



**ALGORITMO PARA CALCULAR ESFUERZOS Y CRITERIOS DE FALLA DE TSAI-HILL, TSAI-WU,  
HASHIM Y HASHIM-ROTEM EN AGUJEROS CIRCULARES EN LAMINADOS DE FIBRA DE VIDRIO**

Autor:

Augusto Tinoco Padaui  
Programa de Ingeniería Mecánica

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR  
Facultad de ingeniería - Programa de Ingeniería Mecánica  
Cartagena de indias D. T. y C.  
2013



**ALGORITMO PARA CALCULAR ESFUERZOS Y CRITERIOS DE FALLA DE TSAI-HILL, TSAI-WU,  
HASHIM Y HASHIM-ROTEM EN AGUJEROS CIRCULARES EN LAMINADOS DE FIBRA DE VIDRIO**

Autor:

Augusto Tinoco Padaui  
Programa de Ingeniería Mecánica

Director:

Jairo F. Useche, M.Sc., Ph.D.  
Profesor Asociado Facultad de Ingeniería  
Universidad Tecnológica de Bolívar

Trabajo presentado al comité curricular del  
programa de ingeniería mecánica como requisito  
parcial para optar el título de Ingeniero Mecánico.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE BOLÍVAR  
Facultad de ingeniería - Programa de Ingeniería Mecánica  
Cartagena de indias D. T. y C.  
2013

## RESUMEN

En la actualidad son muchos los problemas que afectan a las compañías o empresas de Colombia y el mundo cuando nos referimos a las fallas de los materiales. Este proyecto se enfoca en uno de ellos, la problemática que se presenta en las fallas en compuestos laminados, para ser más exactos, nuestra investigación se basa en crear una herramienta para calcular los criterios de falla y los esfuerzos en los agujeros en materiales compuestos laminados con agujeros circulares, por medio de la utilización de un software computacional.

Esta problemática ha desarrollado una gran cantidad de teorías planteadas para encontrar un verdadero criterio de evaluación que permita evitar fallas en los materiales compuestos, pero específicamente aun no se encontrado una aplicación que permita dar realmente solución inmediata a este problema. Sabemos de antemano, la importancia de los materiales compuestos laminados en las industrias como la naval, aérea, entre otras, es por esto que me veo en la labor de proponer la utilización del software MATLAB®, que es un programa bastante avanzado para nuestra investigación. Además este programa, es óptimo, ya que nos permite diseñar, analizar y graficar.

Con esta aplicación computacional obtendremos una perspectiva y adecuada observación de placas sometidas a tracción, sin ninguna duda, esta serie de procedimiento son de completo cuidado para obtener un resultado satisfactorio, es por esto que es necesario la aplicación de este software para generar optimas soluciones a los problemas y a su vez minimice los costos para obtener excelentes y gratos beneficios.

Finalmente, se buscará una aplicación del software MATLAB® que nos brindará las garantías necesarias para cumplir, de manera satisfactoria, con cada uno de los objetivos de nuestro trabajo de investigación, enfocándonos primordialmente en desarrollar una herramienta para calcular los esfuerzos en agujeros circulares y los criterios de falla en laminas de fibra.

## **Dedicatoria**

*A mis padres Augusto y Claudia por enseñarme lo valioso que es el estudio, la honestidad y el respeto. Además por darme la oportunidad de estudiar y apoyarme en todos los altibajos de mi vida.*

*A mi hermana Clau por siempre estar pendiente de mí y darme fuerzas para salir adelante.*

*A mi amigo del alma Jose Sánchez por darme la fuerza necesaria para mi formación como Ingeniero.*

## **Agradecimientos**

*A mis amigos de la "U", porque de una u otra forma me ayudaron a salir adelante en esta etapa universitaria.*

*A todo el cuerpo de profesores que me ayudaron a mi formación como profesional y al profesor Jairo Useche por el apoyo en este proyecto*

## TABLA DE CONTENIDO

	Pg.
1. Descripción del Trabajo	4
1.1. Introducción	4
1.2. Descripción del Problema	4
1.3. Formulación del Problema	5
1.4. Hipótesis del Trabajo	5
1.5. Objetivos	5
1.6. Justificación	6
1.7. Metodología	6
1.8. Resultados Esperados	7
2. Materiales Compuestos	8
2.1. Introducción	8
2.2. Materiales Compuestos	9
3. Mecánica de los Materiales Compuestos	11
3.1. Introducción	11
3.2. Conceptos básicos y terminología	11
3.3. Ecuaciones constitutivas de una lámina	15
3.4. Propiedades mecánicas de fibras, matrices y láminas	15
3.5. Comportamiento mecánico de materiales compuestos reforzados con fibra.	17
3.6. Aplicaciones de los materiales compuestos de fibra	19
4. Criterios de Falla para Compuestos Laminados	20
4.1. Introducción	20
4.2. Aspectos Generales	20
4.3. Criterios de Falla	21
5. Concentradores de Esfuerzo en Placas Laminadas	36
5.1. Introducción	36
5.2. Concentradores de Tensión alrededor de los Agujeros	39
6. Desarrollo y Resultados	41
6.1. Introducción	41
6.2. Ejemplo 1	41
6.3. Ejemplo 2	45
7. Conclusiones	57
8. Recomendaciones	58
BIBLIOGRAFIA	59

## LISTA DE FIGURAS

	Pg.
Figura 1. Diferentes materiales compuestos	9
Figura 2. Fibra sometida a tracción y compresión	12
Figura 3. Distribuciones de transferencia de carga y tensión sometida a una sola fibra incrustada en un material de la matriz	13
Figura 4. Varios tipos de láminas compuestas de reforzadas con fibra	13
Figura 5 Laminado formado por láminas de fibra con orientaciones diferentes	14
Figura 6. Caracterización analítica de los materiales compuestos	18
Figura 7. Fibras sometidas a tracción	23
Figura 8. Estado de tracción uniaxial	24
Figura 9. Tensión en dirección de las fibras	25
Figura 10. Estado de tracción uniaxial	26
Figura 11. Lamina sometida a tracción	27
Figura 12. Lamina sometida a tracción en dirección perpendicular a las fibras	28
Figura 13. Lamina sometida a carga en dirección Z	28
Figura 14. Lamina sometida a esfuerzos cortantes	29
Figura 15. Lamina unidireccional trabajando en tensión plana, suponiendo $Z = Y$	32
Figura 16. Lamina sometida a tensión uniaxial	30
Figura 17. Lámina sometida a tracción en dirección de las fibras	31
Figura 18. Lámina sometida a compresión en dirección de las fibras	32
Figura 19. Lámina sometida a esfuerzos cortantes	32
Figura 20. Lámina sometida a tensión biaxial	33
Figura 21. Representación de las tensiones tangenciales $\sigma_{12}$ y $\sigma_{23}$ y de sus valores admisibles $S$ y $S_T$ para un elemento de lámina unidireccional	35
Figura 22. Placas compuestas unidireccionales	37
Figura 23. Lámina anisótropica sometida a cargas transversales y de corte	38
Figura 24. Lámina con fibras orientadas arbitrariamente con sujeta a cargas generales	39
Figura 25. Lamina sometida a tracción.	41

## LISTA DE TABLAS

	Pg.
Tabla 1: Propiedades mecánicas de la matriz	16
Tabla 2: Propiedades de las fibras	16
Tabla 3: Tabla de resistencias y rigideces	18
Tabla 4: Expresiones de los criterios de Hashin	34

# 1. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO

## 1.1 INTRODUCCIÓN

A continuación se plasmará un breve resumen o reseña histórica de como se ha venido desarrollando y evolucionando los materiales compuestos laminado, también como se ha enfocado esta temática en diferentes sectores industriales, como el naval, su evolución, criterios y teorías. Es necesario fundamentar esta parte de nuestra investigación ya que es el núcleo sobre qué es lo que vamos a elaborar en nuestro trabajo de grado, sabemos de la existencia de muchas teorías acerca de los materiales compuestos como lo son las teoría de fallas, unas de las más importantes y bien fundamentadas y en la cuales también estamos enfocando nuestra investigación.

Es necesario saber que utilizaremos herramientas tecnológicas en nuestro proyecto, como lo es la aplicación de programas computacionales, todo esto con la finalidad de obtener un nivel adecuado en cada uno de los procedimientos y pasos que desarrollemos en los capítulos de este trabajo. Y por ultimo obtendremos resultados confiables y óptimos para que esta aplicación sea exitosa y avalada para que en un futuro pueda ser utilizada con plena confianza por quienes requieran de su servicio.

## 1.2 DESCRIPCION DEL PROBLEMA

La utilización de materiales compuestos en la industria naval en nuestro país data por lo menos cuatro décadas, principalmente enfocado a la construcción de embarcaciones de recreo. Ya hacia finales de los 80's se inicia la fabricación de tanques de almacenamiento y tuberías fabricadas en plástico reforzado con fibra de vidrio, industria que se mantienen hoy en día. En los últimos años se ha presentado un avance en la industria naval y aeronáutica en cuanto a la utilización en aplicaciones especializadas de materiales compuestos para el desarrollo de aeronaves y embarcaciones de combate, principalmente.

Sin embargo, el aumento en la utilización de estos materiales no ha ido acompañada en una transferencia y apropiación del conocimiento requerido para desarrollar diseños de componentes mecánicos y estructurales utilizando materiales compuestos. Podemos decir que los diseños desarrollados son empíricos. Aspectos como la mecánica de materiales compuestos y sus tipos de falla son poco conocidos por parte de la industria nacional, lo cual ocasiona el desarrollo de estructuras sobre dimensionadas o que no se sepa desarrollar aplicaciones avanzadas utilizando materiales compuestos.

La investigación en materiales compuestos lleva más de 50 años a nivel mundial, y se han propuesto numerosas teorías o métodos para predecir la falla de láminas unidireccionales y de laminados multidireccionales. Aunque el análisis de los datos experimentales muestra que todos estos procedimientos no son adecuados para calcular la falla de estos materiales bajo cualquier condición de esfuerzos combinados estáticos, existen numerosas y exitosas aplicaciones de los compuestos. Esto se debe a que los diseñadores de compuestos comerciales no se basan exclusivamente en las teorías de falla. Normalmente éstas se usan para obtener dimensiones previas, pero el diseño final se basa en pruebas experimentales y típicamente se usan factores de

seguridad altos, basados en la carga última, con el fin de compensar incertidumbres y la pérdida de desempeño por factores como fatiga, condiciones ambientales e impactos.

Las actuales teorías no son suficientemente flexibles y algunas deben desarrollarse más para involucrar diferentes aspectos que contribuyen a la falla de un material compuesto. La alternativa típica por la que optan los diseñadores comerciales es basar sus diseños en resultados experimentales, pero éstos tienden a ser muy costosos. Quizás por esto las teorías de falla han sido tomadas por los industriales como una curiosidad académica, en vez de herramientas prácticas de diseño. Sin embargo, con el fin de reducir tiempos y costos (los procedimientos de ensayo son muy complejos y costosos) y de diseñar elementos más complejos, este punto de vista está comenzando a cambiar, utilizando para esto herramientas para análisis y diseño computacional que agilizan cálculos y permiten estudiar a bajo costo y de forma rápida el comportamiento mecánico de estructuras complejas fabricadas con compuestos laminados.

Estas herramientas de diseño del tipo CAD/CAE (*Computer Aided Design/Computer Aided Engineering*) normalmente abarcan el diseño gráfico, el manejo de bases de datos para el diseño y la simulación del comportamiento mecánico del diseño (deformaciones, vibración, resistencia, características térmicas, etc.) permiten desarrollar el proceso de diseño y optimización desde su fase conceptual hasta la fabricación del diseño.

El desarrollo del trabajo se basa en la utilización del programa MATLAB<sup>®</sup> el cual es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Además es un software muy usado en universidades y centros de investigación y desarrollo.

### **1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

El presente trabajo busca contestar a la siguiente pregunta de investigación:

*¿Cómo calcular de una manera optima los esfuerzos y criterios de falla en agujeros circulares en láminas fabricadas con fibra de vidrio?*

### **1.4 HIPÓTESIS DE TRABAJO**

El análisis de esfuerzos utilizando modelos computacionales, en conjunto con las teorías modernas de falla para materiales compuestos laminados, permiten predecir teóricamente la falla en láminas de fibra de vidrio con agujeros circulares.

### **1.5 OBJETIVOS**

#### **1.5.1 OBJETIVO GENERAL**

Desarrollar una herramienta en MATLAB, para calcular los criterios de falla y los esfuerzos en agujeros circulares concéntricos en láminas de fibra de vidrio.

### **1.5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Estudiar la teoría de materiales compuestos y laminados de fibra de vidrio.
- Estudiar el problema de distribución de esfuerzos en placas laminadas con agujeros circulares.
- Estudiar las teorías de falla modernas para compuestos laminados.
- Crear un modelo algorítmico en MATLAB® para calcular los criterios de falla y los esfuerzos en laminas con agujero circular.

### **1.6 JUSTIFICACIÓN**

La rama del análisis de concentración de esfuerzos en agujeros circulares en laminados de fibra de vidrio no cuenta con muchos software confiables que ayude a mejorar la predicción de problemas complejos en esta área. Por esta razón se implementará un programa de modelado numérico por elementos finitos, que resultará óptimo para la observación de placas sometidas a flexión y en placas con carga axial.

La utilización del software MATLAB® para el análisis y el diseño de placas de fibra de vidrio/epoxi, es una herramienta predilecta para optimizar el análisis y el cálculo de concentración de esfuerzos y criterios de falla en los compuestos laminados.

Por su bajo costo, sería benéfico que la industria local utilice esta herramienta de análisis y diseño. Para lograr esto, se debe proponer una metodología que conduzca a la buena utilización del software MATLAB® dentro del ciclo de diseño.

### **1.7 METODOLOGÍA**

A continuación se presenta la metodología o la forma como se va a desarrollar y elaborar el presente proyecto investigativo sobre el cálculo de esfuerzos y criterios de falla en agujeros circulares en láminas de fibra de vidrio. Se muestran aspectos como el tipo de investigación, el diseño metodológico de la investigación a realizar y procedimientos que fueron utilizados para llevar a cabo dicha investigación.

El estudio de esta investigación se basa en la aplicación de un software para desarrollar una herramienta para calcular esfuerzos y criterios de falla en agujeros circulares en láminas de fibra de vidrio.

- Indagar en la literatura apropiada acerca de la historia de los materiales compuestos y los laminados de fibra de vidrio, para resaltar los conceptos más importantes.

- Analizar, conocer y comprender de manera adecuada el uso de la teoría de falla modernas con respecto a compuestos laminado, para llevar un orden en cada uno de los capítulos a desarrollar, con el fin de aplicar estas teorías en los resultados arrojados por el software.
- Indagar y profundizar acerca de la distribución de esfuerzos en placas con agujeros en placas laminadas, estudiando los diferentes conceptos y asociarlos para desarrollar este objetivo eficazmente.
- Relacionar las fórmulas de los concentradores de esfuerzos y criterios de falla, para introducirlas en el programa MATLAB® y generar el modelo algorítmico.

### **1.8 RESULTADOS ESPERADOS**

- Una herramienta útil para aquellas personas que están en la necesidad de calcular esfuerzos y aplicar criterios de falla en láminas de fibra de vidrio con agujeros circulares.
- Gráficos del comportamiento un agujero circular sometida a esfuerzo de tracción respecto al ángulo de una lámina de fibra de vidrio con agujero circular.
- Gráfico del comportamiento de los criterios de falla de una lámina de fibra de vidrio con agujero circular.

## 2. MATERIALES COMPUESTOS

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Básicamente en esta parte del proyecto nos enfocaremos en las definiciones y teorías que existen acerca de los materiales compuestos, esta parte del trabajo se mostrará una breve reseña de los materiales compuestos, algunos personajes o autores que definieron estos conceptos y se observarán algunos ejemplos enfocados exactamente a los materiales compuestos. Es necesario tener muy claro y entender estas definiciones sobre las teorías que hay acerca de este tipo de materiales, ya que es de vital importancia para el buen desarrollo de la investigación y para conocer más a fondo lo que es la importancia los materiales compuestos en las industrias, una breve definición de estos materiales sería: Los materiales compuestos son la unión de dos o más materiales, para formar un nuevo material con mejores propiedades físicas. Por otra parte, veremos algunos ejemplos, los tipos y clasificación de los materiales compuestos, como también repasaremos su historia y evolución a través del tiempo.

### 2.2. MATERIALES COMPUESTOS

Los *compuestos* son materiales conformados, en una escala macroscópica, por dos o más materiales insolubles el uno en el otro (llamados fases o constituyentes), los cuales se unen de maneras y en proporciones adecuadas, para formar un nuevo material con mejores propiedades a las de los constituyentes (metales, cerámicos y plásticos). ARIAS Y VANEGAS (2004).

Los compuestos aprovechan las propiedades de cada uno de éstos de tal manera que pueden lograrse combinaciones de propiedades que son difíciles de obtener en materiales convencionales. Por ejemplo, alta relación resistencia-densidad o rigidez-densidad. Un ejemplo clásico de material compuesto es el concreto reforzado, conformado por una matriz cerámica con partículas (de naturaleza silícea), reforzada con varillas de acero, las cuales le conceden al compuesto resistencia a la tracción y tenacidad. La figura 1 esquematiza un par de materiales compuestos. Normalmente, la fase conocida como *fibra* es resistente y rígida, mientras que la fase base, la *matriz*, puede tener baja o alta resistencia o rigidez. ARIAS Y VANEGAS (2004).

Un material compuesto es aquel que cumple con las siguientes condiciones: (HULL 2003)

- Consta de dos o más materiales físicamente distintos y separables mecánicamente
- Puede fabricarse mezclando los distintos materiales de tal forma que la dispersión de un material en el otro pueda hacerse de manera controlada para alcanzar unas propiedades óptimas.
- Las propiedades son superiores, y posiblemente únicas en algún aspecto específico, a las propiedades de los componentes por separado. (HULL 2003)

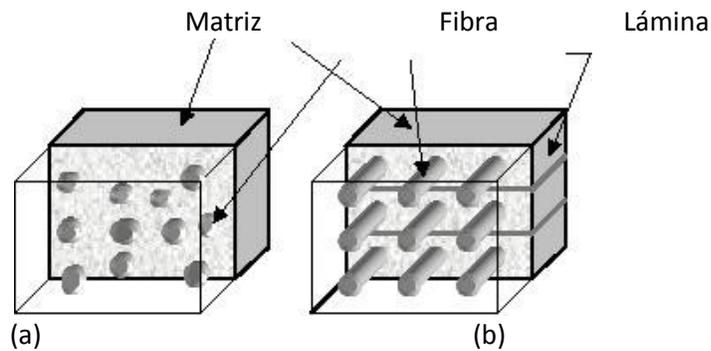


Figura 1. Materiales compuestos. (a) Compuesto reforzado con partículas. (b) Compuesto reforzado con fibras, el cual es un compuesto laminado (la matriz se forma apilando láminas) unidireccional (las fibras están orientadas en este caso en una sola dirección). ARIAS Y VANEGAS (2004).

### 2.2.1 CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS

Los materiales compuestos se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Materiales compuestos naturales; Madera, hueso, bambú, músculos y otros tejidos.
- Materiales micro-compuestos, Aleaciones metálicas y termoplásticos endurecidos, hojas para moldeo continuo y termoplásticos reforzados.
- Macrocomposites, Acero galvanizado, vigas de hormigón armado, palas de helicóptero y esquís. (HULL 2003)

Los compuestos reforzados con fibras largas tienen la ventaja de que el material de éstas adquiere una gran resistencia a la tracción al ser conformado en filamentos muy delgados, debido en parte a la reducción del número de defectos. Por ejemplo, un vidrio (*E-glass*) con resistencia a la tracción de 5 GPa, puede tener una resistencia de unos 70 GPa cuando está en forma de fibra. Por lo tanto, en muchos casos las fibras son las que aportan la resistencia y rigidez al compuesto y son las encargadas de soportar las cargas. La forma, tamaño, orientación y distribución de la fase usada como refuerzo son aspectos claves para controlar las propiedades del compuesto. Por ejemplo, la resistencia y rigidez son mayores en la dirección de las fibras que en otras direcciones. ARIAS Y VANEGAS (2004).

La matriz se encarga de sostener las fibras, de mantener a integridad del compuesto y de transferir las cargas entre las fibras, dando capacidad al compuesto de soportar diferentes solicitaciones de carga (las fibras por sí solas sólo son capaces de soportar tracción). Además, la matriz protege a las fibras del ataque del medio. Muchas veces la matriz es de baja densidad (matriz polimérica por ejemplo), con lo que se obtiene un elemento de bajo peso. Otra función de la matriz es aislar las fibras para retardar el crecimiento de grietas, es decir, para aumentar la tenacidad del material. Si las fibras estuvieran en contacto, las grietas crecerían más fácilmente, por lo que el material sería frágil. ARIAS Y VANEGAS (2004).

De acuerdo al material de los constituyentes, los compuestos sintéticos se pueden clasificar en compuestos de matriz polimérica, de matriz metálica, de matriz cerámica, de carbono-

carbono y algunas combinaciones de matrices y fibras, llamadas híbridos. Los de matriz polimérica son los más usados y son particularmente adecuados en aplicaciones que requieran alta relación entre la rigidez o la resistencia y la densidad, tales como las requeridas en la industria aeronáutica y aeroespacial. ARIAS Y VANEGAS (2004).

Los compuestos ofrecen versatilidad y flexibilidad, ya que en el diseño no sólo se tienen variables como material, forma y dimensiones, sino que se tiene la posibilidad de seleccionar muchísimas combinaciones de materiales, la configuración del compuesto y las características del proceso de manufactura. Los compuestos pueden tener alta resistencia al desgaste, bajo coeficiente de expansión térmica, alta resistencia a la fatiga, pueden ser aislantes térmicos y tener alta eficiencia estructural (bajo peso y costo). Las aplicaciones de estos materiales incluyen implementos deportivos y biomédicos, botes, vehículos y aviones entre muchas otras. ARIAS Y VANEGAS (2004).

## 3. MECÁNICA DE MATERIALES COMPUESTOS

### 3.1 INTRODUCCIÓN

En ese capítulo encontraremos los conceptos básicos y la terminología de los materiales compuestos por fibra y matriz, de los materiales compuestos laminados, las ecuaciones constitutivas de una lamina como la ley de Hooke y varias ilustraciones que explicarán mejor estos conceptos. También veremos algunos tipos de láminas, observaremos los tipos de materiales como los de fibra y matriz, algunas teorías y ecuaciones que aportaron inmensamente a toda esta temática.

Es necesario manejar muy bien la mecánica de los materiales, ya que es una parte fundamental para el desarrollo de nuestra propuesta, además debemos saber identificar las orientaciones de las fibras a la hora de empezar a analizar la mecánica los materiales. Es importante saber que todos estos conceptos deben ir de la mano para cumplir los objetivos de este trabajo. Este capítulo hace referencia a los autores REDDY (2004), PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

### 3.2. CONCEPTOS BÁSICOS Y TERMINOLOGÍA

#### 3.2.1 LAS FIBRAS Y LA MATRIZ

Los materiales compuestos son aquellos formados por la combinación de dos o más materiales en una escala macroscópica de tal forma que tengan mejores propiedades de ingeniería que los materiales convencionales, por ejemplo, los metales. Algunas de las propiedades que se pueden mejorar en la formación de un material compuesto son rigidez, resistencia, reducción de peso, resistencia a la corrosión, las propiedades térmicas, resistencia a la fatiga y resistencia al desgaste. La mayoría de los materiales compuestos creados por el hombre, están hechos de dos materiales: un material de refuerzo llamado fibra y un material base, denominado material matriz. REDDY (2004).

Los materiales compuestos se forman comúnmente en tres tipos diferentes: (1) Compuestos fibrosos, que consisten en fibras de un material en la matriz del otro material (2) Compuestos de partículas, que están compuestos de partículas de macro tamaño de un material en la matriz de otro, y (3) compuestos laminados, que están hechas de capas de diversos materiales, incluyendo materiales compuestos de los dos primeros tipos. Las partículas y matriz en materiales compuestos de partículas pueden ser metálicas o no metálicas. Por lo tanto, existen cuatro combinaciones posibles: metálicos con no metálicos, no metálicos en metálicos, no metálicos con no metálicos y metálicos con metálicos. REDDY (2004).

El mecanismo básico de transferencia de carga entre la matriz y la fibra puede ser explicarse considerando una barra cilíndrica de una sola fibra en un material matriz (ver Figura 3a). La transferencia de carga entre el material matriz y la fibra se lleva a cabo a través de esfuerzo cortante. Cuando la carga  $P$  es aplicada a tracción en la matriz, el esfuerzo cortante  $\tau$  se desarrolla en la superficie externa de la fibra, y su magnitud disminuye a partir de un alto valor al final de la fibra, a cero a una distancia desde el extremo. El esfuerzo de tensión  $\sigma$  en una en la sección

transversal de la fibra tiene la tendencia contraria, partiendo del valor cero al final de la fibra a su máximo a una distancia hasta el extremo. Las dos tensiones juntas balancean la carga aplicada,  $P$ , en la matriz. La distancia desde el extremo libre al punto en el que la tensión normal alcanza su máximo esfuerzo cortante y se convierte en cero se conoce como la *distancia característica*. El estado de tracción pura continúa a lo largo del resto de la fibra. REDDY (2004).

Cuando una carga a compresión se aplica sobre la matriz, las tensiones en la región de longitud característica cambian en su signo, en la región de compresión, es decir, en el resto de la longitud de la fibra, la fibra tiende a ceder, al igual que un cable sometido a compresión de carga. En esta etapa, la matriz proporciona un soporte lateral para reducir la tendencia de la fibra de hebillarse (Figura 3b). Cuando una fibra se rompe, la carga transportada por la fibra, se transfiere a través del esfuerzo cortante a las dos fibras vecinas (ver Figura 3c), elevando el nivel de estrés de fibra axial a un valor de  $1.5\sigma$ .

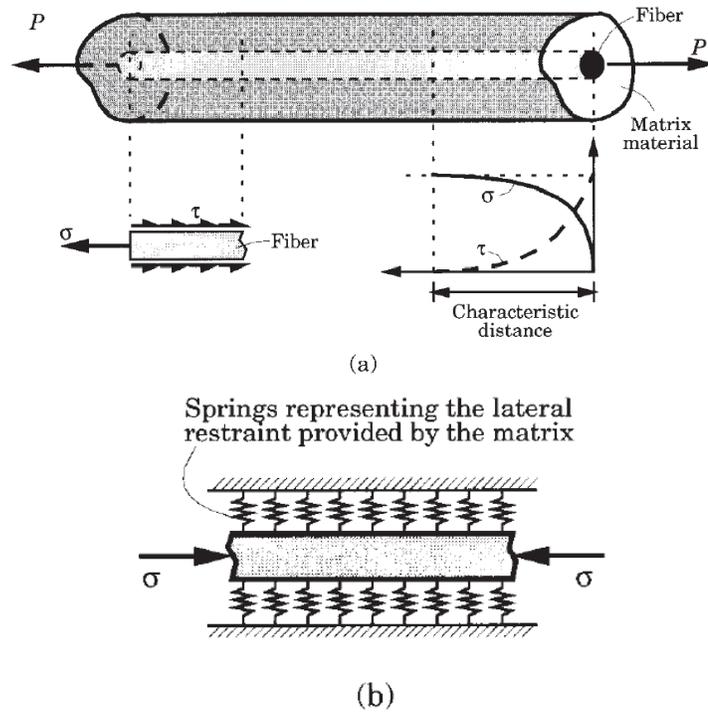


Figura 2. Fibra sometida a tracción y compresión. REDDY (2004).

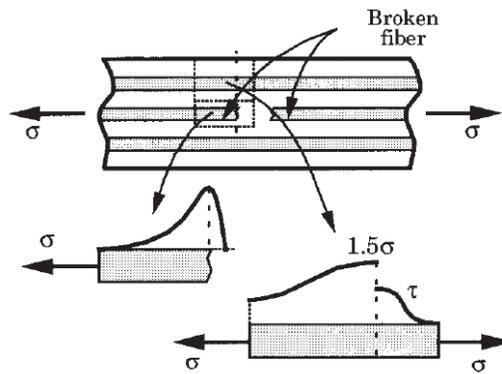
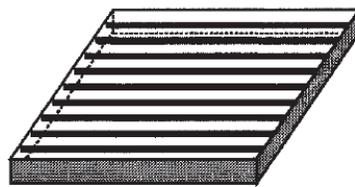


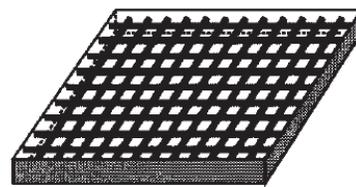
Figura 3. Distribuciones de transferencia de carga y tensión sometida a una sola fibra incrustada en un material de la matriz. REDDY (2004).

### 3.2.2 LÁMINAS Y LAMINADOS

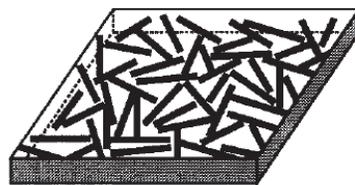
Una lámina o capa es una hoja típica de un material compuesto. Representa un elemento fundamental de su construcción. Una lámina reforzada con fibra se compone de muchas fibras incrustadas en una material matriz, que puede ser un metal como el aluminio, o un no metal como los polímeros termoplásticos. A menudo, los agentes químicos y los rellenos se añaden para mejorar la unión entre las fibras y material matriz, aumentando su resistencia. Las fibras pueden ser continuas o discontinuas, de tejidos unidireccionales y bidireccionales, o distribuidos al azar (ver Figura 4). Las láminas con fibras reforzadas unidireccionales, presentan una mayor resistencia en la dirección de las fibras, pero tienen muy baja resistencia en la dirección transversal de las fibras. Una combinación deficiente entre la fibra y la matriz, resulta un material pobre de propiedades transversales ocasionando la rotura y el pandeo de las fibras. Los compuestos con fibras reforzadas discontinuas tienen menor resistencia que un material con fibras reforzadas continuas. REDDY (2004).



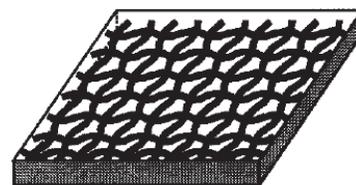
(a) Unidirectional



(b) Bi-directional



(c) Discontinuous fiber



(d) Woven

Figura 4. Varios tipos de láminas compuestas de reforzadas con fibra. REDDY (2004).

Un laminado es una colección de láminas apiladas para lograr la rigidez deseada y espesor. Por ejemplo, las láminas con fibras reforzadas unidireccionales pueden ser apiladas de tal forma que las fibras de cada lámina se orientan en la misma dirección o en diferentes (ver Figura 5). La secuencia de las distintas orientaciones de las capas de un compuesto de fibra reforzado de un compuesto laminado se denomina esquema de laminación o secuencia de apilamiento. El esquema de laminación y las propiedades de una lámina, ofrece una flexibilidad a los diseñadores para adaptar la rigidez y la resistencia de la lámina para que coincida con la rigidez estructural y los requisitos de resistencia. REDDY (2004).

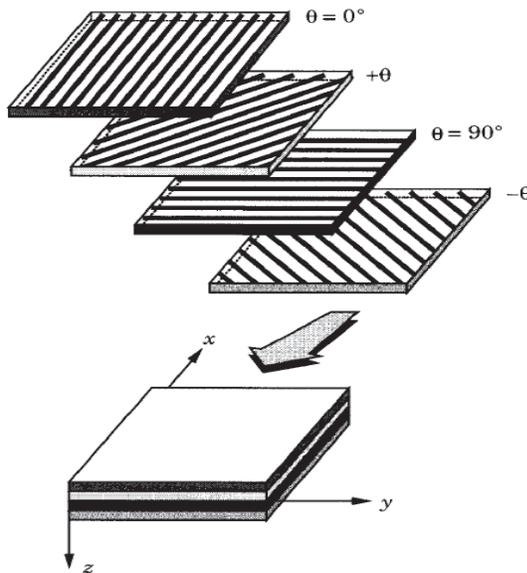


Figura 5 Laminado formado por láminas de fibra con orientaciones diferentes. REDDY (2004).

Los laminados de fibra reforzada también tienen desventajas, ya que, el contraste de las propiedades del material entre las capas, el esfuerzo cortante producido entre las capas, especialmente en los bordes de una lámina, puede causar delaminación. Del mismo modo, debido a la falta de contraste entre las propiedades del material matriz y la fibra, porque se produce una pérdida de adherencia entre las fibras. También, existen defectos durante la fabricación de los laminados, tales como los huecos interlaminares, la exfoliación, la orientación incorrecta de las fibras, las fibras dañadas y la variación de grosor. Es imposible eliminar por completo los defectos de fabricación, por lo tanto, el análisis y metodologías de diseño debe tener en cuenta diversos mecanismos de falla. REDDY (2004).

La ley de Hooke generalizada es revisada para un material ortotrópico, los coeficientes elásticos de un material ortotrópico se expresan en términos de constantes de ingeniería de una lámina, y las interacciones de la matriz de fibra de una lámina unidireccional se discuten. La transformación de tensiones, deformaciones, y los coeficientes de elasticidad de la material de lámina a las coordenadas problema también se presentan. REDDY (2004).

### 3.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE UNA LÁMINA

#### 3.3.1 LEY DE HOOKE GENERALIZADA

En esta sección se estudia el comportamiento mecánico de una lámina compuesta con fibras reforzadas, que es el bloque básico de construcción de un laminado compuesto. En la formulación de las ecuaciones constitutivas de una lámina que se supone que:

- Una lámina es continua, es decir, sin huecos o espacios vacíos existentes entre sí.
- Una lámina se comporta como un material elástico lineal. REDDY (2004).

La primera hipótesis a considerar es el comportamiento macromecánico de una lámina. La pérdida de adhesión entre la fibra y la matriz y la rotura de fibras, se van a incluir en la formulación de las ecuaciones constitutivas de una lámina, entonces debemos considerar el enfoque de la micromecánica, que trata los materiales constitutivos como continuos y representa el comportamiento mecánico de los componentes y, posiblemente, sus interacciones. La segunda hipótesis implica que la ley de Hooke generalizada es válida. Cabe señalar que ambas hipótesis se pueden eliminar si fuéramos a desarrollar modelos constitutivos para micromecánica para una lámina con comportamiento inelástico (por ejemplo, plástico, viscoelástico, etc). Los materiales compuestos son inherentes heterogéneos desde un punto de vista microscópico. Desde el punto de vista macroscópico, donde las propiedades del material de un compuesto se derivan de un promedio ponderado de los materiales constitutivos, de fibra y matriz, suponemos que los materiales compuestos son homogéneos. El siguiente análisis de las ecuaciones constitutivas es independiente de si el material es homogéneo o no, porque las relaciones de tensión-deformación mantienen un punto típico en el cuerpo. REDDY (2004).

La ley de Hooke generalizada para un material anisotrópico bajo condiciones isotérmicas es dada en la notación contraída por

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j$$

donde  $\sigma_{ij}$  ( $\sigma_i$ ) son los componentes de la tensión,  $\epsilon_{ij}$  ( $\epsilon_i$ ) son los componentes de la deformación, y  $C_{ij}$  son los coeficientes de material, los cuales están referenciados en el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales ( $x_1, x_2, x_3$ ). En general, hay 21 constantes elásticas independientes para los más generales materiales hiperelásticos. Cuando los materiales poseen uno o más planos de simetría, el número de los coeficientes de elasticidad independiente disminuye. Para materiales con un plano de material simétrico, llamados materiales monoclinicos, sólo hay 13 independientes parámetros, y para los materiales con los tres planos ortogonales de simetría entre sí, llamados materiales ortotrópicos, el número de parámetros del material se reduce a 9 en casos tridimensionales. REDDY (2004).

#### 3.4. PROPIEDADES MECÁNICAS DE FIBRAS, MATRICES Y LÁMINAS

Todos los laminados estudiados están compuestos por láminas formadas por una matriz blanda con fibras unidireccionales continuas. Las propiedades del laminado dependen fuertemente de las propiedades de las láminas. Por su parte, las propiedades de las láminas están

gobernadas por las propiedades de sus constituyentes, esto es: fibras, matriz e interfaz y la orientación y proporción de fibras en el volumen de la lámina. LUCCIONI (2004).

Las Tablas 1 y 2 presentan datos correspondientes a las propiedades mecánicas básicas de cuatro matrices de resina epoxi y cuatro tipos de fibras de carbono y de las matrices, en sí, son isotropas y presentan mayor resistencia a compresión que a tracción. Las fibras, tanto de vidrio como de carbono, se caracterizan por una mayor resistencia y rigidez en la dirección longitudinal y mayor resistencia a tracción que a compresión. Es importante, entonces, conocer si los modelos son capaces de reproducir el comportamiento de las láminas ya que si no logran hacerlo, difícilmente podrán reproducir el comportamiento del laminado. LUCCIONI (2004).

Tipo de Matriz	3501-6 epoxy	BSL914C epoxy	LY556/HT 907/DY06 3 epoxy	MY750/H Y917/DY0 63 epoxy
Módulo de Young, $E_m$ (GPa)	4.2	4.0	3.35	3.35
Mód. elást. transv., $G_m$ (GPa)	1.567	1.481	1.24	1.24
Coef. de Poisson, $\nu_m$	0.34	0.35	0.35	0.35
Resist. a tracción, $Y_{mt}$ (MPa)	69	75	80	80
Resist. a compres., $Y_{mc}$ (MPa)	250	150	120	120
Resistencia al corte, $S_m$ (MPa)	50	70	----	---
Deform. últ. en trac., $\epsilon_{mt}$ (%)	1.7	4	5	5

Tabla 1: Propiedades mecánicas de la matriz. LUCCIONI (2004).

Tipo de fibra	AS4	T300	E-Glass 21x43 Gevetex	Silenka E-Glass 1200 tex
Módulo de Young long., $E_{f1}$ (GPa)	225	230	80	74
Mód. de Young transv., $E_{f2}$ (GPa)	15	15	80	74
Mód. elástico transv., $G_{f12}$ (GPa)	15	15	33.33	30.8
Coeficiente de Poisson, $\nu_{f12}$	0.2	0.2	0.2	0.2
Mód. elástico transv., $G_{f23}$ (GPa)	7	7	33.33	30.8
Resist. a trac. long., $X_{ft}$ (MPa)	3350	2500	2150	2150
Resist. a comp. long., $X_{fc}$ (MPa)	2500	2000	1450	1450
Deform. últ. trac. long., $\epsilon_{f1T}$ (%)	1.488	1.086	2.687	2.905
Deform. últ. comp. long., $\epsilon_{f1c}$ (%)	1.111	0.869	1.813	1.959

Tabla 2: Propiedades de las fibras. LUCCIONI (2004).

La determinación de las propiedades mecánicas de las fibras no siempre es directa ya que las fibras tienen diámetros muy pequeños y son difíciles de manejar. Generalmente se realizan ensayos de láminas unidireccionales y se emplean relaciones micro-mecánicas para extraer las propiedades de las fibras a partir de los resultados de las láminas. Como consecuencia de ello, es esperable encontrar variabilidad e inexactitud en los resultados. LUCCIONI (2004).

### **3.5. COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRA.**

La estructura de los materiales compuestos reforzados con fibra es heterogénea y anisótropa. La heterogeneidad implica que las propiedades del material son función de punto y la anisotropía implica que además es función de la dirección a la que se refiera. En algunos casos de apilamiento de láminas unidireccionales, se pueden producir situaciones particulares de ortotropía (tres planos principales de simetría del material) o incluso de cuasi-isotropía si por ejemplo las láminas se sitúan con diferentes orientaciones relativas. La complejidad de un análisis heterogéneo ha hecho necesario el realizar algunas hipótesis de comportamiento cuyos buenos resultados justifican su mantenimiento. Estas hipótesis están conectadas con una división clásica, aunque tiene aspectos distorsionantes, realizada en la mayoría de los libros sobre composites, y que considera el análisis de éstos desde dos puntos de vista: Micromecánico y Macromecánico. En el análisis Micromecánico se reconoce la existencia de dos componentes: fibra y matriz aunque sin considerar la estructura interna de cada uno de ellos. PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

El objetivo de este análisis sería, por ejemplo, el de definir las propiedades de una lámina homogénea y ortótropa que se comportara de forma equivalente, desde el punto de vista mecánico, que la lámina real de material compuesto formada por una cierta distribución de fibras embebidas en una matriz. Para efectuar esta equivalencia es preciso realizar algunas hipótesis adicionales que permitan calcular unas propiedades representativas de la lámina a partir de las propiedades de los componentes y del porcentaje de ellos existente en el compuesto. El funcionamiento como material compuesto que se acaba de esbozar incita a profundizar en dos aspectos que, en gran medida, han favorecido el uso extensivo de los materiales compuestos. El primer aspecto es el de las propiedades del material en relación a su peso. Con anterioridad se han visto las excelentes propiedades de rigidez y resistencia de las fibras que se utilizan en los materiales compuestos en relación a los materiales clásicos (acero, aluminios, etc). Resulta mucho más real establecer esta comparación entre el conjunto fibra-matriz y los materiales clásicos. La Tabla 3 representa valores de rigidez y resistencia de varios laminados cruzados (con laminados unidireccionales se obtienen valores aún mayores pero sus aplicaciones son mucho más restringidas). PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

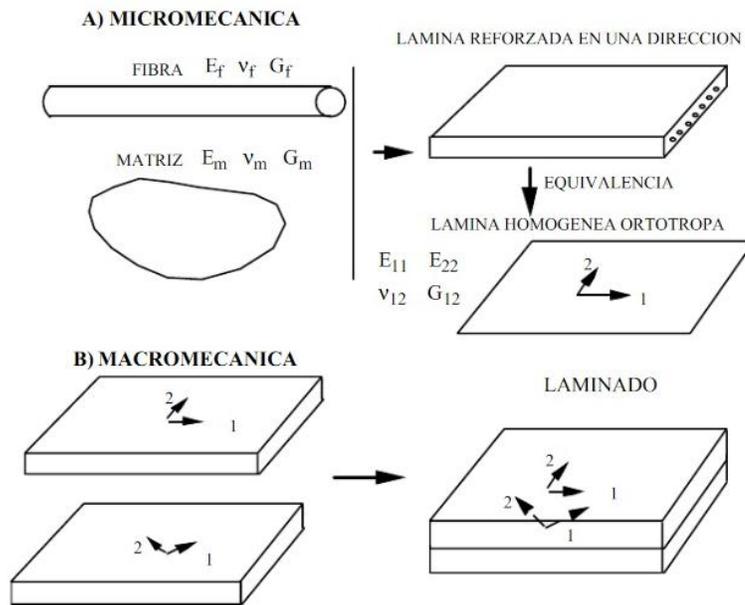


Figura 6. Caracterización analítica de los materiales compuestos. PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

Como puede observarse, los materiales compuestos reforzados con fibra son muy superiores a los convencionales en rigidez y resistencia específica (salvo los de fibra de vidrio y resina poliéster). Por consiguiente la comparación entre los materiales convencionales y los compuestos a efectos de propiedades mecánicas está condicionada por el papel que el peso juegue en el diseño total de la estructura. El otro aspecto de interés es relativo al fácil control que se puede alcanzar sobre la anisotropía de las propiedades finales. De esta forma pueden disponerse "a medida" los refuerzos de fibra para soportar de la forma más óptima posible el estado tensión al que se va a producir. Así, en un depósito cilíndrico cerrado sometido a presión interna, la tensión longitudinal es la mitad de la tensión radial, lo que permite una distribución racional de la fibra en las dos direcciones en que se va a reforzar la matriz. PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

Material	Fracción de volumen de fibra ( $V_f$ ) %	Módulo de Elasticidad (E) (GPa)	Resistencia a la tracción $\sigma_u$ (GPa)	Densidad $\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	Módulo específico (E/ $\rho$ )	Resistencia específica ( $\sigma_u/\rho$ )
Acero		210	0.45-0.83	7.8	26.9	0.058-0.106
Aluminio						
2024-T4		73	0.41	2.7	27.0	0.152
6061-T6		69	0.26	2.7	25.5	0.096
E-Fibra de vidrio-Epoxy	57	21.5	0.57	1.97	10.9	0.26
Kevlar-49-epoxy	60	40	0.65	1.40	29.0	0.46
Fibra de carbono-Epoxy	58	83	0.38	1.54	53.5	0.24
Boro-Epoxy	60	106	0.38	2.00	53.0	0.19

Tabla 3. Tabla de resistencias y rigideces (Tomada de Agarwall y Broutman). PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

### **3.6. APLICACIONES DE LOS MATERIALES COMPUESTOS DE FIBRA.**

El uso de un material en aplicaciones ingenieriles está no tanto condicionado por sus propiedades mecánicas cuanto por el costo real de su fabricación y puesta en servicio. Dado que éste es un aspecto cuyo refinamiento tecnológico está muy condicionado por el tiempo, es lógico que los procedimientos de fabricación de los materiales compuestos (de las fibras aisladamente y del conjunto, adicionalmente) hayan condicionado, por el elevado precio que confieren al producto, el uso extensivo de este tipo de materiales. Solamente en situaciones en que el factor peso juega un papel muy importante (ingeniería del espacio) o el precio no es un obstáculo (aplicaciones deportivas), o el procedimiento de fabricación está bastante afinado (elementos de revolución), es cuando los materiales compuestos han irrumpido en el mercado con carácter extensivo. Adicionalmente a las ventajas o inconvenientes asociados al material existen aspectos educacionales asociados a los ingenieros que deciden el material a utilizar en una determinada aplicación. En modelos de gran producción se ha incluido en parrillas, parachoques, ballestas y bastidores de asiento. Dentro de la industria deportiva se ha aplicado profusamente en raquetas de tenis, cañas de pescar, palos de golf, esquíes, canoas, pértigas, etc., con resultados sorprendentes. Una utilización menos conocida pero muy extensa la han alcanzado los materiales compuestos, debido a sus buenas propiedades aislantes, en la ingeniería eléctrica, fabricándose con ellos paneles, cajas de interruptores, soportes, etc. PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

## 4. CRITERIOS DE FALLA PARA COMPUESTOS LAMINADOS

### 4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a estudiar la falla de los compuestos laminados, veremos que son muchos los factores que intervienen en el proceso de falla, tales como la resistencia de la adhesión de la interfase e interfaz, uniformidad en la resistencia de las fibras, tipo de carga y orientación de las fibras, y en muchos casos es difícil predecir cuales modos de falla ocurrirán o hasta que punto ciertos mecanismos o propiedades afectan el proceso.

Vamos a tratar el análisis de los criterios de falla más aplicados a los materiales compuestos y se analizará la utilización de estas teorías en su diseño, se va a estudiar los diferentes criterios de falla de lámina y procedimientos para el cálculo de laminados. Existen distintos criterios y estos criterios son utilizados para determinar el estado límite de tensión a partir del cual el compuesto sufre una falla. Este capítulo hace referencia a trabajo de los NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009), MOLINIER, ARIAS Y VANEGAS (2004) Y PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

### 4.2. ASPECTOS GENERALES

La falla de un laminado es normalmente un proceso de degradación gradual en el que pueden ocurrir muchos modos de falla. El diseñador debería conocer muy bien cómo y cuándo ocurren estos mecanismos, con el fin de predecir correctamente la falla y diseñar elementos seguros. Sin embargo, es difícil predecir, y aún definir, con precisión la falla de un compuesto laminado, para lo cual es necesario reconocer claramente con qué nivel de degradación (*cuándo*) falla el compuesto, *cómo* se desarrolla el proceso y *dónde* se produce. ARIAS Y VANEGAS (2004).

Uno de los problemas inherentes de los laminados es su diversidad de propiedades. Primero, las fases (fibras y matriz) tienen diferentes propiedades. Segundo, las láminas de un compuesto son anisotrópicas, ya que se generan diferentes propiedades en diferentes direcciones, dependiendo de cómo se construya el compuesto. Por esto, el número de parámetros de resistencia es bastante grande; como ejemplo se tienen la resistencia longitudinal y transversal en tracción y compresión, y la resistencia al esfuerzo cortante en las diferentes direcciones. Adicionalmente, la mayoría de las fibras reales no tienen una resistencia uniforme, es decir, las resistencias de las fibras tienen diferencias significativas entre sí. Esto hace que el proceso de falla sea complejo ya que las fibras no fallan simultáneamente. ARIAS Y VANEGAS (2004).

La ocurrencia de estos modos de falla depende de muchos factores. Algunos modos son provocados por la aparición de otros, y cada uno de éstos puede afectar el desarrollo de los demás. Los modos de falla se presentan también dependiendo del tipo de carga. Por ejemplo, la falla del laminado no es igual en tracción y en compresión. En tracción, las fibras fallan al ser quebradas, lo que puede conllevar a la fractura del laminado, mientras que en compresión la falla puede ocurrir por micropandeo. Debido a esto, la resistencia a la compresión es menor que la de tracción. También, fibras individuales pueden flectarse y producir falla en la matriz (de baja resistencia). La dirección de las cargas con respecto a la de las fibras también afecta el modo de falla. Cuando la carga se aplica en una dirección transversal a las fibras, aparecen esfuerzos cortantes que tienden a generar grietas, separación de las láminas y que hacen que las fibras se

desgarren de la matriz conduciendo a la falla. La resistencia de la lámina está muy influenciada por la orientación de las cargas con respecto a las fibras. ARIAS Y VANEGAS (2004).

Otros problemas que aparecen cuando se trata de predecir la falla de un laminado es que en ésta intervienen aspectos como esfuerzos residuales térmicos (producidos durante el curado de matrices poliméricas), comportamiento no lineal y diferencias entre las propiedades de la lámina antes y después de ser embebida en el laminado. Hay que agregar que no es claro si en el cálculo de la falla es mejor utilizar las propiedades de los constituyentes o las propiedades de la lámina. Si, además, existen concentradores de esfuerzos como grietas y espacios en los constituyentes, la predicción y el proceso de falla se tornan más complejos, porque éstos pueden ser los que inicien la falla. ARIAS Y VANEGAS (2004).

El problema principal en la determinación de la falla final de un laminado es tal vez que ésta no depende sólo de un modo de falla, ni de un número de modos de falla que interactúan, sino que también depende del modo que predomina en el proceso. Éste podría estar dominado por la fibra, por la matriz o por la interfase. ARIAS Y VANEGAS (2004).

Como puede verse, la falla de compuestos de fibra reforzada es muy compleja. Todos los factores mencionados tienen influencia en el comportamiento del compuesto y deberían ser involucrados en la formulación del criterio de resistencia micromecánica. Sin embargo, no es fácil incorporar correctamente todos estos factores en el diseño de laminados. ARIAS Y VANEGAS (2004).

#### **4.3. CRITERIOS DE FALLA**

La falla de un laminado es un proceso gradual. Se espera que falle primero una lámina, con lo que la carga se redistribuye entre las otras láminas. El proceso continúa con las siguientes láminas hasta la destrucción total del laminado. Entonces, el diseño debe concentrarse inicialmente en la resistencia y falla de la primera lámina.

Existen muchos criterios para predecir el daño de *una* lámina. Casi todos éstos asumen homogeneidad y un comportamiento lineal esfuerzo-deformación hasta la falla. Estas teorías son adaptaciones de las existentes para materiales homogéneos e isotrópicos. Algunas de las teorías clásicas que han sido y siguen siendo más utilizadas son la teoría del esfuerzo máximo, la teoría de la deformación máxima, la teoría de falla Tsai-Hill y la teoría de falla Tsai-Wu, las cuales las estudiarán más adelante.

##### **4.3.1. MODOS DE FALLA**

Los materiales compuestos no son homogéneos, son anisótropos y quebradizos. Esto determina los diferentes modos de falla del material, algunos relacionados con la falla de los constituyentes y otros relacionados con la falla de la interfase. MOLINIER (2005)

**4.3.1.1. FALLA DE LAS FIBRAS.** El tipo de falla en las fibras puede clasificarse en fallas relacionadas con cargas de tracción y aquellas fallas relacionadas con cargas de compresión. Una característica de la fibra es que no suele mostrar deformación plástica, estando su falla relacionada con un

fenómeno de redistribución de esfuerzos a las fibras vecinas. Esta redistribución puede causar una nueva ruptura de la fibra. En el caso de una carga a compresión, el micro pandeo progresivo de las fibras tiene lugar hasta que las fibras se rompen. MOLINIER (2005)

**4.3.1.2. FALLA DE LA MATRIZ.** En este caso, la microfisuración es el principal modo de falla. Esto equivale a grietas de la matriz paralelas a la dirección de la fibra sobre el espesor completo de la lámina y especialmente para aquellas láminas en las que el refuerzo no está en la misma dirección de la carga aplicada. Estas grietas aparecerían debido a los esfuerzos en ambos sentidos, tracción o compresión, y esfuerzo cortante. Por la presencia de estas grietas una lámina pierde sus propiedades mecánicas en la dirección transversal. MOLINIER (2005)

**4.3.1.3. INTERFASE FIBRA-MATRIZ.** El modo de falla común considerado es el llamado *debonding*. Esto equivale a una pérdida de adhesión y un deslizamiento relativo entre la fibra y la matriz debido a las diferencias en los esfuerzos cortantes de deformación en la interfase fibra-matriz. Esto produce una pérdida de adhesión y un deslizamiento con una gran pérdida de energía de fricción. Si las propiedades en la interfase entre la fibra y la matriz se pierden, la transmisión de carga desde la matriz a las fibras no se efectúa correctamente con una pérdida de características del compuesto. MOLINIER (2005)

**4.3.1.4. INTERFASE LÁMINA-LÁMINA.** El modo de falla que puede aparecer es la delaminación. Esto equivale a una pérdida de adhesión entre las láminas, por lo tanto una pérdida de la correcta distribución de cargas entre ellas. MOLINIER (2005).

#### **4.3.2. CRITERIOS ASOCIADOS A LOS MODOS DE FALLA**

Los criterios polinomiales si bien son capaces de predecir cómo será la falla de la lámina el inconveniente que tienen es que no identifican el modo de falla o el componente que falla. Muchas de las formulaciones de los criterios de falla, que sí tienen en cuenta la falta de isotropía, no tienen en cuenta el carácter heterogéneo de los compuestos y su influencia en la falla. Este es el caso de los criterios polinomiales. MOLINIER (2005).

Para solucionar esto se han desarrollado diversos criterios asociados a los distintos modos de falla. Estos tienen en cuenta el tipo de falla. En ellos se trata separadamente la falla de la fibra y de la matriz y se tiene en cuenta como sucede. Los criterios más sencillos son el de máxima tensión y el de máxima deformación. Estos criterios presentan la limitación de que no permiten una relación entre la tensión normal y cortante. No suele dar resultados precisos si se aplica a estados de carga distintos al uniaxial. MOLINIER (2005).

**4.3.2.1. CRITERIO DE LA MÁXIMA TENSIÓN.** Considera que el material falla cuando el mismo supera una cierta tensión límite en una zona determinada. Este método tiene el inconveniente que al manejar las tensiones en forma separada no permite observar la interacción entre las tensiones en distintas direcciones. Es el criterio más sencillo y al suponer que no existe interacción entre los diferentes mecanismos de fractura tiende a sobreestimar la carga de rotura. MOLINIER(2005).

Este criterio se basa en suponer que la lámina no rompe si las tensiones dentro de la lámina, expresadas en unos ejes que coincidan con la dirección de las fibras, son menores que las

resistencias respectivas obtenidas de un ensayos de carga uniaxiales y de cizalladura pura. Para fijar ideas supóngase el estado tensional representado en la figura 7 en el que, además, se han dibujado las fibras. Si  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  fueran tensiones de tracción,

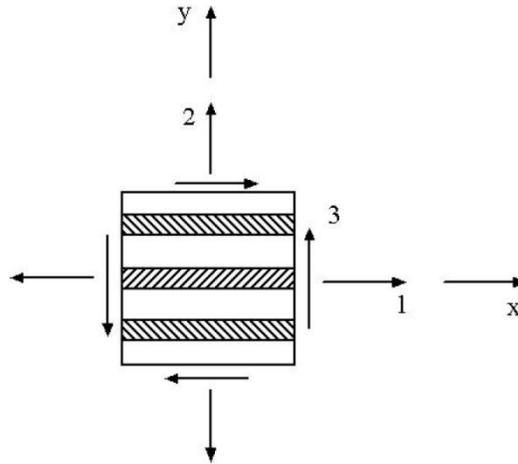


Figura 7. Fibras sometidas a tracción. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

la lámina no rompería mientras se verificase:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &< X_t \\ \sigma_2 &< Y_t \\ |\tau_{\text{máx}}| &< S \end{aligned}$$

y si las tensiones actuantes fueran de compresión (negativas) la condición sería:

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &> X_c \\ |\sigma_2| &> Y_c \end{aligned}$$

Podemos combinar las dos ecuaciones anteriores en una sola:

$$\begin{aligned} -X_c &< \sigma_1 < X_t \\ -Y_c &> \sigma_2 > Y_t \end{aligned}$$

manteniéndose la relación existente para la tensión tangencial. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

Si no se verificase alguna de las inecuaciones anteriores la lámina rompería. Como se observa no existe ninguna interacción entre los posibles modos de fallo; es decir, si  $\sigma_1$  superara el valor  $X_t$  la lámina rompe independientemente de los valores alcanzados por las otras tensiones siempre que éstas, a su vez, no superen sus respectivos valores de rotura.

Si la lámina se encontrara cargada en una dirección que no coincidiese con la dirección de las fibras en la lámina es necesario expresar el estado tensional en ejes locales. Para el caso de un estado de tracción uniaxial el criterio de rotura anterior podría expresarse del siguiente modo:

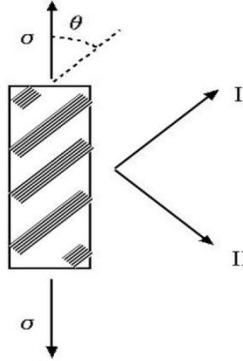


Figura 8. Estado de tracción uniaxial (NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009)).

$$\sigma_1 = \sigma \cos^2 \theta = \sigma < \frac{X_t}{\cos^2 \theta} \quad (1)$$

$$\sigma_2 = \sigma \sin^2 \theta = \sigma < \frac{Y_t}{\sin^2 \theta} \quad (2)$$

$$\tau_{12} = -\sigma \sin \theta \cos \theta = \sigma < \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \quad (3)$$

NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

**4.3.2.2. CRITERIO DE LA MÁXIMA DEFORMACIÓN.** Considera que el material falla cuando el mismo supera una cierta deformación límite en una zona determinada. No se considera la interacción entre las deformaciones combinadas sobre la lámina analizada. El criterio de falla por deformación se puede considerar en tres condiciones de falla correspondientes con la deformación máxima en la dirección de la fibra, en la dirección transversal o de la matriz y para deformación al corte. MOLINIER

Según este criterio, las deformaciones longitudinales y de corte en el interior de la lámina no deben superar unos determinados valores. Si llamamos:

$X_{\varepsilon} (X_{\varepsilon}^t)$  = deformación longitudinal a tracción (o compresión) máxima en la dirección 1.

$Y_{\varepsilon} (Y_{\varepsilon}^t)$  = deformación longitudinal a tracción (o compresión) máxima en la dirección 2.

$S_{\varepsilon}$  = deformación de corte máxima en el plano 1 – 2

Las condiciones para que la lámina no se rompa son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &< X_{\varepsilon}^t \\ \varepsilon_2 &< Y_{\varepsilon}^t \\ |v_{\text{máx}}| &< S_{\varepsilon} \end{aligned}$$

siempre que las deformaciones  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  fueran de tracción (positivas). Si estas deformaciones fueran de compresión (negativas) el criterio sería:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &> X_{\varepsilon_c} \\ \varepsilon_2 &> Y_{\varepsilon_c}\end{aligned}$$

manteniéndose el correspondiente a la deformación angular. Para determinar la tensión de rotura, aplicando este criterio, pueden presentarse dos casos: en el primero, la tensión actuante sobre la lámina lo hace en la dirección de las fibras,

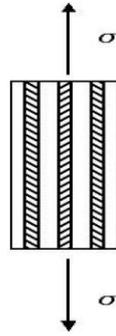


Figura 9. Tensión en dirección de las fibras (NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

En este primer caso el estado de deformaciones es:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1}$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{21} \frac{\sigma}{E_1}$$

$$\gamma = 0$$

Por tanto:

$$\frac{\sigma}{E_1} < X_{\varepsilon_t}$$

$$Y_{\varepsilon_c} < -\nu_{21} \frac{\sigma}{E_1}$$

La tensión deberá ser menor que:

$$\sigma < E_1 X_{\varepsilon_t}$$

$$\sigma < \frac{E_1 Y_{\varepsilon_c}}{\nu_{21}}$$

y, en el segundo, lo hace oblicuamente a la dirección de aquellas, resultando

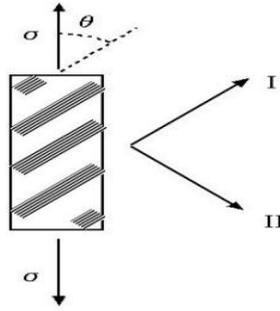


Figura 10. Estado de tracción uniaxial. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\sigma_1 = \sigma \cos^2 \theta \quad \sigma_2 = \sigma \sin^2 \theta \quad \tau_{\text{máx}} = -\sigma \sin \theta \cos \theta$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2) = \frac{1}{E_1} (\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta) \sigma$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1) = \frac{1}{E_2} (\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta) \sigma$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\tau_{\text{máx}}}{G_{12}} = -\frac{1}{G_{12}} (\sin \theta \cos \theta) \sigma$$

Estas últimas expresiones proporcionan el valor de las deformaciones longitudinales y de corte en función de la tensión aplicada lo que permitiría su comparación con los valores máximos que aquéllas pueden alcanzar.

Por otra parte, si se admitiera un comportamiento elástico-lineal hasta rotura de la lámina, se tendría, aplicando la ley de Hooke:

$$X_{\varepsilon t} = \frac{X_t}{E_1} \quad Y_{\varepsilon t} = \frac{Y_t}{E_2} \quad S_{\varepsilon} = \frac{S_c}{G_{12}}$$

$$X_{\varepsilon c} = \frac{X_c}{E_1} \quad Y_{\varepsilon c} = \frac{Y_c}{E_2}$$

Por lo que el criterio de rotura equivalente expresado en tensiones pasaría a ser:

$$\sigma < \frac{X}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} \quad (4)$$

$$\sigma < \frac{Y}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta} \quad (5)$$

$$\sigma < \frac{S}{\cos \theta \sin \theta} \quad (6)$$

En este criterio, a diferencia de lo que sucede con el de tensión máxima, se observa que se debe tener en cuenta el efecto Poisson. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

### 4.3.3 CRITERIOS DE FALLA POLINOMIALES

Estos criterios de falla no distinguen el tipo de falla ni cuál es la fase dominante en la fractura. En consecuencia no pueden tener en cuenta fenómenos que pueden pasar en la interfase entre la matriz y la fibra. En esta categoría de criterios se pueden clasificar las distintas propuestas distinguiendo si el criterio de falla permite o no predecir la falla de la lámina pero no el modo de falla o la fase que rompe. MOLINIER.

Para todos estos criterios de falla es necesario determinar parámetros mediante la experimentación en el laboratorio. Normalmente son necesarias pruebas de tracción y compresión uni-axial en dos direcciones perpendiculares y pruebas de corte. Algunos de estos criterios también necesitan de pruebas de tensión biaxial. En muchos de estos casos estos parámetros son términos que permiten formular una expresión cuadrática polinomial que define los estados de tensiones o deformaciones máximos que permite el material. MOLINIER.

**4.3.3.1. CRITERIO DE TSAI-HILL.** Este es un criterio basado en los criterios de falla polinomiales y es uno de los criterios más usados y con resultados más ajustados. MOLINIER.

Para materiales anisótropos, Hill estableció un criterio de plastificación basado en el de Von Mises cuya validez comprobó para algunos materiales metálicos. Este criterio hace intervenir una serie de parámetros de plastificación F, G, H, L, M y N. Su expresión general es:

$$(G + H)\sigma_x^2 + (F + H)\sigma_y^2 + (F + G)\sigma_z^2 - 2H\sigma_x\sigma_y - 2G\sigma_x\sigma_z - 2F\sigma_y\sigma_z + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1$$

Si se particularizara este criterio para el caso de materiales isotrópicos se comprobaría que es enteramente equivalente al de Von Mises. Si se admitiera un comportamiento del material elástico-lineal hasta rotura, el criterio anterior podría ser considerado como un criterio de rotura en el caso de los materiales compuestos. Tsai relacionó los parámetros F, G, H, L, M y N con las resistencias mecánicas en dirección de las fibras, X, en dirección transversal a ellas, Y, de la resistencia de la lámina en dirección perpendicular a la misma, Z y de la resistencia a cortadura plana, S, e interlaminar  $S_{xy}$  y  $S_{yz}$  Tsai supuso que sobre la lámina actuaban estados de carga simples. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

Si sólo actuara una tracción en dirección de las fibras la rotura se produciría cuando la tensión se hiciera igual a la resistencia X.



Figura 11. Lámina sometida a tracción. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\sigma_x = X$$

Por otro lado aplicando el criterio de rotura particularizado para este estado de carga en concreto:

$$(G + H)\sigma_x^2 = 1$$

Por tanto:

$$(G + H) = \frac{1}{X^2}$$

De igual modo si sólo actuara una tracción en dirección perpendicular a las fibras la rotura se produciría cuando la tensión se hiciera igual a la resistencia Y.



Figura 12. Lamina sometida a tracción en dirección perpendicular a las fibras. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\sigma_y = Y$$

Por otro lado aplicando el criterio de rotura particularizado para este estado de carga en concreto:

$$(F + H)\sigma_y^2 = 1$$

Por tanto:

$$(F + H) = \frac{1}{Y^2}$$

Análogamente sucedería para una carga de tracción actuando en dirección Z:

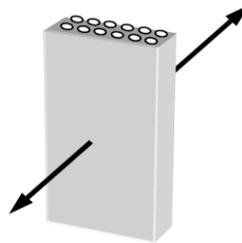


Figura 13. Lamina sometida a carga en dirección Z. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\sigma_z = Z$$

$$(F + G)\sigma_z^2 = 1$$

$$(F + G) = \frac{1}{Z^2}$$

De las ecuaciones anteriores, forman un sistema de ecuaciones con tres incógnitas F, G y H, resolviendo nos queda:

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}$$

$$2G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}$$

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}$$

Considerando ahora únicamente una tensión de cortadura plana  $\tau_{12}$ , la rotura se producirá cuando:

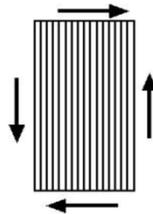


Figura 14. Lamina sometida a esfuerzos cortantes. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\tau_{xy} = S$$

Aplicando el criterio de rotura:

$$2N \tau_{xy}^2 = 1$$

Por tanto:

$$2N = \frac{1}{S^2}$$

Análogamente ocurre para las otras tensiones de cortadura:

$$2L = \frac{1}{S_{yz}^2}$$

$$2M = \frac{1}{S_{xy}^2}$$

El criterio de Tsai-Hill queda finalmente expresado mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{X^2} \sigma_x^2 + \frac{1}{Y^2} \sigma_y^2 + \frac{1}{Z^2} \sigma_z^2 - \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_x \sigma_y - \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \right) \sigma_x \sigma_z - \left( \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \right) \sigma_y \sigma_z + \frac{1}{S_{yz}^2} \tau_{yz}^2 + \frac{1}{S_{xx}^2} \tau_{xz}^2 + \frac{1}{S_{yy}^2} \tau_{xy}^2 = 1$$

Si, como es usual, el problema se limitara al caso de una lámina unidireccional trabajando en tensión plana según el plano 1-2 (las fibras en la dirección 1) y admitiendo que  $Z = Y$ , tendríamos la siguiente expresión del criterio de Tsai-Hill:

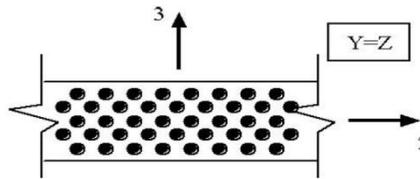


Figura 15. Lámina unidireccional trabajando en tensión plana, suponiendo  $Z = Y$ . NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$

que es la expresión más utilizada para resolver problemas.

Si tuviéramos una sollicitación sobre la lámina como la representada en el croquis siguiente,

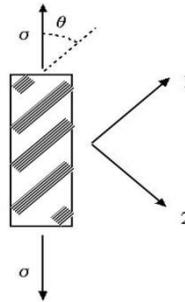


Figura 16. Lámina sometida a tensión uniaxial. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\sigma_1 = \sigma \cos^2 \theta \quad \sigma_2 = \sigma \sin^2 \theta \quad \tau_{12} = -\sigma \cos \theta \sin \theta$$

El criterio de Tsai-Hill se expresaría:

$$\frac{\cos^2 \theta}{X^2} + \left( \frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma^2} \quad (7)$$

NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

**4.3.3.2. CRITERIO DE TSAI-WU.** El criterio de falla polinomial más general es el criterio del tensor polinomial propuesto por Tsai y Wu: La idea de este criterio es generalizar el criterio de Tsai-Hill

introduciendo términos que no aparecen en él. Este criterio, es algo más complicado que el de Tsai-Hill y, empleando una notación tensorial, puede ponerse de la forma siguiente:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j \mid_{ij=1 \text{ a } 6} = 1$$

donde  $F_i$  y  $F_{ij}$  son dos tensores de orden 2 y 4 respectivamente.

Para el caso de una lámina ortótropa trabajando en tensión plana, la expresión anterior quedaría como:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (8)$$

Se ha despreciado la interacción entre las tensiones normales y tangenciales. Los términos lineales resultarán útiles para representar estados sencillos de tracción y compresión.

( $\sigma_i$  = componentes contractadas del tensor de tensiones)

Para determinar los coeficientes que aparecen en el criterio se puede proceder del siguiente modo:

Si realizamos un ensayo de tracción en la dirección de las fibras la rotura de la lámina se producirá cuando:

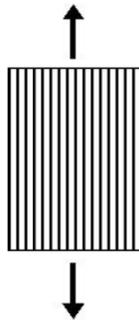


Figura 17. Lámina sometida a tracción en dirección de las fibras. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\sigma_1 = X$$

Aplicando el criterio de Tsai-Wu la rotura se producirá cuando:

$$F_1 \sigma_1 + F_{11} \sigma_1^2 = 1$$

Combinando ambas ecuaciones nos queda:

$$F_1 X + F_{11} X^2 = 1$$

Haciendo un ensayo de compresión la rotura se producirá cuando:

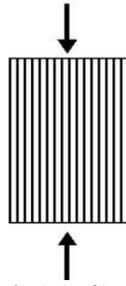


Figura 18. Lámina sometida a compresión en dirección de las fibras. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\sigma_1 = -X'$$

Aplicando el criterio de Tsai-Wu:

$$F_1\sigma_1 + F_1\sigma_1^2 = 1$$

y por tanto:

$$-F_1X' + F_{11}X'^2 = 1$$

Combinando las ecuaciones es posible determinar el valor de los coeficientes  $F_1$  y  $F_{11}$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}$$

$$F_{11} = \frac{-1}{X_t X_c}$$

De manera análoga, realizando los ensayos en dirección 2, se podría demostrar que:

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{22} = \frac{-1}{Y_t Y_c}$$

Realizando ahora un ensayo de cortadura la rotura se produciría cuando:

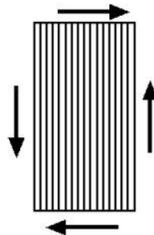


Figura 19. Lámina sometida a esfuerzos cortantes. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

$$\tau_{xy} = S$$

independientemente del signo de dicha tensión. Aplicando el criterio de rotura si la tensión es positiva:

$$F_6\sigma_6 + F_{66}\sigma_6^2 = 1$$

y si es negativa:

$$-F_6\sigma_6 + F_{66}\sigma_6^2 = 1$$

De donde se puede deducir que:

$$F_6 = 0 \text{ y } F_{66} = \frac{1}{S^2}$$

El problema surge con la determinación de la componente  $F_{12}$  ya que no puede ser obtenida de los resultados de un ensayo uniaxial en alguna de las direcciones principales de la lámina ya que es justo el coeficiente que multiplica al producto de las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

Para su determinación supongamos que, a la lámina, se la impone un estado biaxial de tensión:

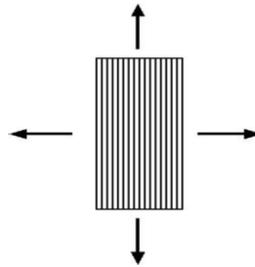


Figura 20. Lámina sometida a tensión biaxial. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

En la rotura:

$$\sigma_1 = \sigma_1^R$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^R$$

Aplicando el criterio de rotura:

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1$$

Despejando  $F_{12}$  de la ecuación anterior y sustituyendo las expresiones ya obtenidas para las otras componentes de este tensor, se obtiene que:

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right]$$

Se deduce, pues, que la componente  $F_{12}$  depende de las resistencias mecánicas de la lámina así como también del valor de la tensión biaxial de rotura,  $\sigma$ , aplicada. No es, por tanto, una propiedad de la lámina sino que es función de las tensiones aplicadas. NAVARRO URGENA y BARBERO POZUELO (2009).

**4.3.3.3. CRITERIOS DE HASHIN.** La idea de partida de Hashin, es que un criterio para predecir el fallo de un material compuesto, ha de basarse necesariamente en los mecanismos de fallo del mismo, en contra posición a los criterios mostrados previamente que surgían como extrapolación de criterios existentes para otros materiales. Bajo esta idea, dos son las propuestas de este autor. Una primera más simple (Hashin-Rotem, 1973) para un estado biaxial de tensiones, y una segunda más elaborada (Hashin, 1980) para un estado tridimensional de tensiones, que al particularizarlo a 2D conduce a una propuesta diferente a la anterior del año 73. Las hipótesis en las que se basan las propuestas originales son las siguientes:

- Consideración separada de los distintos modos de fallo (fibra, matriz, tracción y compresión).
- En el modo de fallo de la matriz se consideran las componentes del vector tensión en el plano de fallo como responsables del mismo.
- La interacción entre las distintas componentes que intervienen en un modo se supone cuadrática. PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

Las expresiones de los criterios para el caso bidimensional de tensiones ( $\sigma_{i3} = 0$ ) se muestran en la siguiente tabla:

Modo de fallo	Hashin-Rotem (73)	Hashin (80)
Fallo de la fibra en tracción (FFT)	$\sigma_{11} = X_t \quad (\sigma_{11}, X_t > 0)$	$\left( \frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 = 1 \quad (\sigma_{11} > 0)$
Fallo de la fibra en compresión (FFC)	$ \sigma_{11}  = X_c \quad (\sigma_{11} < 0, X_c > 0)$	$ \sigma_{11}  = X_c \quad (\sigma_{11} < 0, X_c > 0)$
Fallo de la matriz en tracción (FMT)	$\left( \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 = 1 \quad (\sigma_{22} > 0)$	$\left( \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 = 1 \quad (\sigma_{22} > 0)$
Fallo de la matriz en compresión (FMC)	$\left( \frac{\sigma_{22}}{Y_c} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 = 1 \quad (\sigma_{22} < 0)$	$\left( \frac{\sigma_{22}}{2S_T} \right)^2 + \left[ \left( \frac{Y_c}{2S_T} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_{22}}{Y_c} + \left( \frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 = 1$ $(\sigma_{22} < 0)$

Tabla 4. Expresiones de los criterios de Hashin. PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

El valor  $S_T$ , que aparece en el modo FMC del criterio del 80, representa la resistencia a cizalladura interlaminar, es decir, el valor admisible de la tensión tangencial  $\sigma_{23}$ . En la figura 21 se representan para un elemento de una lámina unidireccional las tensiones  $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{23}$ , y sus correspondientes valores admisibles  $S$  y  $S_T$ . PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

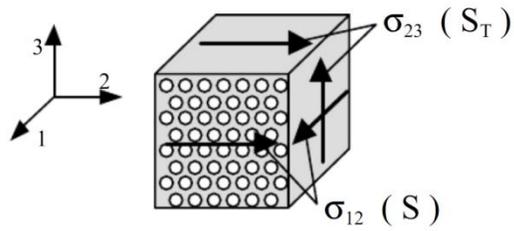


Figura 21. Representación de las tensiones tangenciales  $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{23}$  y de sus valores admisibles  $S$  y  $S_T$  para un elemento de lámina unidireccional. PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

La evolución de los dos criterios mostrados, aunque no haya muchos cambios entre ellos, requiere de algunos comentarios. Conceptualmente ambas propuestas estiman dos mecanismos de fallo de una lámina de material compuesto: fallo de la fibra y fallo de la matriz. Esta propuesta está basada en la observación de la forma de rotura de una lámina unidireccional con un cierto ángulo de orientación de la fibra. PARÍS CARABALLO, CAÑAS DELGADO Y MARÍN (2006).

## 5. CONCENTRADORES DE ESFUERZO EN PLACAS LAMINADAS

En este capítulo se demostrará como se calculan los esfuerzos en placas laminadas con agujeros circulares. Este capítulo hace referencia al trabajo realizado por los señores YASAR KALTAKCI y ARSLAN (2006)

### 5.1. CONCENTRADORES DE TENSIÓN ALREDEDOR DE LOS AGUJEROS

Un agujero circular en una placa puede ser requerido para diversos fines. Si un agujero circular pequeño está hecho en la medio de la placa, la distribución de tensiones alrededor del agujero será cambiado. La distribución de esfuerzo alrededor de un agujero fue estudiada por varios investigadores. Green estudió el problema usando

$$F = F_0 + A_0 \text{Log } r_1 + B_0 \text{Log } r_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_{2n} \cos 2n\theta_1}{(1 + \gamma_1)^{2n} r_1^{2n}} + \frac{B_{2n} \cos 2n\theta_2}{(1 + \gamma_2)^{2n} r_2^{2n}} \right)$$

donde  $F$  es la función de esfuerzo de Airy,  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $A_{2n}$  y  $B_{2n}$  son las constantes relacionadas con las condiciones de contorno.

Para la placa infinita ortotrópico (relación de las dimensiones de la placa con el diámetro del agujero circular superior a 4 con un agujero, como se muestra en la figura 22, cargado en la dirección  $x$  (tensión o compresión) de la tensión circunferencial alrededor del agujero

$$\sigma_{\theta}^i = \frac{(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)(1+\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2-2\cos 2\theta)}{(1+\gamma_1^2-2\gamma_1\cos 2\theta)(1+\gamma_2^2-2\gamma_2\cos 2\theta)} \sigma_x^i \quad (9)$$

donde  $\sigma_x^i$  es el esfuerzo aplicado en la dirección  $x$ ,  $\theta$  es el ángulo que muestra la dirección en la que se calcula el valor de la tensión y es medido desde el eje  $x$  en sentido anti horario, y  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  están definidos como

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - v_{21}\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - v_{21}\right)^2 - \frac{E_2}{E_1}\right]}} - 1}{\sqrt{\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - v_{21}\right) + \sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - v_{21}\right)^2 - \frac{E_2}{E_1}\right]}} + 1}$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - v_{21}\right) - \sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - v_{21}\right)^2 - \frac{E_2}{E_1}\right]}} - 1}{\sqrt{\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - v_{21}\right) - \sqrt{\left[\left(\frac{E_2}{2G_{12}} - v_{21}\right)^2 - \frac{E_2}{E_1}\right]}} + 1}$$

Uso del esfuerzo circunferencial, los esfuerzos en la dirección  $x$ , y dirección  $y$  y el esfuerzo cortante alrededor del agujero es calculado por

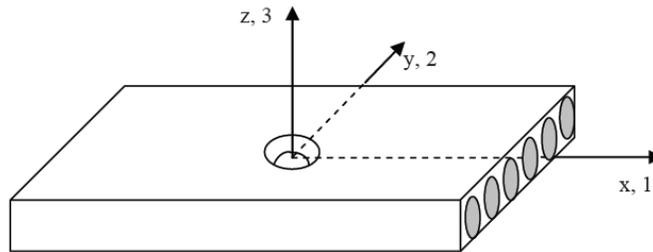
$$\begin{aligned}\sigma_{\theta x}^i &= \sigma_{\theta}^i \sin^2 \theta \\ \sigma_{\theta y}^i &= \sigma_{\theta}^i \cos^2 \theta \\ \sigma_{\theta xy}^i &= -\sigma_{\theta}^i \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

respectivamente. Un caso especial de este problema es que la carga en la placa sea transversal a las fibras (Fig. 22a). El esfuerzo circunferencial alrededor del agujero puede calcularse utilizando la anterior ecuación. Sin embargo, en este caso, las propiedades de los materiales en las fibras y las instrucciones de la matriz deben ser intercambiadas. Este proceso fue simplificado por Kaltakci, quien intercambi6  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en sus posiciones y signos. Por lo tanto, el esfuerzo circunferencial alrededor del agujero es

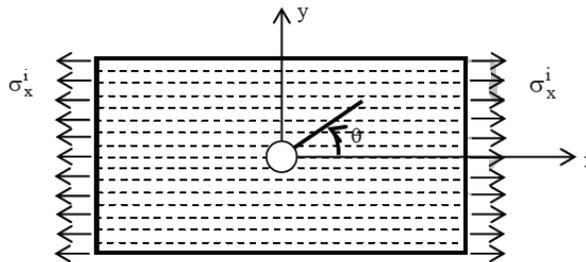
$$\sigma_{\theta}^i = \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 - 2\cos 2\theta)}{(1 + \gamma_1^2 + 2\gamma_1 \cos 2\theta)(1 + \gamma_2^2 + 2\gamma_2 \cos 2\theta)} \sigma_x^i$$

Bajo carga de corte, las placas con fibra de reforzadas, muestran diferentes características de concentración de esfuerzos que cuando están cargados axialmente. En este caso de  $\alpha=0^\circ$  (es decir, las fibras son paralelas al eje  $x$ ), el componente circunferencial de esfuerzo normal alrededor al corte circular de una placa sometida a un esfuerzo cortante uniforme (Fig. 22b), se da en función de  $\theta$

$$\sigma_{\theta}^i = \frac{4(\gamma_1\gamma_2 - 1)\sin 2\theta}{(1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos 2\theta)(1 + \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \cos 2\theta)} S^i$$



(a)



(b)

Figura 22. Placas compuestas unidireccionales

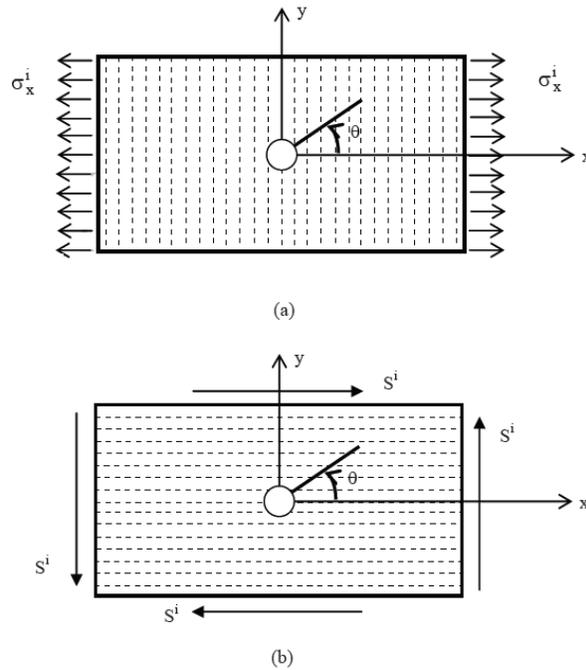


Figura 23. Lámina anisótropica sometida a cargas transversales y de corte

Cuando las fibras de una placa compuesta están orientados a un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$  (Figura 23), la solución del problema es más complicado que los anteriores. Las tensiones, ocupado por una capa debido a la carga de la placa compuesto laminado, debe ser resuelto en sus componentes asociados a los ejes de simetría de la materia por las reglas de equilibrio estático. Sin embargo, cuando las fibras son transversales a la carga, la tensión circunferencial los valores deben ser calculados de acuerdo con el caso, en que la carga y las fibras son paralelas. La tensión circunferencial de la placa de material compuesto con las fibras orientadas a un ángulo  $\alpha$ , sometido a cargas generales (Figura 24) puede calcularse como:

$$\sigma_{\theta}^i = \frac{1}{(1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos 2(\theta - \alpha))(1 + \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \cos 2(\theta - \alpha))} \left[ (1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)(1 + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 - 2\cos 2(\theta - \alpha)) [0.5\sigma_x^i(1 + \cos 2(\theta - \alpha)) + 0.5\sigma_y^i(1 - \cos 2(\theta - \alpha)) + \sigma_{xy}^i \sin 2(\theta - \alpha)] \right. \\ \left. + [(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 + 2\cos 2(\theta - \alpha)) [0.5\sigma_x^i(1 - \cos 2(\theta - \alpha)) + 0.5\sigma_y^i(1 + \cos 2(\theta - \alpha)) + -\sigma_{xy}^i \sin 2(\theta - \alpha)]] \right. \\ \left. + 4(\gamma_1\gamma_2 - 1) \sin 2(\theta - \alpha) [0.5(\sigma_x^i - \sigma_y^i) \sin 2(\theta - \alpha) - \sigma_{xy}^i \cos 2(\theta - \alpha)] \right]$$

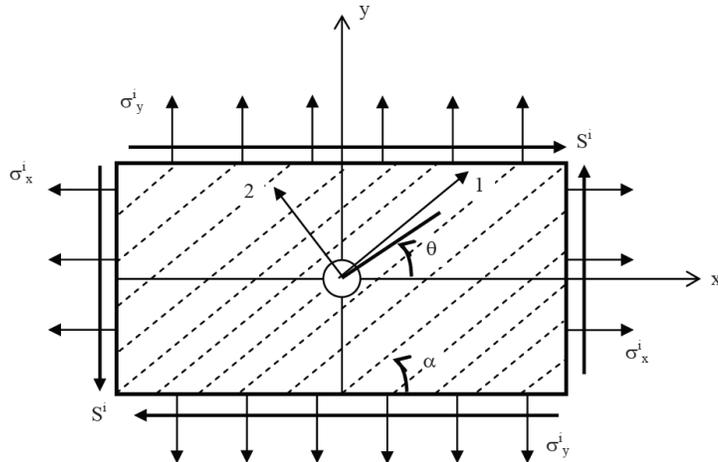


Figura 24. Lámina con fibras orientadas arbitrariamente con sujeta a cargas generales

## 5.2. FALLA EN FIBRAS REFORZADAS DE CAPAS ANISOTRÓPICAS.

La predicción de la fractura de los componentes estructurales generalmente se logra mediante la comparación de las presiones o tensiones a los límites materiales de final. Dado un estado de tensión en dos dimensiones, el cálculo de las magnitudes de las tensiones principales es suficiente para predecir el fall de materiales isotrópicos. La determinación de la falla de un material compuesto laminado presenta varias dificultades. La delaminación, la variación de las tensiones en la dirección del espesor y la concentración de esfuerzo son algunas de esas dificultades. La predicción de fallos basado en el primer error, comúnmente se conoce como el criterio de fallo de primera capa. Para un tridimensional criterio de la tensión del estado de Hill está dada por

$$F(\sigma_x - \sigma_y)^2 + G(\sigma_x - \sigma_z)^2 + H(\sigma_z - \sigma_x)^2 + L(\sigma_{yz})^2 + M(\sigma_{xz})^2 + N(\sigma_{xy})^2 < 1$$

La ecuación se reduce a y da como resultado criterio de Tsai-Hill

$$\frac{1}{X_t^2} (\sigma_{\theta f}^i)^2 + \frac{1}{Y_t^2} (\sigma_{\theta m}^i)^2 - \frac{1}{X_t^2} \sigma_{\theta f}^i \sigma_{\theta m}^i + \frac{1}{G^2} (\sigma_{\theta fm}^i)^2 < 1$$

donde  $G$  es el módulo de corte,  $X_t$  y  $Y_t$  son la resistencia a la tracción del material en la direcciones de las fibras y transversal, respectivamente.  $\sigma_{\theta fm}^i$  es el esfuerzo cortante,  $\sigma_{\theta f}^i$  y  $\sigma_{\theta m}^i$  son las tensiones en las direcciones de fibra y transversal alrededor del agujero, respectivamente. Esta ecuación se conoce como criterio de rotura de Tsai-Hill. El esfuerzo circunferencial, se puede descomponer en componentes paralelos a la dirección de las fibras y transversal, según

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta f}^i &= \sigma_{\theta}^i \sin^2(\theta - \alpha) \\ \sigma_{\theta m}^i &= \sigma_{\theta}^i \cos^2(\theta - \alpha) \\ \sigma_{\theta mf}^i &= -\sigma_{\theta}^i \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

Se reemplaza esta relación y el criterio de falla de Tsai-Hill se reduce a:

$$\frac{(\sigma_{\theta}^i \sin^2(\theta - \alpha))^2}{X_t^2} + \frac{(\sigma_{\theta}^i \cos^2(\theta - \alpha))^2}{Y_t^2} - \frac{(\sigma_{\theta}^i)^2 \sin^2(\theta - \alpha) \cos^2(\theta - \alpha)}{X_t^2} + \frac{(-\sigma_{\theta}^i \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha))^2}{G^2} < 1$$

## 6. DESARROLLO Y RESULTADOS

### 6.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se muestran 2 ejemplos de placas específicamente ortotrópicas, con agujeros circulares sometidas a esfuerzos y veremos el comportamiento fibra-matriz y las predicciones según los criterios de falla estudiados anteriormente.

### 6.2 EJEMPLO 1

Una placa de fibra de grafito con un agujero circular en el centro es sometida a una carga axial de 100 MPa. Calcular el esfuerzo tangencial y aplicar los criterios de falla. Los siguientes, son valores hipotéticos. Las ecuaciones utilizadas en el programa son: la 7, 8, 9 y las reflejadas en la tabla 4.

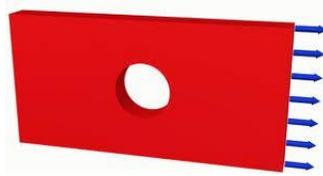


Figura 25. Lamina sometida a tracción.

La placa tiene las siguientes propiedades:

$$E_1 = 131000MPa$$

$$E_2 = 10300MPa$$

$$G_{12} = 6900MPa$$

$$\nu_{12} = 0.220$$

Las resistencias de la lámina son:

$$Y_c = 200MPa$$

$$Y_t = 50MPa$$

$$X_c = 1250MPa$$

$$X_t = 1500MPa$$

$$S = 100MPa$$

$$S_T = 100MPa$$

Las resistencias de la matriz son:

$$Y_{cm} = 140MPa$$

$$Y_{tm} = 60MPa$$

Las resistencias de la fibra son:

$$X_{cf} = 3200MPa$$

$$X_{tf} = 3200MPa$$

A continuación se muestra el desarrollo del análisis de la placa por MATLAB.  
 Se realizó el análisis del esfuerzo tangencial y de los criterios de Tsai-Wu, Tsai-Hill, Hashin Rotem (para fibra y matriz) y Hashim (para fibra y matriz)

```

clear all; close all

%propiedades de la lámina
E1 = 131000;
E2 = 10300;
G12 = 6900;
V12 = 0.220;
%resistencia de la lámina
YC = 200;
YT = 50;
XC = 1250;
XT = 1500;
S = 100;
ST = 100;
%resistencia de la matriz
YCM = 140;
YTM = 60;
%resistencia de la fibra
XCF = 320;
XTF = 320;

%esfuerzo axial tracción aplicado
SIGXX = 10; % [MPa]

%cálculo del esfuerzo tangencial
TH = [0:pi/64:2*pi];
k1 = E2/(2*G12)-V12;
k2 = E2/E1;
GAMMA1 = (sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))+1);
GAMMA2 = (sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))+1);
STH1 = (1+GAMMA1)*(1+GAMMA2)*(1+GAMMA1+GAMMA2-GAMMA1*GAMMA2-2*cos(2*TH));
STH2 = (1+GAMMA1^2-2*GAMMA1*cos(2*TH)).*(1+GAMMA2^2-2*GAMMA2*cos(2*TH));
STH = STH1./STH2*SIGXX;

%transformación del esfuerzo tangencial a coordenadas cartesianas
STXX = STH.*(cos(TH)).^2;
STYY = STH.*(sin(TH)).^2;
STXY = STH.*sin(TH).*cos(TH);

%evaluación de los criterios de falla
for i = 1 : length(TH)
    %criterio de Hashin-Rotem
    %falla de la matriz
    Y = YTM*(STYY(i)>0.0) + YCM*(STYY(i)<=0.0);
    HS73M(i) = (STYY(i)/Y)^2 + (STXY(i)/S)^2;
    %falla de la fibra
    X = XTF*(STXX(i)>0.0) + XCF*(STXX(i)<=0.0);
    HS73F(i) = abs(STXX(i))/X;
end

```

```

%criterio de Hashin
%falla matriz
HSM(i) = ((STYY(i)/YTM)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)>0.0) +
((STYY(i)/(2*ST)).^2 + (YCM/(2*ST)).^2-1)*STYY(i)/YCM +
(STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)<=0.0);
%falla de la fibra
HSF(i) = ((STXX(i)/XTF)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STXX(i)>0.0) +
(STXX(i)/XCF)*(STXX(i)<=0.0);

%criterio de Tsai-Hill
TSHILL(i) = (STXX(i)/XT)^2 + (STYY(i)/YT)^2 + (STXY(i)/S)^2 -
STXX(i)*STYY(i)/XT^2 ;

%criterio de Tsai-Wu
f1 = (1/XT - 1/XC); f2 = 1/YT - 1/YC; f12 = -
1/2*sqrt(1/(XT*XC*YT*YC));
f11 = 1/(XT*XC); f22 = 1/(YT*YC); f66 = 1/S^2;
TSWU(i) = f1*STXX(i) + f2*STYY(i) + 2*f12*STXX(i)*STYY(i) +
f11*STXX(i)^2 + f22*STYY(i)^2 + f66*STXY(i)^2;
end

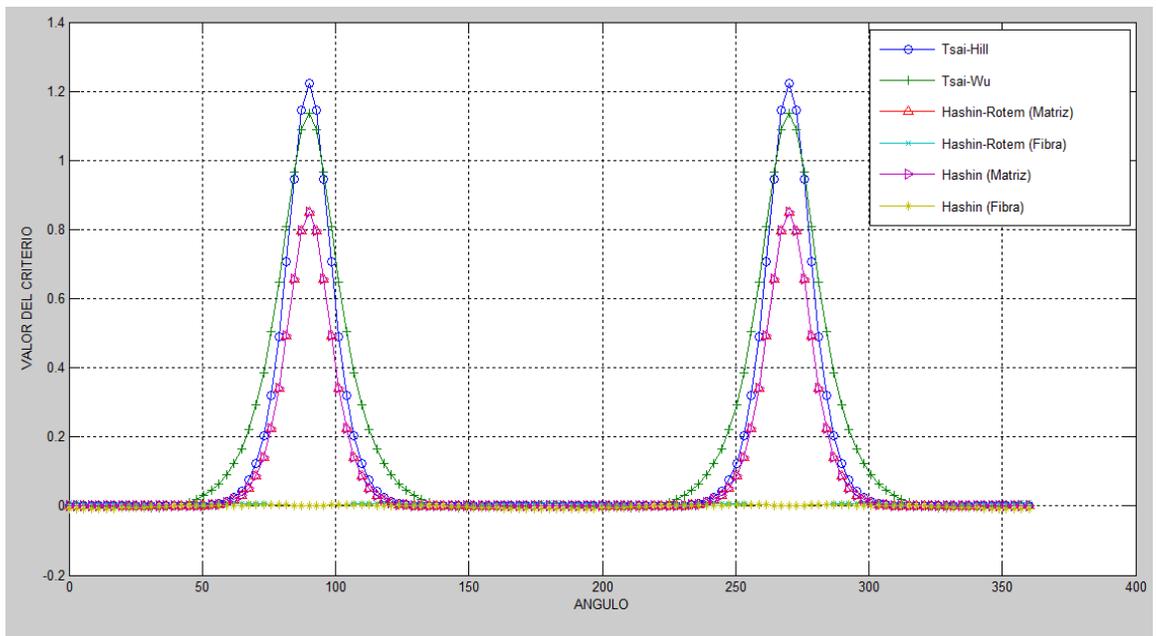
TH = TH*180/(pi);

figure(1)
plot(TH, STH, '>-', TH, STXX, 'x-', TH, STYY, 'o-', TH, STXY, '^--')
xlabel('ANGULO')
ylabel('ESFUERZO')
legend('S_{theta}', 'S_{xx}', 'S_{yy}', 'S_{xy}')
grid on

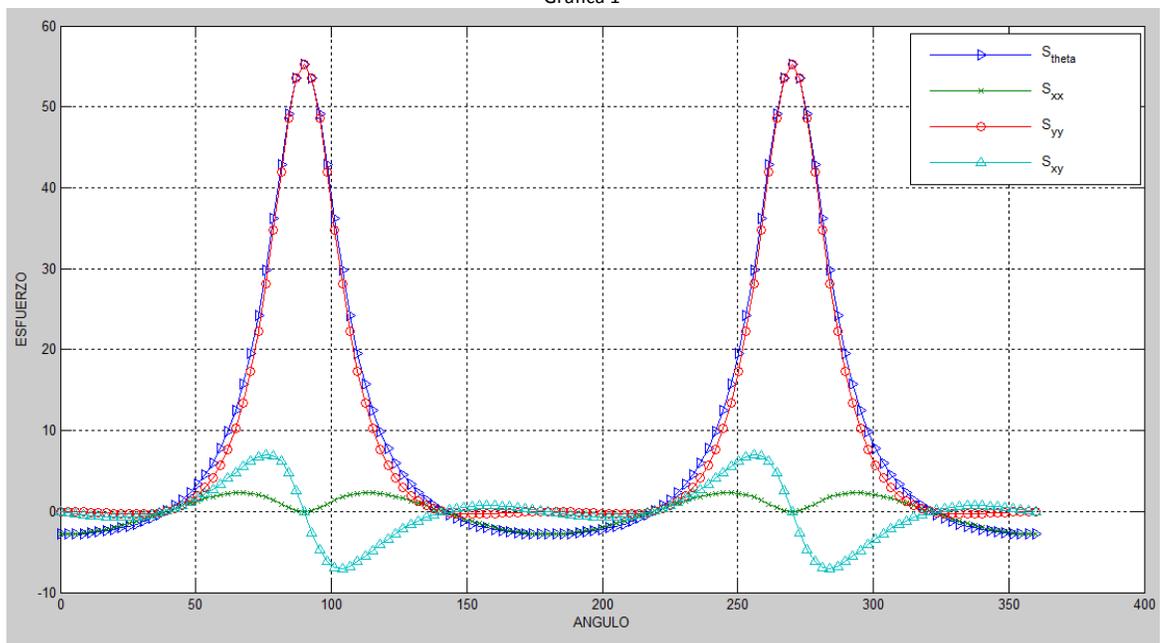
figure(2)
plot(TH, TSHILL, '-o', TH, TSWU, '+-', TH, HS73M, '^--', TH, HS73F, 'x-', TH, HSM, '>-
', TH, HSF, '*-')

xlabel('ANGULO')
ylabel('VALOR DEL CRITERIO')
legend('Tsai-Hill', 'Tsai-Wu', 'Hashin-Rotem (Matriz)', 'Hashin-Rotem
(Fibra)', 'Hashin (Matriz)', 'Hashin (Fibra)')
grid on

```



Gráfica 1



Gráfica 2

### 6.3. EJEMPLO 2

Una placa compuesta por 4 capas tipos de fibra, con agujero circular en el centro es sometida a una carga axial de 100 MPa. Calcular el esfuerzo tangencial y aplicar los criterios de falla. Los 4 tipos de fibra son: AS4, T300, E-Glass Gevetex y Silenka E-Glass 1200 tex. Las ecuaciones utilizadas en el programa son: la 7, 8, 9 y las reflejadas en la tabla 4.

Solución

Se analiza las 4 tipos de fibra por separado, suponiendo que la carga es aplicada uniformemente a la placa, es decir, dividiendo la carga entre 4. La carga por cada laminado es de 25MPa

La resistencia de la placa será la misma para los 4 casos a analizar.

La placa tiene las siguientes propiedades, los siguientes, son valores hipotéticos y algunos fueron tomados de la tabla 2 de este trabajo:

Las resistencias de la lámina son:

$$Y_c = 200MPa$$

$$Y_t = 50MPa$$

$$X_c = 1250MPa$$

$$X_t = 1500MPa$$

$$S = 100MPa$$

$$S_T = 100MPa$$

Las resistencias de la matriz son:

$$Y_{cm} = 150MPa$$

$$Y_{tm} = 75MPa$$

Las resistencias de la fibra son:

$$X_{cf} = 3200MPa$$

$$X_{tf} = 3200MPa$$

Y cada laminado tiene las siguientes propiedades:

Capa uno:

$$E_1 = 225000MPa$$

$$E_2 = 15000MPa$$

$$G_{12} = 15000MPa$$

$$\nu_{12} = 0.2$$

Las resistencias de la fibra son:

$$X_{cf} = 2500MPa$$
$$X_{tf} = 3350MPa$$

Capa dos:

$$E_1 = 230000MPa$$
$$E_2 = 15000MPa$$
$$G_{12} = 15000MPa$$
$$\nu_{12} = 0.2$$

Las resistencias de la fibra son:

$$X_{cf} = 2000MPa$$
$$X_{tf} = 2500MPa$$

Capa tres:

$$E_1 = 80000MPa$$
$$E_2 = 80000MPa$$
$$G_{12} = 33330MPa$$
$$\nu_{12} = 0.2$$

Las resistencias de la fibra son:

$$X_{cf} = 1450MPa$$
$$X_{tf} = 2150MPa$$

Capa cuatro:

$$E_1 = 74000MPa$$
$$E_2 = 7400MPa$$
$$G_{12} = 33800MPa$$
$$\nu_{12} = 0.2$$

Las resistencias de la fibra son:

$$X_{cf} = 1450MPa$$
$$X_{tf} = 2150MPa$$

A continuación se muestra el desarrollo del análisis de la placa por MATLAB.

Para la capa primera capa:

```
clear all; close all

%propiedades de la lamina
```

```

E1 = 225000;
E2 = 15000;
G12 = 15000;
V12 = 0.20;
%resistencia de la lamina
YC = 200;
YT = 500;
XC = 1250;
XT = 1500;
S = 100;
ST = 100;
%resistencia de la matriz
YCM = 150;
YTM = 75;
%resistencia de la fibra
XCF = 2500;
XTF = 3350;

%esfuerzo axial traccion aplicado
SIGXX = 25;  %[MPa]

%calculo del esfuerzo tangencial
TH = [0:pi/64:2*pi];
k1 = E2/(2*G12)-V12;
k2 = E2/E1;
GAMMA1 = (sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))+1);
GAMMA2 = (sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))+1);
STH1 = (1+GAMMA1)*(1+GAMMA2)*(1+GAMMA1+GAMMA2-GAMMA1*GAMMA2-2*cos(2*TH));
STH2 = (1+GAMMA1^2-2*GAMMA1*cos(2*TH)).*(1+GAMMA2^2-2*GAMMA2*cos(2*TH));
STH = STH1./STH2*SIGXX;

%transformacion del esfuerzo tangencial a coordenadas cartesianas
STXX = STH.*(cos(TH)).^2;
STYY = STH.*(sin(TH)).^2;
STXY = STH.*sin(TH).*cos(TH);

%evaluacion de los criterios de falla
for i = 1 : length(TH)
    %criterio de Hashin-Rotem
    %falla de la matriz
    Y = YTM*(STYY(i)>0.0) + YCM*(STYY(i)<=0.0);
    HS73M(i) = (STYY(i)/Y)^2 + (STXY(i)/S)^2;
    %falla de la fibra
    X = XTF*(STXX(i)>0.0) + XCF*(STXX(i)<=0.0);
    HS73F(i) = abs(STXX(i))/X;

    %criterio de Hashin
    %falla matriz
    HSM(i) = ((STYY(i)/YTM)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)>0.0) +
    ((STYY(i)/(2*ST)).^2 + ((YCM/(2*ST)).^2-1)*STYY(i)/YCM +
    (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)<=0.0);
    %falla de la fibra

```

```

        HSF(i) = ((STXX(i)/XTF)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STXX(i)>0.0) +
(STXX(i)/XCF)*(STXX(i)<=0.0);

        %criterio de Tsai-Hill
        TSHILL(i) = (STXX(i)/XT)^2 + (STYY(i)/YT)^2 + (STXY(i)/S)^2 -
STXX(i)*STYY(i)/XT^2 ;

        %criterio de Tsai-Wu
        f1 = (1/XT - 1/XC); f2 = 1/YT - 1/YC; f12 = -
1/2*sqrt(1/(XT*XC*YT*YC));
        f11 = 1/(XT*XC); f22 = 1/(YT*YC); f66 = 1/S^2;
        TSWU(i) = f1*STXX(i) + f2*STYY(i) + 2*f12*STXX(i)*STYY(i) +
f11*STXX(i)^2 + f22*STYY(i)^2 + f66*STXY(i)^2;
end

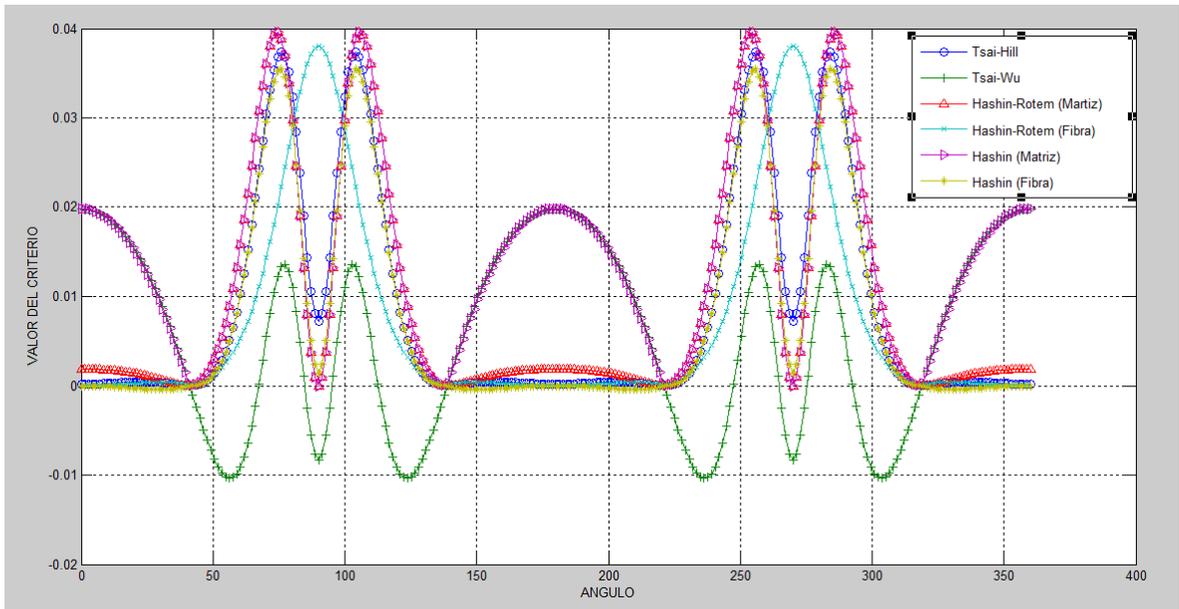
TH = TH*180/(pi);

figure(4)
plot(TH,STH,'>-',TH,STXX,'x-',TH,STYY,'o-',TH,STXY,'^-' )
xlabel('ANGULO')
ylabel('ESFUERZO')
legend('S_{theta}','S_{xx}','S_{yy}','S_{xy}')
grid on

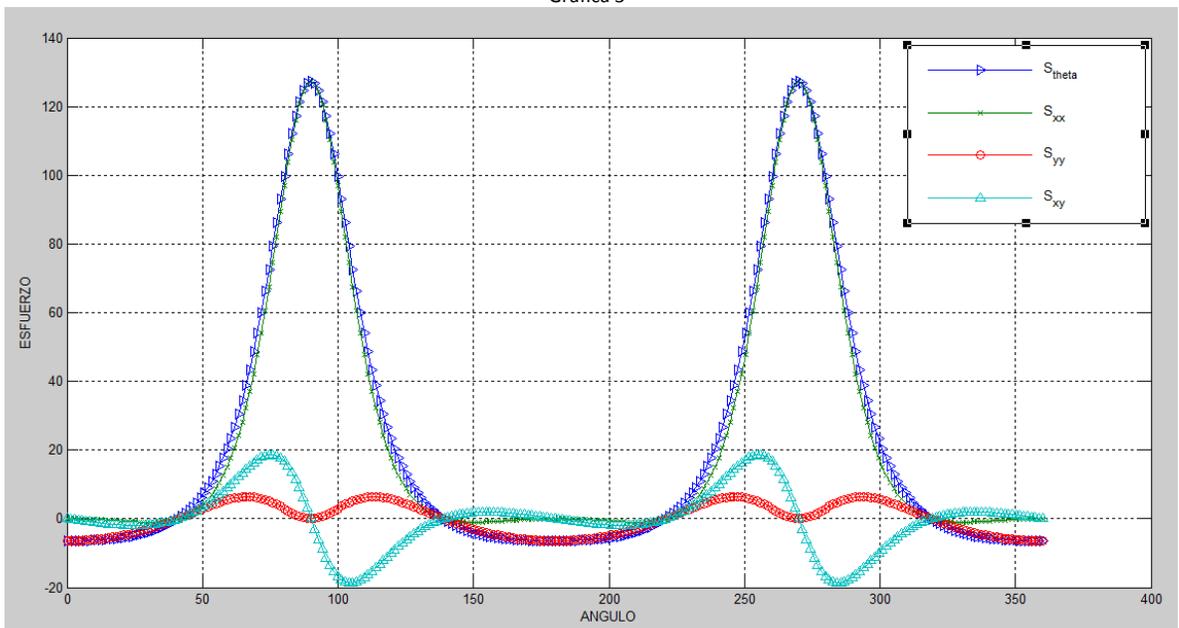
figure(3)
plot(TH,TSHILL,'-o',TH,TSWU,'+-',TH,HS73M,'^-',TH,HS73F,'x-',TH,HSM,'>-'
',TH,HSF,'*-')

xlabel('ANGULO')
ylabel('VALOR DEL CRITERIO')
legend('Tsai-Hill','Tsai-Wu','Hashin-Rotem (Matriz)','Hashin-Rotem
(Fibra)','Hashin (Matriz)','Hashin (Fibra)')
grid on

```



Gráfica 3



Gráfica 4

Para la capa dos:

```

%propiedades de la lamina
E1 = 230000;
E2 = 15000;
G12 = 15000;
V12 = 0.20;
%resistencia de la lamina
YC = 200;
YT = 50;
XC = 1250;

```

```

XT = 1500;
S = 100;
ST = 100;
%resistencia de la matriz
YCM = 150;
YTM = 75;
%resistencia de la fibra
XCF = 2000;
XTF = 2500;

%esfuerzo axial traccion aplicado
SIGXX = 25;  %[MPa]

%calculo del esfuerzo tangencial
TH = [0:pi/64:2*pi];
k1 = E2/(2*G12)-V12;
k2 = E2/E1;
GAMMA1 = (sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))+1);
GAMMA2 = (sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))+1);
STH1 = (1+GAMMA1)*(1+GAMMA2)*(1+GAMMA1+GAMMA2-GAMMA1*GAMMA2-2*cos(2*TH));
STH2 = (1+GAMMA1^2-2*GAMMA1*cos(2*TH)).*(1+GAMMA2^2-2*GAMMA2*cos(2*TH));
STH = STH1./STH2*SIGXX;

%transformacion del esfuerzo tangencial a coordenadas cartesianas
STXX = STH.*(cos(TH)).^2;
STYY = STH.*(sin(TH)).^2;
STXY = STH.*sin(TH).*cos(TH);

%evaluacion de los criterios de falla
for i = 1 : length(TH)
    %criterio de Hashin-Rotem
    %falla de la matriz
    Y = YTM*(STYY(i)>0.0) + YCM*(STYY(i)<=0.0);
    HS73M(i) = (STYY(i)/Y)^2 + (STXY(i)/S)^2;
    %falla de la fibra
    X = XTF*(STXX(i)>0.0) + XCF*(STXX(i)<=0.0);
    HS73F(i) = abs(STXX(i))/X;

    %criterio de Hashin
    %falla matriz
    HSM(i) = ((STYY(i)/YTM)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)>0.0) +
    ((STYY(i)/(2*ST)).^2 + ((YCM/(2*ST)).^2-1)*STYY(i)/YCM +
    (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)<=0.0);
    %falla de la fibra
    HSF(i) = ((STXX(i)/XTF)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STXX(i)>0.0) +
    (STXX(i)/XCF)*(STXX(i)<=0.0);

    %criterio de Tsai-Hill
    TSHILL(i) = (STXX(i)/XT)^2 + (STYY(i)/YT)^2 + (STXY(i)/S)^2 -
    STXX(i)*STYY(i)/XT^2 ;

    %criterio de Tsai-Wu

```

```

    f1 = (1/XT - 1/XC); f2 = 1/YT - 1/YC; f12 = -
1/2*sqrt(1/(XT*XC*YT*YC));
    f11 = 1/(XT*XC); f22 = 1/(YT*YC); f66 = 1/S^2;
    TSWU(i) = f1*STXX(i) + f2*STYY(i) + 2*f12*STXX(i)*STYY(i) +
f11*STXX(i)^2 + f22*STYY(i)^2 + f66*STXY(i)^2;
end

```

```

TH = TH*180/(pi);

```

```

figure(6)
plot(TH,STH,'>-',TH,STXX,'x-',TH,STYY,'o-',TH,STXY,'^-' )
xlabel('ANGULO')
ylabel('ESFUERZO')
legend('S_{theta}','S_{xx}','S_{yy}','S_{xy}')
grid on

```

```

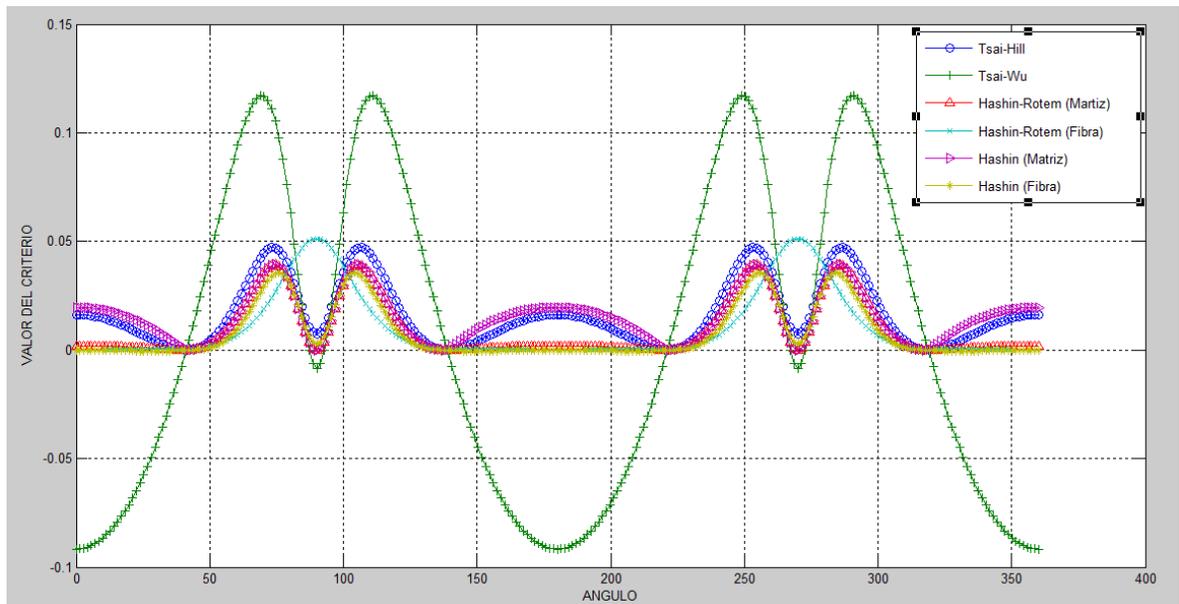
figure(5)
plot(TH,TSHILL,'-o',TH,TSWU,'+-',TH,HS73M,'^-',TH,HS73F,'x-',TH,HSM,'>-
',TH,HSF,'*-' )

```

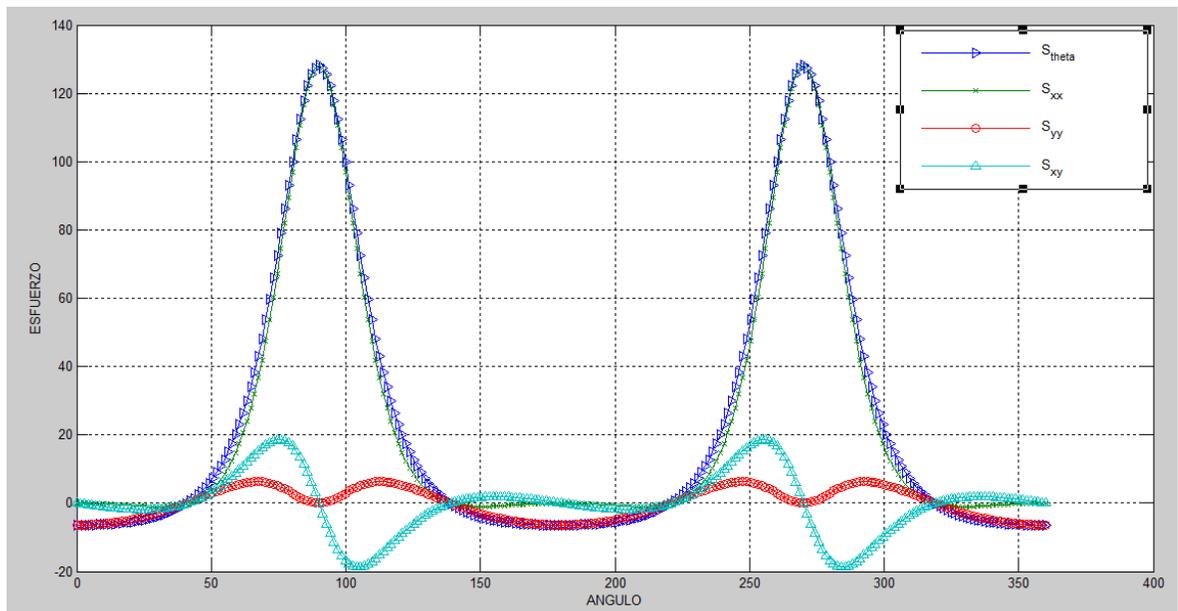
```

xlabel('ANGULO')
ylabel('VALOR DEL CRITERIO')
legend('Tsai-Hill','Tsai-Wu','Hashin-Rotem (Matriz)','Hashin-Rotem
(Fibra)','Hashin (Matriz)','Hashin (Fibra)')
grid on

```



Gráfica 5



Gráfica 6

Para la capa tres:

```
clear all; close all
```

```
%propiedades de la lamina
```

```
E1 = 80000;
E2 = 80000;
G12 = 33330;
V12 = 0.20;
```

```
%resistencia de la lamina
```

```
YC = 200;
YT = 50;
XC = 1250;
XT = 1500;
S = 100;
ST = 100;
```

```
%resistencia de la matriz
```

```
YCM = 150;
YTM = 75;
```

```
%resistencia de la fibra
```

```
XCF = 1450;
XTF = 2150;
```

```
%esfuerzo axial traccion aplicado
```

```
SIGXX = 25; % [MPa]
```

```
%calculo del esfuerzo tangencial
```

```
TH = [0:pi/64:2*pi];
```

```
k1 = E2/(2*G12)-V12;
```

```
k2 = E2/E1;
```

```
GAMMA1 = (sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))+1);
```

```

GAMMA2 = (sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))+1);
STH1 = (1+GAMMA1)*(1+GAMMA2)*(1+GAMMA1+GAMMA2-GAMMA1*GAMMA2-2*cos(2*TH));
STH2 = (1+GAMMA1^2-2*GAMMA1*cos(2*TH)).*(1+GAMMA2^2-2*GAMMA2*cos(2*TH));
STH = STH1./STH2*SIGXX;

%transformacion del esfuerzo tangencial a coordenadas cartesianas
STXX = STH.*(cos(TH)).^2;
STYY = STH.*(sin(TH)).^2;
STXY = STH.*sin(TH).*cos(TH);

%evaluacion de los criterios de falla
for i = 1 : length(TH)
    %criterio de Hashin-Rotem
    %falla de la matriz
    Y = YTM*(STYY(i)>0.0) + YCM*(STYY(i)<=0.0);
    HS73M(i) = (STYY(i)/Y)^2 + (STXY(i)/S)^2;
    %falla de la fibra
    X = XTF*(STXX(i)>0.0) + XCF*(STXX(i)<=0.0);
    HS73F(i) = abs(STXX(i))/X;

    %criterio de Hashin
    %falla matriz
    HSM(i) = ((STYY(i)/YTM)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)>0.0) +
    ((STYY(i)/(2*ST)).^2 + ((YCM/(2*ST)).^2-1)*STYY(i)/YCM +
    (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)<=0.0);
    %falla de la fibra
    HSF(i) = ((STXX(i)/XTF)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STXX(i)>0.0) +
    (STXX(i)/XCF)*(STXX(i)<=0.0);

    %criterio de Tsai-Hill
    TSHILL(i) = (STXX(i)/XT)^2 + (STYY(i)/YT)^2 + (STXY(i)/S)^2 -
    STXX(i)*STYY(i)/XT^2 ;

    %criterio de Tsai-Wu
    f1 = (1/XT - 1/XC); f2 = 1/YT - 1/YC; f12 = -
    1/2*sqrt(1/(XT*XC*YT*YC));
    f11 = 1/(XT*XC); f22 = 1/(YT*YC); f66 = 1/S^2;
    TSWU(i) = f1*STXX(i) + f2*STYY(i) + 2*f12*STXX(i)*STYY(i) +
    f11*STXX(i)^2 + f22*STYY(i)^2 + f66*STXY(i)^2;
end

TH = TH*180/(pi);

figure(8)
plot(TH,STH,'>-',TH,STXX,'x-',TH,STYY,'o-',TH,STXY,'^-' )
xlabel('ANGULO')
ylabel('ESFUERZO')
legend('S_{theta}','S_{xx}','S_{yy}','S_{xy}')
grid on

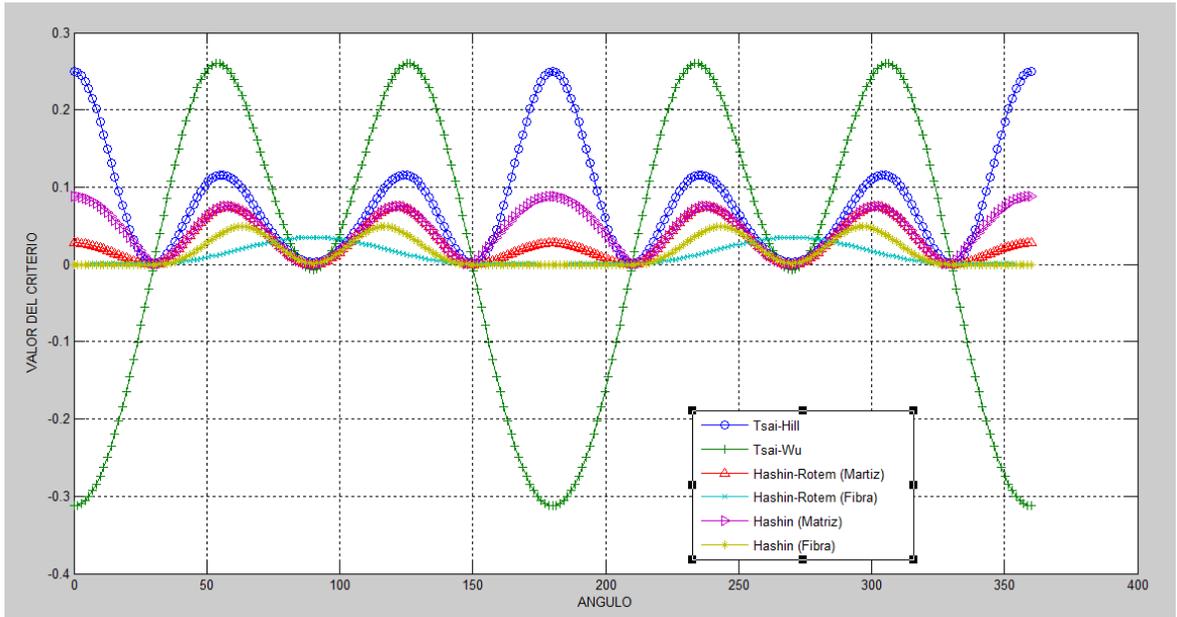
figure(7)
plot(TH,TSHILL,'-o',TH,TSWU,'+-',TH,HS73M,'^-',TH,HS73F,'x-',TH,HSM,'>-
',TH,HSF,'*-' )

```

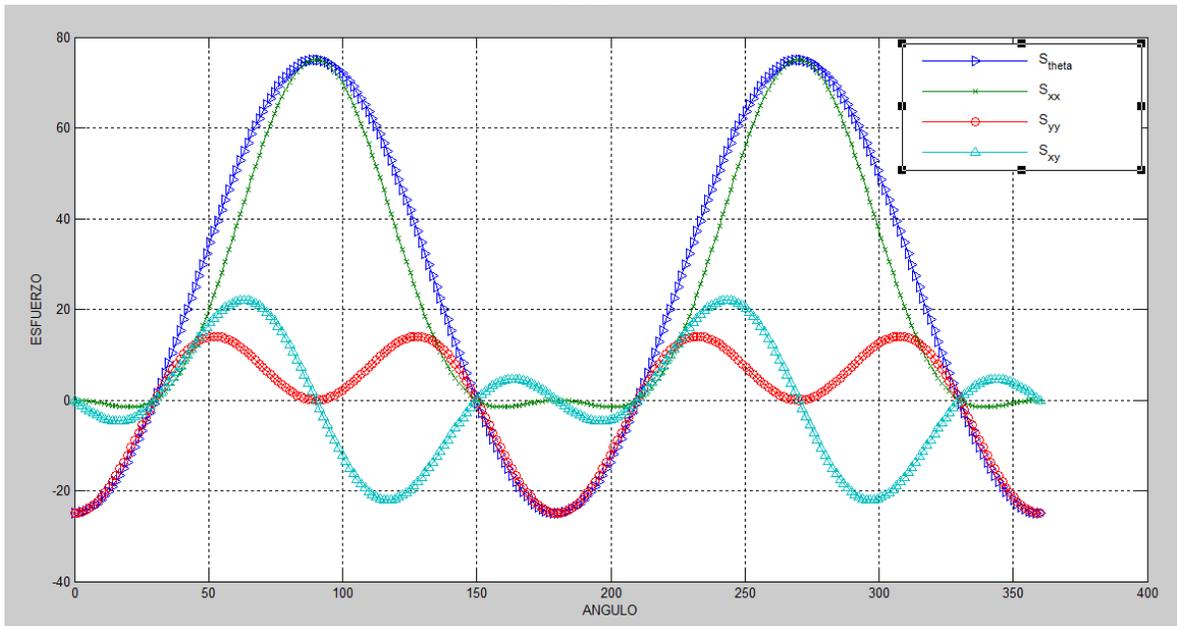
```

xlabel('ANGULO')
ylabel('VALOR DEL CRITERIO')
legend('Tsai-Hill','Tsai-Wu','Hashin-Rotem (Matriz)','Hashin-Rotem (Fibra)','Hashin (Matriz)','Hashin (Fibra)')
grid on

```



Gráfica 7



Gráfica 8

Para la capa cuatro:

```

clear all; close all

%propiedades de la lamina
E1 = 74000;
E2 = 74000;
G12 = 33800;
V12 = 0.20;
%resistencia de la lamina
YC = 200;
YT = 50;
XC = 1250;
XT = 1500;
S = 100;
ST = 100;
%resistencia de la matriz
YCM = 150;
YTM = 75;
%resistencia de la fibra
XCF = 1450;
XTF = 2150;

%esfuerzo axial traccion aplicado
SIGXX = 25;  %[MPa]

%calculo del esfuerzo tangencial
TH = [0:pi/64:2*pi];
k1 = E2/(2*G12)-V12;
k2 = E2/E1;
GAMMA1 = (sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1+sqrt(k1^2-k2))+1);
GAMMA2 = (sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))-1)/(sqrt(k1-sqrt(k1^2-k2))+1);
STH1 = (1+GAMMA1)*(1+GAMMA2)*(1+GAMMA1+GAMMA2-GAMMA1*GAMMA2-2*cos(2*TH));
STH2 = (1+GAMMA1^2-2*GAMMA1*cos(2*TH)).*(1+GAMMA2^2-2*GAMMA2*cos(2*TH));
STH = STH1./STH2*SIGXX;

%transformacion del esfuerzo tangencial a coordenadas cartesianas
STXX = STH.*(cos(TH)).^2;
STYY = STH.*(sin(TH)).^2;
STXY = STH.*sin(TH).*cos(TH);

%evaluacion de los criterios de falla
for i = 1 : length(TH)
    %criterio de Hashin-Rotem
    %falla de la matriz
    Y = YTM*(STYY(i)>0.0) + YCM*(STYY(i)<=0.0);
    HS73M(i) = (STYY(i)/Y)^2 + (STXY(i)/S)^2;
    %falla de la fibra
    X = XTF*(STXX(i)>0.0) + XCF*(STXX(i)<=0.0);
    HS73F(i) = abs(STXX(i))/X;

    %criterio de Hashin
    %falla matriz

```

```

        HSM(i) = ((STYY(i)/YTM)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)>0.0) +
        ((STYY(i)/(2*ST)).^2 + (YCM/(2*ST)).^2-1)*STYY(i)/YCM +
        (STXY(i)/S)^2)*(STYY(i)<=0.0);
        %falla de la fibra
        HSF(i) = ((STXX(i)/XTF)^2 + (STXY(i)/S)^2)*(STXX(i)>0.0) +
        (STXX(i)/XCF)*(STXX(i)<=0.0);

        %criterio de Tsai-Hill
        TSHILL(i) = (STXX(i)/XT)^2 + (STYY(i)/YT)^2 + (STXY(i)/S)^2 -
        STXX(i)*STYY(i)/XT^2 ;

        %criterio de Tsai-Wu
        f1 = (1/XT - 1/XC); f2 = 1/YT - 1/YC; f12 = -
        1/2*sqrt(1/(XT*XC*YT*YC));
        f11 = 1/(XT*XC); f22 = 1/(YT*YC); f66 = 1/S^2;
        TSWU(i) = f1*STXX(i) + f2*STYY(i) + 2*f12*STXX(i)*STYY(i) +
        f11*STXX(i)^2 + f22*STYY(i)^2 + f66*STXY(i)^2;
    end

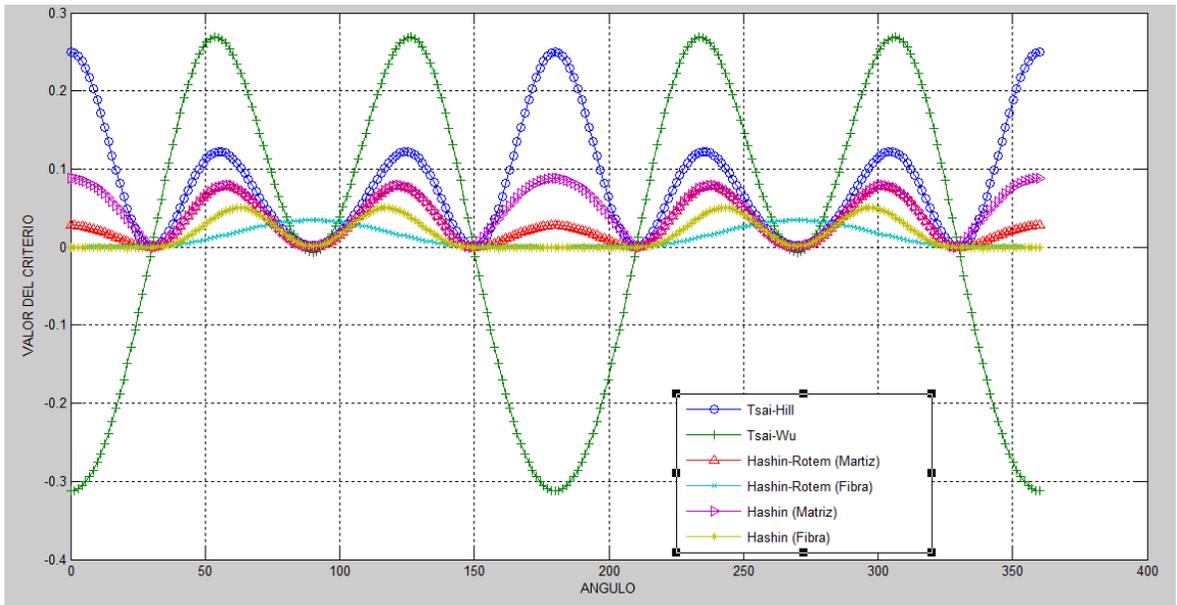
    TH = TH*180/(pi);

    figure(10)
    plot(TH,STH,'>- ',TH,STXX,'x-',TH,STYY,'o-',TH,STXY,'^ -')
    xlabel('ANGULO')
    ylabel('ESFUERZO')
    legend('S_{theta}','S_{xx}','S_{yy}','S_{xy}')
    grid on

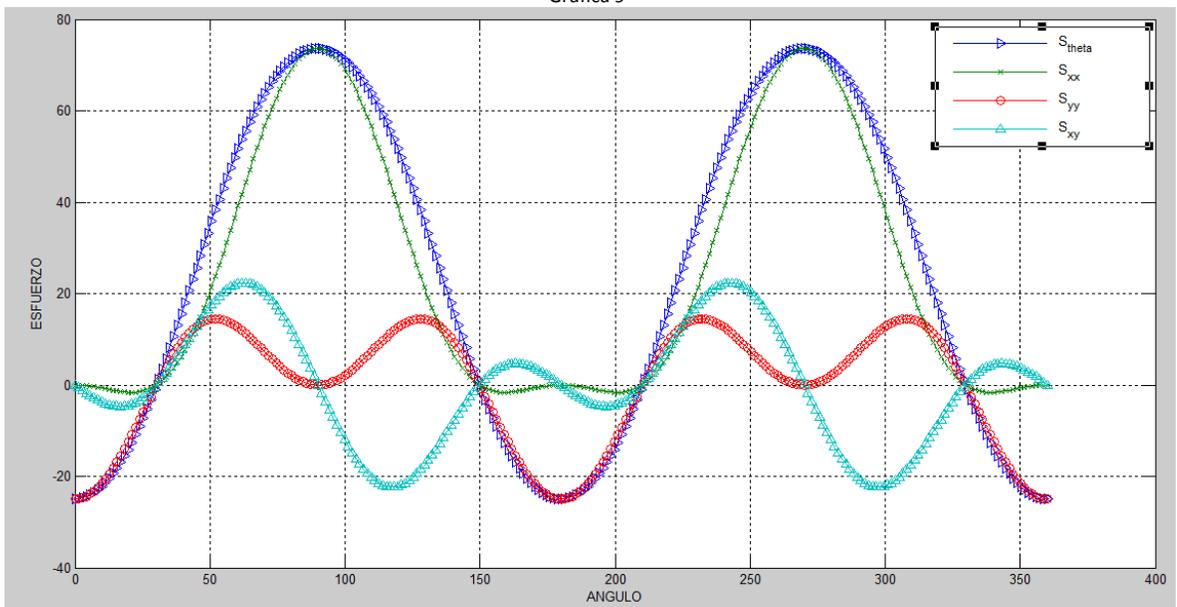
    figure(9)
    plot(TH,TSHILL,'-o ',TH,TSWU,'+- ',TH,HS73M,'^ - ',TH,HS73F,'x-',TH,HSM,'>-
    ',TH,HSF,'*- ')

    xlabel('ANGULO')
    ylabel('VALOR DEL CRITERIO')
    legend('Tsai-Hill','Tsai-Wu','Hashin-Rotem (Matriz)','Hashin-Rotem
    (Fibra)','Hashin (Matriz)','Hashin (Fibra)')
    grid on

```



Gráfica 9



Gráfica 10

## CONCLUSIONES

El trabajo sobre “algoritmo para calcular esfuerzos y criterios de falla de Tsai-hill, Tsai-wu, Hashim y Hashim-Rotem en agujeros circulares en laminados de fibra de vidrio” tiene como objetivo principal, Desarrollar una herramienta en MATLAB, para calcular los criterios de falla y los esfuerzos en agujeros circulares concéntricos en láminas de fibra de vidrio. Las conclusiones obtenidas a lo largo de la investigación son:

La creación de esta herramienta es útil y fácil para hacer este tipo análisis, ya que este simplifica y agiliza los cálculos. Cualquier persona que tenga la necesidad de hacer este tipo de análisis, para láminas unidireccionales, puede utilizar este algoritmo de MATLAB®. Para hacer este cálculo se deben tener los módulos de elasticidad, el coeficiente de Poisson, el esfuerzo axial al que va a ser sometido, la resistencia de la fibra y de la matriz, a tracción y compresión.

En el caso analizado con una sola lámina se ve como esta es sometida a esfuerzo de tracción y según los criterios de Tsai-Hill y Tsai-Wu la lámina sufre una rotura, debido a que los resultados de los análisis de dichos criterios sobrepasan 1.

El caso analizado de una placa con cuatro láminas diferentes, la fuerza es distribuida entre todas las capas y esta no llega al punto de rotura. De aquí podemos concluir que el número de láminas utilizadas es directamente proporcional con la resistencia de la placa, es decir, entre más láminas de material que utilicemos, más resistente es la placa.

En los casos analizados se observa que el comportamiento del agujero de una placa sometida a esfuerzo de tracción es prácticamente igual, debido a que la máxima concentración de esfuerzos son en los lados donde los ángulos son  $90^\circ$  y  $270^\circ$ , concluyendo que el agujero tiende a deformarse creando una figura de un ocho.

La versatilidad del programa es notoria porque permite calcular fallas a través de variaciones en los valores de la carga. Además, también muestra dichas cálculos de acuerdo al tipo de material utilizado en cada lámina de la placa.

Una vez obtenidos estos resultados podemos utilizar estos laminados en las diferentes aplicaciones en ingeniería, como por ejemplo en la industria naval o aérea ya que son materiales de una alta resistencia a tracción.

## 7. RECOMENDACIONES

En el futuro se debe llevar a cabo un análisis con placas laminadas con agujero circular reales para comprobar la confiabilidad esta herramienta utilizada en esta investigación.

- Desarrollar ensayos mecánicos para determinar las cargas de falla experimentales.

De manera muy cuidadosa y elaborar diferentes procedimientos experimentales con el fin de crear ensayos y utilizar MATLAB®.

- Desarrollar un estudio comparativo entre los resultados arrojados por MATLAB® y los resultados experimentales.

Realizar paso a paso una comparación fundamentada en toda la teoría plasmada en este trabajo, para finalmente hacer la respectiva comparación con todas las partes experimentales.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] ARIAS, L.S., VANEGAS, L., *Falla de los materiales compuestos laminados*. Scientia Et Technica, Vol. 10. pp 113-118. Universidad Tecnológica de Pereira. Colombia. Año 2004. <http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/7215/4251> (Acceso 18 de febrero de 2013).
- [2] HULL, Derek, *Materiales Compuestos*, Editorial Reverté S.A. Barcelona España. Año Reimpresion 2003. <http://booklens.com/derek-hull/materiales-compuestos> (Acceso 19 de febrero 2013).
- [3] PARÍS CARABALLO, Federico, CAÑAS DELGADO, José y MARÍN VALLEJO, Juan Carlos. *Introducción al análisis y diseño con materiales compuestos*. Sevilla, España Año 2006.
- [4] REDDY, J.N. *Mechanics of laminated composites plates and shell. Theory and Analysis*, second edition. pp 104-109. Año 2004.
- [5] LUCCIONI, Bibiana M. (2004). *Modelo para compuestos laminados reforzados con fibras*. Pp 116- 177. Instituto de estructuras, Universidad Nacional de Tucumán. Bariloche, Argentina. <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/245/234>. (Acceso 19 de febrero 2013).
- [6] NAVARRO URGENA, Carlos y BARBERO POZUELO, Enrique. (2009) *Teorías sobre la resistencia a la rotura de una lámina* (online). Universidad Carlos III de Madrid. <http://ocw.uc3m.es/mecanica-de-medios-continuos-y-teoria-de-estructuras/elasticidad-resistencia-de-materialesii/mecanica-de-medios-continuos-y-teoria-de-estructuras/elasticidad-resistencia-de-materialesii/material-de-clase-1/materiales-compuestos/capitulo5.pdf/view>. (Acceso 19 de febrero 2013).
- [7] MOLINIER, M., *Análisis de los criterios de falla aplicados a los laminados compuestos*. Serie de monografías en Mecánica de Laminados Compuestos. Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Año 2005 <http://materias.fi.uba.ar/mlc/monografias/MLC-MOLINIER.pdf> (Acceso 18 de febrero de 2013).
- [8] YASAR KALTAKCI, M and ARSLAN, H.M. (2006) *Stress concentrations of symmetrically laminated composite plates containing circular holes*. [http://www.sid.ir/en/VEWSSID/J\\_pdf/8542006B402.pdf](http://www.sid.ir/en/VEWSSID/J_pdf/8542006B402.pdf) (Acceso 18 de febrero 2013).
- [9] Z. Hashin. *J. Appl. Mech.* 47 (1980)
- [10] A. Puck, H. Schurmann. *Comp. Sci. Tech.* 58 (1998)
- [11] A. Puck, H. schurmann. *Comp. Sci. Tech.* 62 (2002)
- [12] E. Totry, C. González, J. Llorca. *Comp. Sci. Tech.*
- [13] A. L. Gurson. *J. Eng. Mater. Tech.* 99 (1977)

- [14] L. P. Canal, J. Segurado, J. LLorca. *Anales de Mecánica de la Fractura* 24 (2007)
- [15] Z. P. Bazant. *J. Eng Mech. Div.* 102 (1976) 331-344.
- [16] L. P. Canal, J. Segurado, J. LLorca. *Materiales Compuestos* 07 (2007)
- [17] J. Segurado, J. LLorca. *J. Mech. Phys. Solids* (2002).
- [18] Tsai-Hill (1965). Véase B. Kasal and R. J. Leichti, "State of the art in multiaxial phenomenological failure criteria for wood members", *Prog. Struct. Engng Mater* 7, 2005.
- [19] Tsai. S.W. y Wu. E. "A General of strength for anisotropic materials". *Journal of Composite Materials* 5. 1971.
- [20] BARBERO, E.J. *Introduction to Composite Materials Design*, Taylor & Francis, West Virginia Univ., U.S.A., 1998.
- [21] HINTON, M.J. y SODEN, P.D. *Predicting Failure in Composite Laminates: the Background to the Exercise*, *Composites Science and Technology*, 58, 1001-1010, 1998.
- [22] SODEN, P.D., KADDOUR, A.S. y HINTON, M.J. *Recommendations for Designers and Researches Resulting from the World-Wide Failure Exercise*, *Composites Science and Technology*, 64, 589-604, 2004.
- [23] BADER, M.G. *Polymer Composites in 2000: Structure, Performance, Cost and Compromise*, *J of Microscopy*, 201(2), 110-121, 2001.
- [24] COLORADO, A. *La Guadua. Una Maravilla Natural de Grandes Bondades y Promisorio Futuro*. <http://www.revista-mm.com/rev34/guadua.htm> (acceso marzo de 2004).
- [25] DANIEL, I.M. y ISHAI, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford Student Edition, Oxford University Press, U.S.A., 1994.
- [26] HARPER, C.A. *Handbook of Plastics, Elastomers and Composites*, 3ª ed., McGraw Hill, U.S.A., 1996.
- [27] SODEN, P.D., HINTON, M.J. y KADDOUR, A.S. *A Comparison of the Predicting Capabilities of Current Failure Theories for Composite Laminates*, *Composites Science and Technology*, 58, 1225-1254, 1998.
- [28] VINSON, J.R y SIERAKOWSKI, R.L. *The Behaviour of Structures Composed of Composite Materials*, 2ª edición, Kluwer Academic Publishers, U.S.A., 2002.