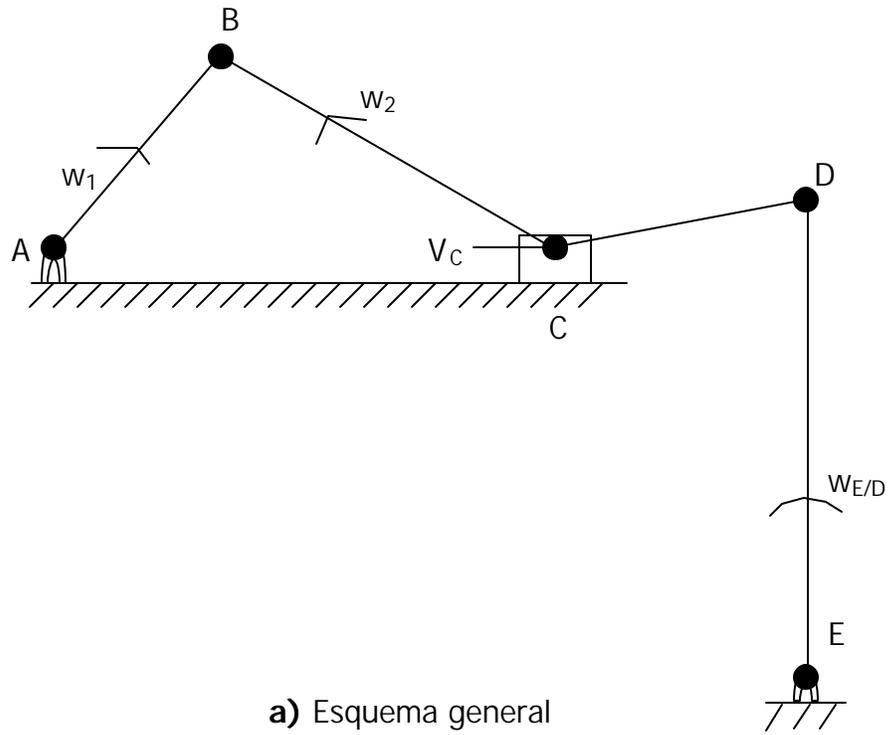
$$w_{E/D} = 0.28 \text{ rad} \times 1.44 \text{ Hz} = 0.4 \text{ rad/seg}$$
$$V_{E/D} = w_{E/D} \times R_{E/D} = 0.4 \text{ rad/seg} \times 14.25 \text{ pulg} = 5.7 \text{ pulg/seg}$$

Donde R es la longitud del eslabón. La velocidad lineal del punto E es cero (0), por lo que $V_D = V_{E/D}$. Adicionalmente, al haber eliminado la corredera, la velocidad lineal (V) del punto C es igual V_D , es decir, se convierte en el mismo punto D.

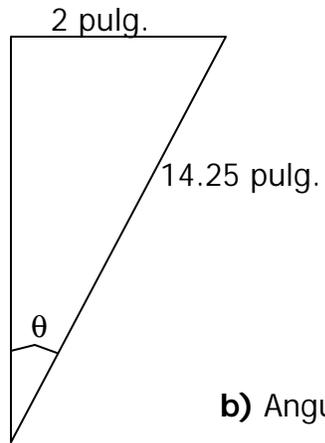
$$V_C = V_D = V_{E/D} = 5.7 \text{ pulg/seg}$$

A partir de este valor, damos paso al análisis gráfico del mecanismo (figura 19). Este método consiste en trazar imágenes al conjunto de eslabones a estudiar; el trazo es a escala con el fin de lograr exactitud a la hora de obtener las magnitudes desconocidas. V_C es el valor parámetro, la medida de la velocidad de los otros eslabones (BA y CB), va desde su origen en la línea V_C hasta donde se corten. La velocidad $V_{B/A}$ parte del origen junto con V_C , por ser la velocidad del punto A nula. $V_{C/B}$ parte del final de V_C por ser continua a esta última. Las velocidades son perpendiculares a sus respectivos eslabones, a excepción de la velocidad conocida por no cambiar de dirección.

Una vez realizadas las medidas, se tiene: $V_{C/B} = 4.8 \text{ pulg/seg}$ y $V_{B/A} = 6.4 \text{ pulg/seg}$. Sabiendo que los eslabones respectivos tienen longitudes de 5.5 y 1.875 pulg, las velocidades angulares son:

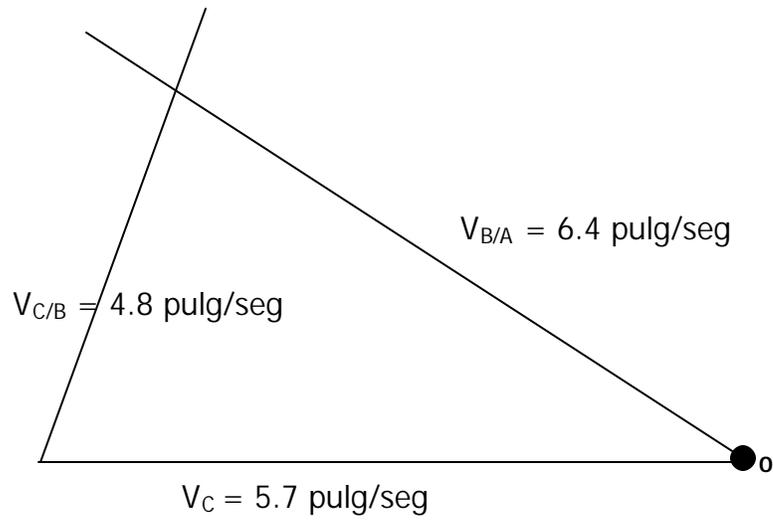


a) Esquema general



b) Angulo recorrido por la base

18. Esquema general del mecanismo



$V_{B/A}$ es perpendicular al eslabón BA

$V_{C/B}$ es perpendicular al eslabón CB

Figura 19. Método gráfico de velocidades relativas

$$w_{C/B} = \frac{V_{C/B}}{R_{C/B}} = \frac{4.8}{5.5} = 0.87 \text{ rad/seg}$$

$$w_{B/A} = \frac{V_{B/A}}{R_{B/A}} = \frac{6.4}{1.875} = 3.41 \text{ rad/seg}$$

4.5.1. Potencia generada y consumida. La potencia que consume la fuente de vibraciones, es decir, el motor, esta relacionada con el voltaje y el amperaje que consume este en la operación normal del prototipo.

$$\text{Pot}_c = I \cdot V; \text{ donde } I = 0.88\text{A y } V = 1.0\text{v}$$

$$\text{Pot}_c = 0.88 \cdot 1.0 = 0.88 \text{ watts}$$

La potencia generada medida en el generador, relacionada con el voltaje y amperaje producido es la siguiente:

$$\text{Pot}_g = I \cdot V; \text{ donde } I = 0.4\text{A y } V = 1.0\text{v}$$

$$\text{Pot}_g = 0.4 \cdot 1.0 = 0.4 \text{ watts}$$

Los efectos de la fricción contribuyen a disminuir la potencia generada. Con esto nos damos cuenta que es necesario mejorar aspectos que contribuyan a aumentar la velocidad angular de salida ($w_{B/A}$) y a disminuir la fricción, con el fin de lograr una eficiencia mínima para poder competir con otros sistemas de generación de energía eléctrica.

Las alternativas para el mejoramiento de la eficiencia, como hemos anotado anteriormente, consisten en aumentar la velocidad rotativa del generador. Varias formas de lograrlo son por medio de las transmisiones de potencia, ya sea por medio de correas (poleas), cadenas (ruedas dentadas) o engranajes. Con las transmisiones de potencia se logra el aumento en la eficiencia, pero al mismo tiempo es necesario tener en cuenta otras variables, las cuales podrían reducir las ventajas del aparato. Algunas de estas variables serían, ruidos, necesidad de mantenimiento en cortos períodos de tiempo, sistemas auxiliares de lubricación, entre otras, relacionadas directamente a los sistemas de transmisión mencionados.

En cuanto a la reducción de la fricción en el mecanismo transmisor, se puede mejorar la unión de los eslabones con ajustes más precisos, que eviten desalineamientos, desbalanceos excesivos, entre otros.

Todas las pruebas y ensayos los realizamos con un generador tacométrico de corriente continua.

5. ANÁLISIS ECONOMICO DEL PROYECTO

Asumiendo que el prototipo presenta un mínimo de eficiencia (10%) para generar la suficiente energía como para auto abastecerse y entregar para cubrir necesidades, y realizando una comparación con las plantas eléctricas que funcionan con gasolina, presentamos el siguiente análisis:

Equipo	Capacidad	Combustible	Consumo	Precio
Planta eléctrica	1.6 Kw	Gasolina	2.5 Lts/hr	\$2.000.000
Prototipo	1.6 Kw	Ninguno	Ninguno	\$6.220.000

Caben las siguientes aclaraciones para una mejor comprensión. El precio de la planta eléctrica es el promedio de las cotizaciones hechas en diferentes establecimientos y su capacidad es la más baja comúnmente encontrada en los mismos.

El costo del prototipo es la sumatoria de los valores de sus componentes. Para generar esa capacidad con eficiencia del 10% y autoabastecimiento, la potencia consumida debe ser de 14.4 Kw.

Equipo	Motor	Generador	Estructura	Mecanismo	Convertidor	Acumuladores
Capacidad	14.5 Kw	16 Kw	-	-	16 Kw	2 x 85A
Valor (\$)	1.800.000	2.000.000	600.000	150.000	1.500.000	170.000

El análisis lo realizaremos para un año y no se tendrán en cuenta costos adicionales, como por ejemplo de mantenimiento o lubricantes, dado que las garantías cubren el primer año de operaciones. Supondremos que los equipos trabajarán 10 horas al día. Adicionalmente asumiremos que el costo de la gasolina durante ese año se incrementa 1% cada mes y partimos del valor de la gasolina corriente \$3450/gal.

La inversión inicial para la planta eléctrica es su costo y los pagos mensuales serán por concepto de combustible así:

Si se consumen 2.5 lts de combustible en una hora, el costo para las 10 horas de trabajo diarias será,

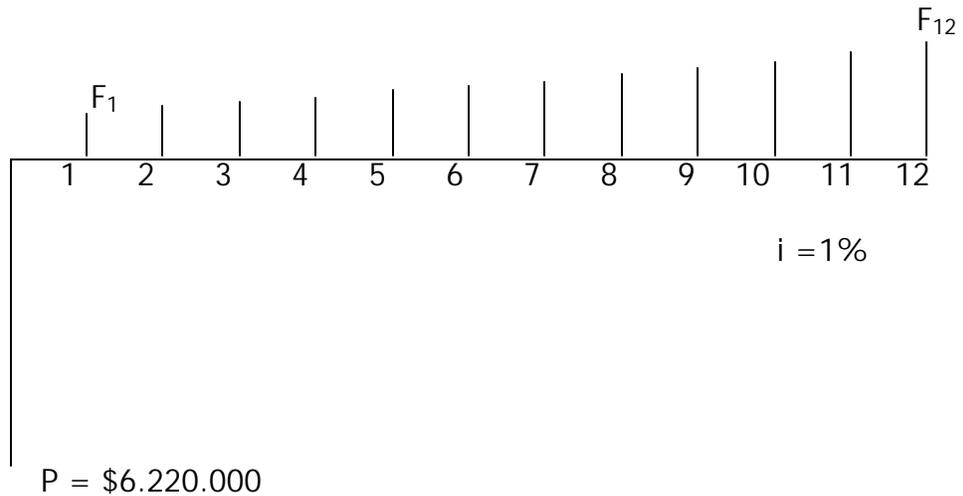
$$1 \text{ gal} = 3,875 \text{ lts} = \$3.450 \Rightarrow 2.5 \text{ lts} = \$2.226$$

$$\text{Costo diario} = \$22.260$$

$$\text{Costo mensual} = \text{Costo diario} \times 30 \text{ días} = \$667.800$$

La inversión inicial para el prototipo es su costo y no presenta pagos mensuales por no necesitar combustible. Por lo tanto con el prototipo nos ahorraremos el costo de la gasolina. Con el siguiente diagrama de flujo

ilustraremos los ahorros mensuales que nos llevan a recuperar la inversión con la que se obtiene el prototipo.



$$F_1 = \$667.800$$

$$F_7 = \$708.883.15$$

$$F_2 = \$674.478$$

$$F_8 = \$715.971.98$$

$$F_3 = \$681.222.78$$

$$F_9 = \$723.131.70$$

$$F_4 = \$688.035$$

$$F_{10} = \$730.363.02$$

$$F_5 = \$694.915.35$$

$$F_{11} = \$737.666.65$$

$$F_6 = \$701.864.51$$

$$F_{12} = \$745.043.32$$

El valor presente para los períodos anteriores se calcula por medio de la ecuación,

$$P_F = \frac{F}{(1+i)^n}$$

Donde P representa el valor presente, F el valor futuro, i la tasa de interés mensual y n el número de períodos. La sumatoria de todos los valores futuros llevados al presente se suman algebraicamente con la inversión inicial P.

$$P_F = \frac{F_1}{(1+0.01)^1} + \frac{F_2}{(1+0.01)^2} + \dots + \frac{F_{12}}{(1+0.01)^{12}}$$
$$\Rightarrow P_F = \$7.934.255$$

Utilizando la convención de signos de la siguiente manera, positivos los flujos hacia arriba y negativos los que van hacia abajo, tenemos un flujo positivo en el valor presente final igual a:

$$P_{\text{Final}} = \$7.934.255 - \$6.220.000 = \$1.714.255$$

Este resultado nos indica que la inversión para adquirir el prototipo se recupera antes de cumplido el primer año de operación. Adicionalmente podemos determinar el tiempo exacto en que se recupera dicha inversión haciendo uso de la siguiente fórmula y despejando la variable n (número de períodos),

$$P = A \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)$$

Siendo A el valor de la primera anualidad (mensualidad), es decir, \$667.800.

Luego de reemplazar los valores conocidos en la ecuación se despeja n para obtener,

$$n = 8.94 = 9 \text{ meses}$$

CONCLUSIONES

Para el desarrollo de un trabajo de grado, se combinan muchos aspectos, como el tiempo utilizado en búsqueda de información, en pruebas y por supuesto, mucha perseverancia.

Las pruebas y ensayos jugaron un papel muy importante en el entendimiento de la teoría, ya que fue necesario cambiar muchas veces la posición de los elementos antes del ensamble final. Un sistema de un grado de libertad que se encuentre bajo resonancia, en una posición vertical, puede experimentar una mayor amplitud que otro ubicado en forma horizontal, debido a la menor acción de la gravedad.

El sistema de masa desbalanceada, permitió aumentar la magnitud de la fuerza perturbadora, con lo cual fue posible incrementar la oscilación de las vibraciones.

Durante las pruebas descubrimos lo inestables que pueden ser los sistemas vibratorios, dado que con cualquier interferencia, se afectaba el comportamiento del prototipo y, los resultados no se alcanzaban.

La principal conclusión es saber que, aunque pequeña, existe una posibilidad de generación de energía eléctrica a partir del fenómeno de resonancia, con eficiencia.

Este es solo el comienzo de una investigación mucho más profunda. Vamos a continuar por este camino, a sabiendas de los obstáculos que brinda un campo tan dependiente de la tecnología.

Toda forma de generar energía, sin dañar la naturaleza y a bajos costos, es válida en cualquier campo de la ciencia y se debería apoyar.

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, John C. Ciencia de los materiales. 5ª ed. México D.F., Limusa, 1998. p. 81-89, 353-389.

AVALLONE, Eugene A. Manual del ingeniero mecánico. 9ª ed. México D.F., McGraw Hill, 1997.

BEER, Ferdinand P. Mecánica de materiales. 2ª ed. Santa fe de Bogotá, McGraw Hill, 1998. p. 318-325.

BENTLY NEVADA. Manual de medición y análisis de vibraciones mecánicas. U.S.A. 1970.

FRENCH, A.P. Vibraciones y ondas. 1ª ed. Barcelona, Reverte, 1974. p. 105-142.

HAMILTON, Mabre H. Mecanismos y dinámica de maquinaria. 1ª ed. México D.F., Limusa, 1990. p. 559-581.

MECHANALISYS. Operation and maintenance instruction manual for IRD mechanalisys vibration, sound level meter model 308. New York. 1973.

SHAMES, Irwing. Introducción a la mecánica de sólidos. 2ª ed. México D.F., Continental, 1998. p. 340-347.

SHIGLEY, Joseph E. Diseño en ingeniería mecánica. 5ª ed. México D.F., McGraw Hill, 1996. p. 308-390.

STEIDEL, Robert F. Estudio de las vibraciones mecánicas. 2ª ed. México D.F., Continental, 1981.

THOMSOM, William. Teoría de vibraciones. 1ª ed. México D.F., Prentice Hall Hispanoamericana s.a., 1997. p. 25-30.

UICKER, John J. Teoría de máquinas y mecanismos. 1ª ed. México, D.F., McGraw Hill, 1998. p.42-59.

WOWK, Victor. Machinery vibration. 1ª ed. U.S.A., Bergano book co., 1997. p. 1-55.