



Análisis Dinámico de Placas Gruesas en Compuestos Laminados Utilizando el Método de los Elementos de Contorno

Trabajo de Grado Maestría en Ingeniería
Énfasis Mecánica

Autor: Hugo Armando Alvarez Barrios

Orientador: Prof. PhD. Jairo Francisco Useche Vivero

Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecátronica

Facultad de Ingenierías

Universidad Tecnológica de Bolívar

Análisis Dinámico de Placas Gruesas en Compuestos Laminados Utilizando el Método de los Elementos de Contorno

Trabajo de Grado Maestría en Ingeniería
Énfasis Mecánica

Memoria que presenta para optar al título de M.Sc en ingeniería con énfasis en
ingeniería mecánica

Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecátronica
Facultad de Ingenierías
Universidad Tecnológica de Bolívar

A Dios todopoderoso

A mis padres y hermanos

Agradecimientos

- A Dios por darme la vida y bendecirme con grandes talentos.
- A mis padres *Joaquín Álvarez y Lidia Barrios* por el apoyo emocional ofrecido.
- A mi orientador *Jairo Useche* por todos los conocimientos impartidos, y la ayuda incondicional ofrecida para el desarrollo de este trabajo, además de haber creído en mí para la realización de tareas que requieren gran dedicación y elevado nivel intelectual.
- Al profesor *Edgardo Arrieta* por el tiempo dedicado a la retroalimentación de este trabajo.
- A los profesores *Oscar Acuña y José Villa* por los conocimientos impartidos en el curso trabajo de grado II, los cuales me orientaron de gran manera en la forma de presentar trabajos científicos.
- Al profesor *Eder Lima Albuquerque* de la universidad de Brazilia en Brazil, por haber suministrado algunas rutinas de elementos de contorno.
- Al laboratorio de computación de alto desempeño (HPCLAB, High Performance Computing Laboratory) de la Universidad Tecnología de Bolívar.
- A mis compañeros y amigos *Hermes Ramírez y Lesly Tejeda* por su compañía y apoyo emocional.

Resumen

En este trabajo se presenta la formulación por elementos de contorno para el análisis dinámico de placas gruesas laminadas. Como ecuación de gobierno se utilizó la teoría de primer orden para laminados, esta formulación considera la presencia de esfuerzos cortantes en los planos normales a la superficie de la placa. La solución fundamental elástica-estática es utilizada para la solución del problema dinámico. Las integrales que involucran términos inerciales y cargas distribuidas en el dominio, son llevadas al contorno utilizando el método de integración radial. En este método las cargas en el dominio son aproximadas con la suma de los productos entre funciones de base radial y coeficientes desconocidos. Para la discretización del contorno se utilizaron elementos cuadráticos discontinuos. Varios problemas estáticos y dinámicos del tipo transientes, armónicos y modales fueron analizados. Los resultados obtenidos fueron comparados con soluciones numéricas obtenidas con paquetes comerciales de elementos finitos y con soluciones analíticas reportadas en la literatura especializada.

Palabras clave:

Elementos de Contorno, Placas espesas, Laminados Simétricos, Formulación Dinámica, Método de Integración Radial

Abstract

In this work is presented the dynamic formulation of boundary element method for the analysis of composite thick plates. The first order shear deformation theory is used as governing equation, this formulation consider the transverse shear deformation. The elastostatic fundamental solution is used to solve de dynamic problem. The domain integral related with the inertial terms and domain loads, are transformed into boundary integrals using the radial integration method. In this method, domain loads are approximated by a sum of products between radial basis functions and unknown coefficients. The time integration for transient problems is is carried out using the Houbolt method. Quadratic boundary elements are used in the boundary discretization. Static and dynamic problems such transient, harmonic and modal are solved. The obtained results are compared with finite element solutions and analytical solutions available in the specialized literature.

Key words:

Boundary Elements, Thick Plates, Simmetric Laminates, Dynamic Formulation, Radial Integration Method

Índice

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Abstract	VI
1. Introducción	1
1.1. Análisis de laminados compuestos	1
1.2. Revisión Bibliografica	4
1.3. Descripción del trabajo	6
2. Mecánica de materiales compuestos	8
2.1. Introducción	8
2.2. Ley de Hooke Generalizada	8
2.3. Transformación de los esfuerzos y deformaciones	11
2.4. Teoría de primer orden para placas laminadas	13
2.4.1. Teoría de laminados	15
3. Análisis de problemas estáticos	23
3.1. Introducción	23
3.2. Ecuación integral de contorno	24

3.3.	Solución fundamental para placas laminadas gruesas	25
3.4.	Discretización por elementos de contorno	32
3.5.	Transformación de integrales de dominio: Método de integración radial	34
3.5.1.	Método de integración radial	35
3.6.	Ejemplos numéricos	38
3.6.1.	Placa compuesta en voladizo con carga transversal en el extremo	38
3.6.2.	Placa compuesta en voladizo con momento M aplicado en el extremo	43
3.6.3.	Placa cuadrada simplemente apoyada con presión distribuida en el dominio	46
3.6.4.	Placa cuadrada empotrada en todos sus bordes con presión distribuida en el dominio	47
3.6.5.	Conclusiones	50
4.	Análisis de problemas dinámicos	51
4.1.	Introducción	51
4.2.	Análisis transiente	52
4.3.	Análisis armónico	53
4.4.	Análisis modal	54
4.5.	Ejemplos numéricos	56
4.5.1.	Problemas transientes	56
4.5.2.	Problemas armónicos	60
4.5.3.	Problemas modales	62
4.5.4.	Conclusiones	63
5.	Implementación computacional	65
5.1.	Introducción	65
5.2.	Descripción del programa	66
5.2.1.	Definición del modelo	66

5.2.2.	Cálculo de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G}	68
5.2.3.	Cálculo de la matriz de masa \mathbf{M} y el vector de carga \mathbf{f}	68
5.2.4.	Obtención de la solución	68
5.2.5.	Trabajos previos	69
5.2.6.	Conclusiones	70
6.	Conclusiones	71
6.1.	Conclusiones finales	71
6.2.	Trabajos futuros	72
	Bibliografía	74

Índice de figuras

2.1. Sistema coordenado de la lamina.	12
2.2. Geometría deformada y sin deformar de una placa asumiendo FSDT.	14
2.3. Definición general de un laminado	15
2.4. Fuerzas y momentos resultantes en un elemento diferencial de placa gruesa.	17
2.5. Laminado simétrico.	20
3.1. Elemento cuadrático general (Imagen tomada de J.Useche)	33
3.2. Transformación de la integral de dominio en integral de contorno (Imagen tomada de Albuquerque et al. (2007))	36
3.3. Transformación de la integral de dominio en integral de contorno	37
3.4. Placa en voladizo sujeta a carga transversal en el extremo.	39
3.5. Vista superior de la placa.	39
3.6. Malla de elementos de contorno cuadráticos.	39
3.7. Viga en voladizo sujeta a carga transversal en el extremo.	40
3.8. w para $y = 0$. Con carga Q_z	41
3.9. ψ_x para $y = 0$. Con carga Q_z	41
3.10. ψ_y para $y = 0$. Con carga Q_z	42
3.11. w a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_x	43
3.12. ψ_y a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_x	44

3.13. w a lo largo de $X = 10$. Con carga M_x	44
3.14. w a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_y	45
3.15. ψ_x a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_y	45
3.16. ψ_y a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_y	46
3.17. Vista superior placa	47
3.18. Convergencia del modelo	48
3.19. Convergencia del modelo variando la cantidad de puntos de Gauss utilizados para las integrales numéricas	48
3.20. Convergencia de la solución variando la cantidad elementos para el laminado $(+45/-$ $45)_s$	49
4.1. Contorno con grados de libertad libres y restringidos.	53
4.2. Carga instantánea de presión	56
4.3. Respuesta transiente para carga instantánea de presión con diferentes funciones de aproximación RIM	57
4.4. Convergencia de la malla para la función de aproximación f_4^m	58
4.5. Sensibilidad al paso de tiempo Δt	58
4.6. Respuesta transiente del centro de la placa empotrada	59
4.7. Respuesta transiente del centro de la placa para laminado impar $(+45/- 45)_s$ bajo carga de presión impulsiva	59
4.8. Respuesta armónica de la placa simplemente apoyada para el centro de la placa . . .	60
4.9. Placa rectangular empotrada en dos de sus bordes	61
4.10. Respuesta armónica placa rectangular para el nodo ubicado en $(1, 0.5)$	61
4.11. Placa circular discretizada	63
5.1. Diagrama de flujo general para la solución BEM de placas laminadas	67

Índice de Tablas

3.1. Propiedades mecánicas del material (compuesto, Boron/Epoxy), ejemplo (3.6.1) . . .	40
3.2. Comparación de las deflexiones w y % de error entre BEM, FEM y solución exacta . .	42
3.3. Propiedades mecánicas del material ejemplo (3.6.3)	47
3.4. Propiedades mecánicas del material	49
3.5. Solución FEM laminado $(+45/-45)_S$	50
4.1. Propiedades mecánicas del material ejemplo (4.5.1.1)	56
4.2. Frecuencias naturales de vibración ejemplo (4.5.3.1)	62
4.3. Frecuencias naturales de vibración ejemplo (4.5.3.2)	62
4.4. Frecuencias naturales de vibración ejemplo (4.5.3.3)	63

Capítulo 1

Introducción

1.1. Análisis de laminados compuestos

Los materiales compuestos se han convertido en material de uso común para la elaboración de componentes estructurales debido a las ventajas ofrecidas como su alta relación resistencia/peso, resistencia a la corrosión y facilidad de manufactura de geometrías complejas entre otras, en Gay et al. (2003) se puede encontrar el rango de aplicaciones de los materiales compuestos. En industrias como la aeronáutica y la naval los materiales compuestos son de uso clave para la obtención de estructuras más livianas permitiendo mayor ahorro de combustible y aumento en la capacidad de carga. Las estructuras de los aviones, barcos o carrocerías de automóviles están construidas principalmente con placas planas y cascaras unidas entre si, para el análisis de este tipo de estructuras es necesario solucionar las ecuaciones constitutivas que las gobiernan. Los modelos de placa más usados son: el modelo de placas delgadas de Kirchhoff (1850) y el modelo de placas gruesas de Reissner (1947) siendo este último un modelo más general ya que tiene en cuenta la deformación cortante en el plano perpendicular al espesor de la placa cuyo efecto es más importante en materiales anisótropicos, razón por la cual ha sido escogido en este trabajo, en Reddy (2004) se encuentra la formulación detallada para ambos modelos de placa. En contraposición a las bondades de los materiales compuestos mencionadas anteriormente, encontramos una mayor dificultad en la ejecución de las labores

de diseño en comparación con los materiales isotrópicos, debido a que estos no poseen propiedades mecánicas iguales en todas sus direcciones principales, haciendo muy difícil o impráctico obtener soluciones analíticas de las ecuaciones de gobierno para problemas con geometría arbitraria, por esta razón se debe optar por soluciones numéricas para la evaluación de estas ecuaciones. El método tradicionalmente utilizado para la solución numérica de las ecuaciones constitutivas de los laminados compuestos, ha sido el método de los elementos finitos (FEM, Finite Element Method) el cual se basa en la discretización del dominio para la obtención de la solución en puntos discretos del mismo. La discretización del dominio trae consigo algunos problemas como la necesidad de un mallador que sea capaz de dividir el dominio de trabajo en elementos discretos conservando con la mayor precisión posible la geometría original, lo cual en muchos casos puede resultar ser una tarea desafiante. Es bien sabido por los usuarios de paquetes comerciales o libres de elementos finitos que las labores involucradas en la generación de la malla puede representar hasta el 50 % del tiempo gastado en el modelado, por esta razón, en este trabajo se propone el uso del método de los elementos de contorno (BEM, Boundary Element Method) como método numérico para la solución de las ecuaciones de gobierno de placas gruesas laminadas. A diferencia de FEM, BEM no requiere la discretización del dominio para la solución del modelo, sino que solo se debe discretizar el contorno, y a partir de la solución en el contorno es posible obtener la solución en cualquier punto deseado del dominio con lo cual se evitan todas las dificultades mencionadas en la generación de la malla de dominio utilizada por FEM, las principales ventajas de BEM sobre FEM son descritas por Katsikadelis (2002) como sigue:

- Solo se requiere discretización del contorno, lo que facilita cambios en la malla para el estudio de problemas paramétricos.
- Para dominios infinitos el problema es formulado simplemente como un problema exterior.
- El método es particularmente efectivo para en el cálculo de las derivadas de las funciones de campo (esfuerzos, deformaciones, momentos).
- BEM permite la evaluación de la solución y sus derivadas en cualquier punto del dominio del

problema en cualquier instante de tiempo.

- BEM facilita el análisis de problemas con peculiaridades geométricas como grietas.

A pesar de las ventajas mencionadas también se debe anotar algunas desventajas de BEM como:

- Se necesita la solución fundamental de la ecuación diferencial.
- Para problemas de mecánica estructural el nivel de desarrollo de BEM es menor que el de FEM.
- Se generan matrices llenas, impidiendo el uso de algoritmos que simplifican la solución del sistema de ecuaciones.

Debido a las ventajas mencionadas, resulta de gran beneficio obtener la formulación BEM para el análisis de placas compuestas. En artículos de revistas especializadas se encuentran trabajos realizados sobre el análisis de laminados compuestos delgados y gruesos, para el caso de placas delgadas, es posible encontrar tanto la formulación estática como dinámica ver Santana (2008); Albuquerque y Aliabadi (2010), para placas gruesas laminadas solo se reportan trabajos realizados para el caso estático ver Wang y Schweizerhof (1996). El análisis dinámico de estructuras permite realizar diseños menos conservadores debido a que se tienen en cuenta valores y condiciones de carga más aproximados a la realidad. En este trabajo se estudian tres tipos de problemas dinámicos: problemas transientes, armónicos y modales. Con el análisis transiente es posible conocer la respuesta de la estructura bajo cargas impulsivas de choque como el impacto de un ave sobre el fuselaje de un avión, el análisis armónico permite evaluar la respuesta de la estructura bajo cargas armónicas como la vibración producida por el motor de una embarcación y el análisis modal permite encontrar las frecuencias y modos de vibración de la estructura para determinar en que rango de frecuencias se producirá resonancia, provocando algún modo de vibración crítico para la estructura ver Beards (1996). Las formulaciones BEM para placas gruesas laminadas aún están en etapa temprana de desarrollo por lo que no se cuenta con paquetes comerciales ni libres disponibles para este tipo de análisis. Así

mediante el presente trabajo será posible analizar problemas dinámicos de placas gruesas laminadas utilizando BEM para la solución de problemas prácticos de ingeniería. Las rutinas de computadora desarrolladas, con las cuales se obtuvo la solución de los ejemplos numéricos presentados, están basadas en aquellas utilizadas en los trabajos de Useche (2007); Albuquerque (2001).

1.2. Revisión Bibliografica

Alrededor del año 1982 comenzaron a publicarse los primeros trabajos para el análisis de placas por BEM, en este año Gospodinov y Ljutskanov (1982) presentan la formulación directa BEM para el análisis estático de placas delgadas, en la segunda parte del mismo trabajo, presentan el análisis dinámico y de estabilidad de placas.

En los trabajos de Ye y Liu (1985) se presenta la formulación BEM para el análisis de placas elásticas delgadas basándose en la forma general no-lineal de las ecuaciones diferenciales de gobierno de placas delgadas.

Poco después Tanaka et al. (1988) analiza problemas de vibración libre de placas isotrópicas elásticas por BEM. En este trabajo, se utiliza la solución fundamental del caso estático para la solución del problema dinámico. el uso potencial del método es demostrado mediante algunos ejemplos prácticos.

En Rashed (2000) podemos encontrar formulaciones detalladas para el análisis de placas isotrópicas gruesas. La solución fundamental y las expresiones analíticas de las soluciones fundamentales para placas isotrópicas gruesas son presentadas, además de las respectivas transformaciones para convertir en integrales de contorno aquellas integrales de dominio resultantes de la inclusión de fuerzas de cuerpo. La formulación BEM para el análisis de fundaciones elásticas es presentada junto con algunas otras aplicaciones en mecánica estructural.

Por otro lado Westphal et al. (2001) Presentan una formulación unificada para el análisis de placas delgadas y gruesas. La formulación desarrollada permite una fácil comparación de los resultados obtenidos para formulaciones de placas gruesas y delgadas.

Más adelante Karam y Telles (2003) desarrollan la aplicación BEM para el análisis de deflexión en placas gruesas isotrópicas. La ecuación integral, incluyendo momentos y fuerzas cortantes resultantes en los puntos internos es mostrada. La implementación numérica es llevada a cabo utilizando las ecuaciones integrales discretizadas con elementos de contorno cuadráticos y celdas internas constantes.

Wang y Maokuang (1991) Presentan en su trabajo las soluciones fundamentales para el análisis de placas ortotrópicas laminadas. Las formulaciones presentadas son obtenidas por medio del método del operador de Hörmander y la descomposición onda-plana de la función delta de Dirac. Con el auge del uso de placas laminadas compuestas como material estructural, se hizo necesario el desarrollo de formulaciones BEM para laminados compuestos. Por esta razón Wang y Schweizerhof (1996) presentan la formulación BEM para el análisis de deflexión de placas gruesas con laminados simétricos. Como modelo matemático utiliza la teoría de placas de primer orden. La solución fundamental es calculada mediante el método del operador de Hörmander y la descomposición onda-plana. La ecuación integral de contorno de la placa es formulada tomando la solución fundamental presentada, como funciones de ponderación de las ecuaciones resultantes del método de los residuos ponderados.

Recientemente Albuquerque et al. (2002) presentan la formulación BEM para problemas dependientes del tiempo en placas delgadas anisotrópicas. También presenta la formulación multi-dominio para problemas bi-dimensionales con o sin fractura. La formulación de reciprocidad dual es utilizada para transformar las integrales de dominio a integrales de contorno.

Poco después Albuquerque y Aliabadi (2010) presentan la formulación para el análisis de laminados

simétricos delgados. Las soluciones fundamentales para problemas estáticos en materiales elásticos son utilizadas y las fuerzas de cuerpo son escritas como una suma de las funciones de base radial multiplicadas por coeficientes desconocidos. Las integrales de dominio resultantes son convertidas en integrales de contorno utilizando el método de integración radial utilizando la formulación presentada en Albuquerque et al. (2007). Utilizando este mismo método Santana (2008) realiza su trabajo de maestría utilizando las formulaciones BEM para el análisis dinámico de placas compuestas delgadas.

Los trabajos revisados fueron tomados de las principales bases de datos para artículos científicos, tesis de doctorales y de maestría. De la revisión realizada es posible corroborar que aun no se han realizado trabajos sobre formulaciones dinámicas basadas en el método de los elementos de contorno para el análisis de placas gruesas laminadas, solo se encuentran trabajos realizados principalmente sobre placas isotrópicas finas y placas compuestas delgadas. Así el presente trabajo representa un aporte al estado del arte en este área, al proponer el uso de la formulación BEM para el análisis de problemas dinámicos en laminados simétricos bajo la teoría de placas gruesas.

1.3. Descripción del trabajo

El objetivo de este proyecto es la evaluación de las formulaciones BEM para el análisis dinámico de placas gruesas laminadas utilizando la teoría de primer orden para laminados compuestos como ecuación de gobierno. Este modelo matemático para placas gruesas fue escogido debido a la disponibilidad de sus soluciones fundamentales, además de su amplio uso en paquetes de elementos finitos para análisis estructural. La solución fundamental para el análisis estático de laminados simétricos es utilizada, tomando los términos inerciales como fuerzas de cuerpo para el análisis de problemas dinámicos. El desarrollo de formulaciones y herramientas para el análisis de materiales compuestos resulta de gran importancia para industrias claves como la aeronáutica, naval y automovilística entre otras ya que estas permiten mejorar el desempeño de sus productos. El método de los elementos de contorno no cuenta con la amplia popularidad del método de los elementos finitos para el análisis de

problemas de mecánica estructural, principalmente por su complejidad matemática ver Brebbia y Dominguez (1992), este problema se ha venido superando mediante la difusión de las formulaciones matemáticas en un lenguaje común para los ingenieros. En la revisión bibliográfica presentada arriba se evidencian pocos trabajos publicados para el análisis de placas gruesas laminadas utilizando BEM lo que motiva la realización de este trabajo, ya que aún resta mucha investigación en este área.

El presente trabajo consta de 6 capítulos:

En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones constitutivas para el análisis de placas gruesas laminadas.

En el capítulo 3 se presenta la formulación BEM para laminados simétricos, tanto la solución fundamental como la ecuación integral de contorno y el tratamiento de las integrales de dominio es presentada.

En el capítulo 4 se presenta la formulación dinámica para análisis de problemas transientes, armónicos y modales.

En el capítulo 5 se realiza una descripción general de la implementación computacional realizada.

En el capítulo 6 se presentan las consideraciones finales y conclusiones de los resultados obtenidos en esta investigación.

Capítulo 2

Mecánica de materiales compuestos

2.1. Introducción

En este capítulo se detallan las ecuaciones constitutivas para el análisis de placas compuestas laminadas bajo la teoría de primer orden o (FSDT, first order shear deformation theory), las expresiones para la transformación de coordenadas de los tensores de esfuerzo y deformación además de los tensores de constantes elásticas es presentada. Las constantes de rigidez equivalentes del laminado son obtenidas a partir de la rigidez de cada lamina utilizando teoría de laminados. Finalmente el sistema de ecuaciones diferenciales para el análisis dinámico de placas gruesas laminadas es presentado tomando como variables principales los desplazamientos y rotaciones de la placa.

2.2. Ley de Hooke Generalizada

Las ecuaciones constitutivas para materiales anisotrópicos surgen a partir de la ley de Hooke generalizada. El modelo lineal constitutivo para deformaciones infinitesimales, suponiendo un estado inicial de esfuerzos $\sigma^0 = 0$ tiene la siguiente forma (ver Reddy (2004)).

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \tag{2.1}$$

Donde los sub-índices repetidos indican suma y varían de 1-6. La ecuación (2.1) escrita de forma matricial, queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Debido a que la relación esfuerzo-deformación es invertible, el tensor de deformaciones puede ser escrito de la según la ecuación (2.3), la cual en muchos casos resulta útil a la hora de trabajar con las constantes de ingeniería del material.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Donde S_{ij} es la matriz de flexibilidad del material y se puede calcular como la inversa de la matriz de rigidez $[S] = [C]^{-1}$.

Como es de notar en las ecuaciones (2.2) y (2.3), se tiene un total de 36 constantes elásticas, si consideramos la condición de simetría $C_{ij} = C_{ji}$ nos queda un total de 21 constantes las cuales seria impráctico obtener de forma experimental. Afortunadamente se puede considerar la existencia de planos de simetría en el material con el fin de reducir la cantidad de constantes elásticas necesarias. Así, si consideramos que el material es ortotrópico es decir, existen tres planos de simetría mutua-

mente ortogonales, como es el caso de una lamina compuesta unidireccional, el numero de constantes se reduce de 21 a 9. De esta manera, las relaciones esfuerzo-deformación toman la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Las constantes S_{ij} se pueden calcular en función de las constantes de ingeniería como sigue:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= \frac{-\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= \frac{-\nu_{13}}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{23} &= \frac{-\nu_{23}}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde E , ν y G Son los módulos de Young, Poisson y corte respectivamente. Como se dijo anteriormente C_{ij} se puede calcular como la inversa de S_{ij}

Para una lámina se suele utilizar las ecuaciones reducidas para el estado generalizado de esfuerzo plano. Con respecto al plano- x_1x_2 , ver figura (2.1), si hacemos el esfuerzo axial en la dirección 3

igual a cero las expresiones para el tensor de esfuerzos quedan reducidas de la siguiente manera:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2), \quad \sigma_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2), \quad \sigma_{33} = 0 \quad (2.7)$$

Donde α y β toman valores de 1 y 2. La relación esfuerzo-deformación en las coordenadas principales del material se expresa como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Análogamente.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde Q_{ij} la matriz de rigidez de esfuerzo plano.

Finalmente se tiene la relación de los esfuerzos cortantes transversales con las deformaciones cortantes transversales, para una lamina ortotrópica esta relación queda de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

2.3. Transformación de los esfuerzos y deformaciones

Las relaciones constitutivas de las ecuaciones (2.2) y (2.3), están escritas en términos de las componentes de los esfuerzos y las deformaciones referidos a un sistema coordenado que coincide con el sistema coordenado principal del material. Es usual que los laminados se construyan a partir de laminas unidireccionales cada una orientada en una dirección específica. Para transformar el tensor de esfuerzos σ de un sistema coordenado (x, y, z) al sistema (x_1, y_1, z_1) como se muestra en

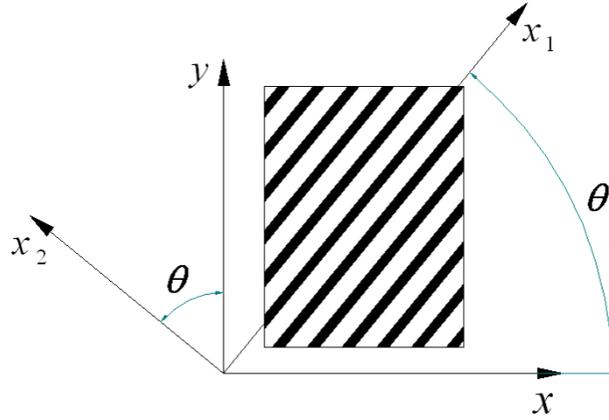


Figura 2.1: Sistema coordenado de la lamina.

la figura (2.1), aplicamos la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin^2 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin^2 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

De forma abreviada podemos escribir la siguiente expresión para pasar del sistema coordenado p (x, y, z) al sistema m (x_1, y_1, z_1):

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m \quad (2.12)$$

Donde T es la matriz de transformación de coordenadas. La relación inversa entre $\{\sigma\}_m$ y $\{\sigma\}_p$, tiene la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin^2 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin^2 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

De forma abreviada:

$$\{\sigma\}_m = [R]\{\sigma\}_p \quad (2.14)$$

Para transformar el tensor de deformaciones utilizamos la siguiente expresión:

$$\{\varepsilon\}_p = [R]\{\varepsilon\}_m, \quad \{\varepsilon\}_m = [T]^T\{\varepsilon\}_p \quad (2.15)$$

Las constantes de rigidez C_{ij} y de flexibilidad S_{ij} del material también deben ser transformadas del sistema coordenado global al sistema coordenado de la lamina. para esto utilizamos la siguiente relación para la transformación de C , S a \bar{C} , \bar{S} :

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T, \quad [\bar{S}] = [R]^T[S][R] \quad (2.16)$$

2.4. Teoría de primer orden para placas laminadas

En esta sección se definirán las ecuaciones de gobierno para placas gruesas laminadas basándose en la teoría de primer orden (FSDT). En esta teoría, se elimina la hipótesis de Kirchhoff, la cual dice que las normales transversales permanecen perpendiculares a la superficie media después de la deformación. Así en esta teoría se incluye la deformación cortante transversal de la placa consideran-

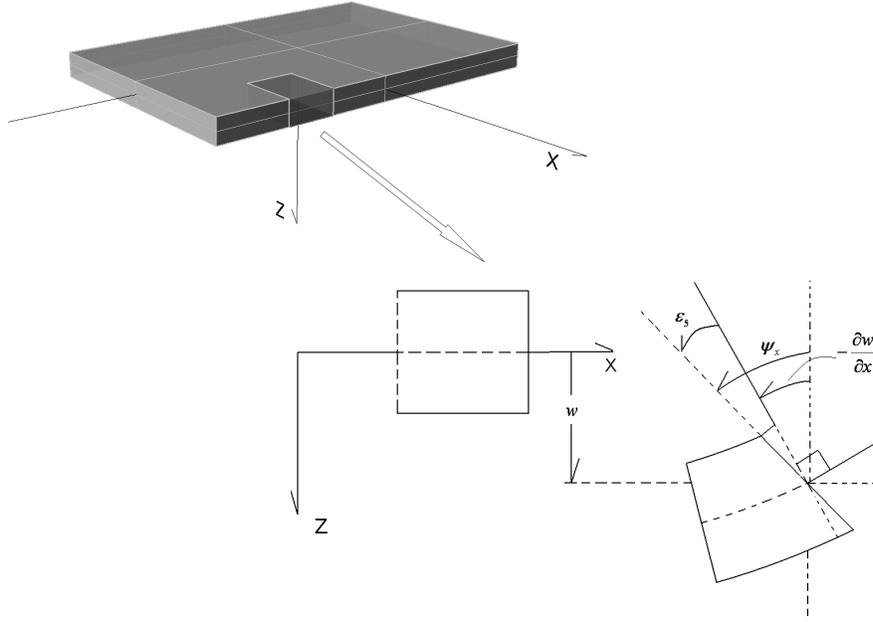


Figura 2.2: Geometría deformada y sin deformar de una placa asumiendo FSDT.

do que una línea que es perpendicular al plano del espesor de la placa, no necesariamente seguirá siendo perpendicular a este plano después de la deformación ver figura (2.2). La formulación para placas gruesas se encuentra detallada en Reissner (1947).

Para el modelo de placa gruesa, las relaciones generalizadas entre los desplazamientos y las deformaciones son:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + wk_1 & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + wk_2 \\
 \varepsilon_6 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & k_1 &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\
 k_2 &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y} & k_6 &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\
 \varepsilon_4 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y & \varepsilon_5 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Donde u , v y w son los desplazamientos del plano medio de la placa, ψ_x y ψ_y representan las rota-

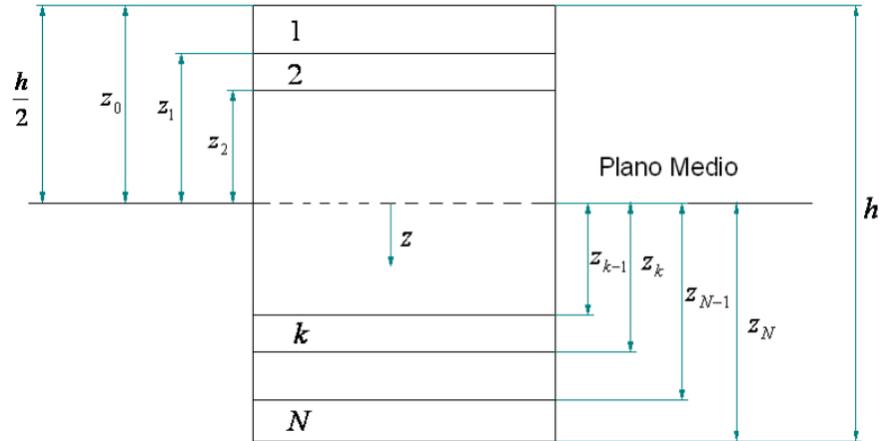


Figura 2.3: Definición general de un laminado

ciones de la placa con respecto a los ejes x y y respectivamente, k_1 y k_2 son las curvaturas principales en las direcciones x_1 y x_2 .

2.4.1. Teoría de laminados

Cuando se trabaja con placas laminadas se debe encontrar un equivalente de las constantes elásticas del laminado, calculadas a partir de las constantes elásticas de cada una de las capas que lo conforman, para esto utilizaremos la teoría de laminados. En esta teoría se realizan los siguientes supuestos o restricciones:

- Las capas están perfectamente unidas unas con otras. (supuesto)
- El material de cada capa es lineal, elástico y ortotrópico. (restricción)
- Cada capa tiene espesor uniforme. (restricción)
- Las deformaciones y desplazamientos son pequeños (restricción)

Iniciemos con la relación esfuerzo deformación para una lamina k . Con respecto al sistema global del laminado podemos escribir la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k \quad (2.18)$$

Donde \bar{Q}_{ij} puede ser obtenido utilizando el operador de transformación de coordenadas T descrito arriba.

El tensor de deformaciones referido desde el plano medio mostrado en la figura (2.3) se puede expresar como la suma de las deformaciones unitarias en ese plano más las componentes de las curvaturas del mismo como se expresa a continuación:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Reemplazando la ecuación (2.19) en la (2.18) obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (2.20)$$

Para la definición de las ecuaciones constitutivas del laminado, se debe realizar un balance de las fuerzas y momentos que actúan sobre la placa, en la figura (2.4) se muestran cada una de las fuerzas y momentos actuantes.

Las fuerzas y momentos resultantes actuando en un laminado se obtienen por la integración de los esfuerzos en cada capa en la dirección del espesor del laminado, como se muestra en las siguientes ecuaciones:

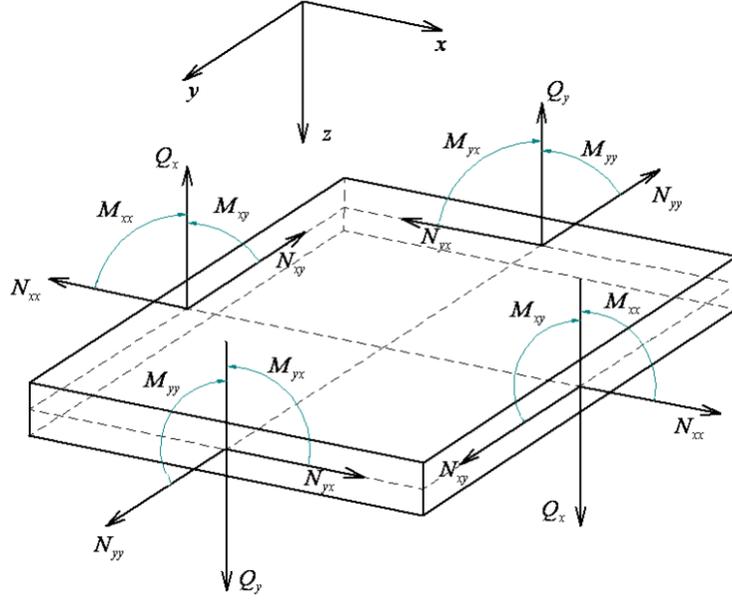


Figura 2.4: Fuerzas y momentos resultantes en un elemento diferencial de placa gruesa.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.21)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.22)$$

Las fuerzas cortantes en el espesor se calculan con la siguiente integral:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz = K \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.23)$$

Donde K es el factor de corrección cortante. Con FSDT las deformaciones cortantes transversales han sido tomadas como constantes en el espesor del laminado, de esta manera los esfuerzos cortantes

transversales también serán constantes. Es sabido de la teoría de vigas que los esfuerzos cortantes transversales en plano del el espesor de la viga varían parabolicamente, en vigas compuestas laminadas y placas los esfuerzos transversales varían al menos cuadráticamente, ver Reddy (2004). Así la diferencia entre el estado actual de esfuerzos cortantes y el estado de esfuerzos cortantes predicho por FSDT es corregido calculando las fuerzas cortantes transversales resultantes de la ecuación (2.23) multiplicadas por un parámetro K .

Reemplazando la ecuación (2.20) en las ecuaciones (2.21) y (2.22) para las fuerzas y momentos resultantes obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\} \quad (2.24)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right\} \quad (2.25)$$

Las componentes del esfuerzo para cada capa k en el plano del espesor se expresan como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Así las ecuaciones (2.24) y (2.25) pueden ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.29)$$

En el plano del espesor tenemos que:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Los valores de A_{ij} , B_{ij} y D_{ij} se les conoce como rigidez extensional, rigidez acoplamiento extensión-flexión, y rigidez a flexión respectivamente. En este trabajo solo se trabajaran laminados simétricos por ser los más utilizados a nivel de ingeniería, de tal manera que los valores de B_{ij} son iguales a cero al no haber acoplamiento entre extensión y flexión lo cual es característico de este tipo de laminados.

Los valores de rigidez presentados en las ecuaciones (2.27), (2.28) y (2.30) dependen de las constantes elásticas del material, espesor de cada capa y el esquema de laminado, este último se utiliza para clasificar los laminados en varios tipos, los principales son: simétricos, anti-simétricos y balanceados. Los laminados simétricos son aquellos que poseen las mismas propiedades, posiciones y esquemas de laminado con respecto al plano medio de la placa ver figura (2.5). Al no existir acoplamiento entre los efectos de extensión y flexión, las expresiones de las fuerzas y momentos resultantes en función de las constantes del laminado, toman la siguiente forma:

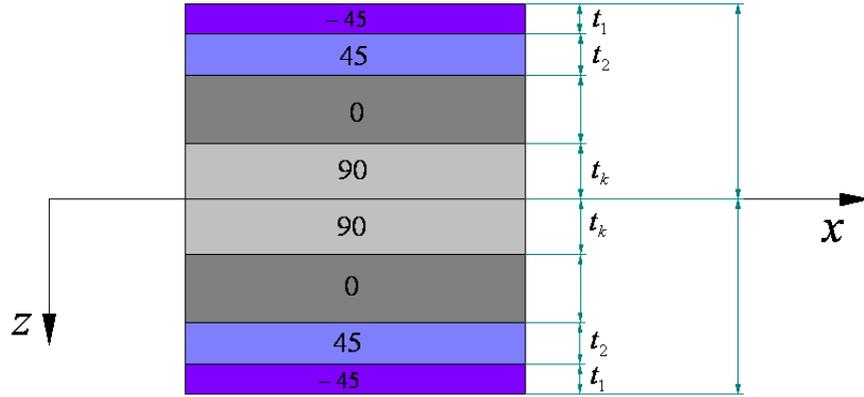


Figura 2.5: Laminado simétrico.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Los valores de Q_x y Q_y se conservan igual a la ecuación (2.30).

Una vez realizada la definición de los laminados podemos escribir las ecuaciones de movimiento, resultante del balance de fuerzas de la placa. Para un laminado simétrico las ecuaciones quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= I_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Las ecuaciones (2.33) pueden ser escritas en notación indicial, tomando las direcciones cartesianas x, y como las direcciones principales $\alpha, \beta = 1, 2$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} &= I_2 \frac{\partial^2 \psi_{\alpha}}{\partial t^2} \\ Q_{\alpha,\alpha} + q &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Donde I_0 e I_2 son los momentos máxicos de inercia dados en función de la densidad ρ y el espesor h del laminado como:

$$\begin{aligned} I_0 &= \rho h \\ I_2 &= \frac{1}{12} \rho h^3 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Las ecuaciones de movimiento pueden ser expresadas en función de los desplazamientos para un laminado simétrico a partir de las ecuaciones (2.17), (2.31), (2.32) y (2.34) como sigue:

Ecuación de movimiento lineal en dirección z :

$$\begin{aligned} KA_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + KA_{45} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + \\ KA_{45} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) + KA_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + q(x, y) = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ecuación de movimiento rotacional alrededor del eje x :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + D_{16} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right) + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \\ D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} \right) - KA_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) - \\ KA_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) = I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ecuación de movimiento rotacional alrededor del eje y :

$$\begin{aligned}
 & D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \\
 & D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{26} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} \right) - KA_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) - \\
 & KA_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) = I_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Capítulo 3

Análisis de problemas estáticos

3.1. Introducción

El método de los elementos de contorno es un método de malla reducida en el cual el problema a resolver se reduce en una dimensión, las ecuaciones de gobierno para el análisis de placas compuestas son una reducción de las ecuaciones para elasticidad tridimensional teniendo en cuenta algunas consideraciones físicas acerca del comportamiento de las placas, de esta manera un problema tridimensional es reducido a uno bidimensional tomando el espesor de la placa como variable de entrada al modelo. Utilizando métodos tradicionales como FEM las ecuaciones de gobierno de placas deben ser resueltas utilizando elementos bidimensionales como cuadriláteros o triángulos, con BEM un problema bidimensional es convertido en uno unidimensional requiriendo solo discretizar el contorno, BEM se vale de la forma integral de las ecuaciones de gobierno para llevar el problema al contorno.

En este capítulo se desarrolla la formulación por elementos de contorno para la solución de problemas de deflexión de placas gruesas laminadas bajo FSDT. La solución fundamental de la placa es obtenida usando el método de descomposición de onda plana y el método del operador de Hörmander para convertir el sistema de ecuaciones diferenciales parciales a una ecuación diferencial ordinaria ver Wang y Schweizerhof (1996). Las soluciones fundamentales presentadas son utilizadas como fun-

ciones de ponderación para la solución de la ecuación integral de contorno. La interpolación de la solución en el contorno es realizada utilizando elementos cuadráticos discontinuos.

3.2. Ecuación integral de contorno

Tomando como base las ecuaciones (2.33) podemos escribir la formulación BEM para placas gruesas laminadas.

La forma integral de la ecuación (2.34) puede ser derivada mediante la siguiente identidad, ver Rashed (2000):

$$\int_{\Omega} [(M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} - I_2 \frac{\partial^2 \phi_{\alpha}}{\partial t^2}) U_{\alpha}^* + (Q_{\alpha,\alpha} + q - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) U_3^*] d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

Donde U_i^* ($i = \alpha, 3$) son las funciones de ponderación las cuales serán tomadas como las soluciones fundamentales de la ecuación de gobierno presentadas en la sección (3.3). Integrando por partes (Aplicando la segunda identidad de Green) y haciendo uso de relaciones algebraicas obtenemos:

$$U_j(\zeta) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) P_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) U_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) q_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) \Lambda_{ij} \ddot{U}_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.2)$$

Llevando el punto ζ al contorno en la posición $\zeta \in \Gamma$, la ecuación (3.2) puede ser escrita como:

$$C_{ij}(\zeta) U_j(\zeta) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) P_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) U_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) q_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) \Lambda_{ij} \ddot{U}_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.3)$$

Donde $C_{ij}(\zeta)$ depende de la posición de ζ , si $\zeta \in \Omega$, entonces $C_{ij}(\zeta) = \delta_{ij}$, si ζ esta en el contorno entonces $C_{ij}(\zeta) = \delta_{ij}/2$. Λ_{ij} se define como: $\Lambda_{\alpha\beta} = 1/12\rho h^3 \delta_{\alpha\beta}$ y $\Lambda_{33} = \rho h$. U_j , P_j y \ddot{U}_j son los vectores que contienen los desplazamientos, tracciones y aceleraciones respectivamente. La solución fundamental U_{ij}^* de la ecuación (3.3) puede ser calculada usando las expresiones (3.7) y (3.11), La solución fundamental P_{ij}^* se calcula mediante las ecuaciones (3.24).

3.3. Solución fundamental para placas laminadas gruesas

El método de los elementos de contorno parte de la formulación integral de la ecuación (2.34), para llegar a la forma integral de esta ecuación se utiliza el método de los residuos ponderados tomando como funciones de ponderación las soluciones fundamentales de la ecuación de gobierno, ver Brebbia y Dominguez (1992), estas son soluciones particulares de la ecuación para el caso de una placa infinita sujeta a una carga puntual concentrada en un punto del dominio. La obtención de estas soluciones suele ser uno de los mayores problemas de BEM ya que para problemas como el estudiado en este trabajo el cual involucra un conjunto ecuaciones diferenciales sin solución analítica para casos con geometría general, no es posible obtener soluciones exactas de estas soluciones fundamentales resultando en una doble integral numérica, una para la aproximación de la solución fundamental y otra para la solución de sus expresiones en la ecuación integral de contorno que será descrita más adelante. A continuación se presenta la solución fundamental para placas laminadas gruesas propuesta por Wang y Schweizerhof (1996):

En notación indicial las ecuaciones (2.36), (2.37), y (2.38) se pueden escribir como sigue:

$$\Delta_{ij}^* U_j + q_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

Donde U_j es un vector que contiene las rotaciones y deflexiones ψ_x , ψ_y , w y q_i es un vector que contiene las cargas generalizadas m_x , m_y y q respectivamente, Δ_{ij}^* es un operador diferencial y se

define como sigue:

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^* &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{55} \\
\Delta_{12}^* &= \Delta_{21}^* = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{45} \\
\Delta_{13}^* &= -\Delta_{31}^* = - \left(A_{45} \frac{\partial}{\partial y} + A_{55} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
\Delta_{23}^* &= -\Delta_{32}^* = - \left(A_{44} \frac{\partial}{\partial y} + A_{45} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
\Delta_{22}^* &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - A_{44} \\
\Delta_{33}^* &= A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Las soluciones fundamentales son un conjunto de soluciones particulares de la ecuación (3.4) bajo la acción de una carga puntual unitaria, matemáticamente este concepto se puede expresar de la siguiente manera, ver Brebbia y Dominguez (1992):

$$\Delta_{ij}^* U_{kj}^*(\zeta, \mathbf{x}) = -\delta(\zeta, \mathbf{x}) \delta_{kj} \tag{3.6}$$

Donde $\delta(\zeta, \mathbf{x})$ es la función delta de Dirac, ζ y \mathbf{x} representan las coordenadas del punto fuente y el punto campo respectivamente, U_{kj}^* son los desplazamientos generalizados en la j -ésima dirección del punto campo \mathbf{x} de una placa infinita cuando una carga concentrada unitaria es aplicada en la k -ésima dirección del punto fuente ζ .

Usando el método de descomposición de onda plana propuesto por Fand y Shilov (1967), es posible transferir la ecuación (3.6) en un conjunto de ecuaciones diferenciales. U_{kj}^* y $\delta(\zeta, \mathbf{x})$ pueden ser

expandidas en una onda plana como sigue:

$$\delta(\zeta, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} |\rho|^{-2} d\theta \quad U_{kj}^*(\zeta, \mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} \tilde{U}_{kj}^*(\rho) d\theta \quad (3.7)$$

Donde $\rho = \omega_1(x_1 - \xi) + \omega_2(x_2 - \eta)$, $\omega_1 = \cos \theta$, $\omega_2 = \sin \theta$, (x_1, x_2) , (ξ, η) son las coordenadas del punto fuente y el punto campo respectivamente, $\tilde{U}_{kj}^*(\rho)$ es una función que depende solo de ρ . Reemplazando (3.7) en (3.6) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\tilde{\Delta}_{ij}^* \tilde{U}_{kj}^*(\rho) = \frac{1}{4\pi^2} |\rho|^2 \delta_{ki} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} d_{11} - A_{55} & d_{12} - A_{45} & -d_{13} \\ d_{12} - A_{45} & d_{22} - A_{44} & -d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= D_{11}\omega_1^2 + 2D_{16}\omega_1\omega_2 + D_{66}\omega_2^2 \\ d_{12} &= D_{16}\omega_1^2 + (D_{12} + D_{12})\omega_1\omega_2 + D_{26}\omega_2^2 \\ d_{13} &= A_{45}\omega_2 + A_{55}\omega_1 \\ d_{23} &= A_{44}\omega_2 + A_{45}\omega_1 \\ d_{22} &= D_{66}\omega_1^2 + 2D_{26}\omega_1\omega_2 + D_{22}\omega_2^2 \\ d_{33} &= A_{55}\omega_1^2 + 2A_{45}\omega_1\omega_2 + A_{44}\omega_2^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Utilizando el método del operador de Hörmander (1976), $\tilde{U}_{kj}^*(\rho)$ puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\tilde{U}_{kj}^*(\rho) = {}^{co} \tilde{\Delta}_{jk}^* \phi(\rho) \quad (3.10)$$

Donde $\phi(\rho)$ es una función escalar desconocida que depende solo de ρ , ${}^{co} \tilde{\Delta}_{jk}^*$ es la matriz de cofactores

de $\tilde{\Delta}^*$. Así la solución fundamental toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{\alpha\beta}^*(\rho) &= a_{\alpha\beta}D^4\phi(\rho) - C\omega_\alpha\omega_\beta D^2\phi(\rho) \\
\tilde{U}_{\alpha 3}^*(\rho) &= -\tilde{U}_{3\alpha}^*(\rho) = f_\alpha D^3\phi(\rho) + C\omega_\alpha D\phi(\rho) \\
\tilde{U}_{33}^*(\rho) &= AD^4\phi(\rho) - BD^2\phi(\rho) + C\phi(\rho)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Donde $D^k\phi(\rho) = d^k\phi(\rho)/d\rho^k$, ($k = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}
a_{11} &= D_{66}A_{55}\omega_1^4 + D_{22}A_{44}\omega_2^4 + (D_{66}A_{44} + D_{22}A_{55} + 4D_{26}A_{45})\omega_1^2\omega_2^2 \\
&\quad + 2(D_{26}A_{44} + A_{45}D_{22})\omega_1\omega_2^3 + 2(D_{66}A_{45} + A_{55}D_{26})\omega_2\omega_1^3 \\
a_{12} = a_{21} &= -D_{16}A_{55}\omega_1^4 - D_{26}A_{44}\omega_2^4 - (D_{16}A_{44} + D_{26}A_{55} + 2A_{45}(D_{12} + D_{66}))\omega_1^2\omega_2^2 \\
&\quad - (2D_{26}A_{45} + A_{44}(D_{12} + D_{66}))\omega_1\omega_2^3 - (2D_{16}A_{45} + A_{55}(D_{12} + D_{66}))\omega_2\omega_1^3 \\
a_{22} &= D_{11}A_{55}\omega_1^4 + D_{66}A_{44}\omega_2^4 + (D_{11}A_{44} + D_{66}A_{55} + 4D_{16}A_{45})\omega_1^2\omega_2^2 \\
&\quad + 2(D_{16}A_{44} + A_{45}D_{66})\omega_1\omega_2^3 + 2(D_{11}A_{45} + A_{55}D_{16})\omega_2\omega_1^3 \\
f_1 &= (D_{16}A_{55} - D_{66}A_{55})\omega_1^3 + (D_{26}A_{44} - D_{22}A_{45})\omega_2^3 + (D_{16}A_{44} + D_{12}A_{45} - 2D_{26}A_{55})\omega_1^2\omega_2 \\
&\quad + ((D_{12} + D_{66})A_{44} - D_{22}A_{55} - D_{26}A_{45})\omega_1\omega_2^2 \\
f_2 &= (D_{16}A_{55} - D_{11}A_{55})\omega_1^3 + (D_{26}A_{45} - D_{66}A_{44})\omega_2^3 + (D_{12}A_{45} + D_{26}A_{55} - 2D_{16}A_{44})\omega_1^2\omega_2 \\
&\quad + ((D_{12} + D_{66})A_{55} - D_{11}A_{44} - D_{16}A_{45})\omega_1\omega_2^2 \\
A &= (D_{11}D_{66} - D_{16}^2)\omega_1^4 + (D_{22}D_{66} - D_{26}^2)\omega_2^4 + (D_{11}D_{22} + 2D_{16}D_{26} - D_{12}^2 - 2D_{12}D_{66})\omega_1^2\omega_2^2 \\
&\quad + 2(D_{11}D_{26} - D_{16}D_{12})\omega_1^3\omega_2 + 2(D_{16}D_{22} - D_{12}D_{26})\omega_1\omega_2^3 \\
B &= (A_{44}D_{11} + A_{55}D_{66} - 2A_{45}D_{16})\omega_1^2 + (A_{44}D_{66} + A_{55}D_{22} - 2A_{45}D_{26})\omega_2^2 \\
&\quad + 2(D_{16}A_{44} + A_{55}D_{26} - A_{45}(D_{12} + D_{26}))\omega_1\omega_2 \\
C &= A_{44}A_{55} - A_{45}^2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Substituyendo la ecuación (3.10) en (3.8) se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^4}{d\rho^4} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \rho^2 \right) \phi(\rho) = \frac{1}{4\pi^2 a} |\rho|^{-2} \quad (3.13)$$

Donde:

$$\rho^2 = \frac{b}{a} \quad a = a_{11}d_{11} + a_{12}d_{12} \quad (3.14)$$

$$b = a_{11}A_{55} + Cd_{11}\omega_1^2 + a_{12}A_{45} + Cd_{12}\omega_1\omega_2 + f_1d_{13}$$

la solución de (3.13) corresponde a:

$$\phi(\rho) = C_f \left(p^2 \rho^2 \ln|\rho| + 2 \ln|\rho| + 3 + e^{p\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-p\sigma}}{\sigma} d\sigma - e^{-p\rho} \int_{-\infty}^{\rho} \frac{e^{p\sigma}}{\sigma} d\sigma \right) \quad (3.15)$$

$$C_f = \frac{1}{8\pi^2 p^4 a}$$

Como abreviatura se introducen los siguientes términos:

$$A_0(\rho) = e^{p\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-p\sigma}}{\sigma} d\sigma - e^{-p\rho} \int_{-\infty}^{\rho} \frac{e^{p\sigma}}{\sigma} d\sigma \quad (3.16)$$

$$A_1(\rho) = e^{p\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-p\sigma}}{\sigma} d\sigma + e^{-p\rho} \int_{-\infty}^{\rho} \frac{e^{p\sigma}}{\sigma} d\sigma$$

De las ecuaciones presentadas arriba se pueden realizar las siguientes relaciones con sus derivadas:

$$\frac{dA_0(p\rho)}{d\rho} = pA_1(p\rho) - \frac{2}{\rho} \quad \frac{dA_1(p\rho)}{d\rho} = pA_0(p\rho) \quad (3.17)$$

Así, $\phi(\rho)$ y sus derivadas se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\phi(\rho) &= C_f(p^2\rho^2 \ln|\rho| + 2 \ln|\rho| + 3 + A_0(p\rho)) \\
D\phi(\rho) &= C_f(2p^2\rho \ln|\rho| + p^2\rho + pA_1(p\rho)) \\
D^2\phi(\rho) &= C_f(2p^2 \ln|\rho| + 3p^2\rho + p^2A_0(p\rho)) \\
D^3\phi(\rho) &= C_fp^3A_1(p\rho) \\
D^4\phi(\rho) &= C_fp^4A_0(p\rho) \\
D^5\phi(\rho) &= C_f\left(p^5A_1(p\rho) - \frac{2p^4}{\rho}\right) \\
D^6\phi(\rho) &= C_f\left(p^6A_0(p\rho) + \frac{2p^4}{\rho^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Las funciones $A_0(p\rho)$ y $A_1(p\rho)$ pueden ser expresadas en términos de integrales exponenciales $E_i(p\rho)$ y $E_1(p\rho)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
A_0(p\rho) &= e^{p\rho}E_1(p\rho) - e^{-p\rho}E_i(p\rho) \\
A_1(p\rho) &= e^{p\rho}E_1(p\rho) + e^{-p\rho}E_i(p\rho) \\
\rho &> 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
A_0(p\rho) &= -e^{|p\rho|}E_i(|p\rho|) + e^{-|p\rho|}E_1(|p\rho|) \\
A_1(p\rho) &= -e^{|p\rho|}E_i(|p\rho|) - e^{-|p\rho|}E_1(|p\rho|) \\
\rho &< 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Para tratar las integrales resultantes I_1 , mostradas en la ecuación (3.21), su solución debe ser llevada a cabo en cuatro intervalos en el rango $0 \leq \theta \leq 2\pi$ indicados en la expresión (3.22) así:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} F_1(\theta) D^k \phi(\rho) d\theta \quad k = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right], \left[\theta_0 + \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \pi\right], \left[\theta_0 + \pi, \theta_0 + \frac{3\pi}{2}\right], \left[\theta_0 + \pi, \theta_0 + \frac{3\pi}{2}\right], \\
&\left[\theta_0 + \frac{3\pi}{2}, \theta_0 + 2\pi\right],
\end{aligned} \tag{3.22}$$

El valor de θ_0 se calcula con la siguiente formula:

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left(-\frac{x - \xi}{y - \eta} \right) \quad (3.23)$$

La solución fundamental P_{ij}^* se obtiene a partir de U_{ij}^* y las ecuaciones (2.34) para el caso estático donde los términos inerciales son iguales a cero, como sigue:

$$\begin{aligned} P_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) &= \int_0^{2\pi} \tilde{P}_{ij}^* d\theta \\ \tilde{P}_{i1}^* &= \tilde{M}_{i1}^* l + \tilde{M}_{i6}^* m \\ \tilde{P}_{i2}^* &= \tilde{M}_{i6}^* l + \tilde{M}_{i2}^* m \\ \tilde{P}_{i3}^* &= \tilde{Q}_{i1}^* l + \tilde{Q}_{i2}^* m \end{aligned} \quad (3.24)$$

Donde l y m son los cosenos directores de la normal al contorno, M_{i1}^* , M_{i2}^* , M_{i6}^* , Q_{i1}^* y Q_{i2}^* y se calculan como sigue:

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_{11}^* & \tilde{M}_{12}^* & \tilde{M}_{16}^* \\ \tilde{M}_{21}^* & \tilde{M}_{22}^* & \tilde{M}_{26}^* \\ \tilde{M}_{31}^* & \tilde{M}_{32}^* & \tilde{M}_{36}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_{11}^* & \tilde{\kappa}_{12}^* & \tilde{\kappa}_{16}^* \\ \tilde{\kappa}_{21}^* & \tilde{\kappa}_{22}^* & \tilde{\kappa}_{26}^* \\ \tilde{\kappa}_{31}^* & \tilde{\kappa}_{32}^* & \tilde{\kappa}_{36}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{21} & D_{16} \\ D_{31} & D_{31} & D_{36} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11}^* & \tilde{Q}_{12}^* \\ \tilde{Q}_{21}^* & \tilde{Q}_{22}^* \\ \tilde{Q}_{31}^* & \tilde{Q}_{32}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^* & \tilde{\varepsilon}_{12}^* \\ \tilde{\varepsilon}_{21}^* & \tilde{\varepsilon}_{22}^* \\ \tilde{\varepsilon}_{31}^* & \tilde{\varepsilon}_{32}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa}_{11}^* &= a_{11}\omega_1 D^5 \phi(\rho) - C\omega_1^3 D^3 \phi(\rho) \\
\tilde{\kappa}_{12}^* &= a_{12}\omega_2 D^5 \phi(\rho) - C\omega_1\omega_2^2 D^3 \phi(\rho) \\
\tilde{\kappa}_{16}^* &= (a_{11}\omega_2 + a_{12}\omega_1) D^5 \phi(\rho) - 2C\omega_2\omega_1^2 D^3 \phi(\rho) \\
\tilde{\kappa}_{21}^* &= a_{21}\omega_1 D^5 \phi(\rho) - C\omega_1^2\omega_2 D^3 \phi(\rho) \\
\tilde{\kappa}_{22}^* &= a_{22}\omega_2 D^5 \phi(\rho) - C\omega_2^3 D^3 \phi(\rho) \\
\tilde{\kappa}_{26}^* &= (a_{21}\omega_2 + a_{22}\omega_1) D^5 \phi(\rho) - 2C\omega_1\omega_2^2 D^3 \phi(\rho) \\
\tilde{\kappa}_{31}^* &= -f_1\omega_1 D^4 \phi(\rho) - C\omega_1^2 D^2 \phi(\rho) \\
\tilde{\kappa}_{32}^* &= -f_2\omega_2 D^4 \phi(\rho) - C\omega_2^2 D^2 \phi(\rho) \\
\tilde{\kappa}_{36}^* &= -(f_1\omega_2 + f_2\omega_1) D^4 \phi(\rho) - 2C\omega_1\omega_2 D^2 \phi(\rho) \\
\tilde{\varepsilon}_{14}^* &= -(f_1\omega_2 + a_{12}) D^4 \phi(\rho) \\
\tilde{\varepsilon}_{15}^* &= -(f_1\omega_1 + a_{11}) D^4 \phi(\rho) \\
\tilde{\varepsilon}_{24}^* &= -(f_2\omega_2 + a_{22}) D^4 \phi(\rho) \\
\tilde{\varepsilon}_{25}^* &= -(f_2\omega_1 + a_{21}) D^4 \phi(\rho) \\
\tilde{\varepsilon}_{34}^* &= A\omega_2 D^5 \phi(\rho) - (B\omega_2 + f_2) D^3 \phi(\rho) \\
\tilde{\varepsilon}_{35}^* &= A\omega_1 D^5 \phi(\rho) - (B\omega_1 + f_1) D^3 \phi(\rho)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

3.4. Discretización por elementos de contorno

En este trabajo solo serán utilizados N_e elementos cuadráticos discontinuos para la discretización de la ecuación (3.3). La forma discreta de las integrales de la ecuación (3.3) definidas en el contorno puede ser escrita de la siguiente forma, ver Rashed (2000); Useche (2007):

$$\begin{aligned}
C_{ij}(\zeta)U_i(\zeta) &= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 P_j^m \int_{-1}^{+1} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}(\xi)) \Phi^m(\xi) J_j(\xi) d\xi - \\
&\sum_{j=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 U_j^m \int_{-1}^{+1} P_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}(\xi)) \Phi^m(\xi) J_j(\xi) d\xi + \int_{\Omega} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) q_i(\mathbf{x}) d\Omega - \\
&\int_{\Omega} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}) \Lambda_{ij} \ddot{U}_j(\mathbf{x}) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.28}$$

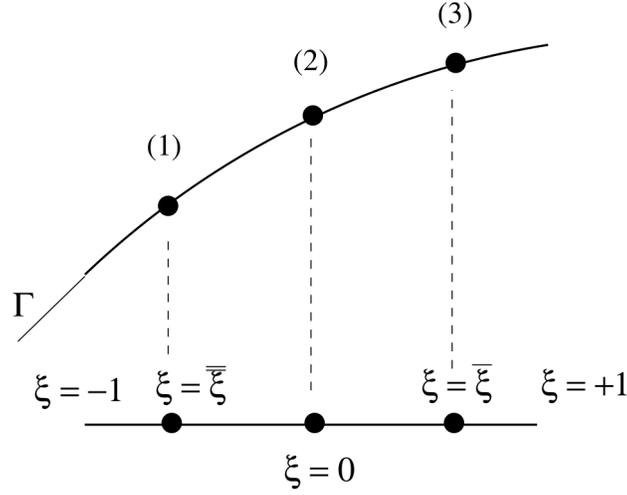


Figura 3.1: Elemento cuadrático general (Imagen tomada de J.Useche)

Donde J es el Jacobiano de la transformación y Φ^m son las funciones de forma del elemento. Para el elemento cuadrático general mostrado en la figura (3.1), las funciones de forma se pueden expresar como sigue:

$$\Phi^1(\xi) = \frac{\xi(\xi - \bar{\xi})}{\bar{\xi}(\bar{\xi} - \bar{\xi})}$$

$$\Phi^2(\xi) = \frac{(\xi - \bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})}{\bar{\xi}\bar{\xi}} \quad (3.29)$$

$$\Phi^3(\xi) = \frac{\xi(\xi - \bar{\xi})}{\bar{\xi}(\bar{\xi} - \bar{\xi})}$$

El Jacobiano J para la transformación $(x, y) \rightarrow \xi$, se expresa de la siguiente forma, ver Katsikadelis (2002); Brebbia y Dominguez (1992):

$$J = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (3.30)$$

Como es de notar en la ecuación (3.28), aún quedan dos integrales definidas en el dominio, por estar definidas en el dominio no pueden ser tratadas de la misma forma que las integrales definidas en el contorno así que en esta sección se ignoran estas integrales las cuales serán tratadas en la sección (3.5). Así para el caso de cargas estáticas definidas en el contorno, luego de realizar el proceso de colocación, es decir la integración sobre cada uno de los puntos fuente y campo, la ecuación (3.28) puede ser escrita de forma matricial como sigue:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (3.31)$$

Donde \mathbf{H} , \mathbf{G} son las matrices de coeficientes de influencia definidas en la ecuación (3.32), ver Brebbia y Dominguez (1992), \mathbf{u} y \mathbf{p} , son los valores de los desplazamientos y tracciones en cada nodo respectivamente.

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \int_{-1}^{+1} U_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}(\xi)) \Phi^m(\xi) J_j(\xi) d\xi \\ H_{ij} &= \frac{1}{2} \delta_{ik} + \int_{-1}^{+1} P_{ij}^*(\zeta, \mathbf{x}(\xi)) \Phi^m(\xi) J_j(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.5. Transformación de integrales de dominio: Método de integración radial

En esta sección se presentan los detalles del método de integración radial (RIM, radial integration method) para la solución de las integrales de dominio resultante de las fuerzas de cuerpo. Diferentes funciones arbitrarias de aproximación son propuestas para la solución discreta de estas integrales. En la ecuación (3.3) la integral relacionada con las cargas inerciales y aquellas distribuidas en el dominio se encuentra definida en el dominio, para la solución de esta integral se han realizado varias propuestas, la primera alternativa es la transformación exacta de esta al contorno, esta alternativa solo es viable para aquellos problemas donde la complejidad matemática del sistema de ecuaciones diferenciales de gobierno permite obtener la transformación exacta de la solución fundamental involucrada en esta integral.

La otra alternativa es dividir el dominio en celdas para obtener la solución de esta integral sobre el dominio, pero con esta alternativa el método de los elementos de contorno pierde una de sus cualidades principales al requerir discretización del dominio.

El método de reciprocidad dual para los elementos de contorno (DRM, Dual Recirpocity Boundary Element Method) ha sido propuesto para la transformación al contorno de esta integral de dominio, pero este también requiere soluciones particulares exactas la solución fundamental que satisfagan las funciones arbitrarias de aproximación.

Por último encontramos el método de integración radial el cual no requiere transformaciones particulares exactas de la solución fundamental por esta razón ha sido adoptado en este trabajo debido a que estas soluciones aún no están disponibles para las ecuaciones de gobierno de placas gruesas laminadas. La detalles y estudio del desempeño de cada uno de estos métodos puede ser encontrado en Santana (2008).

3.5.1. Método de integración radial

RIM aproxima las fuerzas de cuerpo q como la suma de M productos de las funciones de aproximación f^m y coeficientes desconocidos γ^m de las siguiente forma, ver Albuquerque et al. (2007):

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \gamma^m f^m \quad (3.33)$$

La integral de dominio de la ecuación (3.3) puede ser escrita como:

$$P_1(\zeta) = \int_{\Omega_g} q(\mathbf{x})U^*(\zeta, \mathbf{x})d\Omega = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\Omega_g} f^m U^*(\zeta)d\Omega \quad (3.34)$$

ó

$$P_1(\zeta) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\theta} \int_0^r f^m U^*(\zeta, \mathbf{x})\rho d\rho d\theta \quad (3.35)$$

Donde r es el valor de ρ en un punto del contorno Γ_g , ver figura (3.2). Definiendo $F^m(\zeta)$ como la

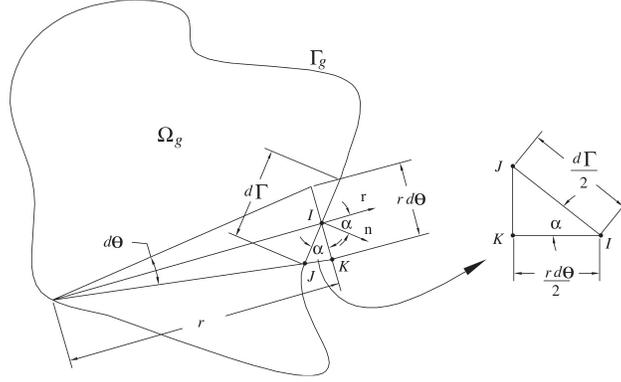


Figura 3.2: Transformación de la integral de dominio en integral de contorno (Imagen tomada de Albuquerque et al. (2007))

siguiente integral:

$$F^m(\zeta) = \int_0^r f^m U^*(\zeta, \mathbf{x}) \rho d\rho \quad (3.36)$$

Podemos reescribir la ecuación (3.35) como sigue:

$$P_1(\zeta) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\theta} F^m(\zeta) d\theta \quad (3.37)$$

Considerando un ángulo infinitesimal $d\theta$, ver figura (3.2), la relación entre la longitud de arco $rd\theta$ y la longitud infinitesimal de contorno $d\Gamma$, se puede escribir como:

$$\cos \alpha = \frac{rd\theta/2}{d\Gamma/2}, \Rightarrow d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma \quad (3.38)$$

Substituyendo la ecuación (3.38) en la (3.37), la integral de dominio de la ecuación (3.3) puede ser escrita como integral de contorno de la siguiente manera:

$$P_1(\zeta) = \sum_{m=1}^M \gamma^m \int_{\Gamma_g} \frac{F^m(\zeta)}{r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} d\Gamma \quad (3.39)$$

Donde α es el ángulo entre los vectores unitarios r y n .

Las funciones de aproximación f^m son funciones de base radial escritas en términos de R , donde R es

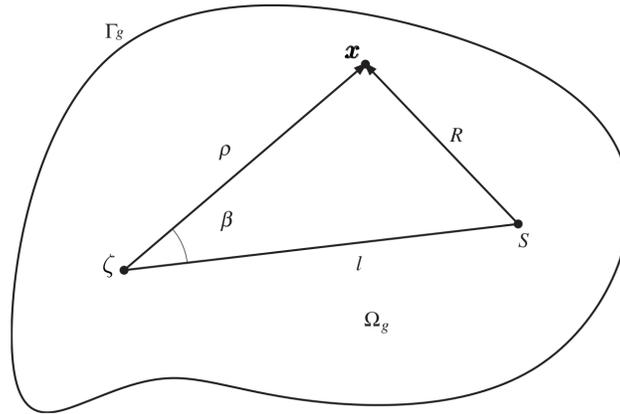


Figura 3.3: Transformación de la integral de dominio en integral de contorno

la distancia entre el centro de la función de base radial S y el punto de integración \mathbf{x} , ver figura (3.3). La integral relacionada con las aceleraciones se aproxima de forma similar a la relacionada con las cargas distribuidas en el dominio.

La ecuación (3.33) puede ser escrita de forma matricial como sigue:

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}\gamma \quad (3.40)$$

Así γ se puede calcular como:

$$\gamma = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{q} \quad (3.41)$$

Igualmente para la ecuación (3.39):

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q} \quad (3.42)$$

Las siguientes cuatro funciones de aproximación serán utilizadas en este trabajo:

$$f_1^m = 1 + R \quad (3.43)$$

$$f_2^m = 1 + R + R^3 \quad (3.44)$$

$$f_3^m = R^2 \log(R) \quad (3.45)$$

$$f_4^m = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{R}{dA}\right)^2 + 8 \left(\frac{R}{dA}\right)^3 - 3 \left(\frac{R}{dA}\right)^4, & 0 \leq R \leq dA \\ 0, & R > dA \end{cases} \quad (3.46)$$

Las funciones f_1^m y f_2^m se suelen utilizar para la solución de problemas isotrópicos utilizando DRM, f_3^m se conoce como función *spline* de placas delgadas, en Golberg et al. (1999) se muestra la solución de algunos ejemplos numéricos utilizando esta función, f_4^m es una *spline* de cuarto orden y ha sido utilizada con éxito en varios métodos libres de malla, ver Atluri y Shen (2002).

3.6. Ejemplos numéricos

En esta Sección se presentan varios ejemplos numéricos representativos para la validación de las formulaciones presentadas para el caso estático. Las soluciones obtenidas son comparadas con soluciones analíticas y FEM. Todos los resultados para la deflexión w presentados están dados para el centroide de la geometría.

3.6.1. Placa compuesta en voladizo con carga transversal en el extremo

Una placa compuesta con secuencia de laminado (0/90/90/0) de dimensiones 10 por 5 pulgadas, es sometida a una carga de 3 lbf/in en el extremo como se muestra en la figura (3.4) el espesor total de la placa es de 1". Las propiedades de material utilizadas se resumen en la tabla (3.1). La vista superior de la placa se muestra en la figura (3.5).

Las condiciones de contorno utilizadas para este ejemplo se pueden resumir como sigue:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad w = \psi_x = \psi_y = 0 \\ x = 10, \quad Q_z = 3 \end{aligned}$$

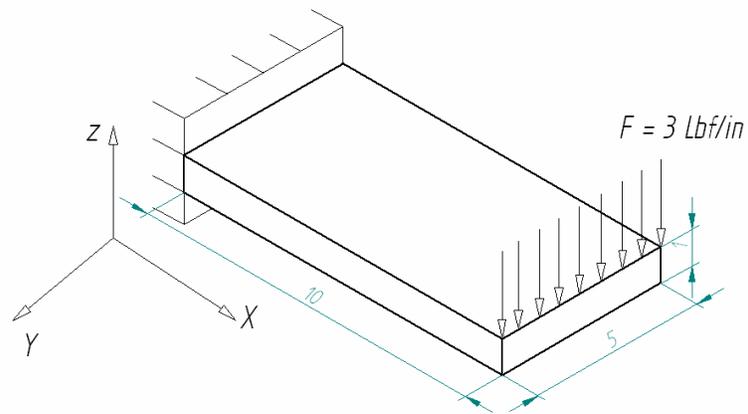


Figura 3.4: Placa en voladizo sujeta a carga transversal en el extremo.



Figura 3.5: Vista superior de la placa.

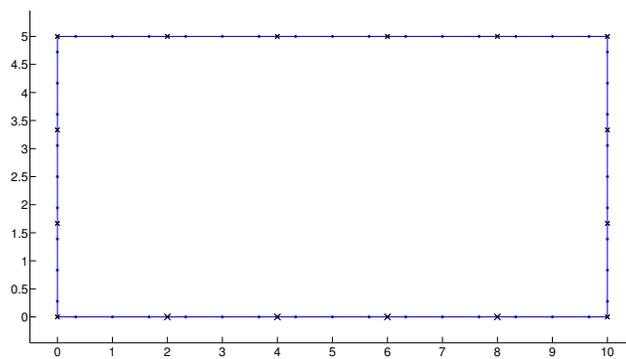


Figura 3.6: Malla de elementos de contorno cuadráticos.

Tabla 3.1: Propiedades mecánicas del material (compuesto, Boron/Epoxy), ejemplo (3.6.1)

Constantes (psi)	Valor
E_x	30×10^6
E_y	3×10^6
E_z	3×10^6
G_{xy}	1.5×10^6
G_{zx}	1.5×10^6
G_{zy}	0.6×10^6
ν_{xy}	0.25
ν_{zx}	0.25
ν_{zy}	0.25

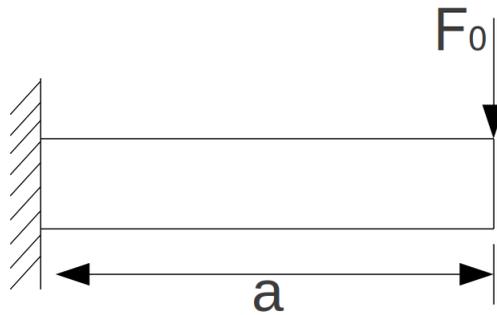


Figura 3.7: Viga en voladizo sujeta a carga transversal en el extremo.

La verificación de los resultados consiste en comparar las deflexiones obtenidas en el modelo BEM con soluciones analíticas y soluciones obtenidas con el paquete de elementos finitos *ANSYS*[®]13.0.

La malla de elementos de contorno para 16 elementos se muestra en la figura (3.6).

Para las condiciones de carga indicadas se obtuvieron los resultados mostrados en la figuras (3.8), (3.9) y (3.10) donde se muestran los resultados obtenidos para w , ψ_x y ψ_y de un borde de la placa contra la coordenada x del punto correspondiente, se muestran las soluciones para 16, 12, 10 y 6 elementos de contorno, comparándolas con la solución analítica para la viga espesa laminada disponible en Reddy (2004) y descritas en la ecuación (3.47).

La solución analítica de la viga mostrada en la figura (3.7) corresponde a la siguiente expresión:

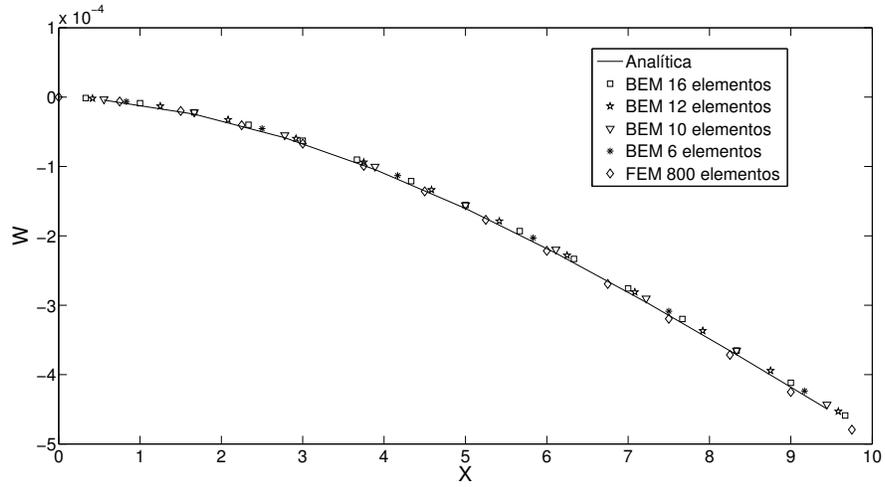


Figura 3.8: w para $y = 0$. Con carga Q_z

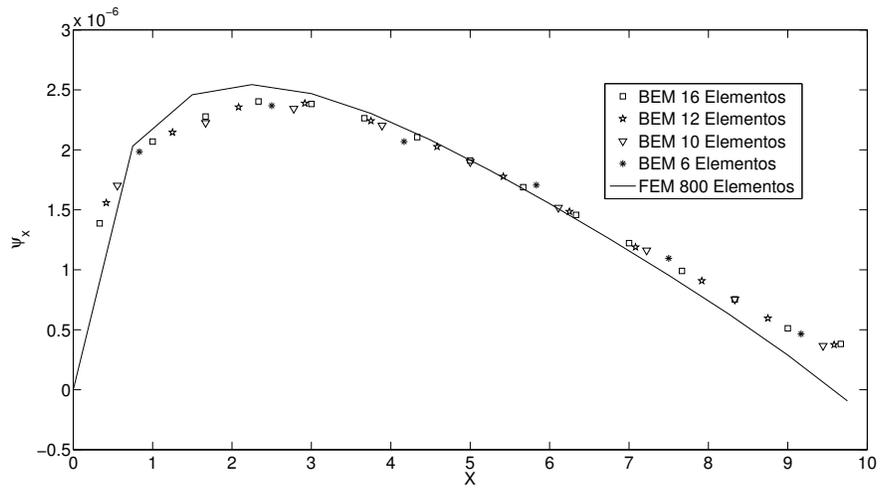


Figura 3.9: ψ_x para $y = 0$. Con carga Q_z

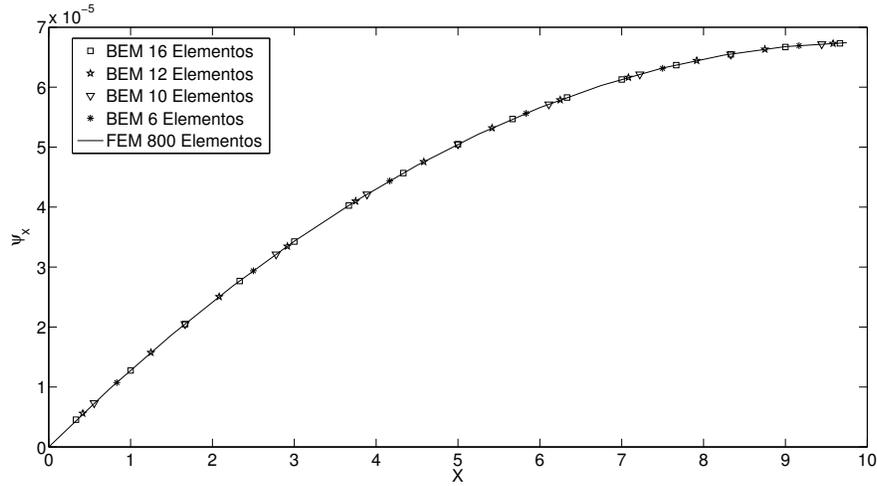


Figura 3.10: ψ_y para $y = 0$. Con carga Q_z

Tabla 3.2: Comparación de las deflexiones w y % de error entre BEM, FEM y solución exacta

Malla	$w_{max} \times 10^{-3}$	% Error
BEM 16 Elementos	0.4589	2.11
BEM 12 Elementos	0.4531	0.82
BEM 10 Elementos	0.4432	1.38
BEM 6 Elementos	0.4236	5.74
FEM 800 Elementos	0.4980	10.81
Exácta	0.4494	-

$$w(x) = \frac{F_0 b a^3}{6 E_{xx}^b I_{yy}} \left[3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right] + \frac{F_0 b a}{K G_{xz}^b h} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (3.47)$$

Donde b es el ancho de la placa, h el espesor total de la placa $E_{xx}^b I_{yy} = b/D_{11}^*$, $G_{xz}^b = 1/A_{55}^* h$, D^* y A^* corresponden a la inversa de la matriz de rigidez a flexión y rigidez extensional de la viga respectivamente, y x es la abscisa cartesiana de la viga.

En la figura (3.8) se puede observar que los resultados obtenidos con BEM son bastante cercanos a la solución analítica. En la tabla (3.2) se presentan los valores de deflexión máxima y porcentaje de error obtenidos para cada una de las mallas BEM y FEM en comparación con la solución analítica. Se observa que con el programa de elementos de contorno desarrollado es posible obtener soluciones con un porcentaje de error menor al 1%. La precisión de las soluciones no solo depende de la cantidad de

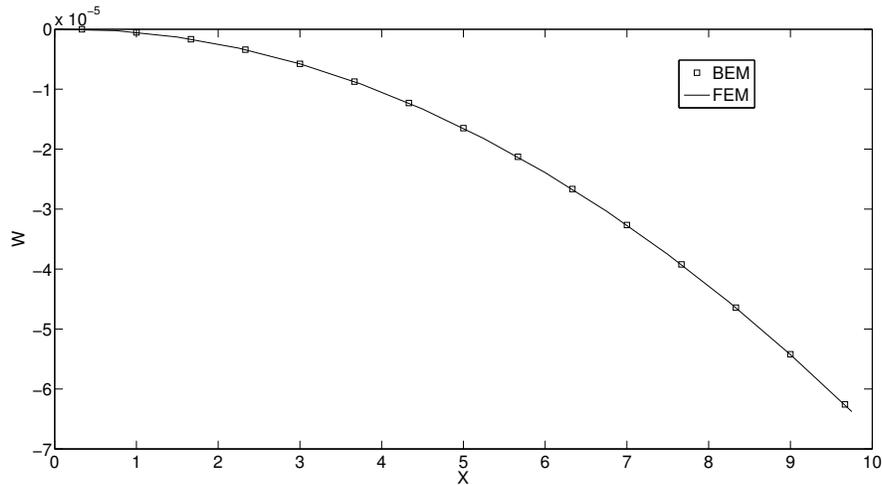


Figura 3.11: w a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_x

elementos utilizados sino que también depende en gran medida de la cantidad de puntos de Gauss utilizados para la solución de las integrales numéricas. En el problema presentado se utilizó una cantidad constante de 10 puntos de Gauss para todas las mallas. Posteriormente se estudiará la incidencia de la cantidad de puntos de Gauss sobre la precisión de la solución para una cantidad determinada de elementos.

3.6.2. Placa compuesta en voladizo con momento M aplicado en el extremo

La placa analizada en la sección anterior ahora es analizada, en primer lugar bajo la acción de un momento torsor $M_X = 3.0$ en lugar de la carga transversal Q_z . El modelo BEM consiste de 16 elementos, las soluciones obtenidas fueron comparadas con resultados FEM obtenidos con 800 elementos. Los resultados obtenidos para w y ψ_y , se muestran en las figuras (3.11), (3.12) y (3.13). Las condiciones de contorno utilizadas se resumen como:

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad w = \psi_x = \psi_y = 0 \\
 x = 10, \quad M_x = 3
 \end{aligned}$$

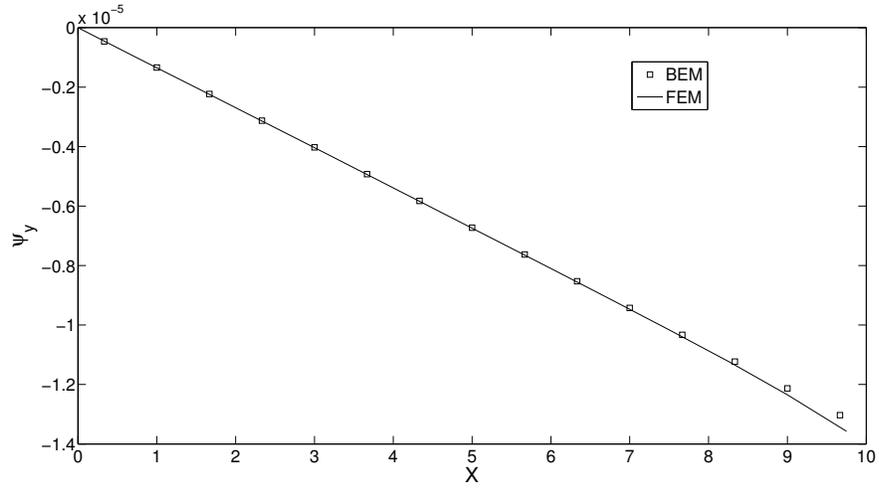


Figura 3.12: ψ_y a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_x

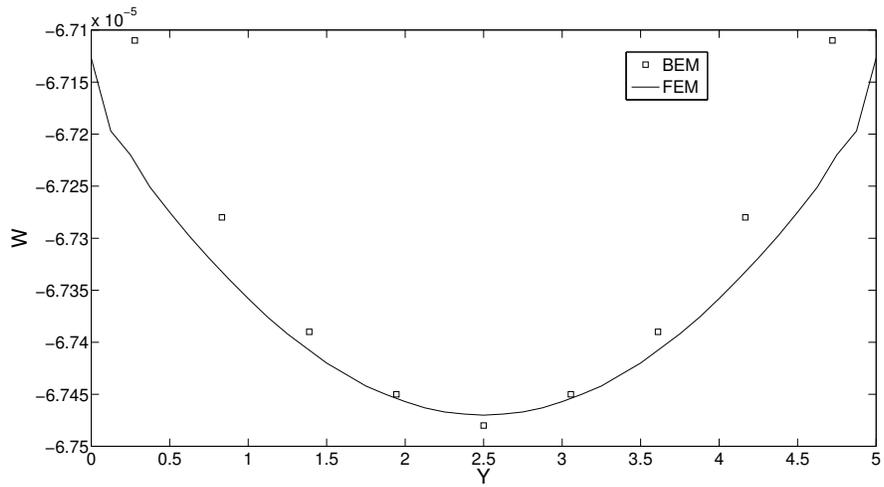


Figura 3.13: w a lo largo de $X = 10$. Con carga M_x

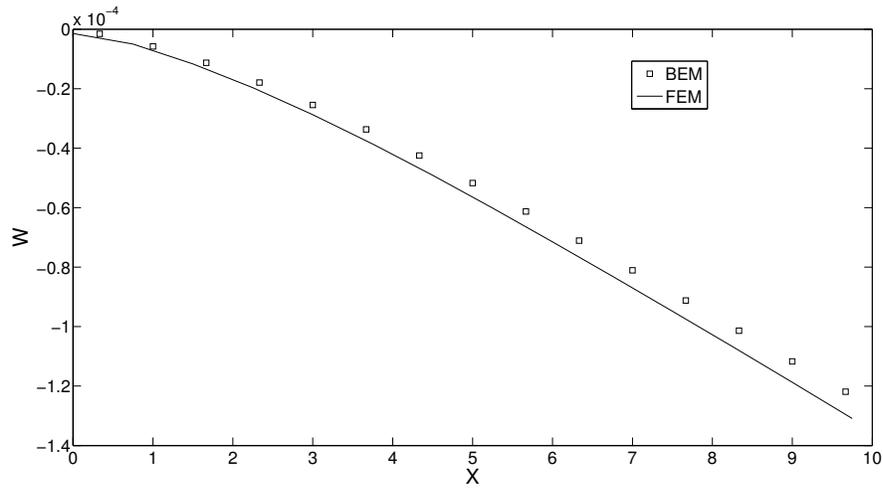


Figura 3.14: w a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_y

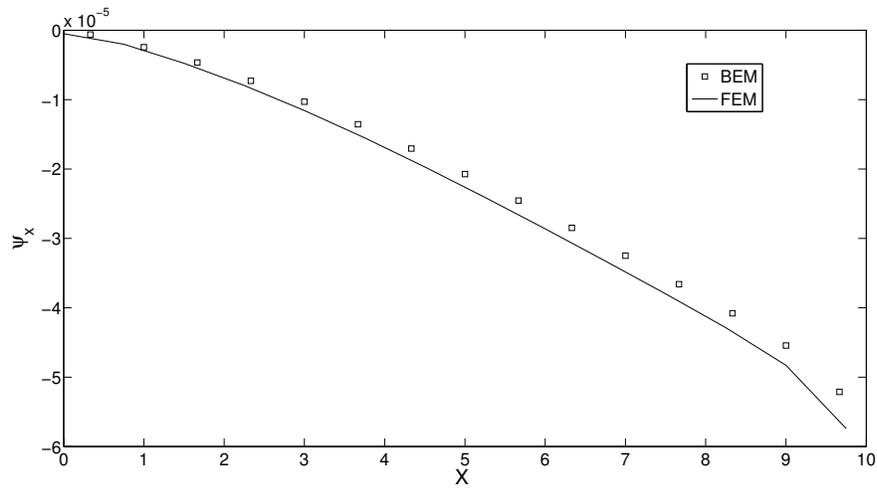


Figura 3.15: ψ_x a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_y

Aplicando momento flector $M_y = 3.0$ se obtienen los resultados presentados en las figuras (3.14), (3.15) y (3.16).

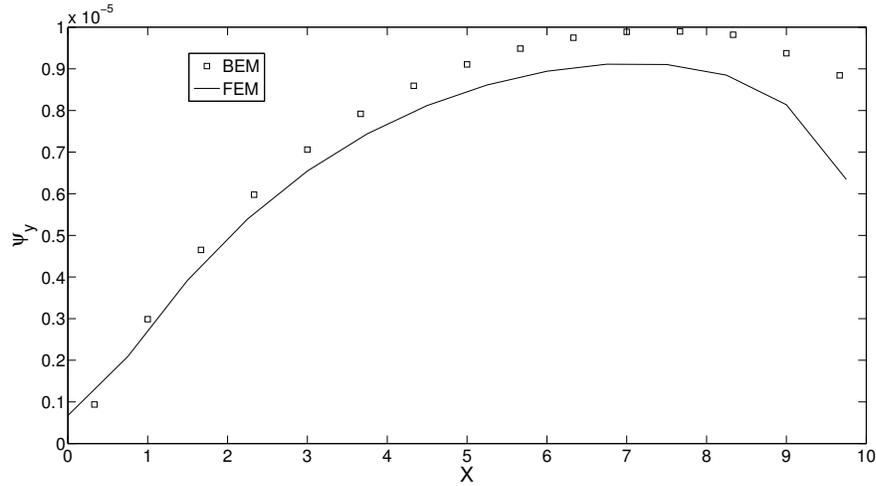


Figura 3.16: ψ_y a lo largo de $Y = 0$. Con carga M_y

3.6.3. Placa cuadrada simplemente apoyada con presión distribuida en el dominio

Una placa cuadrada con laminado simétrico (0/90/90/0) y espesor total h es sometida a carga transversal uniforme q , la placa se encuentra simplemente apoyada en todos sus bordes, la longitud del lado de la placa es a . la vista superior de la placa se muestra en la figura (3.17). Para este modelo se utilizaron los siguientes valores $a = q = 1$, $h = 0.1$. Las propiedades mecánicas del material utilizadas se resumen en la tabla (3.3).

Las condiciones de contorno utilizadas se resumen como:

$$\begin{aligned} x = 0, a, \quad w = \psi_y = 0 \\ y = 0, a, \quad w = \psi_x = 0 \end{aligned}$$

La solución analítica tomada como referencia $w = 10.25022$, se encuentra disponible en Wang y Schweizerhof (1996). Este modelo fue analizado para mallas con 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 32, 36 y 40 elementos para verificar la convergencia, para todas las mallas se utilizaron 10 puntos de Gauss para la solución de las integrales numéricas. El porcentaje de error obtenido con respecto a la solución analítica para deflexión en el centro de la placa ($a/2, a/2$) para cada malla se muestra en la figura (3.18).

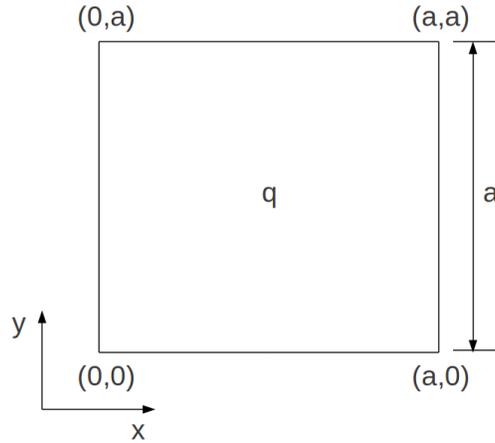


Figura 3.17: Vista superior placa

Tabla 3.3: Propiedades mecánicas del material ejemplo (3.6.3)

Constantes	Valor
E_x/E_y	25
G_{XY}/E_y	0.5
G_{XZ}/E_y	0.2
ν_{xy}	0.25
ν_{zx}	0.25
ν_{zy}	0.25

Este mismo modelo fue analizado variando la cantidad de puntos de Gauss utilizados para verificar la sensibilidad de la solución con la variación en los puntos de Gauss, en la figura (3.19) se muestra la variación de la deflexión en el centro de la placa para un intervalo de 5 a 14 puntos de Gauss.

3.6.4. Placa cuadrada empotrada en todos sus bordes con presión distribuida en el dominio

La placa mostrada en el ejemplo anterior es ahora analizada utilizando un esquema de laminado (45/-45/-45/-45/-45/-45/45/-45/45), las propiedades mecánicas se resumen en la tabla (3.4).

Las condiciones de contorno utilizadas para la placa empotrada se resumen de la siguiente manera:

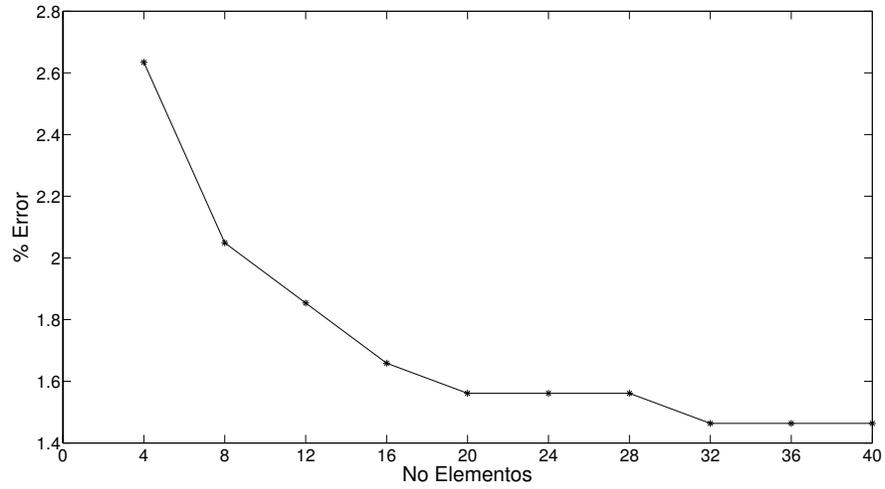


Figura 3.18: Convergencia del modelo

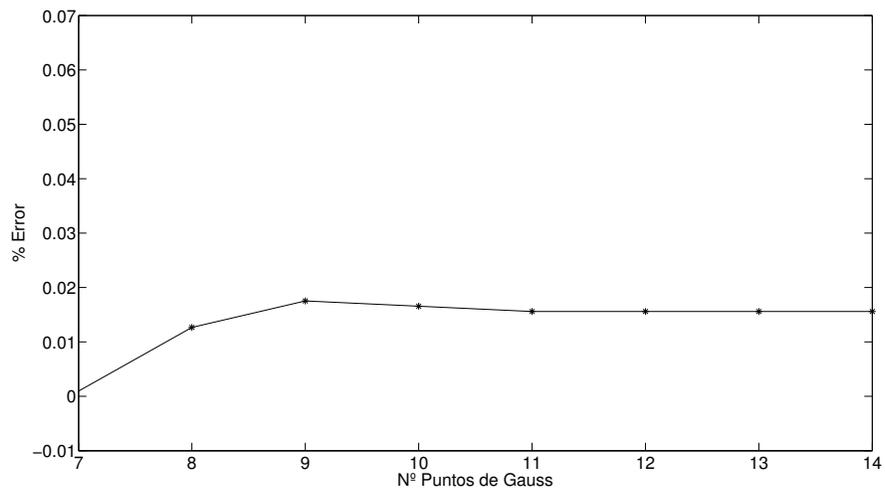


Figura 3.19: Convergencia del modelo variando la cantidad de puntos de Gauss utilizados para las integrales numéricas

Tabla 3.4: Propiedades mecánicas del material

Constantes	Valor
E_x/E_y	40
G_{XY}/E_y	0.6
G_{XZ}/E_y	0.5
ν_{xy}	0.25
ν_{zx}	0.25
ν_{zy}	0.25

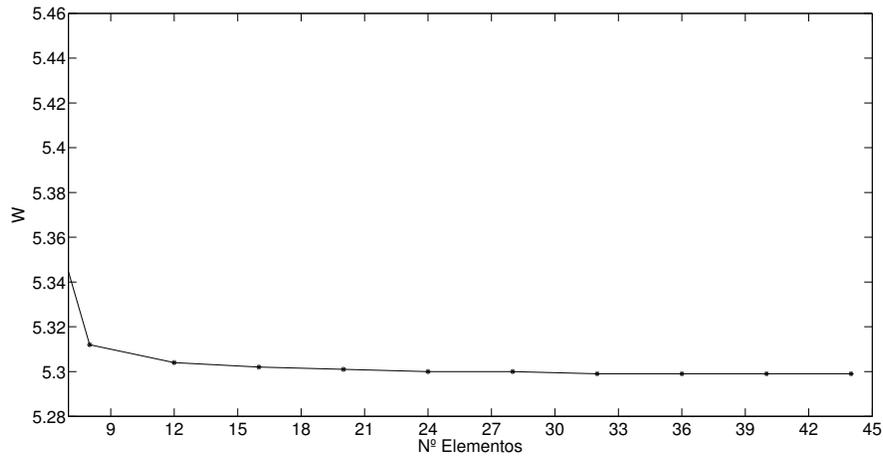


Figura 3.20: Convergencia de la solución variando la cantidad elementos para el laminado $(+45/-45)_S$

$$x = 0, a, \quad w = \psi_x = \psi_y = 0$$

$$y = 0, a, \quad w = \psi_x = \psi_y = 0$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura (3.20), es posible observar una solución convergente para la deflexión de las placa, los resultados BEM pueden ser comparados con la solución por elementos finitos mostrada en la tabla (3.5).

Tabla 3.5: Solución FEM laminado (+45/ - 45)_s

W_{max}	<i>Elementos</i>
5.2598	400

3.6.5. Conclusiones

La formulación por elementos de contorno para el análisis de deflexión de placas espesa laminadas fue presentada. Las integrales relacionadas con cargas distribuidas en el dominio fueron llevadas al contorno utilizando el método de integración radial. Se utilizaron elementos cuadráticos discontinuos para aproximar la geometría del contorno e interpolar los desplazamientos en el contorno. La convergencia de la solución fue analizada variando la cantidad de elementos, la convergencia de las integrales numéricas fue evaluada variando la cantidad de puntos de Gauus. Varios ejemplos representativos para el caso estático fueron presentados. Los resultados obtenidos muestran un buen ajuste con soluciones FEM y soluciones analíticas disponibles en la literatura.

Capítulo 4

Análisis de problemas dinámicos

4.1. Introducción

En ingeniería se suelen usar tres tipos principales de análisis dinámico: análisis transiente, análisis modal y análisis armónico. Cuando las cargas que actúan sobre la estructura varían con respecto al tiempo de manera no cíclica se realiza análisis transiente, donde se puede estudiar la variación de las variables de respuesta del modelo en función del tiempo. Si es necesario estudiar la vibración de la estructura en ausencia de cargas externas dependientes del tiempo, se debe realizar un análisis modal, donde se obtienen los modos y frecuencias naturales de vibración con el fin de poder diseñar una estructura cuyas frecuencias naturales de vibración sean diferentes a las posibles frecuencias de las cargas dinámicas externas a las que estará sometida la estructura en servicio. Por otro lado si queremos conocer la respuesta de la estructura cuando esta es sometida a cargas cíclicas armónicas o cargas que pueden ser representadas como funciones sinusoidales del tiempo, debemos realizar un análisis armónico.

En este capítulo se muestra la formulación dinámica BEM para la solución de problemas transientes, armónicos y modales para placas gruesas laminadas. Tanto el vector de cargas, como la matriz de masa son derivadas utilizando RIM.

4.2. Análisis transiente

El método de integración radial será aplicado para el calculo de las integrales relacionadas con las fuerzas de cuerpo para problemas transientes. La integración en el tiempo será realizada utilizando el método de Houbolt (1950). El aspecto más importante de este método en comparación con otros métodos de integración en el tiempo basados en aproximaciones por diferencias finitas, es la introducción de un amortiguamiento artificial, el cual trunca la influencia de los modos superiores en la respuesta, ver Partridge (2000).

Considere que las únicas fuerzas de cuerpo presentes en el dominio son debido al campo de aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}$ así:

$$\mathbf{q} = \rho h \ddot{\mathbf{u}} \quad (4.1)$$

El esquema de integración de Houbolt, es un algoritmo implícito no condicionalmente estable en el cual el campo de aceleraciones es aproximado de la siguiente forma:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2\mathbf{u}^{t+\Delta t} - 5\mathbf{u}^t + 4\mathbf{u}^{t-\Delta t} - \mathbf{u}^{t-2\Delta t}) \quad (4.2)$$

La ecuación (4.2) es la formula de diferencias finitas hacia atrás con orden de error $O(\Delta t^2)$. Donde:

t Intervalo de tiempo entre pasos consecutivos de tiempo.

$t + \Delta t$ Paso de tiempo actual.

$t - \Delta t$ Paso de tiempo inmediatamente anterior a paso t .

$t + 2\Delta t$ Paso de tiempo inmediatamente anterior a paso $t - \Delta t$.

Δt Intervalo de tiempo entre pasos consecutivos.

Después de transformar todas las integrales de dominio al contorno, la forma discreta general en forma matricial compacta de la ecuación integral de contorno (3.3), puede ser escrita como sigue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{f} \quad (4.3)$$

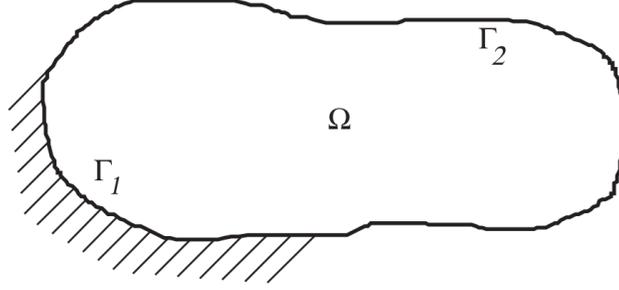


Figura 4.1: Contorno con grados de libertad libres y restringidos.

El termino adicional \mathbf{M} que aparece en la ecuación (4.3) es la matriz de masa y puede ser calculada utilizando RIM mediante:

$$\mathbf{M} = \rho h \mathbf{S} \mathbf{F}^{-1} \quad (4.4)$$

Así ecuación (4.3) en el instante $t + \Delta t$ queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{H} \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{G} \mathbf{p}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t} \quad (4.5)$$

Substituyendo en la ecuación (4.2) en la (4.5) tenemos:

$$(2\mathbf{M} + \Delta t^2 \mathbf{H}) \mathbf{u}^{t+\Delta t} - \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{G} \mathbf{p}^{t+\Delta t} + \mathbf{f}^{t+\Delta t}) = \mathbf{M} (5\mathbf{u}^t - 4\mathbf{u}^{t-\Delta t} - \mathbf{u}^{t-2\Delta t}) \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) permite calcular la distribución de \mathbf{u} en el instante de tiempo $t + \Delta t$ usando las condiciones de contorno en ese instante de tiempo y la información de los tres pasos de tiempo anteriores.

4.3. Análisis armónico

Para obtener la respuesta harmónica de la ecuación (4.3), el contorno debe ser dividido en Γ_1 y Γ_2 ver figura (4.1), en Γ_1 $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}} = 0$ y en Γ_2 $\mathbf{q} = 0$. Así la ecuación (4.3), puede ser escrita como,

ver Albuquerque et al. (2007):

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_2 + \hat{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f} \quad (4.7)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}_{22} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12} \\ \hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_{22} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Los subíndices 1 y 2 están definidos para las fronteras Γ_1 y Γ_2 respectivamente.

Asumiendo que los desplazamientos y fuerzas distribuidas son funciones armónicas del tiempo, pueden ser expandidos de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(t) = \Phi e^{-i\omega t}, \ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 \Phi e^{-i\omega t}, \mathbf{f}(t) = \Psi e^{-i\omega t} \quad (4.9)$$

Donde ω es la frecuencia de excitación, Φ y Ψ son las amplitudes de los desplazamientos y fuerzas distribuidas respectivamente. Reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.8) obtenemos:

$$(\hat{\mathbf{H}} - \omega^2 \hat{\mathbf{M}})\Phi = \Psi \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) representa un problema algebraico de autovalores el cual es resuelto incrementando ω en pasos pequeños, en cada paso esta ecuación es resuelta obteniendo el autovector para cada autovalor.

4.4. Análisis modal

Para problemas dinámicos estacionarios, el vector de fuerzas de cuerpo \mathbf{q} esta dado por:

$$\mathbf{q} = \rho h \omega^2 \mathbf{u} \quad (4.11)$$

Así, la ecuación (3.42) puede ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \rho h \omega^2 \mathbf{S} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} \quad (4.12)$$

De esta manera, podemos escribir la ecuación (4.3) como:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{q} + \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} \quad (4.13)$$

Para el análisis modal se realiza un procedimiento similar al utilizado para problemas armónicos, el contorno se divide en Γ_1 y Γ_2 ver figura (4.1), de tal manera que la ecuación (4.13) pueda ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{22} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{22} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Cuando $\mathbf{u}_1 = 0$ y $\mathbf{p}_1 = 0$, la ecuación (4.14) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{12} \mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_{11} \mathbf{p}_1 &= \omega^2 \mathbf{M}_{12} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{H}_{22} \mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_{21} \mathbf{p}_1 &= \omega^2 \mathbf{M}_{22} \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ó de forma compacta:

$$\hat{\mathbf{H}} \mathbf{u}_2 = \omega^2 \hat{\mathbf{M}} \mathbf{u}_2 \quad (4.16)$$

La ecuación (4.16) puede ser reescrita como un problema de autovalores-autovectores, así:

$$\Upsilon \mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_2 \quad (4.17)$$

Donde:

$$\Upsilon = \hat{\mathbf{H}}^{-1} \hat{\mathbf{M}} \quad (4.18)$$

λ es el autovalor y esta dado por:

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (4.19)$$

Tabla 4.1: Propiedades mecánicas del material ejemplo (4.5.1.1)

Constantes (Pa)	Valor
E_x	4000×3
E_y	2000×3
G_{xy}	1000×3
G_{zx}	1000×3
G_{zy}	500×3
ν_{xy}	0.25
ν_{zx}	0.25
ν_{zy}	0.25
$\rho \text{ kg/m}^3$	4000

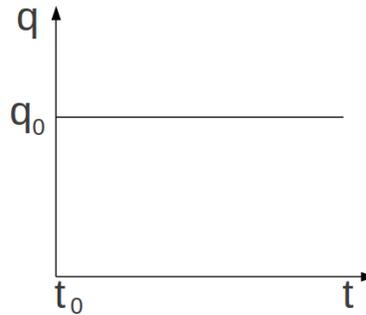


Figura 4.2: Carga instantánea de presión

y \mathbf{u}_2 es el autovector.

4.5. Ejemplos numéricos

4.5.1. Problemas transientes

4.5.1.1. Placa simplemente apoyada con carga de presión impulsiva

Una placa cuadrada simplemente apoyada con $a = 1.0$, ver figura (3.17) de espesor total $h = 0.1$ y esquema de laminado (0/90/90/0), es sometida a una carga presión impulsiva $q_0 = 1.0$ ver figura (4.2). Las propiedades del material utilizadas se resumen en la tabla (4.1). En la figura (4.3) se muestra la deflexión en el centro de la placa en función del tiempo para diferentes funciones de

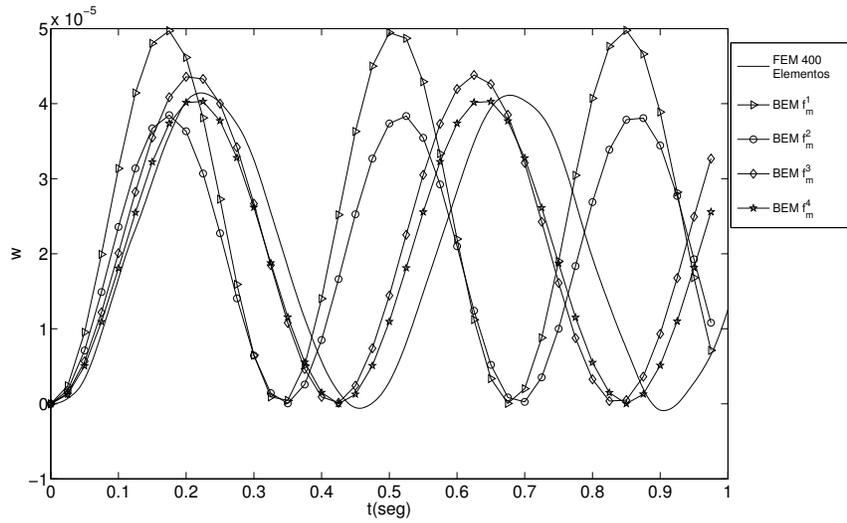


Figura 4.3: Respuesta transiente para carga instantánea de presión con diferentes funciones de aproximación RIM

aproximación RIM con mallas BEM de 8 elementos para cada función de aproximación. Se puede observar que con la función de aproximación f_4^m se obtiene un mejor ajuste de la solución con respecto al modelo FEM. En la figura (4.4) se verifica la convergencia del modelo para mallas con 8, 12 y 16 elementos, utilizando la función de aproximación f_4^m , se puede observar que con la malla de 8 elementos se logra alcanzar la convergencia de la solución, también se observa que con 16 elementos se genera una inestabilidad de la solución en el instante de tiempo $t = 0.6$, lo cual sugiere que la influencia del paso de tiempo utilizado Δt debe ser analizada. En la figura (4.5) se puede observar la sensibilidad de la solución al paso de tiempo para un modelo analizado con 8 elementos con la función de aproximación f_4^m .

4.5.1.2. Placa empotrada con carga de presión impulsiva

El ejemplo analizado en la subsección (4.5.1.1) es ahora analizado con todos sus bordes empotrados. La solución para la deflexión del centro de la placa se muestra en la figura (4.6), el modelo FEM comparativo fue analizado con 400 elementos, el modelo BEM con 8 elementos, utilizando la

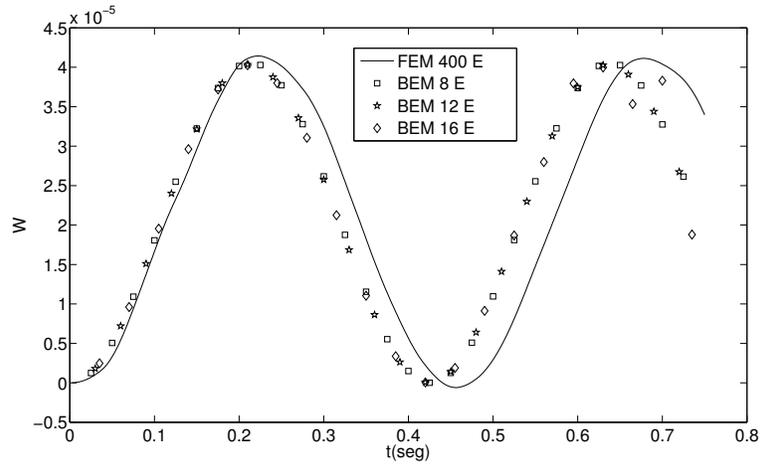


Figura 4.4: Convergencia de la malla para la función de aproximación f_4^m

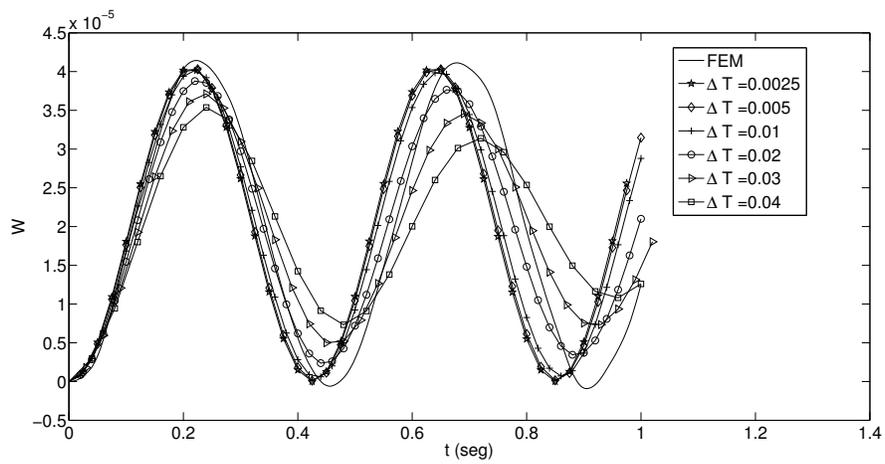


Figura 4.5: Sensibilidad al paso de tiempo Δt

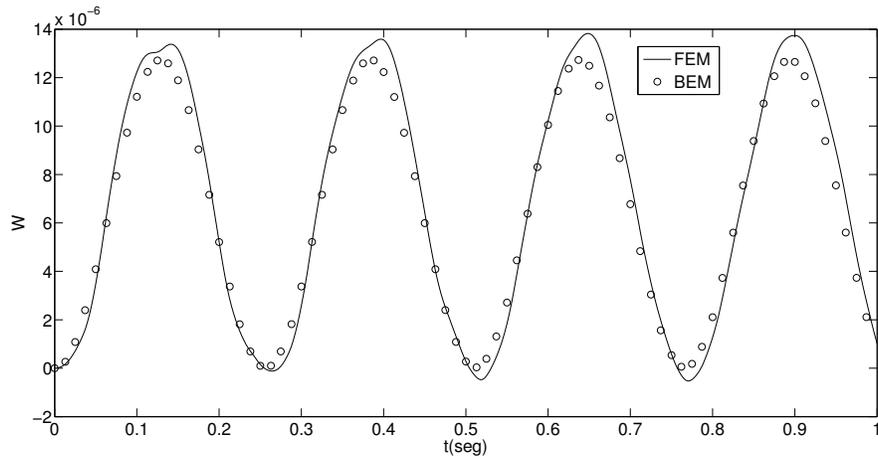


Figura 4.6: Respuesta transiente del centro de la placa empotrada

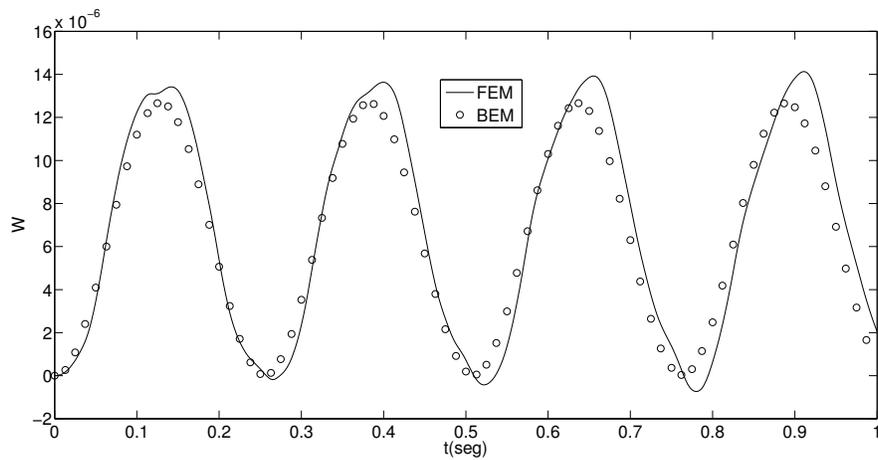


Figura 4.7: Respuesta transiente del centro de la placa para laminado impar $(+45/-45)_s$ bajo carga de presión impulsiva

función de aproximación RIM f_4^m y $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ para la integración en el tiempo.

4.5.1.3. Placa empotrada con carga de presión impulsiva para un laminado impar

El ejemplo analizado en la subsección (4.5.1.2) es ahora analizado utilizando el esquema de laminado $(45/-45/45/-45/45/-45/45/-45/45)$. Los resultados obtenidos para la deflexión del centro de la placa se muestran en la figura (4.7).

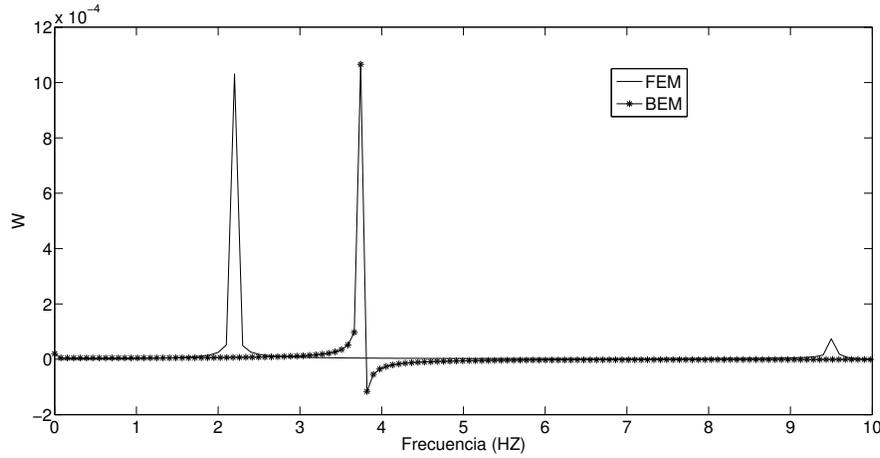


Figura 4.8: Respuesta armónica de la placa simplemente apoyada para el centro de la placa

4.5.2. Problemas armónicos

4.5.2.1. Placa simplemente apoyada con carga de presión distribuida

En este ejemplo se realiza el análisis armónico de la placa utilizada en la subsección (4.5.1.1). Las mismas propiedades de material y condiciones de contorno son utilizadas, los valores de frecuencia mínima, máxima e incremento se tomaron como: $\omega_{min} = 0$, $\omega_{max} = 10$ y $\omega_{inc} = 0.07798$ respectivamente. Los resultados obtenidos se muestran en la figura (4.8), cabe destacar que los valores obtenidos de desplazamiento más que el valor cuantitativo, lo que describen es la frecuencia o el rango de frecuencias donde se espera que ocurra resonancia, tanto para los modelos FEM como BEM los valores de los desplazamientos obtenidos suelen variar significativamente con cambios pequeños en ω_{inc} o cambios en el rango de frecuencias sobre los cuales se analiza el modelo, en la solución presentada en figura (4.8) se encuentran cercanos el rango de frecuencias de resonancia obtenidos para las soluciones BEM y FEM.

4.5.2.2. Placa rectangular empotrada

En este ejemplo es realizado el análisis armónico de una placa rectangular empotrada en dos de sus bordes como se muestra en la figura (4.9), para este problema se toman las mismas propiedades

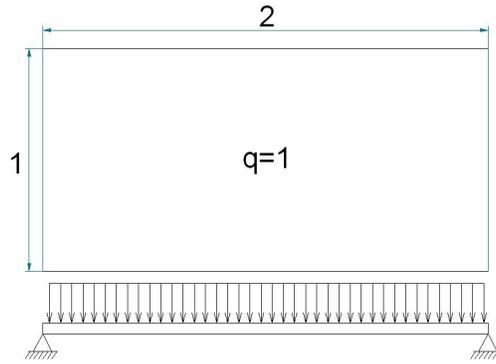


Figura 4.9: Placa rectangular empotrada en dos de sus bordes

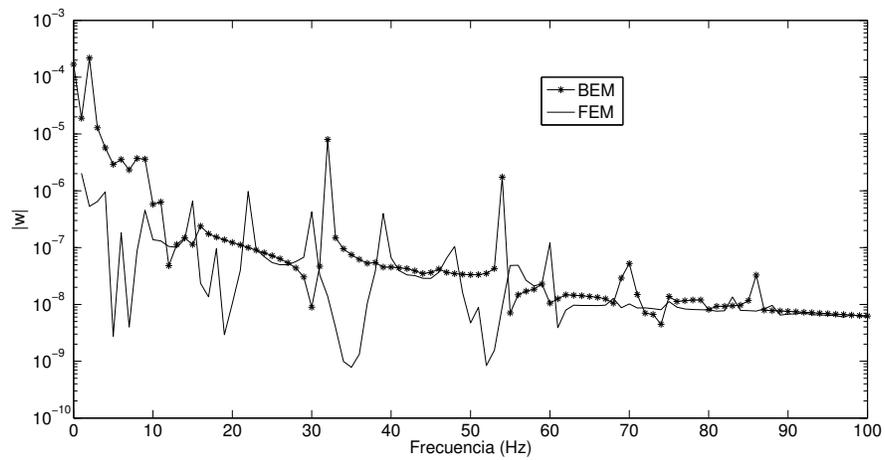


Figura 4.10: Respuesta armónica placa rectangular para el nodo ubicado en $(1, 0.5)$

de material utilizadas en la subsección (4.5.1.1), el espesor total de la placa es tomado como $h = 0.1$ y es aplicada presión uniforme $q = 1.0$ distribuida sobre toda la placa. El modelo BEM fue analizado con 8 elementos y el modelo FEM fue analizado con 200 elementos. Los resultados obtenidos se muestran en la figura (4.10), donde se puede observar que los picos de deflexión en los cuales ocurre resonancia se dan en el mismo rango de frecuencias para los modelos BEM y FEM.

Tabla 4.2: Frecuencias naturales de vibración ejemplo (4.5.3.1)

Frecuencias (Hz)					
Método	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
FEM	3.8996	7.0741	7.5492	10.050	11.733
BEM	3.9539	7.0168	7.7995	10.5568	11.7906

Tabla 4.3: Frecuencias naturales de vibración ejemplo (4.5.3.2)

Frecuencias (Hz)					
Método	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
FEM	2.5848	3.4441	4.9111	6.2108	6.8496
BEM	2.3098	3.8533	4.8109	5.5369	6.3472

4.5.3. Problemas modales

4.5.3.1. Placa cuadrada empotrada con carga de presión distribuida

En este ejemplo se realiza el análisis modal de la placa analizada en la subsección (4.5.1.2) para la extracción de las frecuencias naturales de vibración. Los resultados obtenidos para los 5 primeros modos de vibración se muestran en la tabla (4.2). El modelo BEM fue analizado con 8 elementos y 9 puntos internos, el modelo FEM fue analizado con 400 elementos.

4.5.3.2. Placa rectangular empotrada con carga de presión distribuida

En este ejemplo se realiza el análisis modal de la placa mostrada en la figura (4.9) pero con todos sus bordes empotrados. Se utilizan las mismas propiedades de material, esquema de laminado y espesor de placa del ejemplo de la subsección (4.5.1.1). El modelo BEM fue analizado con 8 elementos y el modelo FEM con 800 elementos. Las 5 primeras frecuencias naturales de vibración obtenidas se resumen en la tabla (4.3) para los modelos BEM y FEM.

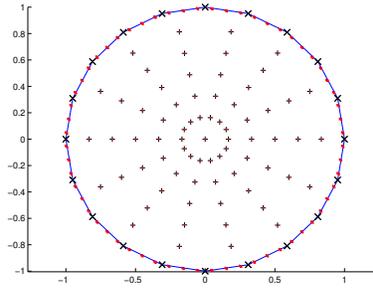


Figura 4.11: Placa circular discretizada

Tabla 4.4: Frecuencias naturales de vibración ejemplo (4.5.3.3)

Frecuencias (Hz)					
Método	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
FEM	1.2012	2.3029	2.5378	3.7771	3.7974
BEM	0.9702	2.2630	2.5285	2.6221	2.6385

4.5.3.3. Placa circular empotrada con carga de presión distribuida

Una placa circular de radio $r = 1$ y espesor $h = 0.1$, empotrada en todo su perímetro, es sometida a una carga de presión distribuida $q = 1.0$ en toda su área. Se utilizan la mismas propiedades de material y esquema de laminado del ejemplo de la subsección (4.5.1.1). Para el modelo BEM se utilizaron 20 elementos y 71 puntos internos como se muestra en la figura (4.11), para el modelo FEM se utilizaron 24964 elementos. Las 5 primeras frecuencias naturales de vibración obtenidas se resumen en la tabla (4.4) para los modelos BEM y FEM.

4.5.4. Conclusiones

En este capítulo fue presentada la formulación por elementos de contorno para el análisis de problemas dinámicos en placas gruesas laminadas. La integración en el tiempo para problemas transientes fue realizada utilizando el método de Houbolt. Para todas las formulaciones dinámicas en general la función de aproximación spline de cuarto orden utilizada para el cálculo de la matriz de masa, fue la que ofreció mayor ajuste con respecto a la solución FEM. Para problemas transientes se encontró gran sensibilidad de la solución al incremento de tiempo, provocando divergencia de la

solución con incrementos de tiempo muy pequeños debido a acumulación de errores numéricos. En los problemas armónicos se encontró gran sensibilidad de la solución a variables del modelo como la malla, incremento de frecuencia, frecuencia de inicio dificultando la comparación con modelos equivalentes FEM debido a la naturaleza variable de este tipo de problemas. En los problemas modales se obtuvieron resultados con buen ajuste con respecto a las soluciones FEM con menor precisión para los problemas con muchos elementos debido a la acumulación de errores numéricos.

Capítulo 5

Implementación computacional

5.1. Introducción

La solución numérica propuesta en los capítulos anteriores requiere del uso de herramientas computacionales para su implementación, debido a que la solución manual, incluso con uno pocos elementos requeriría de la realización de un gran número de pasos haciendo impráctica esta alternativa. La implementación de la solución BEM propuesta puede ser realizada en cualquier lenguaje de computadora como Fortran, MatLab C, C++, Java, Python, Basic etc. De los lenguajes mencionados, Fortran y MatLab han sido utilizados tradicionalmente para aplicaciones científicas, debido a la gran cantidad de librerías que ofrecen para la solución de problemas matemáticos además de de su arquitectura pensada originalmente para aplicaciones científicas. Fortran es un lenguaje de computación de alto nivel con compiladores muy eficientes usados en general en la computación de alto desempeño. Por otro lado MatLab es un paquete de álgebra computacional que ejecuta secuencias de comandos. En los inicios de BEM, Fortran fue el lenguaje favorito para las implementación de las diferentes formulaciones debido a la capacidad limitada de los ordenadores de la época y la no-disponibilidad de lenguajes interpretados, aunque la eficiencia en tiempo de los un programa ejecutado por medio de un interprete suele ser menor que la de uno compilado, esta diferencia se ha venido haciendo cada vez menor con el avance de las computadoras. En este trabajo se escogió

el lenguaje interpretado MatLab por ser un paquete de software de uso común, además de ofrecer ventajas como:

- Facilidad para trabajar con matrices, las cuales aparecen frecuentemente en la formulación presentada.
- Ofrece un gran número de librerías matemáticas pre-instaladas que simplifican las labores de programación.
- Es posible verificar soluciones parciales con facilidad por ser un lenguaje de script.
- Permite la graficar variables en la misma interfaz sin recurrir a programas externos.
- Permite exportar gráficos de alta calidad en formato *.EPS* el cual es compatible con sistemas de composición de textos científicos como $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.

5.2. Descripción del programa

En esta sección se describe de manera general el programa desarrollado para la solución de placas gruesas laminadas. En la figura (5.1) se muestra el esquema general utilizado para la solución tanto de problemas estáticos como dinámicos. Algunas de las rutinas desarrolladas están basadas, o son una extensión de las utilizadas en los trabajos de Useche (2007); Albuquerque (2001).

5.2.1. Definición del modelo

El programa implementado es capaz de solucionar problemas de deflexión de placas planas laminadas con cualquier geometría. Por ejemplo, para definir la geometría de la placa mostrada en la figura (3.17), debemos seguir los siguientes pasos:

- Definir las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado

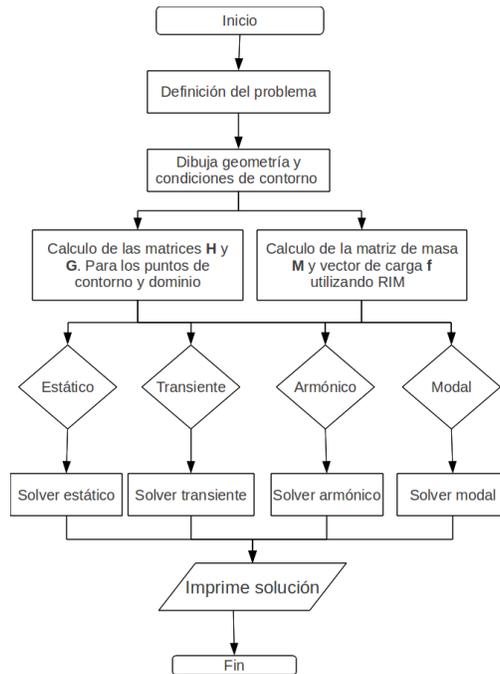


Figura 5.1: Diagrama de flujo general para la solución BEM de placas laminadas

- Definir las cuatro líneas según los puntos definidos en el ítem anterior
- Definir la cantidad de elementos que tendrá cada línea

Luego, utilizando la información de la geometría y las condiciones de contorno, se procede a dibujar la geometría del problema y los símbolos que representan cada condición de contorno, utilizando las funciones gráficas de MatLab.

En la definición del modelo también se especifican las propiedades del material, las cuales deben ser definidas para cada capa, los módulos $E_x, E_y, E_z, G_{xy}, G_{zx}, G_{yz}, \nu_{xy}, \nu_{zx}$ y ν_{yz} deben ser especificados, además del ángulo de inclinación de las fibras en la capa con respecto al sistema coordenado global y el espesor de cada capa.

5.2.2. Cálculo de las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G}

Para la obtención de las matrices de coeficientes de influencia \mathbf{H} y \mathbf{G} se debe recorrer cada uno de los puntos en el contorno y en el dominio, tomando un punto i como punto fuente y un punto j como punto campo. para el cálculo de \mathbf{H} y \mathbf{G} se deben solucionar al menos dos integrales numéricas de forma anidada, una para la evaluación numérica de la solución fundamental y otra para la evaluación numérica de la ecuación integral de contorno, cuya integración es realizada sobre cada elemento obteniendo así matrices de coeficientes \mathbf{H}_e y \mathbf{G}_e para el elemento k las cuales son ensambladas para la obtención de las matrices globales \mathbf{H} y \mathbf{G} .

5.2.3. Cálculo de la matriz de masa \mathbf{M} y el vector de carga \mathbf{f}

Para la obtención tanto de \mathbf{M} como de \mathbf{f} se utiliza RIM, debido a que las integrales relacionadas con estos términos están definidas en el dominio, por lo tanto RIM es utilizado para llevar estas integrales al contorno. para la obtención de \mathbf{M} y \mathbf{f} se deben realizar tres integrales numéricas anidadas, una para la evaluación de la solución fundamental, otra para la evaluación de los términos asociados a RIM y la última relacionada con la ecuación integral de contorno. Estas tres integrales causan que el costo computacional asociado a la obtención de \mathbf{M} y \mathbf{f} sea mucho mayor al asociado a la obtención de \mathbf{H} y \mathbf{G} en incluso mucho mayor al asociado a la solución del sistema de ecuaciones resultante para la obtención de la solución final, a la fecha RIM es el único método viable para la solución del problema presentado en este trabajo, ver Albuquerque et al. (2007), debido a la naturaleza de la solución fundamental utilizada, la cual no permite soluciones particulares analíticas necesarias en otros métodos como DRM.

5.2.4. Obtención de la solución

Con los valores de \mathbf{H} , \mathbf{G} y \mathbf{f} conocidos, es posible obtener la solución del problema para el caso estático, reordenando y transfiriendo los valores de \mathbf{H} y \mathbf{G} correspondientes a los grados de libertad conocidos para obtener un sistema de ecuaciones del tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donde \mathbf{x} es el vector

que contiene los valores de los grados de libertad desconocidos y se puede obtener como $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ ver Brebbia y Dominguez (1992). Para la solución de problemas dinámicos se requieren los valores de \mathbf{M} y utilizando las formulaciones presentadas en el capítulo anterior, se obtiene la solución para problemas transientes, armónicos y modales. Cabe destacar que los valores de \mathbf{H} y \mathbf{G} no deben ser recalculados para cada incremento de tiempo en problemas transientes y por cada incremento de frecuencia en problemas armónicos y modales debido al esquema de integración utilizado para la integración en el tiempo o frecuencia. Así el costo computacional asociado a la obtención de la solución en problemas dinámicos no suele ser mayor al necesario para la obtención de \mathbf{H} y \mathbf{G} .

5.2.5. Trabajos previos

En la revisión bibliográfica realizada se evidencian varios trabajos previos relacionados con el tema, para el desarrollo de las tesis doctorales de Useche (2007) y Albuquerque (2001) tuvieron que ser desarrolladas rutinas de computadora con capacidad para el análisis de placas gruesas isotrópicas y placas delgadas compuestas respectivamente. Estas rutinas fueron suministradas por los autores mencionados para la realización de este trabajo, de tal manera que para obtener los resultados presentados en esta tesis, estas rutinas tuvieron que ser extendidas para el análisis de placas gruesas laminadas simétricas. Algunas rutinas debieron ser desarrolladas completamente como:

- Rutinas para el calculo de las constantes del laminado A_{ij} y D_{ij} a partir de las propiedades mecánicas de cada capa.
- Rutina para el calculo de la solución fundamental para placas gruesas laminadas.
- Rutina para el calculo de los puntos de integración de Gauss-Legendre.

Algunas otras rutinas simplemente debieron ser modificadas parcialmente y adaptadas para ser utilizadas en el análisis de placas gruesas laminadas hasta obtener el conjunto final de códigos utilizados en este trabajo.

5.2.6. Conclusiones

La descripción general del programa implementado para la el análisis de placas gruesas laminadas fue presentada. El conjunto de rutinas desarrolladas ofrecen facilidad de interpretación y modificación, además de escalabilidad para la realización de trabajos futuros.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones finales

En este trabajo fue presentada la formulación por elementos de contorno para el análisis de problemas dinámicos en placas gruesas laminadas.

La revisión teórica para el análisis de deflexión de placas compuestas fue presentada. La teoría de primer orden para laminados fue utilizada para la obtención de las ecuaciones de gobierno de la placa, estas ecuaciones fueron simplificadas para el caso particular de laminados simétricos.

La formulación del método de los elementos de contorno para el análisis dinámico de placas gruesas laminadas fue obtenida utilizando las soluciones fundamentales para el caso estático, considerando los términos inerciales como fuerzas de cuerpo. Las integrales de dominio resultantes de los términos inerciales, fueron llevadas al contorno utilizando el método de integración radial. Cuatro funciones de base radial, utilizadas con éxito en el método de los elementos de contorno de reciprocidad dual fueron probadas utilizando el método de integración radial.

En el análisis de problemas estáticos los resultados numéricos fueron comparados con soluciones analíticas y numéricas, obtenidas con el método de los elementos finitos. La convergencia de los resultados fue analizada. En el análisis se encontró que para obtener soluciones con un buen nivel de precisión no se requiere una gran cantidad de puntos internos como sucede en el método de los

elementos de contorno de reciprocidad dual, pudiendo obtener soluciones con porcentajes de error alrededor del 1% definiendo solamente un punto interno.

En el análisis de problemas dinámicos, los resultados obtenidos igualmente fueron comparados con resultados numéricos obtenidos a partir del método de los elementos finitos.

En el análisis de problemas transientes, fue utilizado el método de Houbolt para la integración en el tiempo, la influencia del incremento de tiempo en la precisión de los resultados fue analizada, se encontró la divergencia de la solución con pasos de tiempo muy pequeños o menores a una diezmilésima de segundo, con pasos de tiempo mayores se obtuvo buen ajuste de la solución. En los problemas armónicos se encontró gran sensibilidad de la solución a parámetros del modelo como el tamaño de la malla y el incremento de frecuencia. Los problemas modales mostraron buen ajuste con las soluciones numéricas por elementos finitos.

La formulación presentada demostró ser útil para el análisis dinámico de placas gruesas laminadas, en la mayoría de ejemplos representativos presentados se obtuvieron resultados satisfactorios, excepto por algunos problemas armónicos donde la naturaleza altamente variable de este tipo de problemas, impidió la obtención de soluciones con un claro nivel de ajuste con respecto a los resultados por elementos finitos utilizados como referencia.

6.2. Trabajos futuros

Como trabajos futuros se propone:

- Implementación del cálculo de esfuerzos y deformaciones para placas laminadas gruesas.
- Análisis cascaras laminadas gruesas utilizando el método de los elementos de contorno.
- Evaluación del desempeño de funciones de aproximación alternativas para la transformación de las integrales de dominio al contorno utilizando el método de integración radial.
- Optimización del tiempo de computo para el análisis de placas laminadas gruesas utilizando el método de integración radial.

- Optimización de secuencia de laminado para placas laminadas gruesas utilizando el método de los elementos de contorno.
- Análisis de placas laminadas gruesas tridimensionales utilizando el método de los elementos de contorno.

Bibliografía

- ALBUQUERQUE, E. y ALIABADI, M. A boundary element analysis of symmetric laminated composite shallow shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199(41-44), páginas 2663–2668, 2010.
- ALBUQUERQUE, E. L. *Análise de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos usando o método dos elementos de contorno*. Tesis Doctoral, Universidade estadual de Campinas, 2001.
- ALBUQUERQUE, E. L., SOLLERO, P. y ALIABADI, M. H. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39(5), páginas 1405–1422, 2002.
- ALBUQUERQUE, E. L., SOLLERO, P. y ALIABADI, M. H. The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, páginas 805–818, 2007.
- ATLURI, S. y SHEN, S. *The meshless local Petrov-Galerkin (MPLG) method*. Science Press, Encino, USA, 2002.
- BEARDS, C. *Structural vibration analysis and damping*. John Wiley & Sons Inc., 1996.
- BREBBIA, C. y DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements an Introductory Course, second edition*. WIT Press Computational Mechanics publications, 1992.

- FAND, I. M. G. y SHILOV, G. E. *Generalized Functions, Vol 1*. Academic Press, Inc New York, 1967.
- GAY, D., HOA, S. V. y TSAI, S. W. *Composite materials design and applications*. CRC PRESS, 2003.
- GOLBERG, M., CHEN, C. y H., B. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the bem. *Engineering Analysis with Boundary Element*, vol. 23, páginas 285–296, 1999.
- GOSPODINOV, G. y LJUTSKANOV, D. The boundaary element method applied to plates. *Applied mathematical modeling*, vol. 6(4), páginas 237 – 244, 1982.
- HOUBOLT, J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. of Aeronautical and Science*, vol. 17, páginas 540–550, 1950.
- HÖRMANDER, L. *Linear Partial Differential Operators*. Springer - Verlag, Berlin, 1976.
- KARAM, V. J. y TELLES, J. C. F. The bem applied to plate bending elastoplastic analysis using reissner's theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 9(4), páginas 351–357, 2003.
- KATSIKADELIS, J. *Boundary elements theory and applications*. Elsevier, 2002.
- KIRCHHOFF, G. On the equilibrium and motion of an elastic plate. *J. Math*, vol. 40, páginas 51–58, 1850.
- PARTRIDGE, P. W. Towards criteria for selection approximation functions in the dual reciprocity method. *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 24, páginas 519–529, 2000.
- RASHED, F. Y. *Boundary element formulation for thick plates*. WITpress Southampton, Boston, 2000.
- REDDY, J. *Mechanics of laminated composite plates and shel, theory and analysis, second edition*. CRC PRESS, 2004.

- REISSNER, E. On bending of elastic plates. *Quarterly of applied mathematics*, vol. 5, páginas 55–68, 1947.
- SANTANA, A. *formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno aplicado a análise de placas finas de compósitos laminados*. Proyecto Fin de Carrera, Universidade Estadual de Campinas, 2008.
- TANAKA, M., YAMAGIWA, K., MIYAZAKI, K. y UEDA, T. Free vibration analysis of elastic plate structures by boundary element method. *Engineering Analysis*, vol. 5(4), páginas 182–188, 1988.
- USECHE, J. F. *Análise pelo método dos elementos de contorno de placas de Reissner trincadas e reparadas com compósitos colados*. Tesis Doctoral, Universidade estadual de campinas., 2007.
- WANG, J. y MAOKUANG, H. Boundary element method for orthotropic thick plates. *Acta Mechanica Sinica*, vol. 7(3), páginas 258–266, 1991.
- WANG, J. y SCHWEIZERHOF, K. Fundamental solutions and boundary integral equations of moderately thick symmetrically laminated anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 12(7), páginas 383 – 394, 1996.
- WESTPHAL, T., ANDRÄ, H. y SCHNACK, E. Some fundamental solutions for the kirchhoff, reissner and mindlin plates and a unified bem formulation, engineering analysis with boundary elements. *Computers & Structures*, vol. 25(2), páginas 129–139, 2001.
- YE, T. y LIU, Y. Finite deflection analysis of elastic plate by the boundaary element method. *Applied mathematical modeling*, vol. 9(3), páginas 183–188, 1985.