



UNIVERSIDAD TECNÓLOGICA DE BOLÍVAR  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECÁNICA

# **Análisis de falla estocástica de tuberías compuestas sumergidas bajo vibraciones inducidas por vórtices**

Autor: **Luis Perez, I.M.**

Orientador: **Prof. Jairo F. Useche, M.Sc., Ph.D.**

UNIVERSIDAD TECNÓLOGICA DE BOLÍVAR  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA

# **Análisis de falla estocástica de tuberías compuestas sumergidas bajo vibraciones inducidas por vórtices**

Autor: **Luis Perez, I.M.**

Orientador: **Prof. Jairo F. Useche, M.Sc., Ph.D.**

Maestría en Ingeniería  
Área de Concentración: Ingeniería Mecánica

Trabajo de Maestría presentada a la Facultad de Ingeniería, como requisito para la obtención del título de Msc. en Ingeniería Mecánica.

Cartagena, 2019

UNIVERSIDAD TECNÓLOGICA DE BOLÍVAR  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRÍA

# Análisis de falla estocástica de tuberías compuestas sumergidas bajo vibraciones inducidas por vórtices

Autor: **Luis Perez, I.M.**

Orientador: **Prof. Jairo F. Useche, M.Sc., Ph.D.**

Los Jurados evaluadores compuestos por los miembros abajo indicados, aprobó este trabajo de grado:

---

**Prof. Jairo F. Useche, M.Sc., Ph.D.**  
Facultad de Ingeniería/UTB

---

**Prof. Adriana Castro, M.Sc.**  
Facultad de Ingeniería/UTB

---

**Prof. Hector Espinoza, M.Sc., Ph.D.**  
Facultad de Ingeniería/UTB

---

**Prof. Oscar Acevedo**  
Director Programa de Maestría en Ingeniería/UTB

Cartagena, 1 de febrero de 2019

## **Agradecimientos**

Quiero expresar mi gratitud a Dios, quien con su bendición llena siempre mi vida y a toda mi familia por estar siempre presentes.

Mi profundo agradecimiento a todas las autoridades y personal que hacen la Unidad Tecnológica de Bolívar, por confiar en m'i, abrirme las puertas y permitirme realizar todo el proceso investigativo dentro de su establecimiento educativo.

De igual manera mis agradecimientos a la Universidad Tecnológica, a toda la Facultad de Ingeniería Mecánica y Mecátronica, a mis profesores quienes con la enseñanza de sus valiosos conocimientos hicieron que pueda crecer d'ia a d'ia como profesional, gracias a cada una de ustedes por su paciencia, dedicación, apoyo incondicional y amistad.

Finalmente quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento al Dr. Jairo Useche, principal colaborador durante todo este proceso, quien con su dirección, conocimiento, enseñanza y colaboración permitió el desarrollo de este trabajo.

## Resumen

El análisis de los compuestos laminados ha sido uno de los temas mas tratados a la hora del estudio de los materiales de ingeniería, debido a su configuración geométrica así como las diferentes propiedades de los materiales que lo componen, estos materiales al tener una resistencia alta y ser menos pesados, presentan un atractivo en el campo de la construcción mecánica como lo es en la aeronáutica, industria naval, automovilismo, entre otras.

Estos materiales compuestos presentan una particularidad la cual radica en la dificultad como podemos predecir las fallas en estos materiales, debido a que este tipo de materiales pueden fallar debido al desgaste del material, cuando se presenta una ruptura y esta se propaga, o cuando se presenta desprendimiento entre la fibra y la matriz. Para analizar estos casos a lo largo de la historia se han presentado diversos tipos de teorías que intentan explicar las fallas en estos materiales, pero a tiempos de hoy ninguna de estas teorías encierra la totalidad de las fallas presentes en estos laminados compuestos.

El avance de los métodos numéricos ha ayudado a la generación de estas teorías las cuales son criterios de falla que considera si el material falla o no, también la implementación de softwares que ayudan a modelar el problema y los elementos finitos que ayudan a tener un calculo de cual seria el comportamiento de estos materiales. La utilización de un modelo de volumen representativo agiliza el análisis de este tipo de materiales debido a que consideramos una geometría que agrupe todas las propiedades mecánicas que puede en un caso hipotético tener todo el material, cuando realizamos este proceso lo que se realiza es un estudio de una porción del material y se realiza una homogenizacion de las propiedades a lo largo de todo el laminado, teniendo así un camino para estudiar el compuesto laminado y poder aplicar las diversas teorías de fallas para laminados compuestos.

En este trabajo utilizaremos el modelo de volumen representativo para el estudio de una tubería de laminado compuesto que se encuentra sometida a cargas dinámicas externas, se utilizara la homogenizacion para trabajar el análisis por elementos finitos del material y se estudiaran cargas dinámicas generadas a partir de un software de fluido computacional, para analizar las diferentes teorías de falla y analizar si esta tubería presenta o no fallas, acorde a las diferentes teorías de fallas de laminados compuestos.

*Key words*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del problema . . . . .	1
1.2. Hipótesis del trabajo . . . . .	1
1.3. Objetivo General . . . . .	2
1.4. Objetivos Específicos . . . . .	2
1.5. Metodología . . . . .	2
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>4</b>
2.1. Tuberías submarinas fabricadas con materiales compuestos . .	4
2.2. Homogeneización de propiedades y modelos RVE . . . . .	7
2.3. Modelo de matriz de corte (SAM) . . . . .	8
2.4. Modelo numérico para homogenización . . . . .	16
2.5. Teoría de cascaras gruesas . . . . .	16
2.5.1. Supuestos básicos . . . . .	16
2.5.2. Geometría de la cascaras . . . . .	17
2.5.3. Relaciones de desplazamiento . . . . .	18



2.5.4.	Formulación por elementos finitos de cascaras . . . . .	21
2.5.5.	Clasificación de las carcasas . . . . .	22
2.5.6.	Matriz Jacobiana . . . . .	24
2.5.7.	Matriz de desplazamiento y deformación . . . . .	25
2.5.8.	Relación constitutiva . . . . .	26
2.6.	Análisis estructural probabilístico . . . . .	27
2.6.1.	Método de Montecarlo . . . . .	33
2.7.	Vibraciones generadas por vorticidad . . . . .	36
2.8.	Dinámica de fluidos computacional . . . . .	41
2.9.	Criterio de falla en materiales compuestos . . . . .	43
<b>3.</b>	<b>Análisis de presión hidrodinámica sobre la tubería</b>	<b>46</b>
3.1.	Introducción . . . . .	46
3.2.	Descripción del problema . . . . .	47
3.3.	Descripción del modelo CFD propuesto para el análisis de presión sobre la tubería . . . . .	47
3.4.	Análisis de resultados . . . . .	50
3.5.	Análisis de convergencia . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Análisis estructural de la tubería</b>	<b>53</b>
4.1.	Análisis modelo RVE del compuesto laminado . . . . .	53
4.2.	Curvas de presión vs tiempo en cada punto de la malla sobre el tubo . . . . .	55

4.3.	Propiedades de compuestos laminados con fibra tipo Woven . . . . .	56
4.4.	Plásticos reforzados con fibras tipo Woven-Robin . . . . .	58
4.5.	Propiedades del material utilizado . . . . .	59
4.6.	Distribuciones de Weibull para fibra y matriz utilizadas . . . . .	60
4.7.	Análisis dinámico de tubería . . . . .	60
4.7.1.	Introducción . . . . .	60
4.7.2.	Descripción del problema . . . . .	62
4.7.3.	Material de la Tubería . . . . .	62
4.8.	Modelo de elementos finitos . . . . .	65
4.8.1.	Resultados obtenidos . . . . .	68
4.9.	Software y tiempo de ejecución . . . . .	72
4.10.	Análisis de resultados de simulación de MonteCarlo aplicada a la tubería con carga dinámica externa . . . . .	73
4.10.1.	Introducción . . . . .	73
4.10.2.	Histogramas de fallas en la tubería bajo criterios de falla	75
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>6.</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>
<b>A.</b>	<b>Anexo A: Artículo SMEC 2018</b>	<b>85</b>

# Índice de figuras

2.1. Fabricación de una tubería de fibra de vidrio [1] . . . . .	6
2.2. Modelo de elementos finitos de un elemento de volumen representativo de una lamina Woven [3] . . . . .	9
2.3. Modelo RVE (Celda Unitaria) del tejido tipo Woven e idealización del tejido [18] . . . . .	10
2.4. Modelo de volumen representativo entre tejido: sección urdimbre [18] . . . . .	11
2.5. Modelo de volumen representativo entre tejido: sección trama [18] . . . . .	11
2.6. Geometría de la cascara [4] . . . . .	18
2.7. Elemento de carcasa [6] . . . . .	23
2.8. Coordenadas globales y locales . . . . .	25
2.9. Gráfica de una distribución normal y significado del área bajo la curva.[10] . . . . .	30
2.10. Representación del método de MonteCarlo aplicado a problemas ingenieriles [11]. . . . .	34

2.11. 1) Dirección del flujo. 2) Desprendimiento vórtice superior, VIV hacia abajo. 3) Desprendimiento vórtice inferior, VIV hacia arriba. [14] . . . . .	37
2.12. Modelo oscilación de los vórtices de Von Karman [14] . . . . .	38
2.13. Pasos para resolver un problema de CFD [17] . . . . .	41
3.1. Malla utilizada para el análisis de CFD . . . . .	48
3.2. Tubería 3D sometida a presión hidrodinamica . . . . .	49
3.3. Dimensiones y condiciones de contorno para el modelo CFD . . . . .	49
3.4. Mapa de color de presión en varios instantes de tiempo mostrando la evolución de los vórtices . . . . .	51
3.5. Gráfica de convergencia de la presión en un punto de la tubería, con diferente numero de nodos y diferentes $\Delta t$ . . . . .	52
3.6. Gráfica de convergencia de la presión alrededor de la tubería en diferentes $\Delta t$ . . . . .	52
4.1. Elemento de volumen representativo generado en CAD . . . . .	53
4.2. Mallado del elemento de volumen representativo . . . . .	54
4.3. Desplazamientos del modelo de volumen representativo bajo las condiciones $XX, YY, ZZ, XY, XZ, YZ$ . . . . .	54
4.4. Presión (Pa) vs Grados (Puntos alrededor de la tubería) . . . . .	56
4.5. Curvas de presión contra tiempo en diferentes puntos de la malla alrededor de la tubería . . . . .	57

4.6. Distribución de Weibull de la fibra de vidrio utilizadas en análisis estocástico . . . . .	61
4.7. Fibra de vidrio Tipo Woven Roving . . . . .	63
4.8. Proceso de fabricación de tuberías con laminas compuesto . .	64
4.9. Elemento cascara de ocho nodos . . . . .	66
4.10. Gráfica de esfuerzo - deformación de Laminado compuesto . .	67
4.11. (a)Malla utilizada para análisis de tubería y condiciones de contorno en sus extremos (b) . . . . .	68
4.12. Gráficas de convergencia de tubería sometida cargas constantes	70
4.13. Gráficas de convergencia de tubería sometida cargas constantes	71
4.14. Deformaciones con carga constante sobre la tubería . . . . .	72
4.15. Esfuerzos con carga constante sobre la tubería . . . . .	73
4.16. Diagrama de flujo de algoritmo de MonteCarlo para análisis de tubería bajo cargas dinámicas externas . . . . .	75
4.17. Histogramas de numero de fallas vs tiempo (s) de falla de la tubería en la simulación de Montecarlo . . . . .	77
4.18. Histogramas de numero de fallas vs lamina de falla de la tubería en la simulación de Montecarlo . . . . .	78

# Índice de cuadros

3.1. Tabla de condiciones iniciales de velocidad y presión para el CFD (OpenFoam) . . . . .	49
3.2. Tabla de condiciones de control para el CFD (OpenFoam) . .	50

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Descripción del problema

En el siguiente trabajo tenemos una tubería elaborada de material compuesto a partir de fibra de vidrio woven y resina, está se encuentra sometida a cargas dinámicas externas producidas por una corriente de fluido que pasa a través de esta al estar sumergida, dicha corriente forma vórtices los cuales tienen influencia sobre la integridad de la tubería.

### 1.2. Hipótesis del trabajo

El trabajo tiene como hipótesis comprobar que por medio de la metodología de elemento de volumen representativo, podemos caracterizar y homogeneizar un material compuesto de tal forma que podamos aplicarlo en un problema de ingeniería y con ayuda de metodología numérica podemos estudiar y predecir

la integridad de dicho material.

### **1.3. Objetivo General**

Implementar la metodología de homogenización y elemento de volumen representativo para el análisis de tuberías sumergidas y sometidas a cargas dinámicas externas.

### **1.4. Objetivos Específicos**

- Generar un modelo de elemento de volumen representativo de un compuesto (Fibra Woven – Resina Epoxica).
- Comprobar la metodología de elemento de volumen representativo en el análisis de materiales compuestos y el uso de esta en el análisis y aplicaciones de ingeniería

### **1.5. Metodología**

El trabajo tendrá como metodología la implementación de un modelo de volumen representativo para el estudio de materiales compuestos, para su caracterización y homogenización, a su vez se utilizarán diferentes herramientas computacionales y metodología numérica para generar una simulación de un problema de ingeniería. La caracterización del material compuesto la obtiene-



mos a partir de las propiedades mecánicas de los materiales que conforman el compuesto, con estas propiedades procedemos a aplicar la metodología de homogenización para obtener las propiedades del compuesto utilizando software CAD para el diseño del modelo representativo y software de cálculo y elementos finitos para generar un algoritmo que procese y genere las propiedades del compuesto. Con ayuda de CFD aplicamos el material compuesto en un problema de ingeniería para poder estudiar el material compuesto bajo diferentes condiciones de cargas.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Tuberías submarinas fabricadas con materiales compuestos

El desarrollo de la ingeniería a llevado a grandes cambios en la utilización de materiales aptos para desarrollar las diferentes actividades de gran esfuerzo que se presentan en campo, para lo cual una de esas es la utilización de tuberías submarinas para la extracción de minerales que se encuentran a grandes profundidades del mar, para esto se utilizan tuberías fibra de vidrio reforzado ((PRFV) Plástico reforzado con fibra de vidrio).

Los materiales compuestos PRFV (FRP Fibre-reinforced plastic) constan de una matriz polimerica reforzada con fibras. La resistencia de las fibras es mucho mayor que la resistencia de la matriz. Los compuestos PRFV tienen

direccionales propiedades diferentes.

La necesidad de aplicar materiales compuestos en fabricación y reparación de tuberías submarinas, es de reducir costos tanto en fabricación como en reparación, menor tiempo en reparación y menor mano de obra en reparación y fabricación, evitar las interrupciones en el sistema de tubería mientras bombea, ayudan a proteger el medio ambiente y brindan mayor seguridad de operación.

El método de enrollamiento continuo para fabricación de tuberías en material compuesto consiste en enrollar alrededor de una horma o mandril, un refuerzo de fibras, (Woven Roving, Cintas, Tejidos), previa o sucesivamente impregnando con resina.

La importancia de este particular método de formación que, independientemente de algunas variantes más simples, permite la realización de estructuras dotadas de mayor fortaleza y de las mayores características mecánicas de tipo direccional, con relaciones vidrio/resina más elevadas que las obtenibles con cualquier otro procedimiento.

El enrollamiento automático con roving o con cintas direccionales o unidireccionales representa, en cambio, lo más avanzado en la tecnología de los

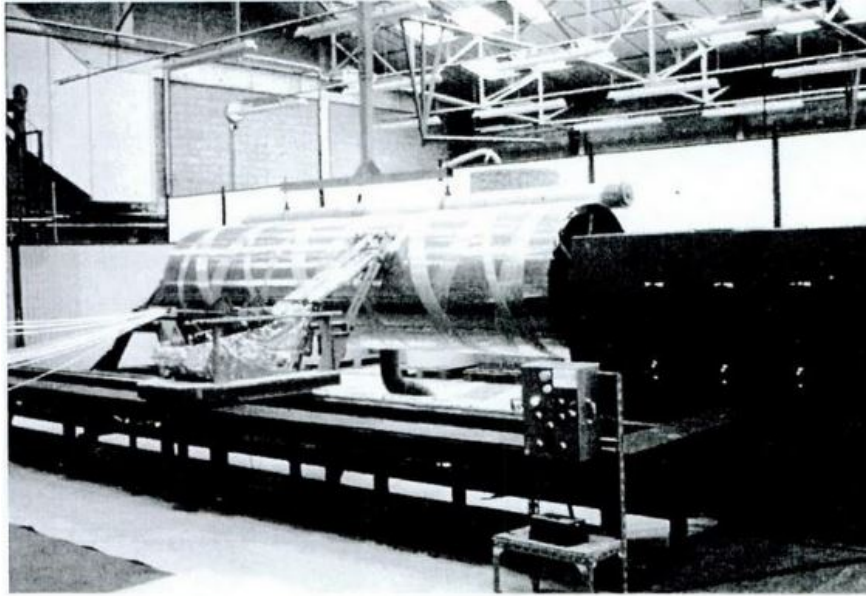


Figura 2.1: Fabricación de una tubería de fibra de vidrio [1]

PRFV, y a el se deben los buenos resultados de estos materiales, así como la rápida difusión alcanzada por sus aplicaciones en la actualidad.

Las cualidades a destacar en las tuberías de fibra de vidrio son [2]:

- Ligereza: La densidad de este material se sitúa entre 1,7 y 1,8 grs/cm<sup>2</sup>, es decir, un 20 a un 25 % de la del acero, material con el que es comparable.
- Uniones: Exige, por tanto, menor numero de uniones, lo que conlleva, a un menor costo y un menor riesgo de fugas. Pueden aplicarse todo tipo de unión o juntas del comercio.
- Longitudes: Consecuencia de lo anterior podemos manipular con gran comodidad y maquinaria elemental tramos de 12 m de largo, máximo que toleran en transporte.

- Rugosidad: El factor de rugosidad es aquí sumamente bajo, del orden de 0,01 mm en el tubo, si incluimos acoplamientos y uniones, el valor global es de aproximadamente 0,10 mm. Esto nos lleva a que, en comparación con otros materiales, podamos transportar un mismo caudal de agua con diámetros inferiores o, lo que es lo mismo a diámetros iguales, superior caudal.
- Corrosión química: La resina sintéticas presentan una gran resistencia química, siendo la gama muy amplia.
- Corrosión eléctrica: Al carecer de componentes metálicos, no se ven afectadas por corrientes eléctricas libres, causa de numerosas perforaciones.
- Translucidez: Permite ver, el nivel del fluido que transporta.

## **2.2. Homogeneización de propiedades y modelos RVE**

El RVE (representative volumen element) es la región o pieza mas pequeña de un material sobre el cual los esfuerzos y deformaciones pueden ser estudiadas macroscopicamente y a su vez este RVE posee la proporción correcta de fibra y matriz.

Microscopicamente los esfuerzos y deformaciones no son uniformes ya que el material es heterogéneo Por tanto la escala del RVE es muy importante.

Generalmente, solo una fibra aparece en el RVE, pero mas de una fibra puede ser requerida. Si la fibra es unidireccional, esta es considerada una dimensión del elemento de volumen representativo, una de las otras dos dimensiones es el espesor de la lamina o el espaciamiento de la fibra en el espesor de la lamina, si el espesor de la lamina es mayor al espesor de la fibra, la ultima dimensión es arbitraria.

Si la lamina de materia compuesto tiene fibra tipo Woven en dos direcciones, el elemento de volumen representativo es mucho mas complejo. Si la geometría de el tejido no es tomada en cuenta, dos de las dimensiones del elemento de volumen representativo son la distribución de las fibras. La tercera dimensión es regida por el numero de fibras en el espesor. Si la geometría del tejido es considerada, la representación de elementos finitos del elemento de volumen representativo puede ser la siguiente:

### **2.3. Modelo de matriz de corte (SAM)**

En el modelo SAM, se considera que el tejido es isotropico transversalmente, y sus propiedades elásticas se evalúan a partir de las propiedades dela matriz y de la fibra considerando estas como isotropicas [18].

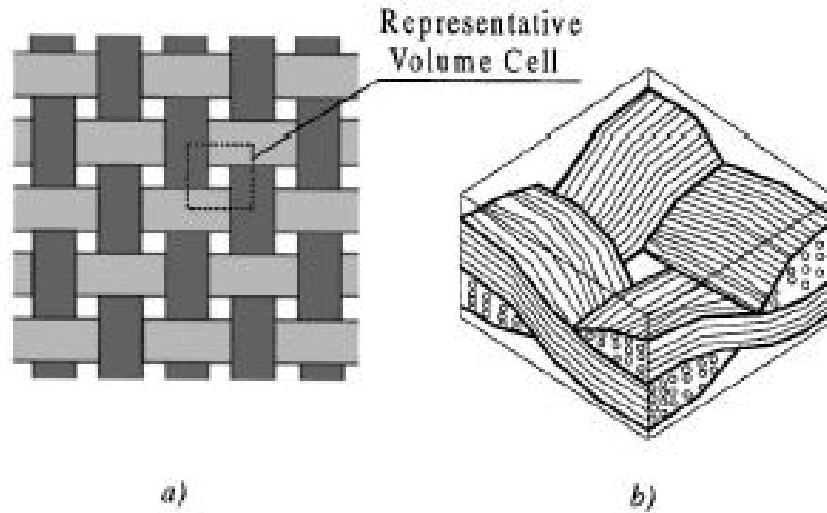


Figura 2.2: Modelo de elementos finitos de un elemento de volumen representativo de una lamina Woven [3]

El análisis de la celda unitaria se realiza dividiendo la celda unitaria en varias partes, como se muestra en la **Figura 2.3 (b)** [18].

Para un mejor análisis del compuesto, se realiza una idealización, en la cual cada uno de las partes en la cual fue dividida la celda unitaria se considera un sandwich como lo muestra la **Figura 2.3 (c)** [18].

Las propiedades efectivas del modelo de celda unitaria y su geometria se utilizan para evaluar las constantes elásticas del laminado idealizado **Figura 2.3 (c)** [18].

Para definir la ondulación y la geometría de la sección transversal del hilo,

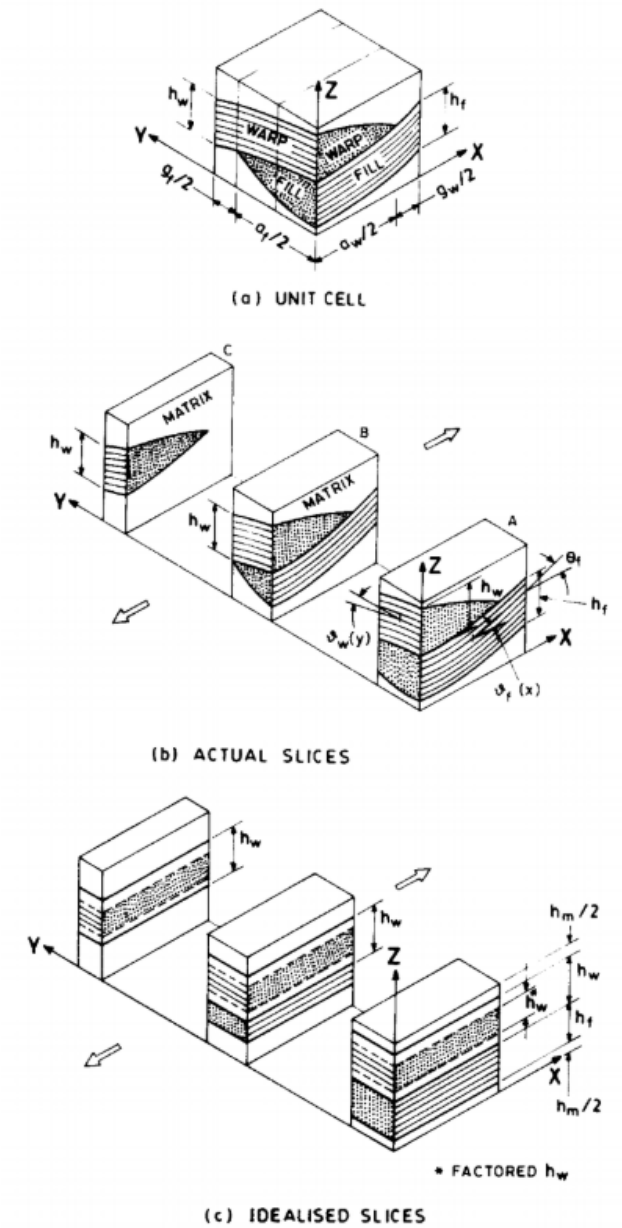


Figura 2.3: Modelo RVE (Celda Unitaria) del tejido tipo Woven e idealización del tejido [18]

se utilizan las siguientes funciones de forma. Las expresiones mencionadas a continuación se refieren a las **figuras 2.4 y 2.5**

Para la **figura 2.4** se generan las siguientes ecuaciones para definir la geometría:



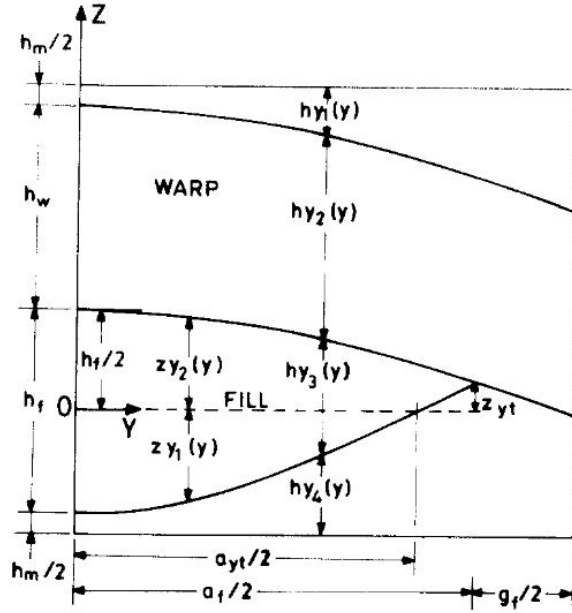


Figura 2.4: Modelo de volumen representativo entre tejido: sección urdimbre [18]

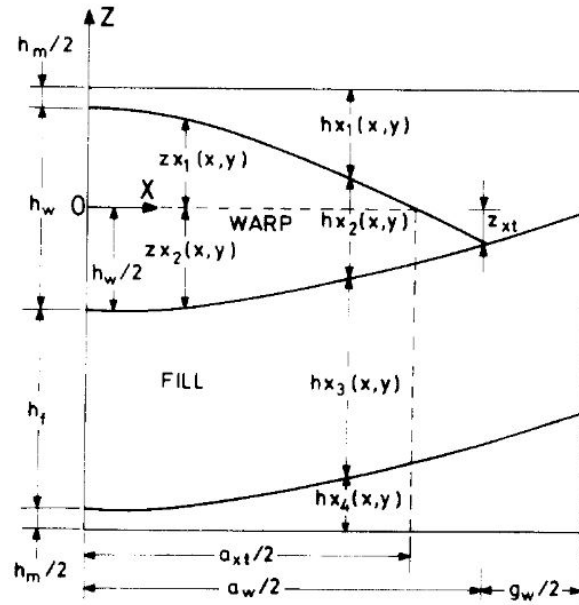


Figura 2.5: Modelo de volumen representativo entre tejido: sección trama [18]

$$zy_1(y) = -\frac{h_f}{2} \cos \frac{\pi y}{a_{yt}} \quad (2.1)$$

y

$$zy_2(y) = -\frac{h_f}{2} \cos \frac{\pi y}{a_f + g_f} \quad (2.2)$$

donde:

$$a_{yt} = \frac{\pi a_f}{2[\pi - \cos^{-1} \frac{2z_{yt}}{h_f}]} \quad (2.3)$$

$$z_{yt} = -\frac{h_f}{2} \cos \frac{\pi a_f}{2(a_f + g_f)} \quad (2.4)$$

Para la **figura 2.5** las ecuaciones son las siguientes:

$$zx_1(x, y) = \frac{h_w}{2} \cos \frac{\pi x}{a_{xt}} - hy_1(y) + \frac{h_m}{2} \quad (2.5)$$

$$zx_2(x, y) = -\frac{h_w}{2} \cos \frac{\pi x}{a_w + g_w} - hy_1(y) + \frac{h_m}{2} \quad (2.6)$$

donde:

$$a_{xt} = \frac{\pi a_w}{2 \cos^{-1} \left( \frac{2z_{xt}}{h_w} \right)} \quad (2.7)$$

$$z_{xt} = -\frac{h_w}{2} \cos \frac{\pi a_w}{2(a_w + g_w)} \quad (2.8)$$

y

$$hx_1(x, y) = \frac{h_w + h_m}{2} - zx_1(x, y)$$

$$hx_2(x, y) = zx_1(x, y) - zx_2(x, y)$$

$$x = 0 \rightarrow \frac{a_w}{2} \quad (2.9)$$

$$x = \frac{a_w}{2} \rightarrow \frac{a_w + g_w}{2}$$

$$hy_3(x, y) = hy_3(y)$$

$$hy_4(x, y) = zx_2(x, y) - hx_3(x, y) + (h_w + h_m)/2 + h_f$$

El volumen de la región de matriz pura se puede evaluar calculando el espesor en la región de la matriz para las funciones de forma consideradas y luego integrándolas para obtener el volumen de la matriz en la región de matriz pura. Las ordenadas de espesor en la región de la matriz pura están dadas por  $hx(x, y)$  y  $hx_4(x, y)$  como se da en la expresión (2.9) [18].

La fracción volumetrica de la fibra esta dada por [18]:

$$V_f^s = \frac{V_f^o V^o}{V^o - V_{pm}} \quad (2.10)$$

Las constantes elásticas de modelo de celda unitaria pueden evaluarse a partir de la fracción volumetrica  $V_f^s$  así como las propiedades de la fibra y la matriz. Estas propiedades son obtenidas a partir de la representación ideal del modelo de celda unitaria, **Figura 2.3 (c)**[18].

Las constantes elásticas de la fibra tipo Woven a lo largo de los ejes globales deben determinarse para evaluar las constantes elásticas globales del elemento de volumen representativo [18].

Para el caso de las hembras del urdimbre (**Figura. 2.4**), se realiza una transformación para ángulos fuera del eje en el punto medio del corte [18].

Se toma un ángulo de la fibra en intervalos de  $(0 \rightarrow \Theta_f)$  donde  $\Theta_f$  es el ángulo fuera del eje y  $x = (a_w + g_w)/2$  es el máximo ángulo fuera del eje.

Las coordenadas locales del ángulo fuera del eje en la trama esta dada por  $\vartheta_f$  es expresado por [18]:

$$\begin{aligned}\vartheta_f(x) &= \tan^{-1} \frac{d}{dx} [zx_2(x, y)] \\ &= \tan^{-1} \left( \frac{\pi h_w}{2(a_w + g_w)} \sin \frac{\pi x}{(a_w + g_w)} \right)\end{aligned}\tag{2.11}$$

y para la sección urdimbre esta dada por:

$$\begin{aligned}\vartheta_w(y) &= \tan^{-1} \frac{d}{dy} [zy_2(y)] \\ &= \tan^{-1} \left( \frac{\pi h_f}{2(a_f + g_f)} \sin \frac{\pi y}{(a_f + g_f)} \right)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Estas ecuaciones se pueden reducir en base a las constantes elásticas en las direcciones X e Y globales del modelo de celda unitaria y se escriben de la

siguiente manera [18]:

$$\begin{aligned}
S_{11}(\vartheta) &= \frac{1}{E_L(\vartheta)} = \frac{m^4}{E_L} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2v_{LT}}{E_L}\right)m^2n^2 + \frac{n^4}{E_T} \\
S_{22}(\vartheta) &= \frac{1}{E_L(\vartheta)} = \frac{1}{E_T} \\
S_{12}(\vartheta) &= \frac{V_{TL}(\vartheta)}{E_T(\vartheta)} = \frac{V_{LT}m^2}{E_T} + \frac{V_{TT}n^2}{E_T} \\
S_{66}(\vartheta) &= \frac{1}{G_{LT}(\vartheta)} = \frac{m^2}{G_{LT}} + \frac{n^2}{G_{TT}}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

donde  $m = \cos\vartheta$  y  $n = \sin\vartheta$

La ecuación que calcula el valor medio de las anteriores expresiones es la siguiente [18]:

$$S_{ij} = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} S_{ij}(\vartheta) d\vartheta \tag{2.14}$$

En el modelo actual  $\Theta$  es muy pequeño, por ende las variables  $m$  y  $n$  pueden ser sustituidas por series de Taylor, integrando la ecuación (2.14) las constantes elásticas efectivas en el tramado son [18]:

$$\begin{aligned}
E_{fL} &= \frac{E_L}{1 + \frac{\Theta^2}{3} + \left(\frac{E_L}{G_{LT}} - 2v_{LT}\right)} \\
E_{fT} &= E_T \\
v_{fTL} &= v_{TL} + \frac{\Theta^2}{3}(v_{TT} - v_{TL})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$G_{fLT} = \frac{G_{LT}}{1 + \frac{\Theta^2}{3} + \left(\frac{G_{LT}}{G_{TT}} - 1\right)}$$

## 2.4. Modelo numérico para homogenización

El procedimiento para determinar las propiedades elásticas efectivas mediante el análisis de FEM se puede realizar utilizando homogeneización computacional y teniendo en cuenta los pasos propuestos por Suquet [19]:

- Identificación de la RVE donde se conoce el comportamiento mecánico de cada constituyente individual
- Aplicación de las condiciones de contorno microscópicas correctas en el RVE a partir de las variables macroscópicas
- Cálculo de la respuesta macroscópica a partir del comportamiento microestructural deformado de la RVE
- Encontrar la relación implícita entre las variables de entrada y salida macroscópicas.

## 2.5. Teoría de cascaras gruesas

### 2.5.1. Supuestos básicos

Se utiliza un conjunto de suposiciones simplificadoras que proporcionan una descripción razonable del comportamiento de las carcasas elásticas para deri-

var las ecuaciones de equilibrio que son consistentes con el campo de desplazamiento supuesto [5].

- No se produce deslizamiento entre las capas.
- Se supone que el efecto del esfuerzo normal transversal sobre la respuesta bruta del laminado es insignificante.
- Los elementos de línea de la envuelta normales a la superficie de referencia no cambian su longitud después de la deformación.
- La coordenada del espesor de la concha es pequeña comparada con los radios principales de curvatura ( $z / R_1, z / R_2 \ll 1$ ).
- Normal a la superficie de referencia de la cáscara antes de que la deformación permanezca recta, pero no necesariamente normal, después de la deformación (una hipótesis relajada de Kirchhoff-Amor).

### 2.5.2. Geometría de la cascara

La figura muestra un elemento de una cascara doble curvada. Aquí  $(\alpha, \beta, z)$  se indican las coordenadas curvas lineales ortogonales (coordenadas del envolvente) de tal manera que las curvas  $\alpha$  y  $\beta$  son líneas de curvatura en la superficie media,  $z = 0$  y las curvas  $z$  son rectas perpendiculares a la superficie,  $z = 0$ . Para las cascara doblemente curvadas aquí discutidas, las líneas de curvatura principal coinciden con las líneas de coordenadas. Los valores de la

curvatura principal de la superficie intermedia se designan por  $K_1$  y  $K_2$ .

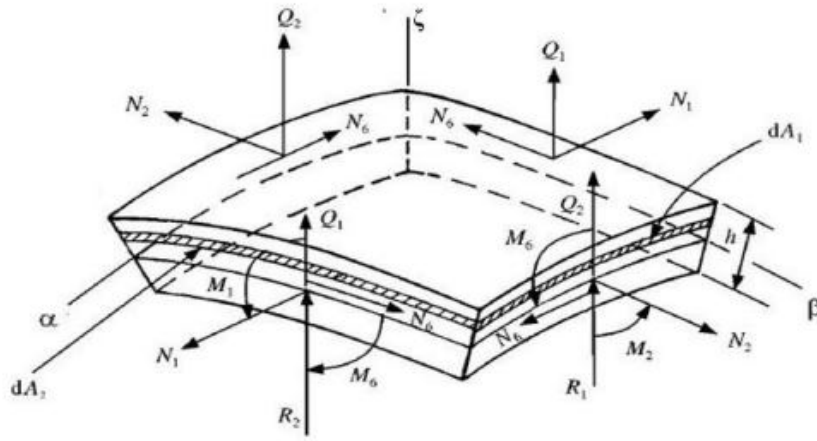


Figura 2.6: Geometría de la casaca [4]

### 2.5.3. Relaciones de desplazamiento

#### Teoría de deformación de primer orden (FSDT)

De acuerdo con la teoría de deformación por cizallamiento de primer orden, el campo de desplazamiento viene dado por:

$$\bar{u} = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)u + z\phi_1 \quad (2.16)$$

$$\bar{v} = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)u + z\phi_2 \quad (2.17)$$

$$\bar{w} = w \quad (2.18)$$

Aquí  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  es igual al desplazamiento de un punto  $(\alpha, \beta, z)$  a lo largo



de las coordenadas  $(\alpha, \beta, z)$ ;  $Y(u, v, w)$  es igual al desplazamientos de un punto  $(\alpha, \beta, 0)$ . Ahora sustituyendo la ecuación [1.30 , 1.31 , 1.32] en las relaciones de desplazamiento de deformación referidas a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales obtenemos[15]:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + zk_1 \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + zk_2 \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_6 = \varepsilon_6^0 + zk_6 \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_4^0 \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_5^0 \quad (2.23)$$

donde:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_1} \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R_2} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_6^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_4^0 = \phi_2 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{u}{R_1} \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_5^0 = \phi_1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2} \quad (2.28)$$

$$k_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \quad (2.29)$$

$$k_2 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} \quad (2.30)$$

$$k_6 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \quad (2.31)$$

$\phi_1$  y  $\phi_2$  son las rotaciones de los normales a la superficie de referencia,  $z = 0$ , alrededor de los ejes de coordenadas  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente. El campo de desplazamiento en la ecuación [2.1, 2.2, 2.3] se puede utilizar para derivar la teoría general de las cascaras laminadas.

### Relación Tensión - Deformación

La relación tensión-deformación para la capa ortotrópica  $k^{th}$  toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^k \\ \sigma_2^k \\ \sigma_4^k \\ \sigma_5^k \\ \sigma_6^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 & 0 & 0 \\ Q_{11}^k & Q_{22}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^k \\ \varepsilon_2^k \\ \varepsilon_4^k \\ \varepsilon_5^k \\ \varepsilon_6^k \end{bmatrix}$$

Para la condición de tensión plana generalizada, los módulos elásticos ( $Q_{ij}^k$ ) anteriores están relacionados con las constantes de ingeniería como sigue:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.32)$$

$$Q_{12} = \frac{E_1 v_{21}}{1 - v_{12} v_{21}} \quad (2.33)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2 v_{21}}{1 - v_{12} v_{21}} \quad (2.34)$$

$$Q_{44} = G_{13} \quad (2.35)$$

$$Q_{55} = G_{23} \quad (2.36)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (2.37)$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{v_{12}}{v_{21}} \quad (2.38)$$

#### 2.5.4. Formulación por elementos finitos de cascaras

Una cáscara es una superficie curvada, que en virtud de su forma puede soportar tanto la membrana como las fuerzas de flexión. Una estructura de cáscara puede tomar cargas más altas si, predominan las tensiones de la membrana, que es causada principalmente debido a las fuerzas en plano (condición de tensión plana). Sin embargo, las tensiones de flexión localizadas aparecerán cerca de concentraciones de carga o discontinuidades geométricas. Las carcacas son análogas a la estructura del cable o del arco, dependiendo de si la carcaca resiste tensiones de tracción o de compresión, respectivamente. A continuación se ofrecen pocas ventajas con los elementos de carcaca.

- Mayor capacidad de carga
- Espesor menor y, por tanto, menor carga muerta

- Menor requisito de soporte
- Un espacio útil mayor

### 2.5.5. Clasificación de las carcasas

Las carcasas puede clasificarse con varias alternativas. Dependiendo de la deflexión en dirección transversal debido a la fuerza transversal de corte por unidad de longitud, la envuelta puede clasificarse en una capa estructuralmente delgada o gruesa. Además, dependiendo del espesor de la envuelta en comparación con los radios de curvatura de la superficie media, la envuelta se denomina capa geoméricamente delgada o gruesa. Típicamente, si el grosor a los radios de curvatura es menor que 0,05 mm , entonces la concha se puede asumir como una concha delgada. Para la mayor parte de la aplicación de ingeniería, el espesor de la envoltura permanece dentro de 0,001 mm a 0,05 mm y se trata como capa delgada.

Consideremos un elemento de cáscara. El elemento de cáscara como se muestra en la Figura 12 tiene ocho nodos, para los cuales se realiza el análisis.

Sean  $(\xi, \eta)$  las coordenadas naturales en la superficie media. Y  $\zeta$  es la coordenada natural a lo largo de la dirección del grosor. Las funciones de forma de un elemento isoparamétrico de ocho nodos de dos dimensiones son [7]:

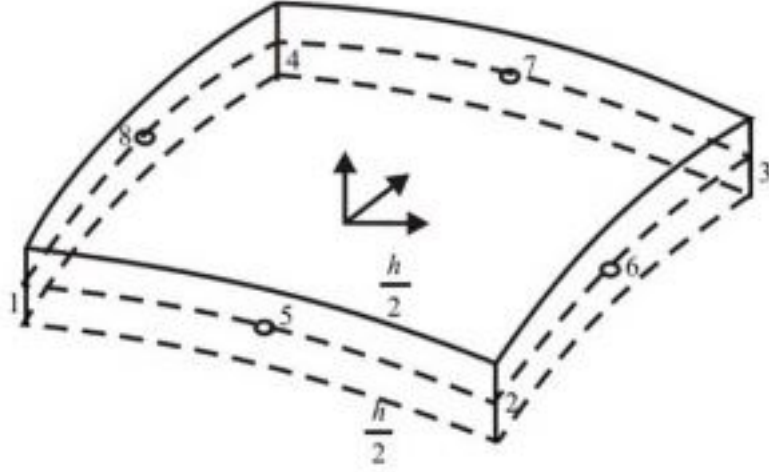


Figura 2.7: Elemento de carcasa [6]

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)}{4} \quad (2.39)$$

$$N_2 = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)}{4} \quad (2.40)$$

$$N_3 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)}{4} \quad (2.41)$$

$$N_4 = \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)}{4} \quad (2.42)$$

$$N_5 = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \eta)}{2} \quad (2.43)$$

$$N_6 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)}{2} \quad (2.44)$$

$$N_7 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)}{2} \quad (2.45)$$

$$N_8 = \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)}{2} \quad (2.46)$$

La posición de cualquier punto dentro del elemento de carcasa puede escribirse en términos de coordenadas nodales como:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \left\{ \frac{1+\varsigma}{2} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{top} + \frac{1-\varsigma}{2} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \right.$$

Puesto que se supone que  $\varsigma$  es normal a la superficie media, la expresión anterior se puede reescribir en términos de un vector que conecta los puntos superior e inferior de la carcasa como:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{top} - \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{bottom} + \frac{\varsigma}{2} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{top} - \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \right.$$

O

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \left\{ \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} + \frac{\varsigma}{2} V_{3i} \right.$$

### 2.5.6. Matriz Jacobiana

La matriz jacobiana para el elemento de carcasa de ocho nodos puede expresarse como [8]:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 (x_i + tx_i) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^8 (y_i + ty_i) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^8 (z_i + tz_i) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^8 (x_i + tx_i) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^8 (y_i + ty_i) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^8 (z_i + tz_i) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \sum_{i=1}^8 N_{xi} & \sum_{i=1}^8 N_{yi} & \sum_{i=1}^8 N_{zi} \end{bmatrix}$$

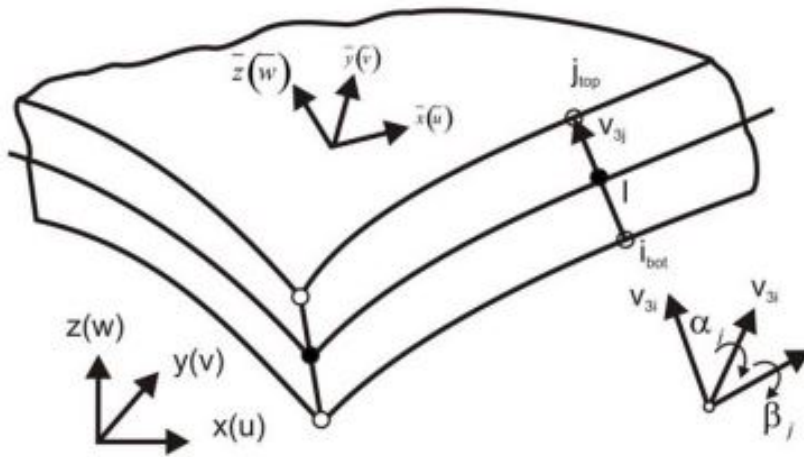


Figura 2.8: Coordenadas globales y locales

### 2.5.7. Matriz de desplazamiento y deformación

La relación entre la deformación y el desplazamiento se describe por [9]:

$$\{\varepsilon\} = \{B\}\{d\} \quad (2.47)$$

Donde, el vector de desplazamiento se convertirá en [9]:

$$\{d\}^T = \{u_1, v_1, v_{11}v_{21}, \dots, u_8, v_8, v_{18}v_{28}\} \quad (2.48)$$

Y los componentes de la deformación serán [9]:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La matriz de desplazamiento de deformación es [9]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \varsigma} & \frac{\partial v}{\partial \varsigma} & \frac{\partial w}{\partial \varsigma} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^8 \frac{t_i v_{2i}}{2} \begin{bmatrix} \varsigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \varsigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ N_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}_i^T + \sum_{i=1}^8 \frac{t_i v_{1i}}{2} \begin{bmatrix} \varsigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \varsigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ N_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_i^T$$

### 2.5.8. Relación constitutiva

La relación de deformación de tensión es dada por [9]:

$$\{\sigma\} = \{D\}\{\varepsilon\} \quad (2.49)$$

Podemos también establecer la siguiente relación [9]:

$$\{\sigma\} = \{D\}\{B\}\{d\} \quad (2.50)$$



Donde, la matriz de relación de deformación de tensión está representada por [9]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$S_{ij}$  son las componentes de la matriz de propiedades mecánicas del material.

## 2.6. Análisis estructural probabilístico

La modelación estocástica en el ámbito de la mecánica de los materiales ha hecho que el análisis de esto sea mucho más confiable, ya que por medio del abordaje estocástico podemos simular y hallar propiedades mecánicas de materiales ahorrándonos pruebas experimentales. Cuando consideramos un análisis estocástico en un material, esto está asociado a la utilización del método de Montecarlo, el cual transforma la distribución estadística de cada variable del material la cual es aleatoria, en un número de valores puntuales de la misma, que representa de igual forma su variabilidad, permitiéndonos de esta manera tener un análisis mucho más real del material a la hora de realizar un análisis computacional del mismo.

Sin embargo este método tiene un punto en contra y es el alto número de datos a procesar, por lo cual se incrementa el costo computacional. Pero de esta manera podemos obtener resultados más confiables, y para obtener un análisis mucho más real del material en estudio.

El abordaje probabilístico es aquel en el que se utiliza, para modelos complejos (ecuaciones no lineales, funciones definidas implícitamente o numéricamente, sistemas con memoria, gran cantidad de variables...) el cálculo explícito de probabilidades requiere de la integración en espacios multidimensionales de funciones que, en la mayoría de las ocasiones, son además desconocidas o conocidas parcialmente. Aun con el conocimiento de la distribución conjunta de las variables aleatorias que intervienen en el problema (lo que en este texto se conocerá como variables de entrada ambientales), el cálculo de probabilidades debe hacerse sobre variables transformadas. La complejidad del cálculo de estas probabilidades, estriba principalmente en las causas siguientes:

- Las funciones de densidad conjunta de las variables que intervienen en el cálculo de probabilidades o parámetros no se conocen directamente, ya que las variables de salida son dependientes de las de entrada de forma compleja o desconocida en mayor o menor medida.

Existe un número de distribuciones discretas y continuas de probabilidad que se aplica a problemas de ingeniería, entre las distribuciones más utilizadas en

los problemas de ingeniería encontramos: Distribución Gaussiana, Distribución lognormal y Distribución de Weibull.

Distribución Gaussiana: La distribución normal fue reconocida por primera vez por el francés Abraham de Moivre (1667-1754). Posteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) elaboró desarrollos más profundos y formuló la ecuación de la curva; de ahí que también se la conozca, más comúnmente, como la "campana de Gauss". La distribución de una variable normal está completamente determinada por dos parámetros, su media y su desviación estándar, denotadas generalmente por  $\mu$  y  $\sigma$ . Con esta notación, la densidad de la normal viene dada por la ecuación [10]:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (2.51)$$

que determina la curva en forma de campana que tan bien conocemos (Figura 12). Así, se dice que una característica  $X$  sigue una distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , y se denota como  $X \approx N(\mu, \sigma)$ , si su función de densidad viene dada por la Ecuación.

Distribución Lognormal: La distribución lognormal se obtiene cuando los logaritmos de una Variable se describen mediante una distribución normal. Es el caso en el que las variaciones en la fiabilidad de una misma clase de com-

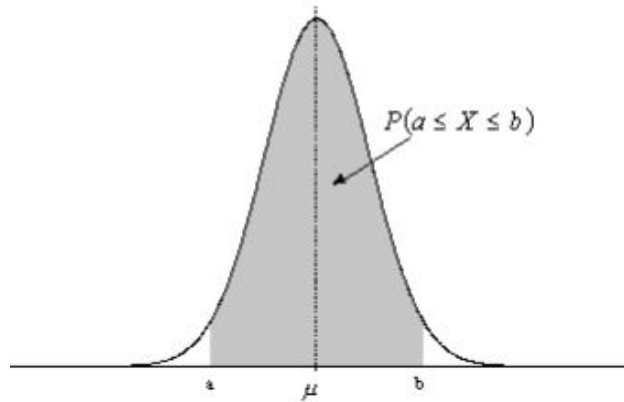


Figura 2.9: Gráfica de una distribución normal y significado del área bajo la curva.[10]

ponentes técnicos se representan considerando la tasa de fallos  $\lambda$  aleatoria en lugar de una variable constante. Esta variante se puede expresar como [10]:

$$X \sim \mathcal{LN}(\mu_x, \sigma_x). \quad (2.52)$$

La ecuación (40) establece que la variable aleatoria  $x$  se encuentra distribuida lognormalmente y que su valor promedio es  $m_x$  mientras que su desviación estándar es  $\sigma_x$

Distribución Weibull: La estadística de Weibull a sido usada en los últimos años para describir el comportamiento estadístico de algunos materiales como cerámicos avanzados, compuestos de matriz metálica, compuestos de matriz cerámica y otros compuestos de matriz polimericas. La distribución de Weibull también describe la fatiga de algunos materiales y la dispersión de la

tendencia a la fractura.

Los dos parámetros de la distribución de Weibull están dados por [10]:

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^m\right] \quad (2.53)$$

F: Probabilidad de ruptura del material bajo tensión de tracción uniaxial  $\sigma$ .

m: Es el módulo de Weibull o parámetro de forma.

$\sigma_o$ : Es el parámetro de escala de la distribución.

Para el cálculo del módulo de Weibull **m** utilizamos la siguiente ecuación [10]:

$$m = \frac{(\sum W_i)(\sum W_i z_i y_i) - (\sum W_i z_i)(\sum W_i y_i)}{(\sum W_i)(\sum W_i z_i^2) - (\sum W_i z_i)^2} \quad (2.54)$$

Donde  $W_i$  según Bergman [Autor] en la realización de la regresión lineal, el factor peso del material está dada por la siguiente expresión [10]:

$$W_i = [(1 - F_i)(\ln(1 - F_i))]^2 \quad (2.55)$$

donde  $F_i$  se calcula de la siguiente manera [10]:

$$F_i = \frac{i - 0,3}{(n + 0,4)} \quad (2.56)$$

$i$ : Número de la muestra a evaluar en la  $i$ th posición.

$n$  = Número total de pruebas hechas.

Para el cálculo de  $z_i$ ,  $y_i$  y  $a$  que son parámetros para la regresión lineal se utilizan las siguientes expresiones [10]:

$$z_i = \ln(\sigma_i) \quad (2.57)$$

$\sigma_i$ :Esfuerzo obtenido experimentalmente.

$$y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F_i}\right)\right] \quad (2.58)$$

$$a = \frac{(\Sigma W_i y_i) - m(\Sigma W_i z_i)}{(\Sigma W_i)} \quad (2.59)$$

Para obtener el parámetro  $\sigma_o$  se utilizó la siguiente expresión en función del parámetro  $a$  y el módulo de Weibull [10]:

$$\sigma_o = \exp\left(-\frac{a}{m}\right) \quad (2.60)$$

Para la densidad de probabilidad de Weibull se utilizá la siguiente expresión [10]:

$$f(\sigma_o) = L \frac{m}{\sigma_o} \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^{m-1} \exp\left[-L \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^m\right] \quad (2.61)$$

$L$ : Longitud de la zona de prueba de la probeta.

$m$ : Es el módulo de Weibull o parámetro de forma.

$\sigma_o$ : Es el parámetro de escala de la distribución.

$\sigma$ : Es el esfuerzo obtenido en la experimentación.

### 2.6.1. Método de Montecarlo

Los métodos de Montecarlo abarcan una colección de técnicas que permiten obtener soluciones de problemas matemáticos o físicos por medio de pruebas aleatorias repetidas. En la práctica, las pruebas aleatorias se sustituyen por resultados de ciertos cálculos realizados con números aleatorios [12].

La idea general del método de Monte Carlo dentro de la mecánica computacio-

nal se resume como sigue: Sean las respuestas  $z$  de un sistema, dependientes de un grupo de variables aleatorias  $x$ , cuya descripción probabilística es conocida, es posible obtener, mediante algoritmos de generación de números aleatorios, un muestreo de variables  $x$  lo suficientemente grande, de manera que sus histogramas se aproximen, de forma más exacta, a la descripción probabilística conocida mientras mayor sea el tamaño de la muestra. Mediante el uso de un código de análisis o método de diseño del sistema, utilizado de forma determinista (cada ejecución con un grupo de variables aleatoria como entrada), es posible generar una población de variables dependientes  $z$  del mismo tamaño que el muestreo [12].

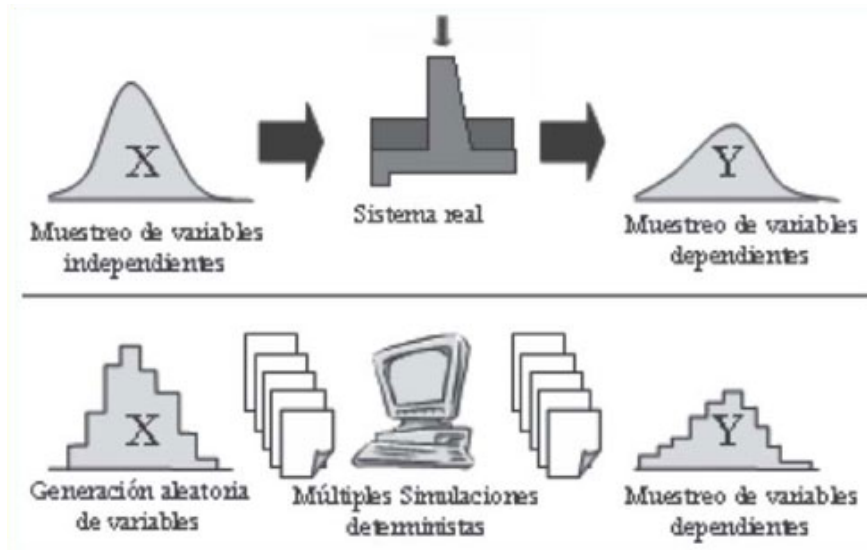


Figura 2.10: Representación del método de MonteCarlo aplicado a problemas ingenieriles [11].

La técnica de la simulación de Monte Carlo se basa en simular la realidad a través del estudio de una muestra, que se ha generado de forma totalmente aleatoria. Resulta, por tanto, de gran utilidad en los casos en los que no es



posible obtener información sobre la realidad a analizar, o cuando la experimentación no es posible, o es muy costosa. Así, permite tener en cuenta para el análisis un elevado número de escenarios aleatorios, por lo que, se puede decir que hace posible llevar la técnica del análisis de escenarios al infinito ampliando la perspectiva de los escenarios posibles. De esta forma, se pueden realizar análisis que se ajusten en mayor medida a la variabilidad real de las variables consideradas. La aplicación de esta técnica se basa en la identificación de las variables que se consideran más significativas, así como las relaciones existentes entre ellas (aunque esto puede resultar realmente complejo), para explicar la realidad a estudiar mediante la sustitución del universo real, por un universo teórico utilizando números aleatorios [13].

El primer componente de un cálculo Monte Carlo es el muestreo numérico de variables aleatorias con funciones densidad de probabilidad específicas. En esta sección se describen las diferentes técnicas para generar valores aleatorios de una variable  $x$  distribuida en el intervalo  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  de acuerdo a la función densidad de probabilidad -  $p(X)$ . Los promedios de muchos eventos aleatorios en simulación Monte Carlo, ofrecen resultados con una exactitud razonable en algún caso particular de estudio. Para obtener dichos eventos aleatorios se necesitan herramientas generadoras de números aleatorios. En realidad lo que en programación es preferible usar, son generadores pseudo-aleatorios que dada una semilla se produce siempre una secuencia de números

aleatorios igual y uniformemente distribuidos entre 0 y 1  $Y$  que pasan las pruebas de aleatoriedad [13].

A partir de un generador de números pseudoaleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo (0-1) es posible construir generadores con distribuciones uniformes  $p(X)$  a través de diferentes procedimientos.

## **2.7. Vibraciones generadas por vorticidad**

VIVs son movimientos inducidos sobre un cuerpo que interactúa con el flujo de un fluido, producidos por el desprendimiento de vórtices con una frecuencia periódica. VIV es el más clásico tipo de vibración inducida por viento y tiene lugar en velocidades de flujo específicas, dadas por el número de Strouhal, por lo cual existe una importante conexión entre fluido y estructura, de esta forma cuando el cuerpo genera un vórtice móvil, esto se traduce en un desbalance de presión, lo cual es compensado con el movimiento del cuerpo en dirección contraria al desprendimiento, como lo muestra la figura 2.9 [14].

Las investigaciones sobre VIV's en cilindros son variadas y continuamente renovadas, ya sea experimentalmente , pruebas de campo , simulaciones numéricas o incluso productos capaces de entregar potencia eléctrica en base a este fenómeno.

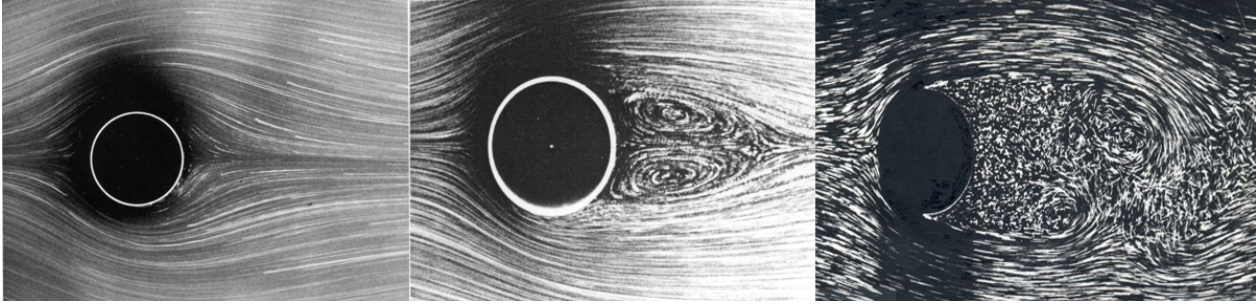


Figura 2.11: 1) Dirección del flujo. 2) Desprendimiento vórtice superior, VIV hacia abajo. 3) Desprendimiento vórtice inferior, VIV hacia arriba. [14]

Ahora presentamos una ecuación de movimiento generalmente usada para representar VIV de un cilindro que oscila en la dirección Y transversal (normal al flujo) la cual es la siguiente [14]:

$$my'' + cy' + ky = F \quad (2.62)$$

Donde  $\mathbf{m}$  = masa estructural,  $\mathbf{c}$  = amortiguamiento estructural,  $\mathbf{k}$  = constante de muelle, y  $\mathbf{F}$  = fuerza del fluido en la dirección transversal.

En el régimen en el que la frecuencia de oscilación del cuerpo está sincronizada con el modo periódico del vórtice (o fuerza periódica del fluido), una buena aproximación a la fuerza y la respuesta viene dada por [14]:

$$F(t) = F_o \sin(\omega t + \phi) \quad (2.63)$$

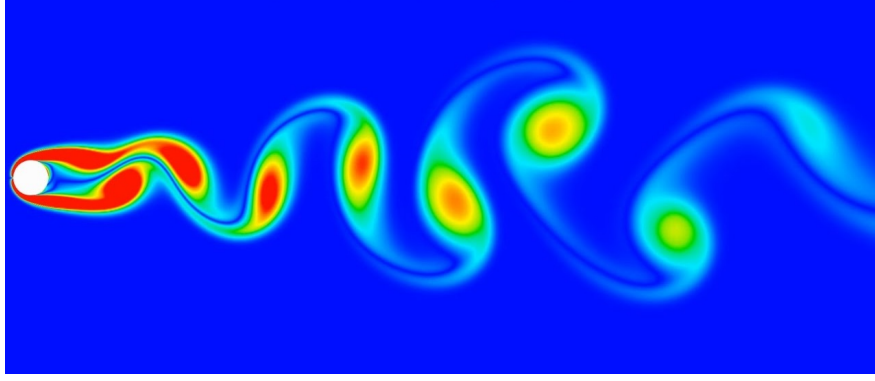


Figura 2.12: Modelo oscilación de los vórtices de Von Karman [14]

$$y(t) = y_o \sin(\omega t) \quad (2.64)$$

Donde  $\omega = 2\pi f$  y  $f$  = frecuencia de oscilación corporal. La amplitud y la frecuencia de la respuesta pueden derivarse de una manera directa. Aquí se formulan las ecuaciones en términos de un conjunto elegido de parámetros no dimensionales, como en Khalak y Williamson (1999) [14]:

$$A^* = \frac{1}{4\pi^3} \frac{C_y \sin\theta}{(m^* + C_A)\zeta} \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^2 f^* \quad (2.65)$$

$$f^* = \sqrt{\frac{m^* + C_A}{m^* + C_{EA}}} \left(\frac{U^*}{f^*}\right)^2 \quad (2.66)$$

Donde  $C_A$  es el coeficiente de masa añadida potencial (tomando el valor 1.0), y  $C_{EA}$  es un coeficiente de masa agregada "efectivo" que incluye un efecto aparente debido a la fuerza transversal total del fluido en fase con la aceleración del cuerpo ( $C_Y \cos\phi$ ):

$$C_{EA} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{C_Y \cos\theta}{A^*} \quad (2.67)$$

Aparte de los estudios de estructuras montadas elásticamente, un acercamiento a una comprensión y posible predicción de vibraciones ha sido emprender vibraciones forzadas de una estructura. Una contribución central de Sarpkaya a VIV ha sido su conjunto de datos bien conocidos y muy referenciados de coeficientes de fuerza transversales para la vibración sinusoidal controlada de un cilindro transversal a una corriente libre. Sarpkaya (1977, 1978) expresó la fuerza transversal como [14]:

$$C_y = C_{my} \sin(\omega t) - C_{dy} \cos(\omega t) \quad (2.68)$$

Donde  $C_{my}$  y  $C_{dy}$  son los coeficientes de fuerza de inercia (en fase) y de arrastre (fuera de fase) del coeficiente de fuerza transversal  $C_Y$ .

En algunos métodos computacionales, particularmente métodos de vórtice, a menudo se hace una evaluación de la fuerza total del fluido en un cuerpo añadiendo componentes de fuerza potencial y de vórtice. En el estudio experimental de Govardhan & Williamson (2000), abordaron el estudio de las fuerzas desde una perspectiva diferente; Se propusieron deducir cuál es la

fuerza del vórtice, a partir de la medición experimental directa de la fuerza total del fluido. La fuerza de vórtice  $F_{VORTEX}$ , puede calcularse simplemente a partir de la fuerza total del fluido:  $F_{VORTEX}(t) = F_{TOTAL}(t) - F_{POTENCIAL}(t)$ , donde la fuerza potencial esta dado por  $F_{POTENCIAL}(t) = - [C_A \cdot m_d \cdot y \cdot (t)]$ , y donde  $m_d =$  masa del fluido desplazada  $= (\pi \rho D^2 L/4)$ . Y  $C_A$  es la masa añadida ideal ( $= 1,0$ ). ¿Cómo se puede escribir la ecuación del movimiento de tal manera que indique necesariamente cuando se puede encontrar un salto en el momento de la formación del vórtice? Uno puede hacer esto reteniendo solamente la fuerza del vórtice en el lado derecho de la ecuación del movimiento. Govardhan y Williamson introdujeron así un coeficiente de fuerza de vórtice una "fase de vórtice",  $\phi_{VORTEX}$ , definida como la fase entre la fuerza del vórtice y el desplazamiento, escribiendo la ecuación del movimiento como [14]:

Ecuación utilizada "Fuerza del Vortice":

$$(m + m_A)y'' + cy' + ky = F_{Vortex} \sin(\omega t + \phi_{Vortex}) \quad (2.69)$$

Cuya solución se compara con la de la ecuación tradicional del movimiento:

Ecuación utilizada "Fuerza total":

$$my'' + cy' + ky = F_{Total} \sin(\omega t + \phi_{Total}) \quad (2.70)$$

## 2.8. Dinámica de fluidos computacional

Para explicar los modelos de dinámica de fluidos computacional utilizados en este trabajo, se explicara en que consiste este método CFD (Computational Dynamics Fluid) y como funciona.

El CFD (Computational Dynamics Fluid) es es un tipo de análisis computacional donde problemas de mecánica de fluidos y aerodinámica pueden ser abordados para geometrías y condiciones de borde difíciles. La base del CFD es el análisis por medio de los elementos finitos (FEM) los cuales ayudan a discretizar el análisis del fluido y permite modelar su comportamiento.

Para la resolución de problemas CFD se sigue una secuencia la cual se muestra en la siguiente figura: Figura 2.10

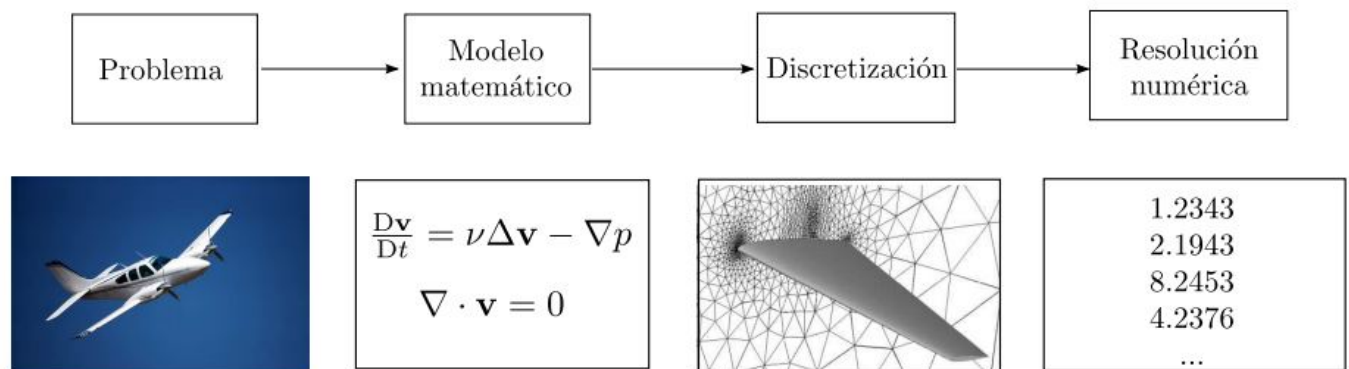


Figura 2.13: Pasos para resolver un problema de CFD [17]

En el campo de la dinámica de fluidos computacional existen diferentes modelos para la resolución numérica de estos problemas, entre los cuales encontramos los métodos de discretización los cuales tienen como modelo matemático

la resolución de la ecuación de Euler y Navier-Stoke, entre los métodos de discretización tenemos [17]:

- Método de los volúmenes finitos: Es uno de los métodos mas utilizados en CFD, las ventajas presentes en este método son la capacidad de uso de memoria y velocidad de solución, a su vez que da solución a problemas robustos, turbulentos, con un numero de Reynolds elevado. Este método lo gobierna la ecuación de Navier-Stoke y Euler, ecuación de masa y energía y ecuación de turbulencia.
- Método de los elementos finitos: Este método al igual que el método de volúmenes finitos busca resolver las ecuaciones de Navier-Stoke y Euler, ecuación de masa y energía y ecuación de turbulencia. Es mucho mas estable que el método anteriormente mencionado, pero es de mucho mas cuidado para garantizar una solución mas conservadora, en comparación con el método de los volúmenes finitos este es mas lento.
- Método de la diferencia finita: Este método es mucho mas fácil de programar, puede manejar geometrías complejas con alta precisión y eficiencia mediante el uso de limites incrustados o por cuadrículas supuestas (interpolación de cuadrículas).



## 2.9. Criterio de falla en materiales compuestos

Los materiales compuestos han sido un tipo de material desarrollado con el fin de construir aparatos y estructuras mecánicas con menor peso pero igual de resistente que el metal, esto a llevado a un gran estudio de falla de estos materiales con el fin de conocer los diferentes tipos de falla presentes, se han generado una serie de criterios que nos ayudan a comprender como se comportan estos materiales al momento de falla ya sea por fuerza, presión, fatiga, etc [15].

La fallas que se producen en un laminado de material compuesto por lo general se deben al proceso de degradación gradual, típico de este tipo de laminado, en esta degradación se producen diversos tipos de falla de manera simultanea, debido a factores como, las fases (fibra y matriz) tienen diferentes propiedades, también debido a que las laminas de un compuesto son anisotropicas y generan propiedades diferentes en distintas direcciones, dependiendo como sea la geometría del compuesto [15].

Por esto, el número de parámetros de resistencia es bastante grande; como ejemplo se tienen la resistencia longitudinal y transversal en tracción y compresión, y la resistencia al esfuerzo cortante en las diferentes direcciones. Adicionalmente, la mayoría de las fibras reales no tienen una resistencia uniforme, es decir, las resistencias de las fibras tienen diferencias significativas entre sí. Esto hace que el proceso de falla sea complejo ya que las fibras no

fallan simultáneamente [15].

Por lo tanto es importante saber cuando considerar que el laminado ha fallado, es decir cuando la degradación es inaceptable. Para esto hay que ver si el laminado cumple con la función requerida. Sabemos que el laminado falla cuando este se encuentra fracturado en su totalidad, pero también depende de el tamaño de la fractura, aunque este no haya fallado en su totalidad, las cargas o trabajo al cual esta sometido no las pueda soportar. En otro caso es en que se presenta el fallo pero de igual forma el laminado puede operar, ejemplo en un multicapa, donde solo se presenta falla en una lamina y las demás se mantienen en optimas condiciones, y por ultimo cuando ya el laminado llega a un desgaste natural por el trabajo cumplido, por ende definir un tipo de falla en un laminado de manera exacta presenta dificultades [15].

Por medio de análisis matemáticos se han generado diferentes teorías en torno a las fallas presentes en los compuestos laminados [16].

Criterio	Ecuación
Máximo esfuerzo	$\sigma_1 = F_1; \sigma_2 = F_2; \sigma_6 = F_6$
Máxima deformación	$\sigma_1 = F_1 + \nu_{12}\sigma_{12}; \sigma_2 = F_2 + \nu_{12}\frac{E_2}{E_1}\sigma_1; \sigma_6 = F_6$
Interacción de Norris	$\left(\frac{\sigma_1}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1$
Factores de Marin modificados	$\left(\frac{\sigma_1^2 - K_2\sigma_1\sigma_2}{F_{1t}F_{1c}}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{F_{2t}F_{2c}}\right) + \left(\frac{F_{1c} - F_{1t}}{F_{1t}F_{1c}}\right)\sigma_1$ $+ \left(\frac{F_{2c} - F_{2t}}{F_{2t}F_{2c}}\right)\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1$
Energía distorcional de Norris	$\left(\frac{\sigma_1}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1F_2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1$
Tsai-Hill	$\left(\frac{\sigma_1}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1$

# Capítulo 3

## Análisis de presión hidrodinámica sobre la tubería

### 3.1. Introducción

En el siguiente capítulo se realizará una descripción del problema a analizar, se describirá la tubería que se utilizará para el análisis, características y dimensiones, se realizará una descripción del modelo CFD (Computer Fluid Dynamic) a utilizar para el análisis de presiones sobre la tubería, se analizarán los resultados por medio de mapas de colores de la presión sobre la tubería en todos los instantes de tiempo, a su vez se revisará la convergencia de dicha simulación y se representará por medio de gráficas.

## 3.2. Descripción del problema

El caso a realizar es el de una tubería sometida a cargas dinámicas externas, producidas por los vórtices (vórtices de Von Karman) que se generan sobre esta. La intención es estudiar de manera simulada y numérica, el comportamiento de la tubería fabricada del material compuesto (Woven-Eglass/Epoxi), y determinar por medio de métodos estadísticos la cantidad de fallas que se producen sobre la tubería y ver el tiempo de simulación en el que falla la tubería.

La tubería utilizada para este análisis consiste en una fabricada con material compuesto (Woven-Eglass/Epoxi), con diámetro externo de 0.1 m y 0.41 m de longitud, la tubería para la simulación tendrá apoyos en el borde superior e inferior, y la superficie a lo largo de esta quedará libre de restricciones para ver el comportamiento de la presión generada por los vórtices en cada instante de tiempo.

## 3.3. Descripción del modelo CFD propuesto para el análisis de presión sobre la tubería

Para realizar la simulación del problema, se debe definir la geometría y parámetros iniciales para la simulación de los vórtices. En la **Figura 3.3** se muestra las dimensiones aplicadas en el canal de vórtices y las condiciones aplicadas

en el análisis.

Las dimensiones para el problema CFD son obtenidas del paper "Computations of Laminar Flow Around a Cylinder" (S.Turek Benchmark - 1996).

El problema de manera real es un problema en tres dimensiones, pero en este caso se planteara como si fuese un estudio en dos dimensiones, se considerara que la distribución de presión se replicara a lo largo de la tubería.

El software utilizado para el análisis de presiones hidrodinamica es **Open-foam**, en la **tabla 3.1 y 3.2** se observan las propiedades para la simulación.

La malla es generada a partir del programa **Salome-Meca v8** en el cual se genera una malla hexaedrica la cual se ve en la **figura 3.1**, la malla cuenta con 169536 nodos y 83968 elementos, este numero es obtenido a partir de la **figura 3.5**

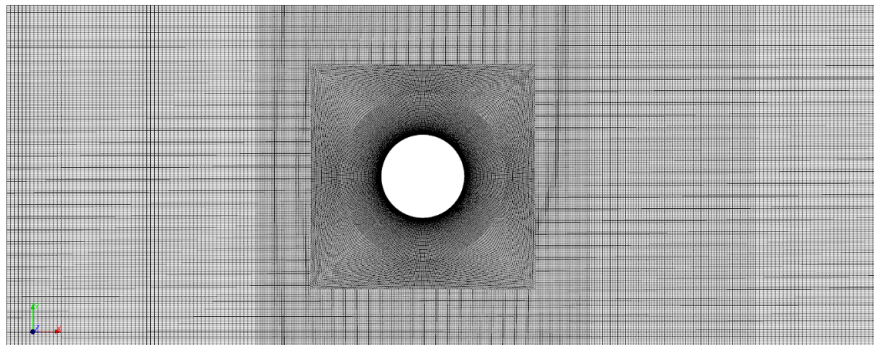


Figura 3.1: Malla utilizada para el análisis de CFD



Figura 3.2: Tubería 3D sometida a presión hidrodinamica

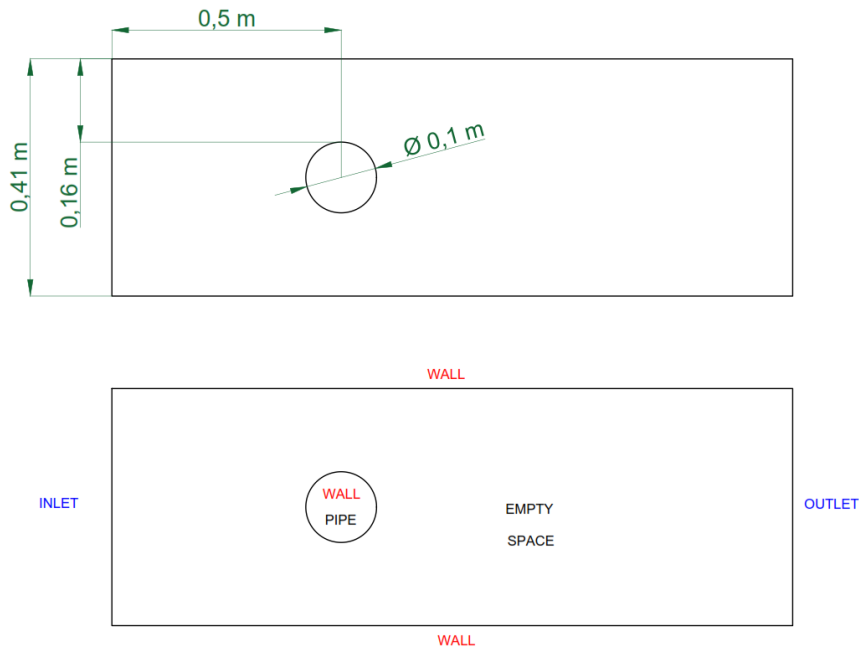


Figura 3.3: Dimensiones y condiciones de contorno para el modelo CFD

Posición	Condición (U)	Condición (p)
Inlet	uniform (0.0125, 0, 0)	zeroGradient
Outlet	zeroGradient	uniform 0
Wall	wall	zeroGradient
Pipe	wall	zeroGradient
Space	empty	empty

Cuadro 3.1: Tabla de condiciones iniciales de velocidad y presión para el CFD (OpenFoam)

application	pisoFoam
starTime	0
endTime	500
deltaT	0.1

Cuadro 3.2: Tabla de condiciones de control para el CFD (OpenFoam)

### 3.4. Análisis de resultados

Realizada la simulación en CFD con los parámetros anteriormente mencionados, se genera el mapa de colores de la distribución de presión sobre la tubería en diferentes instantes de tiempo. En la **Figura 3.4** se observa la presión generada por los vórtices de Von Karman alrededor de la tubería y como varían después de pasar a través de esta.

### 3.5. Análisis de convergencia

Las cargas aplicadas al modelo de la tubería, serán extraídas de una simulación por dinámica de fluido computacional, en las que en un canal se ubica un tubo, y a través de este fluye agua, la cual se generaran vórtices de Von Karman al transcurrir determinado tiempo.

Para definir las propiedades de la simulación se realizo un análisis de convergencia en el cual se comparaba la variación de la presión en un punto fijo de la tubería con respecto a la cantidad de nodos en la malla, y se genera la



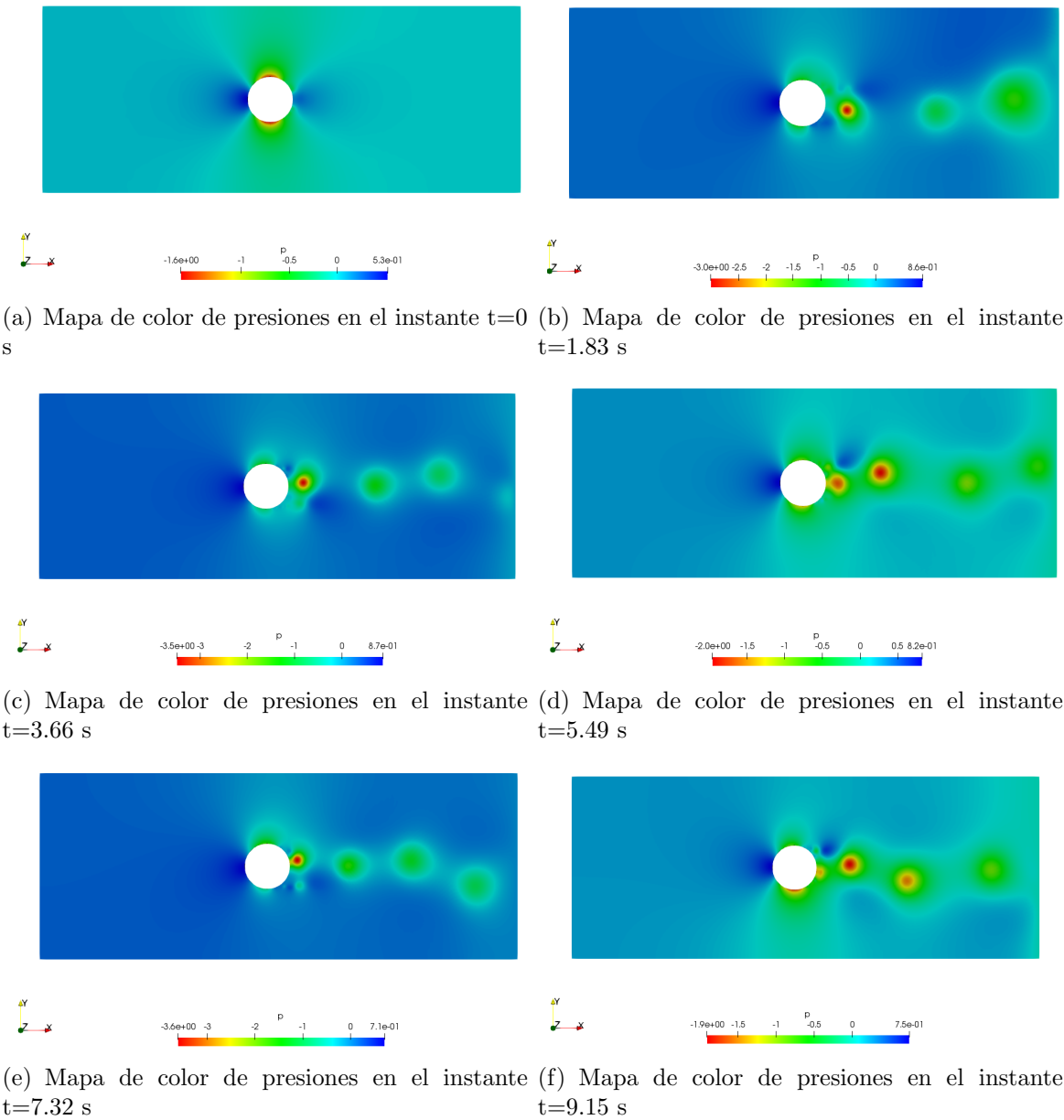


Figura 3.4: Mapa de color de presión en varios instantes de tiempo mostrando la evolución de los vórtices

siguiente gráfica

Realizada la convergencia para la simulación de CFD, se realiza la simulación para obtener una distribución de presión alrededor de la tubería en diferentes instantes de tiempo, estos valores obtenidos en la simulación, se utilizaran



Figura 3.5: Gráfica de convergencia de la presión en un punto de la tubería, con diferente numero de nodos y diferentes  $\Delta t$

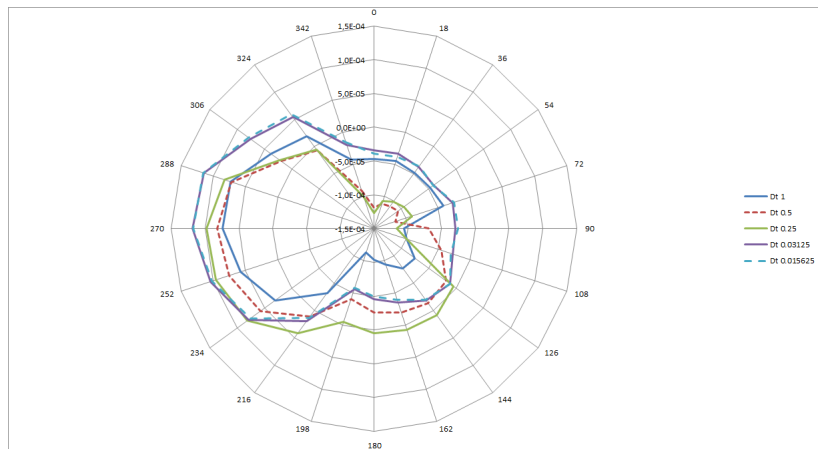


Figura 3.6: Gráfica de convergencia de la presión alrededor de la tubería en diferentes  $\Delta t$  como multiplicadores en el análisis de elementos finitos de la tubería.

# Capítulo 4

## Análisis estructural de la tubería

### 4.1. Análisis modelo RVE del compuesto laminado

El modelo RVE utilizado para el análisis fue generado en un programa CAD, para posteriormente ser procesado en un generador de malla para la utilización del método de los elementos finitos sobre dicho modelo. La forma proviene del compuesto laminado Fibra de vidrio/Matriz epoxica.

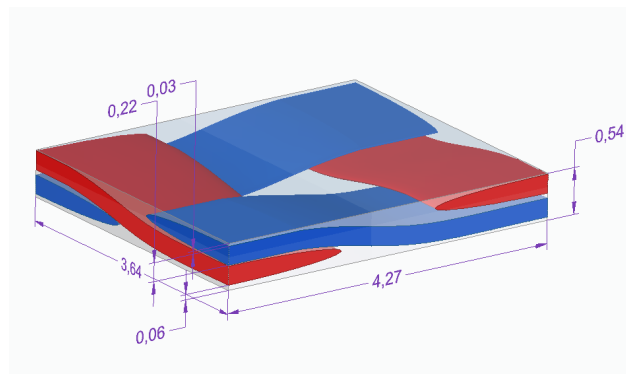


Figura 4.1: Elemento de volumen representativo generado en CAD

Realizado el mallado del modelo RVE, se realiza el análisis de elementos finitos

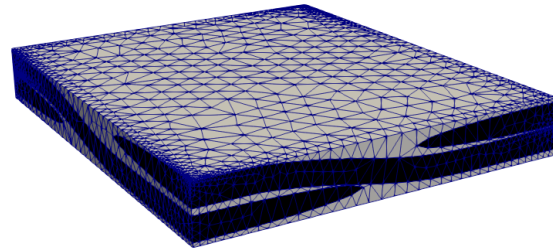


Figura 4.2: Mallado del elemento de volumen representativo

aplicando un desplazamiento de tal forma que se genere una deformación unitaria en el volumen de elemento representativo del material compuesto en todas las direcciones.

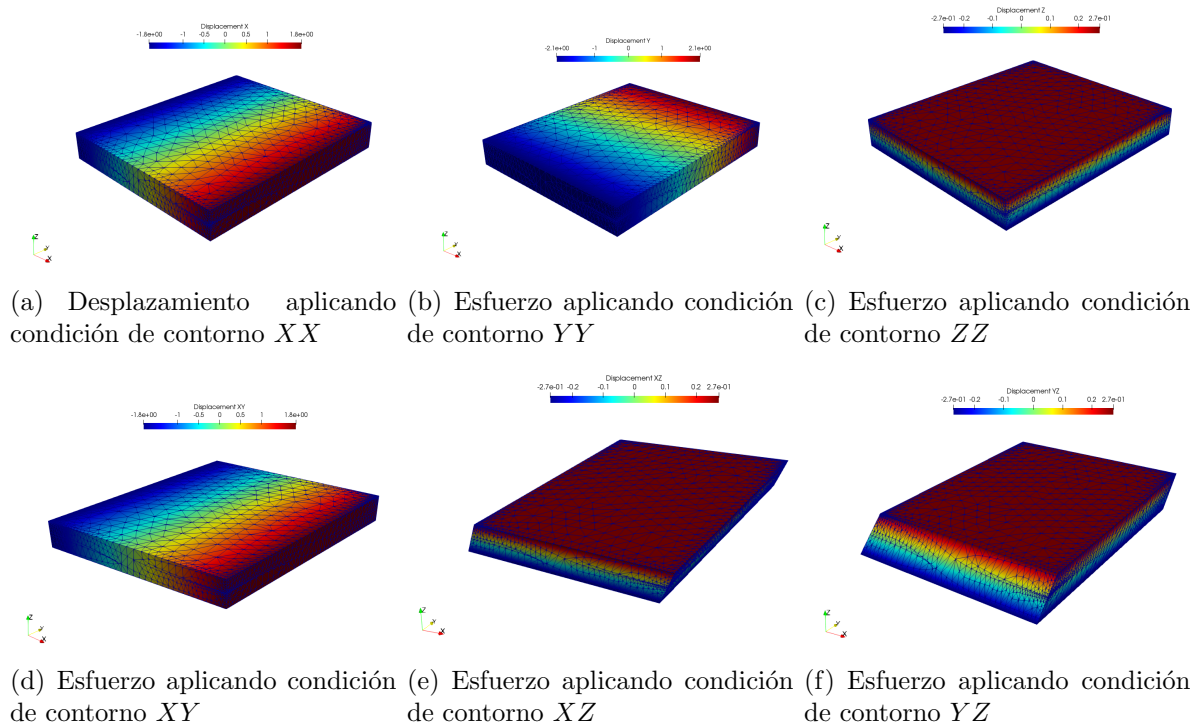


Figura 4.3: Desplazamientos del modelo de volumen representativo bajo las condiciones  $XX$ ,  $YY$ ,  $ZZ$ ,  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$

En el análisis de elementos finitos se obtienen los esfuerzos y deformaciones del modelo de elemento de volumen representativo, con estos esfuerzos y deformaciones podemos calcular la matriz elástica del material en estudio a partir de la siguiente relación.

$$\{\sigma\} = \{Q\}\{\varepsilon\} \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{32} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{e}_{36} \end{bmatrix}^{(k)} \quad H\zeta \quad (4.2)$$

Obteniendo la matriz de rigidez a partir de la inversa de la matriz elástica podemos utilizar esta para establecer las propiedades del material en el análisis por elementos finitos.

## 4.2. Curvas de presión vs tiempo en cada punto de la malla sobre el tubo

En la siguiente sección se genero a partir de la simulacion del fluido alrededor de la tubería por medio de CFD (Computational Fluid Dynamics) gráficas

de presión contra tiempo en diferentes puntos de la tubería de forma radial (**Figura 4.5**), también se genera una gráfica de presión contra los puntos a diferentes ángulos alrededor de la tubería en diferentes instantes de tiempo (**Figura 4.4**).

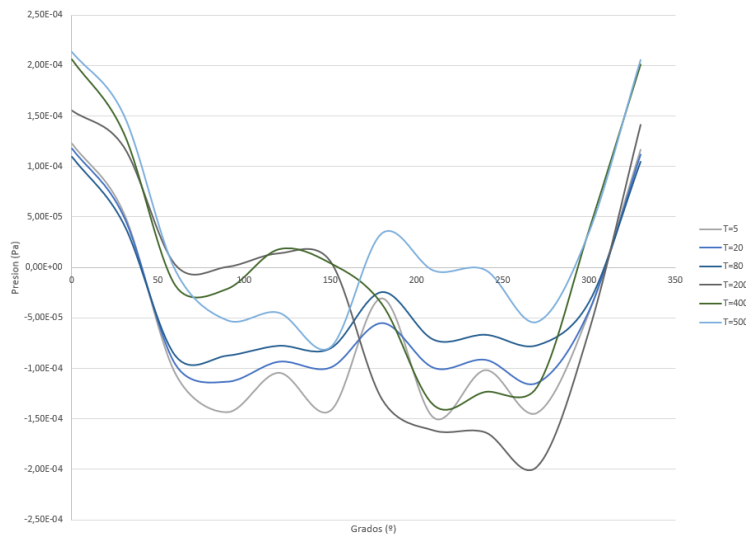
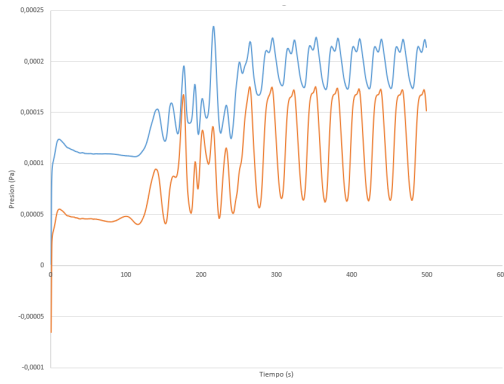


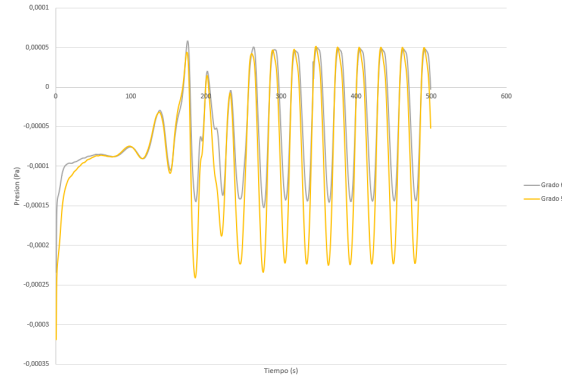
Figura 4.4: Presión (Pa) vs Grados (Puntos alrededor de la tubería)

### 4.3. Propiedades de compuestos laminados con fibra tipo Woven

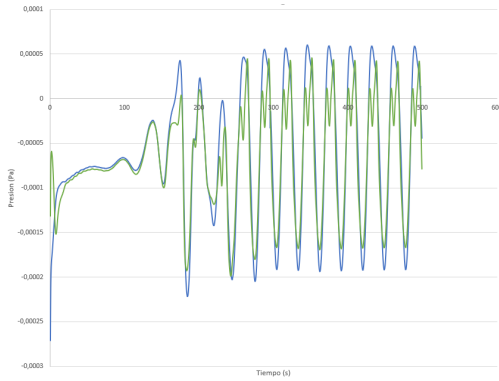
El desarrollo de tuberías hechas con laminados compuestos ha sido un gran avance en el desarrollo de los materiales compuestos en múltiples aplicaciones ingenieriles. Este tipo de tuberías hechas en laminado compuesto ayuda a combatir las condiciones agrestes que presenta el sumergir tuberías en el mar, debido a que este material no le afecta la corrosión marina, a su vez el poco



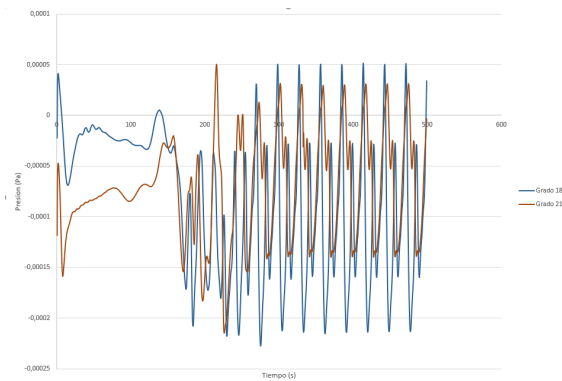
(a) Grafica a 0 grados y 30 grados



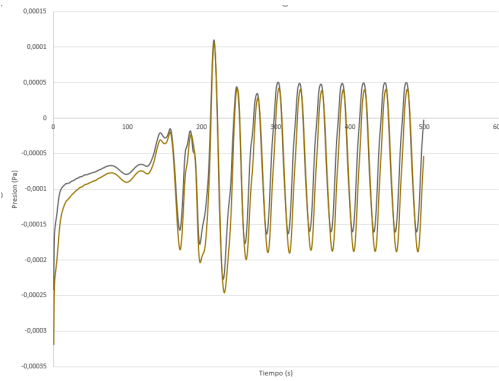
(b) Grafica a 60 grados y 90 grados



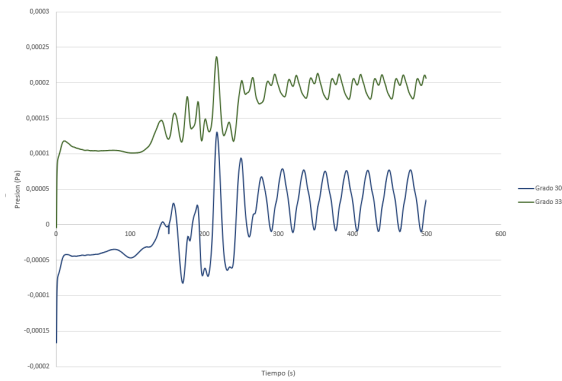
(c) Grafica a 120 grados y 150 grados



(d) Grafica a 180 grados y 210 grados



(e) Grafica a 240 grados y 270 grados



(f) Grafica a 300 grados y 330 grados

Figura 4.5: Curvas de presión contra tiempo en diferentes puntos de la malla alrededor de la tubería

peso que tienen y alta resistencia, permite una mayor flexibilidad cuando se trabajan a grandes profundidades, además de ser buenos aislantes eléctricos, es una de las tantas aplicaciones que tienen este tipo de tuberías, que tam-

bién se utilizan en procesos de Oil&Gas. Al ser compuestos laminados, en este trabajo se considerara las propiedades de una de las fases del material compuesto como estocástica, permitiendo así un estudio mucho más real de esta tubería.

#### **4.4. Plásticos reforzados con fibras tipo Woven-Robin**

En el campo de la ingeniería de los materiales, existen materiales derivados del petróleo, entre estos el principal es el plástico, este por excelencia es el material utilizado para muchas aplicaciones domésticas e industriales en la actualidad. Para hablar de los plásticos reforzados con fibra tipo Woven, debemos definir las características de los dos componentes principales del material compuesto .

La resina de poliéster se consigue como un líquido espeso de diferentes colores, donde dicho color da mención a sus características, tipo, grado de preparación y uso recomendado. Inicialmente la resina de poliéster se encuentra en un líquido muy viscoso e inestable, para producir las características adherentes, se utiliza un catalizador, el cual genera una reacción química y produce un proceso de secado dando así a propiedades diferentes de la resina de poliéster en comparación a su estado inicial .

El otro material del cual se compone el compuesto es la fibra de vidrio, este es un material formado por muchos filamentos poliméricos, estos filamentos están



hechos a base de dióxido de silicio. La fibra de vidrio es utilizada mezclada con la resina de poliéster por sus propiedades mecánicas, al ser un compuesto ligero en peso y al mismo tiempo muy resistente para trabajos industriales, entre los tipos de fibra existentes en el mercado encontramos la fibra Woven-Roving, la cual es un tipo de tejido de fibra de vidrio orientada a 0 y 90 grados, brindando una gran resistencia a la tracción en estas direcciones, pero presenta un inconveniente, ya que al estar entretrajadas las fibras a 0 y 90 grados, se presentan roces que pueden debilitar la estructura de la fibra de vidrio. La aplicación de este tipo de plásticos reforzados con fibra de vidrio podemos encontrarla en la industria naval, militar, automovilística, espacial, entre otras.

#### **4.5. Propiedades del material utilizado**

El laminado utilizado para el análisis de la tubería está conformado por una matriz epoxica y fibra de vidrio tipo Woven roving, las propiedades mecánicas de la matriz están definidas en la sección (Distribuciones de Weibull para fibra y matriz utilizadas) estas están de forma de distribución de Weibull, las propiedades de la matriz epoxica son las siguientes:

- Modulo de Young:  $3.5 \times 10^9$  Pascales
- Coeficiente de Poisson: 0.35

- Modulo G:  $1.3 \times 10^9$  Pascales

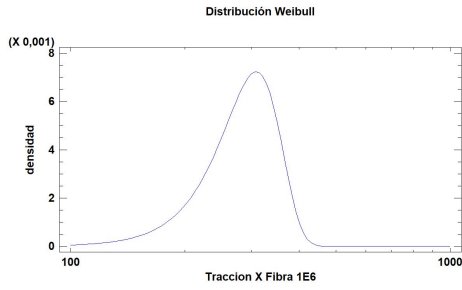
## 4.6. Distribuciones de Weibull para fibra y matriz utilizadas

Las distribuciones de Weibull con propiedades mecánicas utilizadas para el análisis de la tubería laminada son generadas a partir de pruebas de tracción realizadas a la fibra de vidrio tipo Woven, se toman filamentos de este tejido y se someten a pruebas de tracción para generar una distribución de Weibull [2], Para la prueba de compresión, se toman datos a partir de ensayos realizados en otros trabajos y se considera la matriz como un material isotropico por ende las propiedades en todas las direcciones va a ser siempre la misma. En la **Figura 4.1** se observan las diferentes distribuciones de Weibull implementadas.

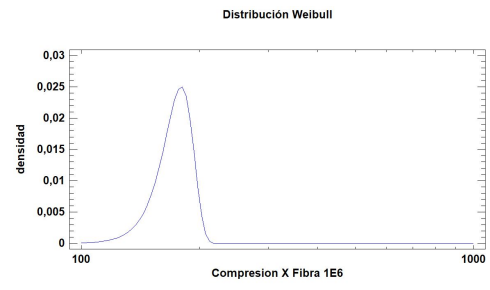
## 4.7. Análisis dinámico de tubería

### 4.7.1. Introducción

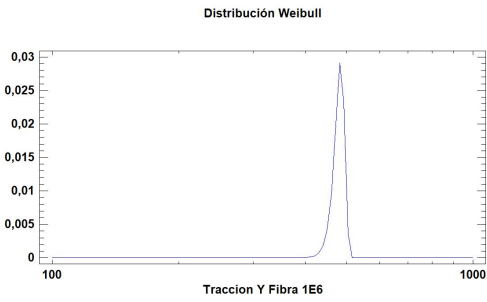
En este apartado se describirá el análisis por elementos finitos y CFD que se realizo sobre la tubería al esta ser sometida a cargas dinámicas variables en el tiempo, se realizara una descripción del material de fabricación de los tubos,



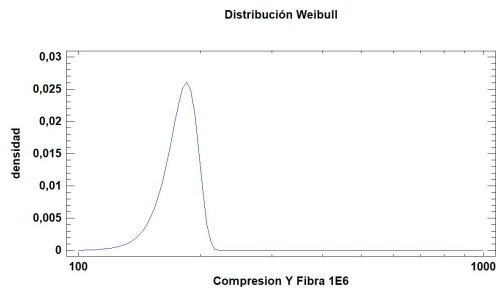
(a) Distribucion de Weibull de la fibra a traccion en direccion X



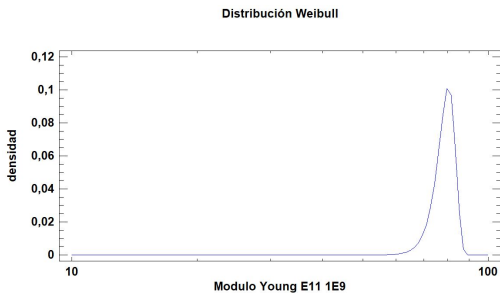
(b) Distribucion de Weibull de la fibra a compresion en direccion X



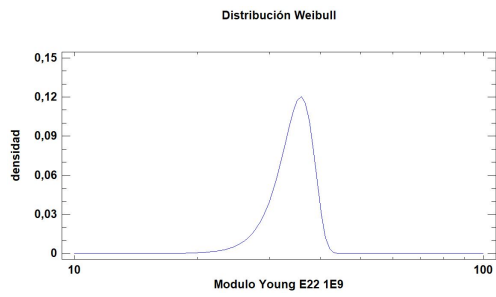
(c) Distribucion de Weibull para la fibra a traccion en direccion Y



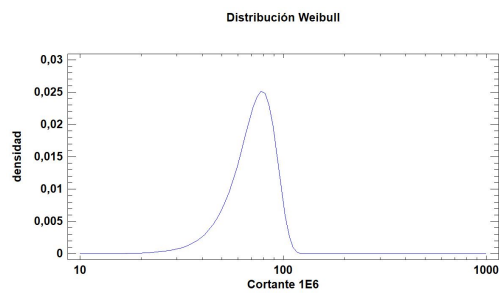
(d) Distribucion de Weibull de la fibra a compresion en direccion Y



(e) [Distribucion de Weibull de modulo de Young E11



(f) Distribucion de Weibull de modulo de Young E22



(g) Distribucion de Weibull a cortante de la fibra

Figura 4.6: Distribución de Weibull de la fibra de vidrio utilizadas en análisis estocástico

diferentes métodos de fabricación. Por medio de el método de los elementos finitos, se describirá el elemento finito utilizado para el análisis de esfuerzo-deformación así como los conceptos de deformación unitaria y como estos se aplican al modelo de volumen representativo, así como las condiciones de contorno y cargas utilizadas. Para la realización de este análisis se examinara la convergencia que debe presentar el modelo utilizado así como figuras de deformación y esfuerzo en el tubo en distintos instantes de tiempo.

#### **4.7.2. Descripción del problema**

El problema a tratar es el análisis de la tubería elaborada de laminas de material compuesto bajo condiciones de carga dinámicas y fluctuantes, se analizara como se comporta el material compuesto al ser sometido a dichas cargas y bajo diferentes teorías de falla se evaluara si se presentan o no fallas en la integridad de dicha tubería.

#### **4.7.3. Material de la Tubería**

El material del que se encuentra elaborado la tubería a analizar, es de fibra de vidrio tipo Woven Roving y resina epoxica, estos dos materiales al unirlos forman un laminado compuesto en cual brinda alta resistencia y bajo peso, la configuración del entretejido ayuda a distribuir los esfuerzos en las direcciones planas X y Y.



Figura 4.7: Fibra de vidrio Tipo Woven Roving

### **Fibra tipo Woven Roving**

Son una clase de Tela tejida en dos direcciones (trama y urdimbre), la cual se fabrica tejiendo en telares especiales, el roving continuo usado para poltrusion o para filament winding.

El empleo de esta tela de fibra de vidrio en el proceso manual o por aspersión, proporciona mayor resistencia mecánica a la pieza fabricada. Al igual que las otras telas de fibra de vidrio, el WOVEN ROVING también se caracteriza por su gramaje, encontrándose en el mercado de 200 a 900 gramos por metro cuadrado.

### **Resina epoxica**

Es un fluido termoestable que se endurece cuando se le adiciona un catalizador, esta se utiliza en construcción de moldes, como en laminados, entre

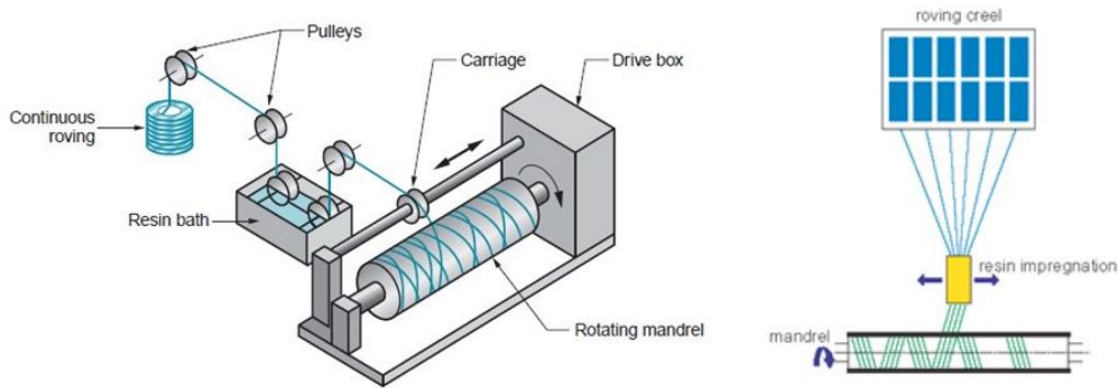


Figura 4.8: Proceso de fabricación de tuberías con laminas compuesto

otras aplicaciones, al contrario que la resina de poliester, la mezcla de resina epoxica y fibra de vidrio da un laminado mucho mas resistente.

### Método de fabricación de la tubería

Para la fabricación de este tipo de tubería, en laminas de fibra de vidrio y resina epoxica, se utiliza un mandril el cual es utilizado como molde y sobre el cual se enrollara la fibra de vidrio y la resina.

La fibra de vidrio pasa a través de una bañera en la cual se impregna de resina epoxica, y se tira por la fuerza en un mandril rotativo. El mandril puede ser cubierto con un velo para crear una superficie resistente a la corrosión. El mismo velo se puede colocar en la capa externa del tubo para proporcionar el material mejor resistencia a la corrosión y mejor acabado superficial.

## **Cargas a considerar**

Las cargas las cuales hay que tener en cuenta al momento del análisis, son las cargas aplicadas de forma transversales, normal a la tubería, ya que estas son las que tienen mayor probabilidad de generar fracturas sobre la lamina de material compuesto, pero también se pueden generar por cargas longitudinales, el desprendimiento de las fases entre fibra y matriz, pero la resistencia en esta dirección es mayor gracias a la direccional de la fibra de vidrio que es de 0 y 90 grados, basándose en cargas fluctuantes, hay que considerar la velocidad del impacto y la integridad que mantiene la estructura laminada.

## **4.8. Modelo de elementos finitos**

### **Elemento finito utilizado**

El elemento finito utilizado es el tipo shell o cascara. Estos elementos son cuadriláteros de cuatro u ocho nodos, para el análisis de la tubería se utiliza un elemento de ocho nodos ya que permite desplazamientos y esfuerzos convergentes en el modelo que involucran flexión fuera del plano. Este elemento se puede utilizar para modelar problemas de cascara gruesa y fina.

### **Software utilizado**

Para el analisis de elementos finitos tanto del modelo de volumen representativo como el de la tuberia, se utilizo el software **FEASY**, este software calcula

los esfuerzos y deformaciones por medio de elementos finitos, calculado así las deformaciones sobre el modelo RVE y las deformaciones y esfuerzos bajo carga dinámica

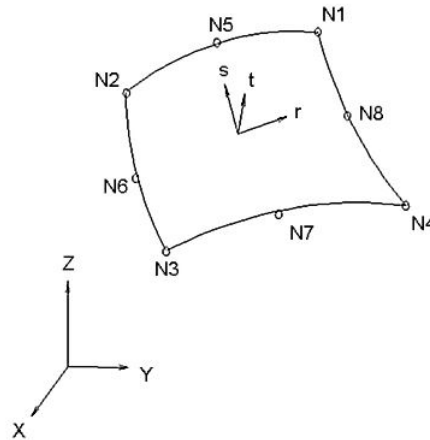


Figura 4.9: Elemento casaca de ocho nodos

## Relación esfuerzo-deformación y deformación unitaria

Si un cuerpo es sometido a un esfuerzo de tensión o compresión en una dirección dada, no solo ocurre deformación en esta dirección (dirección axial) sino también deformaciones unitarias en direcciones perpendiculares a ella (deformaciones laterales). Dentro del rango de acción elástica a la compresión entre las deformaciones lateral y axial en condiciones de cargas uniaxial es denominado coeficiente de Poisson. La extensión axial causa contracción lateral y viceversa.

Esta relación se expresa en una gráfica denominada gráfica esfuerzo-deformación:

La deformación unitaria es definida, como la relación existente entre la defor-



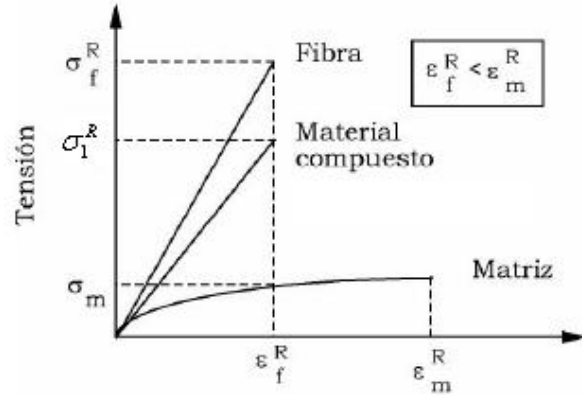


Figura 4.10: Gráfica de esfuerzo - deformación de Laminado compuesto

mación total y la longitud inicial del elemento, la cual permite determinar la deformación del elemento sometido a esfuerzos de tensión o compresión.

Para materiales compuestos la ley generalizada de Hooke relaciona los esfuerzos y deformaciones unitarias que pueden escribirse de la siguiente manera:

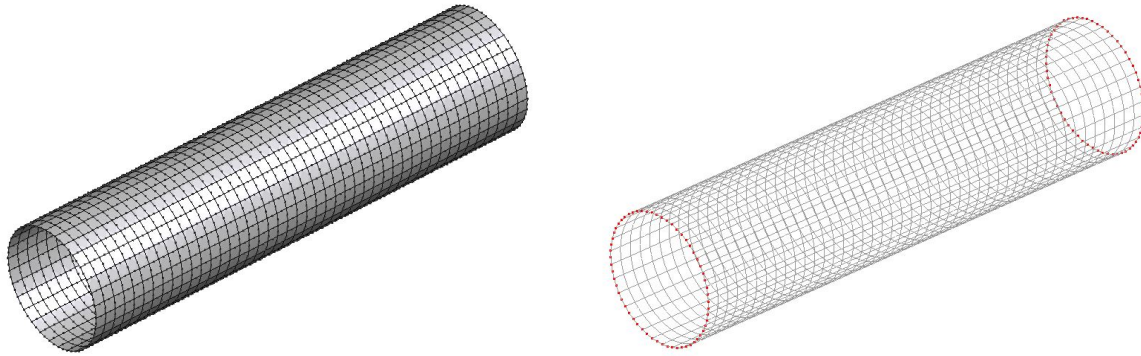
$$\sigma_j = C_{ij}\varepsilon_j \quad (4.3)$$

Donde  $i, j = 1, \dots, 6$ , y  $\sigma_j$  son las componentes de los esfuerzos,  $C_{ij}$  es la matriz de rigidez y  $\varepsilon_j$  son las componentes de la deformación unitaria.

### Malla utilizada, condiciones de contorno y cargas utilizadas

La malla utilizada para el análisis, es una malla elaborada con elementos tipo shell o cascara de 8 nodos la cual esta compuesta por 4110 nodos y 1350 elementos, **Figura 4.6**.

El software utilizado para realizar la malla de la tubería es el **GiD v13**, en este software se realiza la geometría de la tubería y se realiza la superficie y se genera la malla.



(a) Malla Renderizada de la tubería

(b) Condiciones de contorno de la malla

Figura 4.11: (a)Malla utilizada para análisis de tubería y condiciones de contorno en sus extremos (b)

El análisis se realiza fijando los nodos en los extremos de la tubería, y la carga aplicada se introduce en el modelo a modo de tablas de presión a diferentes instantes de tiempo, esta carga es generada a partir del modelo de presión dinámica externa obtenido del análisis de CFD.

#### 4.8.1. Resultados obtenidos

##### **Vibración de tubería con presión externa constante**

Para comprobar que la tubería que se utiliza para la simulación de cargas dinámicas es la correcta, se realiza un análisis de la tubería bajo cargas constantes, esto nos garantiza que al analizar los esfuerzos en uno de los ejes sobre la tubería, debemos observar una solución única.

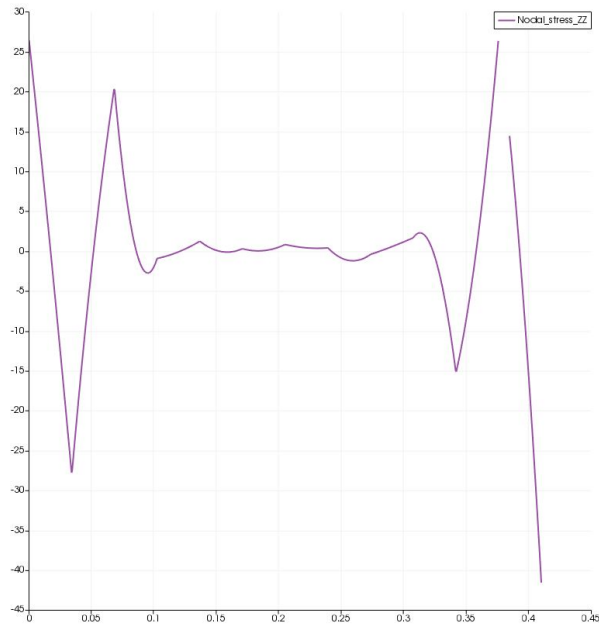
## Análisis de convergencia

Realizada la simulación de la tubería bajo presión externa constante, se observan los resultados utilizando diferentes mallas realizadas con el elemento cascara, solo varia en el numero de nodos y elementos. El análisis en las gráficas siguientes (**Figura 4.13 y 4.12**) muestra unos picos, estos picos se presentan debido a la condición de restricción que posee los nodos en los extremos, es la condición de contorno para realizar la simulación, por ende la convergencia se analiza a partir de la zona en que la línea tiende a ser recta dando una solución única.

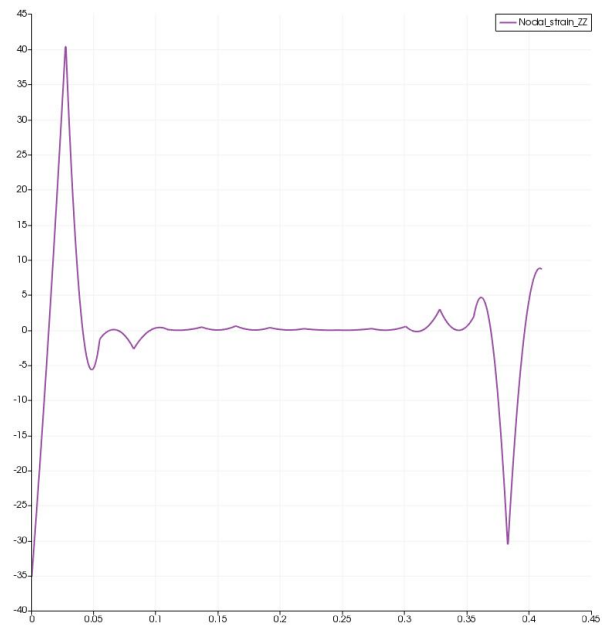
Para el análisis se utilizaron las siguientes mallas:

Mallas	Nodos	Elementos
1	174	54
2	304	96
3	470	150
4	672	216
5	1840	600
6	2640	864
7	3584	1176
8	4110	1350

La malla que se utilizo para el análisis de la tubería es la malla numero 8 la cual presento la convergencia en el resultado con cargas constante.



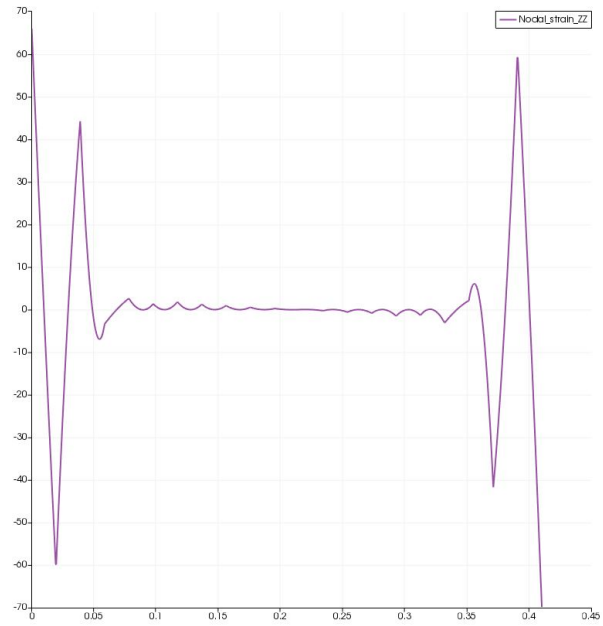
(a) Grafica de Esfuerzo en ZZ contra longitud de la tubería (Malla 1)



(b) Grafica de Esfuerzo en ZZ contra longitud de la tubería (Malla 2)



(c) Grafica de Esfuerzo en ZZ contra longitud de la tubería (Malla 3)

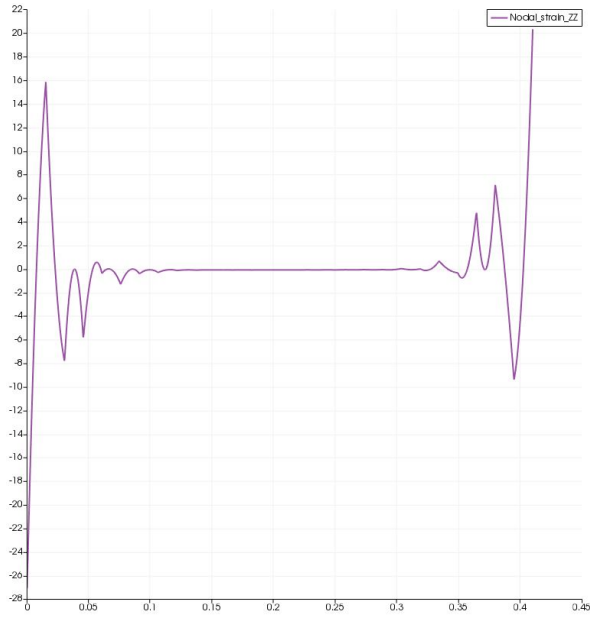


(d) Grafica de Esfuerzo en ZZ contra longitud de la tubería (Malla 4)

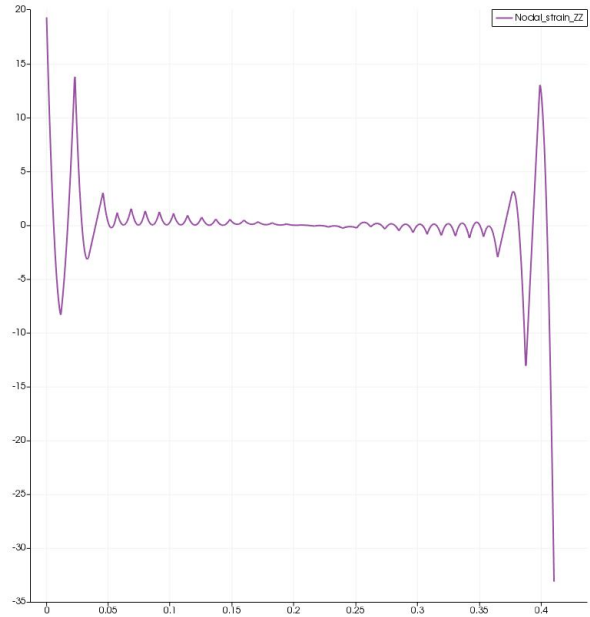
Figura 4.12: Gráficas de convergencia de tubería sometida cargas constantes

## Figuras de deformación y esfuerzos en el tubo

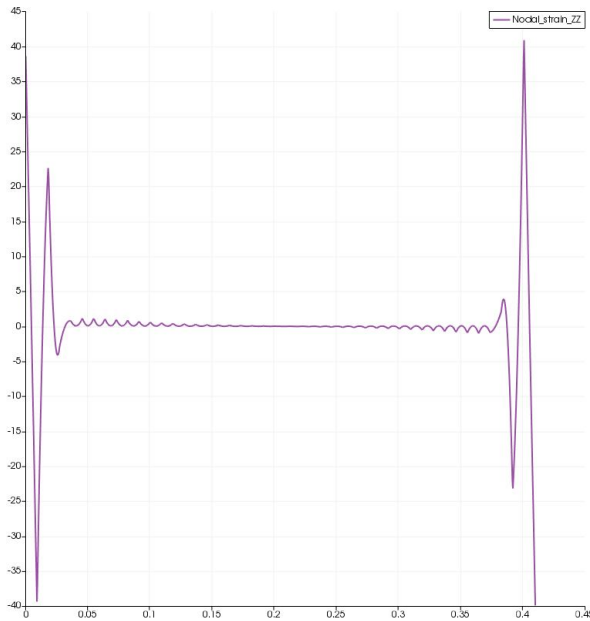
Ver Figura 4.15



(a) Grafica de Esfuerzo en ZZ contra longitud de la tubería (Malla 5)



(b) Grafica de Esfuerzo en ZZ contra longitud de la tubería (Malla 6)

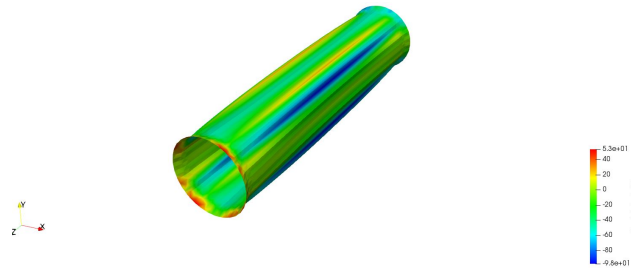


(c) Grafica de Esfuerzo en ZZ contra longitud de la tubería (Malla 7)

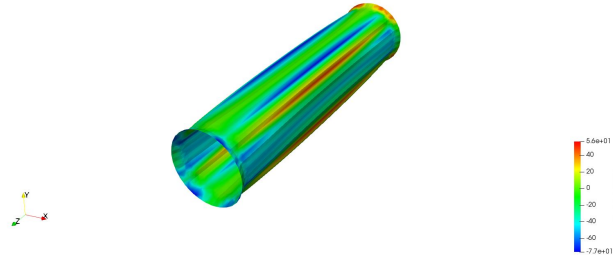


(d) Grafica de Esfuerzo en ZZ contra longitud de la tubería (Malla 8)

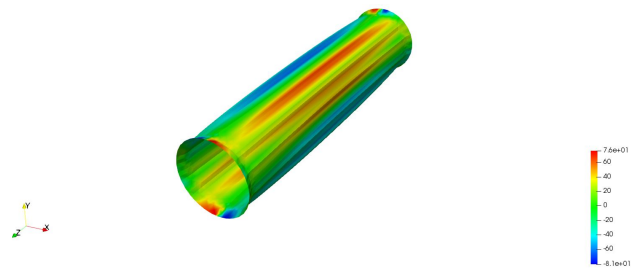
Figura 4.13: Gráficas de convergencia de tubería sometida cargas constantes



(a) Deformaciones constantes en la direccion XX



(b) Deformaciones constantes en la direccion YY



(c) Deformaciones constantes en la direccion ZZ

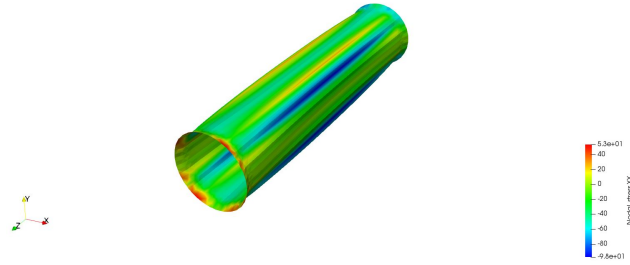
Figura 4.14: Deformaciones con carga constante sobre la tubería

## 4.9. Software y tiempo de ejecución

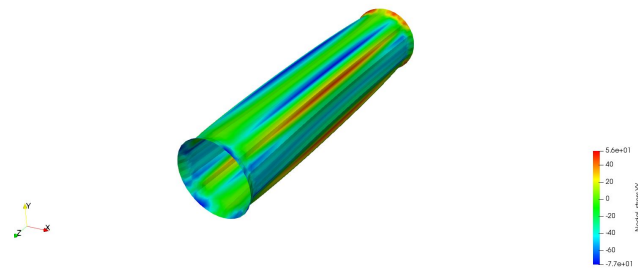
Para la realización de todo el proceso y algoritmo se realizo en un computador MSI GL62M 7RC:

- Procesador intel i5 de 7 generación
- Ram 8Gb

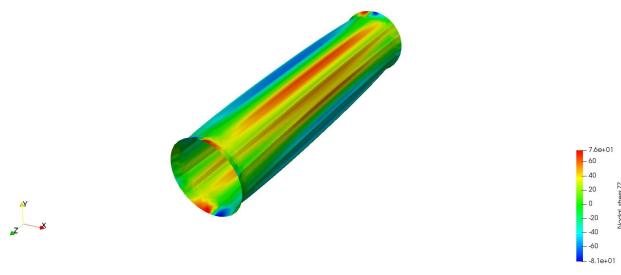
Tiempo para la realización de las 100 iteraciones del algoritmo fue de 30



(a) Esfuerzos constantes en la direccion XX



(b) Esfuerzos constantes en la direccion YY



(c) Esfuerzos constantes en la direccion ZZ

Figura 4.15: Esfuerzos con carga constante sobre la tubería

Horas, para el análisis de elementos finitos se utilizo **FEASY**, para el análisis de CFD se utilizo **OpenFoam**, para el calculo e integración de los programas se utilizo **MATLAB**.

## **4.10. Análisis de resultados de simulación de Monte-Carlo aplicada a la tubería con carga dinámica externa**

### **4.10.1. Introducción**

Los métodos numéricos y elementos finitos han generado alternativas en el estudio de los materiales compuestos, ya que estos por su complejidad geométrica y como la variabilidad en sus propiedades físicas son de difícil estudio. Uno de estos métodos es la homogenización del material a través de un elemento de volumen representativo.

El método de elemento de volumen representativo (RVE) consiste en tomar del material compuesto la porción mas pequeña del material, de tal manera que este en su distribución mantenga la proporción de los materiales que lo componen, este volumen representativo contiene las propiedades físicas del material compuesto.

El método Montecarlo es un método numérico que permite resolver problemas estocásticos mediante simulación. La importancia actual del método Montecarlo se basa en la existencia de problemas que tienen difícil solución por métodos exclusivamente analíticos o numéricos, pero que dependen de fac-



tores aleatorios o se pueden asociar a un modelo probabilística artificial (resolución de integrales de muchas variables, minimización de funciones, etc.). Gracias al avance en diseño de los ordenadores, cálculos Montecarlo que en otro tiempo hubieran sido inconcebibles, hoy en día se presentan como asequibles para la resolución de ciertos problemas. En estos métodos el error  $1/\sqrt{N}$ , donde N es el número de pruebas y, por tanto, ganar una cifra decimal en la precisión implica aumentar N en 100 veces. La base es la generación de números aleatorios de los que nos serviremos para calcular probabilidades.

#### **4.10.2. Histogramas de fallas en la tubería bajo criterios de falla**

Los histogramas que se presentan a continuación, son el resultado de la simulación de MonteCarlo, en la cual se analiza la tubería de laminado compuesto sometido a cargas dinámica generada en la simulación de fluido computacional. La simulación guarda en histogramas el número de fallas que se presentan en la N# de iteraciones que se realiza contra el tiempo en el cual falla la tubería y el laminado que falla. **Ver Figura 4.17 y 4.18**

El algoritmo para el análisis de la tubería bajo cargas dinámicas se encuentra establecido en el siguiente diagrama de flujo: **(Figura 4.16)**

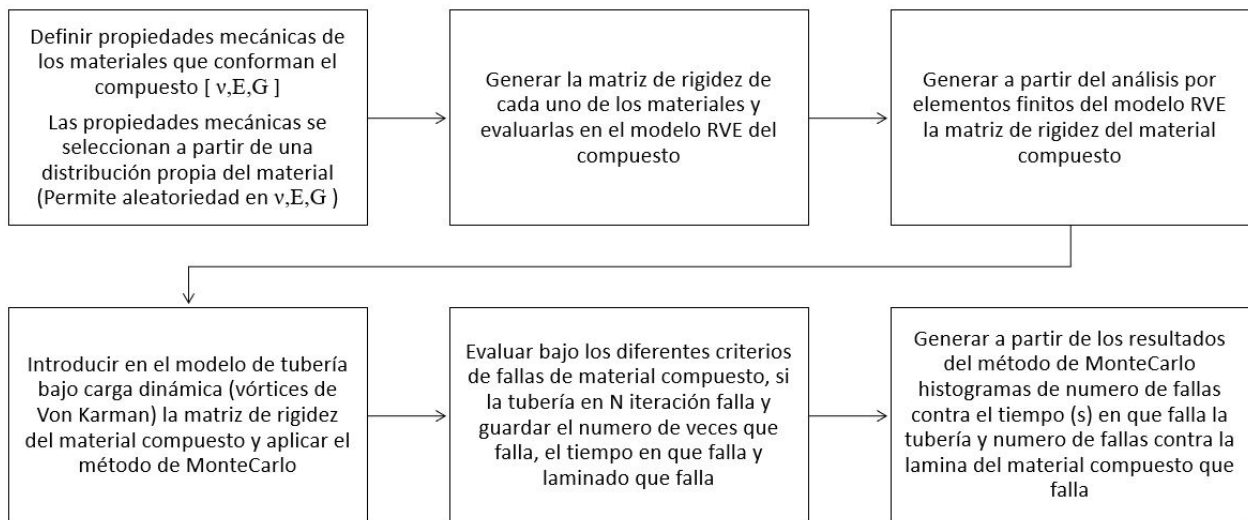
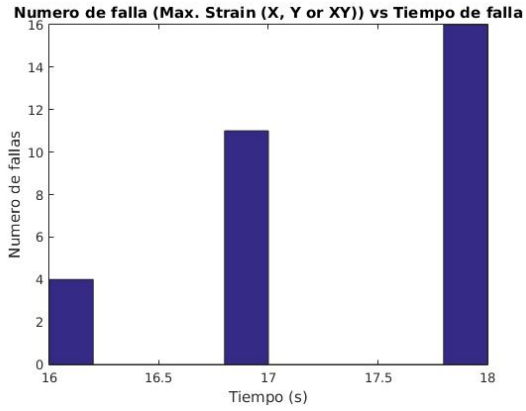
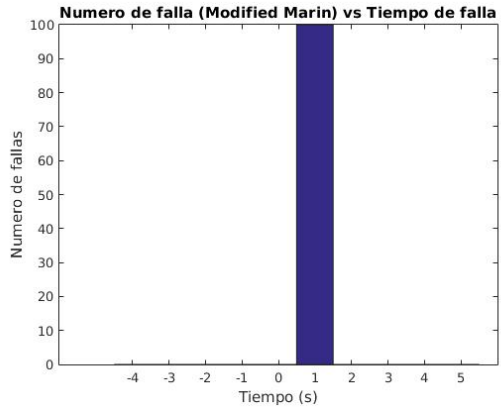


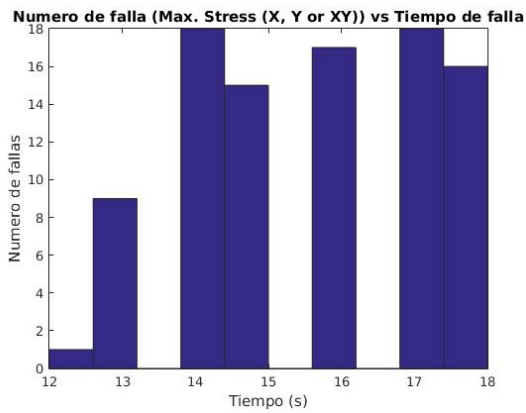
Figura 4.16: Diagrama de flujo de algoritmo de MonteCarlo para análisis de tubería bajo cargas dinámicas externas



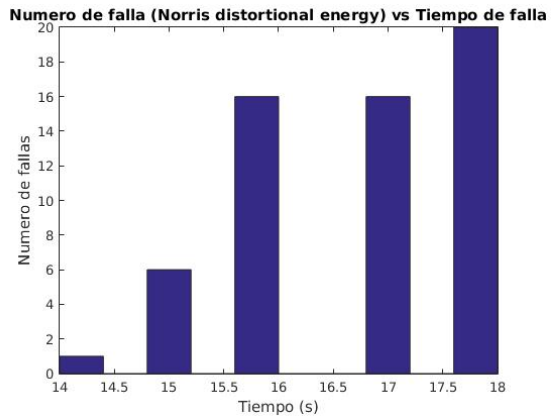
(a) Histograma bajo criterio de maxima deformacion en X, Y y XY



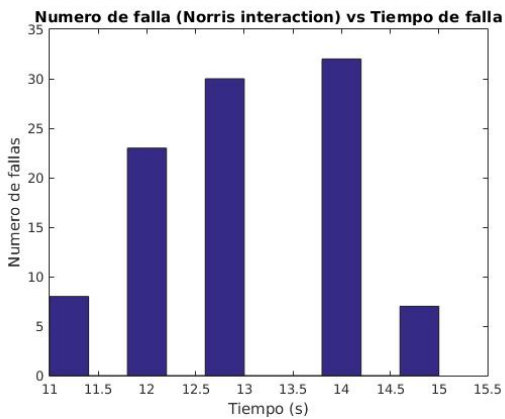
(b) Histograma bajo el criterio de Marin modificado



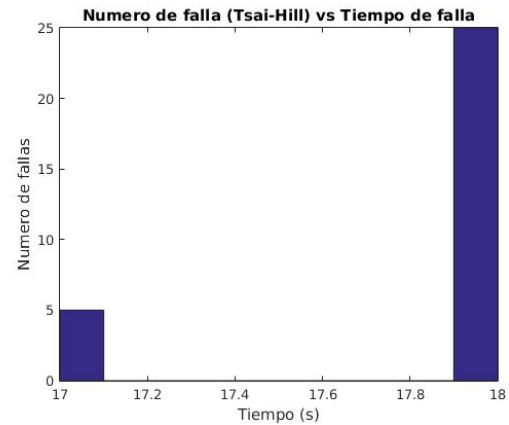
(c) Histograma bajo criterio de maximo esfuerzo en X, Y y XY



(d) Histograma bajo criterio de energia distorsional de Norris

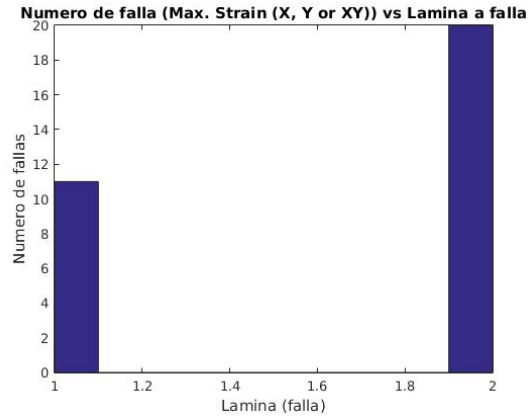


(e) Histograma bajo criterio de interaccion de Norris

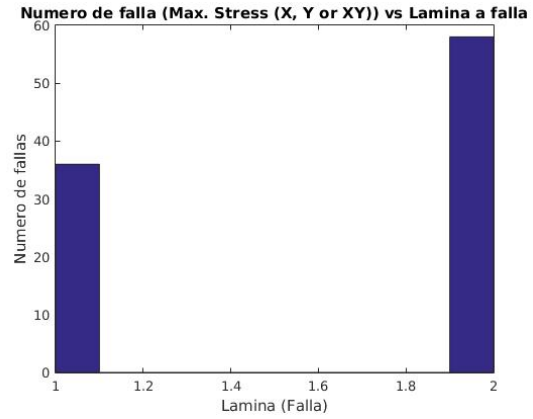


(f) Histograma bajo criterio de Tsai-Hill

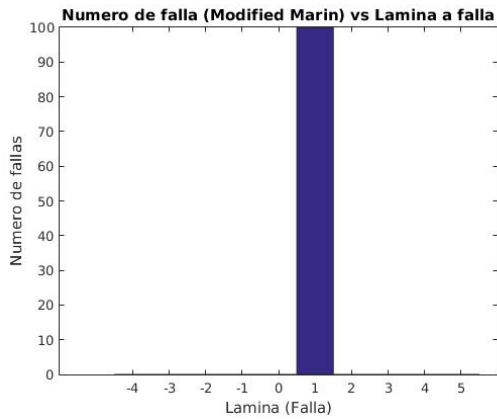
Figura 4.17: Histogramas de numero de fallas vs tiempo (s) de falla de la tubería en la simulación de Montecarlo



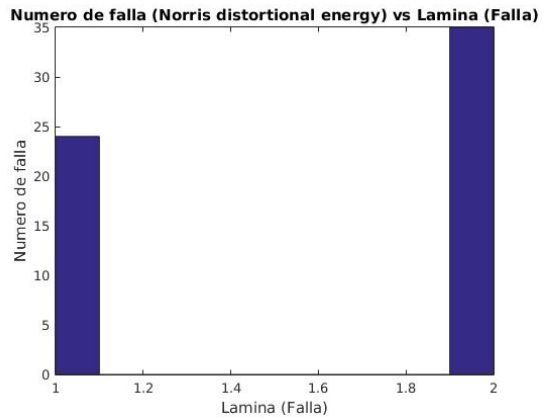
(a) Histograma bajo criterio de máxima deformación en X, Y y XY



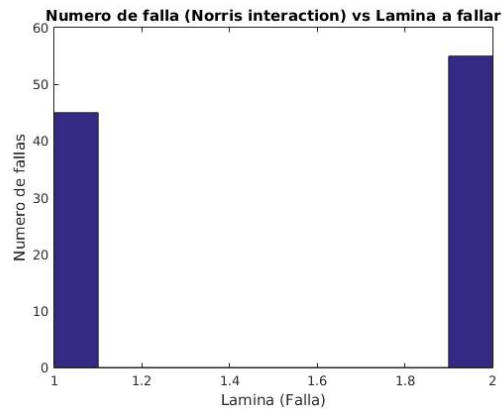
(b) Histograma bajo criterio de máximo esfuerzo en X, Y y XY



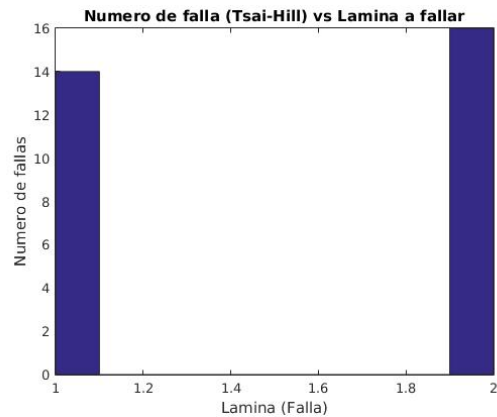
(c) Histograma bajo el criterio de Marin modificado



(d) Histograma bajo criterio de energía distorsional de Norris



(e) Histograma bajo criterio de interacción de Norris



(f) Histograma bajo criterio de Tsai-Hill

Figura 4.18: Histogramas de numero de fallas vs lamina de falla de la tubería en la simulación de Montecarlo

# Capítulo 5

## Conclusiones

- La utilización de CFD (computational Fluid Dynamics) para crear un comportamiento del fluido donde se generen vórtices de Von Karman alrededor una tubería, es un gran avance en la simulación de fluidos, esto nos permite recabar información sobre fuerzas que se producen sobre la tubería, los cuales serán utilizados en el análisis de elementos finitos. Para el uso de este recurso es necesario afinar características como la malla a utilizar en la simulación, se utilizo una malla muy fina de elementos hexaedricos, a su vez se realiza un análisis de convergencia tanto para el modelo RVE como para el modelo CFD, para determinar una estabilidad en los resultados obtenidos.
- La utilización de laminados compuestos en la elaboración de tubos para aplicaciones ingenieriles ha sido un gran avance en la sustitución del metal, debido a las ventajas que tenemos con este tipo de materiales, como

la baja corrosión generada por el agua de mar, a su vez la alta resistencia y el bajo peso ayuda también a su transporte y montaje en el campo. El realizar un estudio de este tipo de material de forma estocástica ayuda a entender mejor el comportamiento de este laminado ya que se pueden presentar mas de un tipo de falla, y considerando el material estocástico tenemos esa variación en las propiedades mecánicas que se pueden generar al momento de la fabricación del tubo.

- Con ayuda de los métodos numéricos, el análisis de elementos finitos y métodos estadísticos podemos realizar problemas muy complejos de ingeniería donde se puedan realizar un numero grande de pruebas a través de la computación, esto ayuda a ahorrar costos económicos y de tiempo, el numero de pruebas físicas a realizar se reduciría debido a que estas solo servirían como parámetro inicial para obtener los valores típicos, en este caso de los materiales compuestos en estudio.
- Otro análisis en la elaboración de este trabajo, es la variedad de teorías que se utilizan para el análisis de materiales compuestos, vemos que la variación que se presentan en los resultados es debido a que las teorías de falla dependen del tipo de falla que se este estudiando, por lo cual no existe una teoría de falla que involucre todos los tipos de falla que se presentan en los materiales compuestos.

# Capítulo 6

## Bibliografía

[1] A. Miravete - Nuevos materiales en la construcción - 2 Ed. 1995 Editorial Reventé - Pag 217

[2] A. Miravete - Nuevos materiales en la construcción - 2 Ed. 1995 Editorial Reventé - Pag 229

[3] R. Tanov A. Taibei - Computationally Efficient Micromechanical Models for Woven Fabric Composite Elastic Moduli - Journal of Applied Mechanics 684-553-560 - July

[4] J.N Reddy - Mechanics of laminated composite plates - 2 Ed CRC PRESS 2003 - Pag 621

[5] A. Castaneda - Metodo de Calculo de Cascaras en Coordenadas Relativas con Deformaciones Proyectadas - Tesis Doctoral 1982

[6] J.N Reddy - Mechanics of laminated composite plates - 2 Ed CRC PRESS

2003 - Pag 451

[7] J.N Reddy - Mechanics of laminated composite plates - 2 Ed CRC PRESS  
2003

[8] J. Celigueta - Metodo de los elementos finitos para análisis estructural -  
Escuela superior de ingenieros - Marzo 2011

[9] J.N Reddy - Mechanics of laminated composite plates - 2 Ed CRC PRESS  
2003

[10] E. Barbero, J. Fernandez-Saez, C.Navarro - Statical analysis of the me-  
chanical properties of composite materials - Elsevier - 11 April 2000

[11] T. Rosich - Análisis estadísticos usando el método de Monte Carlo II- 16  
Abril 2016

[12] I. M. Sóbol. Métodos de Montecarlo. Lecciones populares de Matemáticas.  
Editorial Mir 1976.

[13] B. P. Demidowitsch. I. A. Maron, E. S. Schuwalowa. Métodos numéricos  
de análisis. Editorial Paraninfo (1980).

[14] M. Van Dyke - An Album of Fluid Motion - 14th Edition

[15] L. Arias, L. Vanegas - Falla de los materiales compuestos laminados -  
Scientia et Technica - Agosto 2004

[16] M.N. ABOUELWAFI, HASSAN EL-GAMAL, YASSER S. M. AND



Wael A. Al-Tabey - A New Failure Criterion for Woven-roving GFRE Thick Tube Subjected to Combined Fatigue Bending Moments and Internal hydrostatic Pressure - Recent Advances in Mechanical Engineering Applications - ISBN: 978-960-474-345-2

[17] A. Lozano - Notas de CFD - REV 0.3.2 - 14 octubre 2003

[18] N.K. Naik, V.K. Ganesh - Prediction of on-axes elastic properties of plain weave fabric composites - Composite Science and Technology 45 (1992) 135-152

[19] O. Barrera, P. Wen and M.H Aliabadi - Micromechanical modelling of textile composites - School of Engineering and Material Sciences

[20] D. Lopez - Materiales compuestos. Aplicaciones (Composite Materials. Applications) - 17-01-2001

[21] L. Perez - Aplicación del método de Montecarlo al análisis de falla de placas laminadas, bajo carga puntual constante en su centro - Universidad Tecnológica de Bolívar - 2016

[22] C. Quintero - MANUAL PRACTICO SOBRE POLIESTER (PLASTICOS) REFORZADO CON FIBRA DE VIDRIO PRFV - Universidad Tecnológica de Bolívar 2007

[23] Owens Corning - Embobinamiento de filamentos - 2012

[24] Manual usuario Autodesk - Elementos Cascara - <http://download.>

[autodesk.com/us/algorithm/userguides/mergedprojects/setting\\_up\\_the\\_analysis/nonlinear/elements/Shell\\_Elements.htm](http://autodesk.com/us/algorithm/userguides/mergedprojects/setting_up_the_analysis/nonlinear/elements/Shell_Elements.htm)

[25] A. Rey - Comparación de deformaciones unitarias y desplazamientos utilizando una armadura - Universidad Pontificia de Bolívar - 2015

[26] H. Pineda - Análisis de esfuerzo en materiales compuestos - México DF, Junio 2001

[27] Robert M. Jones Mechanics Of Composite Materials - Second Edition *Taylor and Francis* , 1998.

[28] Licesio J. Rodriguez - Aragon Simulacion, Método de Montecarlo. *Área de Estadística e Investigación Operativa*, 2011.

# Apéndice A

## Anexo A: Artículo SMEC 2018

# Stochastic Failure Analysis of Submerged Composite Pipes Under Vortex Induced Loads Vibration

L. Pertuz<sup>1</sup>, J. Useche<sup>2</sup>

<sup>1</sup>lpertuz@outlook.com

Ingeniero Mecánico,

Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena, Colombia

<sup>2</sup>juseche@utb.edu.co

Departamento de Ingeniería Mecánica,

Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena, Colombia

## Abstract

Este trabajo tiene como objetivo, el estudio de una tubería fabricada con material compuesto al ser sometidas a cargas y vibraciones dinámicas producidas por vórtices generados por corrientes submarinas. A través del método de elemento de volumen representativo, elementos finitos y método estadístico de Montecarlo se analizara el comportamiento del material compuesto conociendo sus propiedades físicas (modulo de Young, coeficiente de Poison, modulo de rigidez) generadas a partir de su distribución estocástica de dichas propiedades.

*Key Words: Elementos Finitos, Materiales compuestos, vibración por vórtices*

## 1 Introducción

Los métodos numéricos y elementos finitos han generado alternativas en el estudio de los materiales compuestos, ya que estos por su complejidad geométrica y como la variabilidad en sus propiedades físicas son de difícil estudio. Uno de estos métodos es la homogenización del material a través de un elemento de volumen representativo.[8]

El método de elemento de volumen representativo (RVE) consiste en tomar del material compuesto la porción mas pequeña del material, de tal manera que este en su distribución mantenga la proporción de los materiales que lo componen, este volumen representativo contiene las propiedades físicas del material compuesto.[8]

El método Montecarlo es un método numérico que permite resolver problemas estocásticos mediante simulación. La importancia actual del método Montecarlo se basa en la existencia de problemas que tienen difícil solución por métodos exclusivamente analíticos o numéricos, pero que dependen de factores aleatorios o se pueden asociar a un modelo probabilística artificial (resolución de integrales de muchas variables, minimización de funciones, etc.). Gracias al avance en diseño de los ordenadores, cálculos Montecarlo que en otro tiempo hubieran sido inconcebibles, hoy en día se presentan como asequibles para la resolución de ciertos problemas. En estos métodos el error  $1/\sqrt{N}$ , donde N es el número de pruebas y, por tanto, ganar una cifra decimal en la precisión implica aumentar N en 100 veces. La base es la generación de números aleatorios de los que nos serviremos para calcular probabilidades.[1]

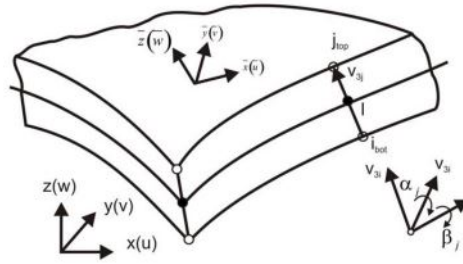


Figure 1: Coordenadas globales y locales [3]

## 1.1 Descripción del problema

El problema en este trabajo consiste en el estudio de un material compuesto tipo Woven el cual es sometido a cargas dinámicas producidas por vórtices, para este caso se estudiara una tubería sumergida, la cual estará sometida a corrientes submarinas, se analizaran los esfuerzos y deformaciones que ocurren sobre la tubería. Se determinara a partir de los criterios de falla de materiales compuestos, el numero de fallas presentadas durante el proceso estadístico de MonteCarlo, teniendo en cuenta las condiciones estocásticas que presenta el material compuesto, así como la ayuda de un software de dinámica de fluido computacional para simular la generación de vórtices sobre la tubería, y el uso de los elementos finitos para el análisis sobre la tubería.

## 2 Formulación de elementos finitos

Consideremos un elemento de cáscara. El elemento de cáscara tiene ocho nodos, para los cuales se realiza el análisis. Sean  $(\xi, \eta)$  las coordenadas naturales en la superficie media. Y  $\zeta$  es la coordenada natural a lo largo de la dirección del grosor.[3][9]

La posición de cualquier punto dentro del elemento de carcasa puede escribirse en términos de coordenadas nodales como [3]:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \left\{ \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{top} + \frac{1-\zeta}{2} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \right\}$$

Puesto que se supone que  $\zeta$  es normal a la superficie media, la expresión anterior se puede reescribir en términos de un vector que conecta los puntos superior e inferior de la carcasa como [3]:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{top} - \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{bottom} + \frac{\zeta}{2} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{top} - \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \right\}$$

O

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \left\{ \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} + \frac{\zeta}{2} V_{3i} \right\}$$

La relación entre la deformación y el desplazamiento se describe por [3][9]:

$$\{\varepsilon\} = \{B\}\{d\} \quad (1)$$

La relación de deformación de tensión es dada por:

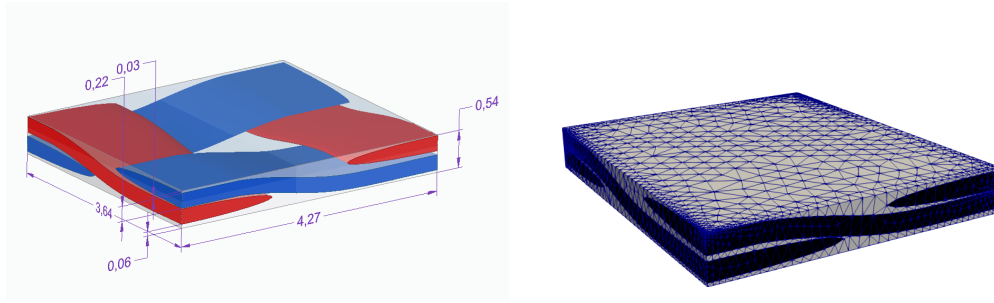


Figure 2: Modelo CAD y mallado del modelo el elemento de volumen representativo del compuesto tipo Woven

$$\{\sigma\} = \{Q\}\{\varepsilon\} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{32} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{e}_{36} \end{bmatrix}^{(k)} H\zeta \quad (3)$$

La matriz de relación de deformación de tensión está representada por:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}^M \quad (4)$$

Donde los coeficientes de rigidez de la lamina ( $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ) son definidas por:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{i=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (\zeta_{k+1} - \zeta_k), i, j = 1, 2, 6 \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (\zeta_{k+1}^2 - \zeta_k^2), i, j = 1, 2, 6 \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3), i, j = 1, 2, 6 \\ A_{ij} &= \sum_{i=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (\zeta_{k+1} - \zeta_k), i, j = 4, 5 \end{aligned} \quad (5)$$

El modelo de elemento representativo del material compuesto tipo Woven se realizo en un software CAD a partir de dimensiones tomadas del propio material. En la **figura 2** se muestra el modelo elaborado en el sistema CAD para el análisis por elementos finitos.

El modelo esta compuesto por elementos tetraedros, un numero aproximado de 5000 elementos, numero obtenido a partir de un análisis de convergencia. Se tomo esta forma del elemento de volumen representativo, debido a la configuración geométrica de la fibra, ya que es una fibra bidimensional simétrica, esta forma se repite a lo lago del material compuesto.

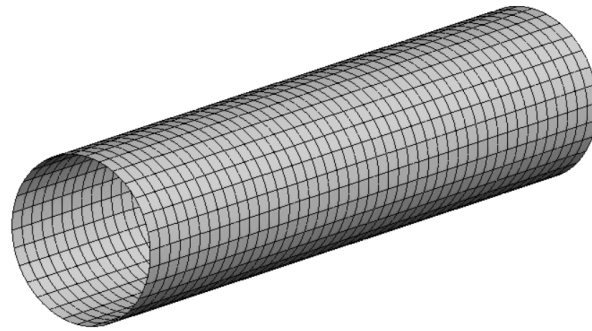


Figure 3: Modelo de la tubería de material compuesto utilizada para el análisis

### 2.1 Características de la tubería para análisis de elementos finitos

La tubería utilizada para este análisis consiste en una fabricada con material compuesto (Woven-Eglass/Epoxi), con diámetro externo de 0.1 m y 0.41 m de longitud, la tubería para la simulacion tendrá apoyos en el borde superior e inferior, y la superficie a lo largo de esta quedara libre de restricciones para ver el comportamiento de la presión generada por los vórtices en cada instante de tiempo.

La tubería para el analisis de elementos finitos utiliza el elemento shell, un numero de 1350 elementos y 4110 nodos.

## 3 Análisis Hidrodinámico

Las cargas aplicadas al modelo de la tubería, serán extraídas de una simulación por dinámica de fluido computacional, en las que en un canal se ubica un tubo, y a través de este fluye agua, la cual se generaran vórtices de Von Karman al transcurrir determinado tiempo.

Para la simulación se utilizo un software libre (OpenFoam) de dinámica de fluidos computacional, estableciendo las siguientes propiedades para la simulación:

Propiedades para simulacion en OpenFoam del fluido	
Velocidad de salida del fluido	0.0125 m/s
Velocidad de salida del fluido	zeroGradient
Presion a la entrada	zeroGradient
Presion a la salida	uniform 0
Tiempo inicial	0 seg
Tiempo final	500 seg
Delta de tiempo	0.01 seg

La malla para el modelo CFD consta de 169536 nodos y 83968 elementos hexaedros, este numero de elementos y nodos es obtenido a partir del análisis de convergencia que se le realiza a la malla del modelo, ver la **figura 5**.

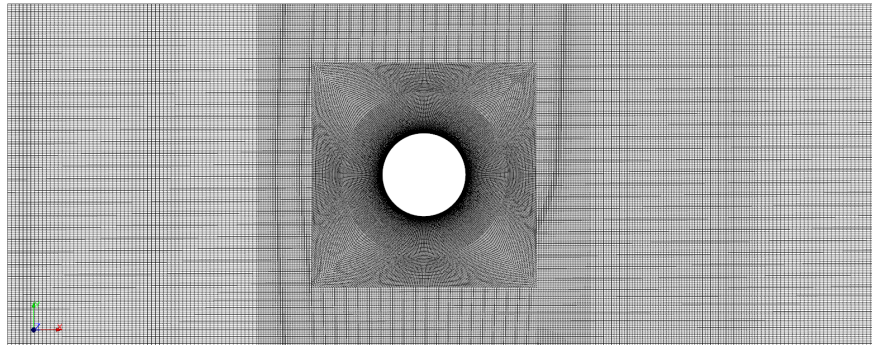


Figure 4: Malla utilizada para análisis del modelo CFD

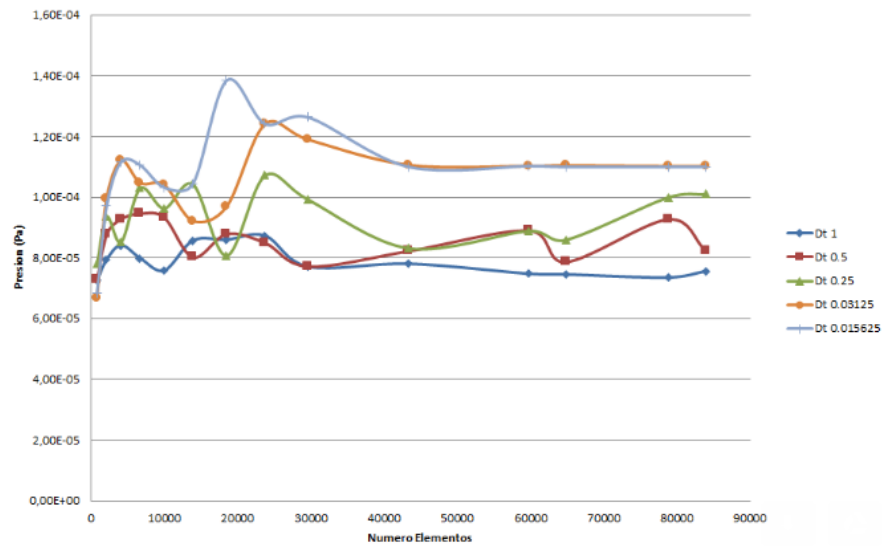


Figure 5: Analisis de convergencia para la malla utilizada en el analisis CFD

## 4 Resultados

### 4.1 Análisis de la tubería bajo criterios de falla para material compuesto

Los resultados obtenidos en la simulacion utilizando el método de MonteCarlo se registraron en los siguientes histogramas, en los cuales se utilizaron los siguientes criterios de falla para materiales compuestos:

- Máximo esfuerzo en X, Y o XY [2]:

$$\sigma_1 = F_1, \sigma_2 = F_2, \sigma_6 = F_6 \quad (6)$$

- Máxima deformación en X, Y o XY [2]:

$$\sigma_1 = F_1 + v_{12}\sigma_2, \sigma_2 = F_2 + v_{12}\frac{E_2}{E_1}\sigma_1, \sigma_6 = F_6 \quad (7)$$

- Marin Modificado [2]:



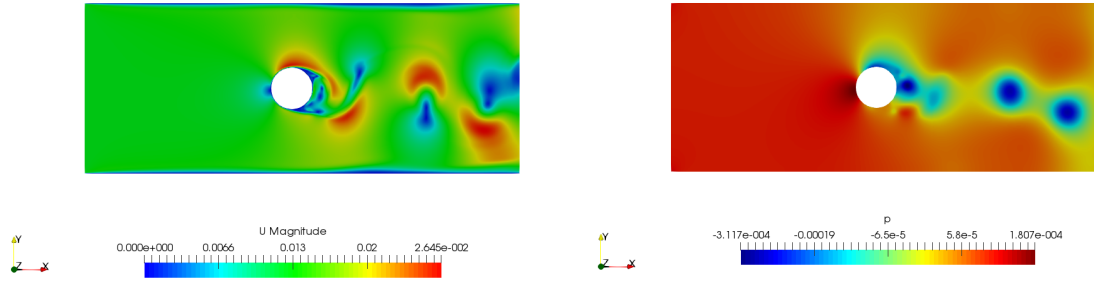


Figure 6: Modelado CFD de la presión y velocidad del fluido sobre la tubería en estudio

$$\left(\frac{\sigma_1^2 - K_2\sigma_1\sigma_2}{F_{1t}F_{1c}}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{F_{2t}F_{2c}}\right) + \left(\frac{F_{1c} - F_{1t}}{F_{1t}F_{1c}}\right)\sigma_1 + \left(\frac{F_{2c} - F_{2t}}{F_{2t}F_{2c}}\right)\sigma_2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1 \quad (8)$$

- Energía distorsional de Norris [2]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1F_2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1 \quad (9)$$

- Interacción de Norris [2]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1 \quad (10)$$

- Tsai-Hill [2]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{F_6}\right)^2 = 1 \quad (11)$$

Una primera parte de estos histogramas (Figura 6) hace referencia al número de fallas en tuberías dentro de un número de cien iteraciones, esta muestra la cantidad y el tiempo a lo largo de la simulación de las cargas dinámicas donde se presenta la falla, los otros histogramas (Figura 7) hacen referencia a la lamina donde se presenta la falla.

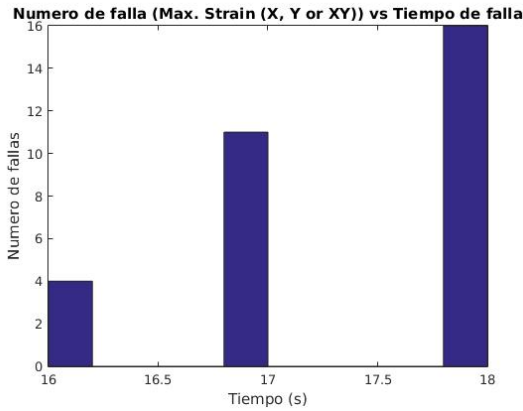
## 5 Conclusiones

Con ayuda de los métodos numéricos, el análisis de elementos finitos y métodos estadísticos podemos realizar problemas muy complejos de ingeniería donde se puedan realizar un número grande de pruebas a través de la computación, esto ayuda a ahorrar costos económicos y de tiempo, el número de pruebas físicas a realizar se reduciría debido a que estas solo servirían como parámetro inicial para obtener los valores típicos, en este caso de los materiales compuestos en estudio.

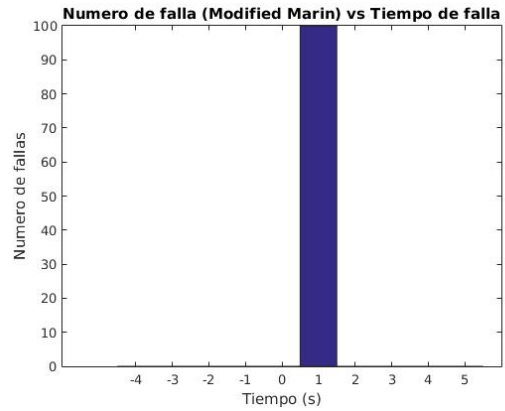
Otro análisis en la elaboración de este trabajo, es la variedad de teorías que se utilizan para el análisis de materiales compuestos, vemos que la variación que se presentan en los resultados es debido a que las teorías de falla dependen del tipo de falla que se este estudiando, por lo cual no existe una teoría de falla que involucre todos los tipos de falla que se presentan en los materiales compuestos.

## References

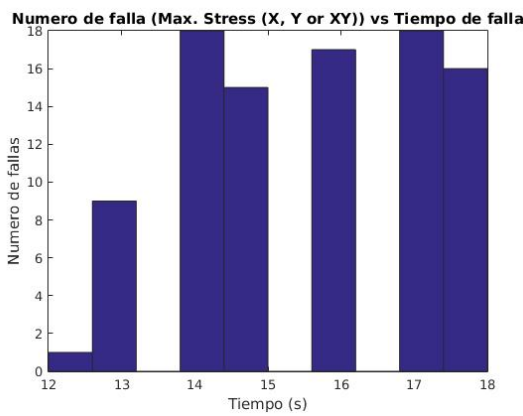
- [1] Licesio J. Rodriguez - Aragon Simulacion, Método de Montecarlo. *Área de Estadística e Investigación Operativa*, 2011.
- [2] M.N. ABOUELWAFI, HASSAN EL-GAMAL, YASSER S. M. AND WAEL A. AL-TABEY A New Failure Criterion for Woven-roving GFRE Thick Tube Subjected to Combined Fatigue Bending Moments and Internal hydrostatic Pressure . **Pag:**105, 2017.
- [3] J.N. Reddy Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition **Pag:**449-453, 2004.
- [4] M. Schäfer, S. Turek Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder **Pag:**3, 1996.
- [5] Jasper van Dillewijn, Roselma Velasquez Diseño de tramos libres de tuberías submarinas sometidas a fuerzas hidrodinámicas *Universidad Católica Andrés Bello* , 2011.
- [6] David Roylance Laminate Composite Plates *Massachusetts Institute of Technology* , 2000.
- [7] Michael W. Hyer Stress Analysis of fiber-Reinforced composite materials *McGraw-Hill International Editions* , 1998.
- [8] Robert M. Jones Mechanics Of Composite Materials - Second Edition *Taylor and Francis* , 1998.
- [9] J. N. Reddy Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells , 2006



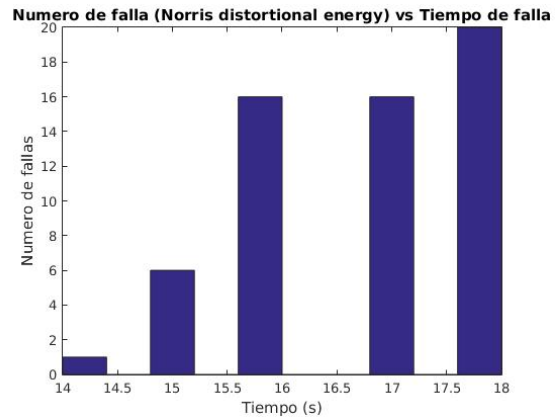
(a) Histograma bajo criterio de máxima deformación en X, Y y XY



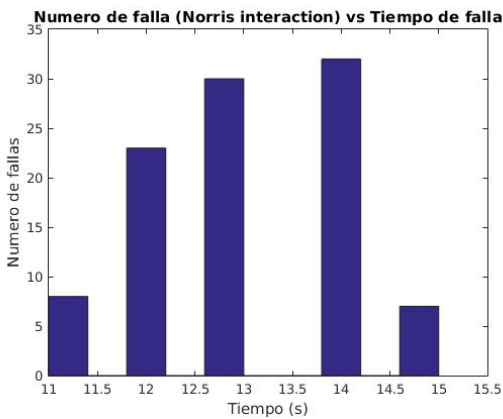
(b) Histograma bajo el criterio de Marin modificado



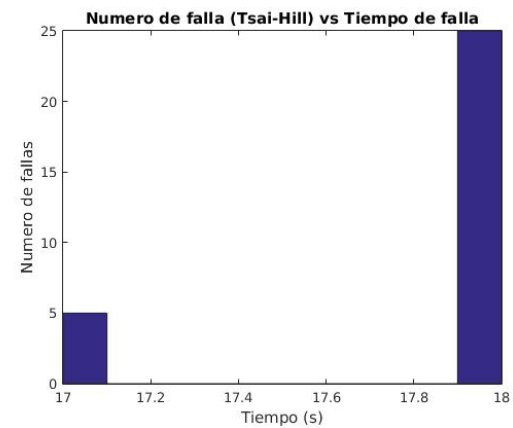
(c) Histograma bajo criterio de máximo esfuerzo en X, Y y XY



(d) Histograma bajo criterio de energía distorsional de Norris

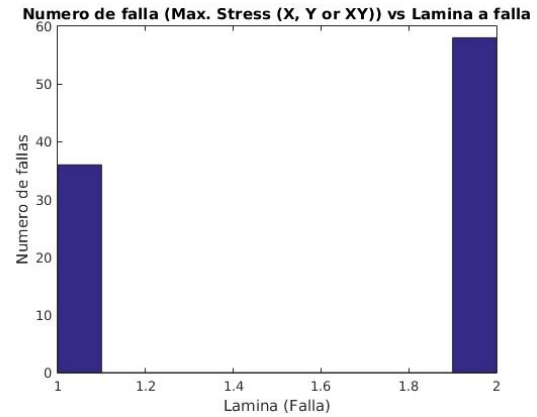
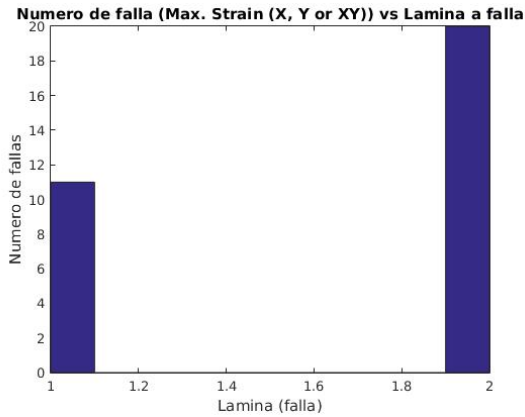


(e) Histograma bajo criterio de interacción de Norris

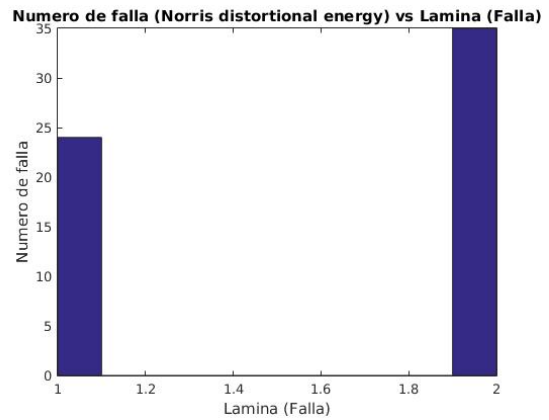
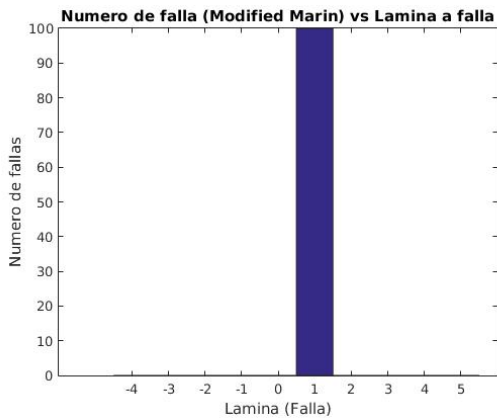


(f) Histograma bajo criterio de Tsa-Hill

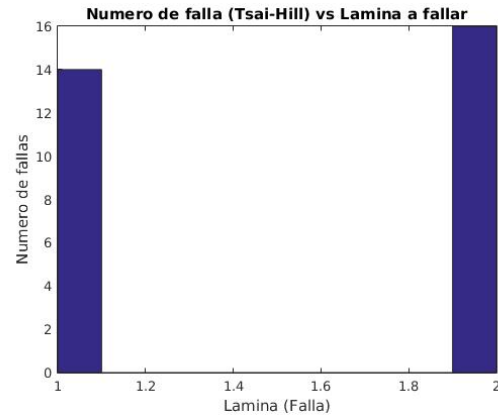
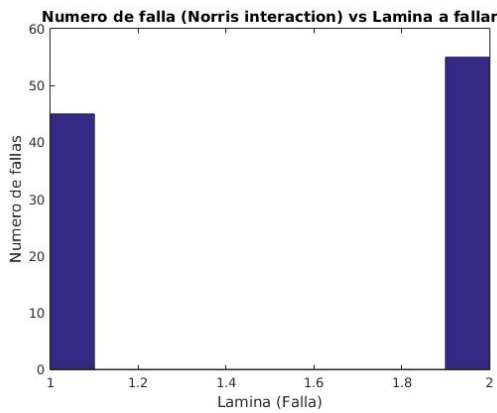
Figure 7: Histogramas de numero de fallas vs tiempo (s) de falla de la tubería en la simulación de Montecarlo



(a) Histograma bajo criterio de máxima deformación en X, Y y XY, (b) Histograma bajo criterio de máximo esfuerzo en X, Y y XY



(c) Histograma bajo el criterio de Marin modificado, (d) Histograma bajo criterio de energía distorsional de Norris



(e) Histograma bajo criterio de interacción de Norris, (f) Histograma bajo criterio de Tsa-Hill

Figure 8: Histogramas de numero de fallas vs lamina de falla de la tubería en la simulación de Montecarlo